

INFORMATION TO USERS

This manuscript has been reproduced from the microfilm master. UMI films the text directly from the original or copy submitted. Thus, some thesis and dissertation copies are in typewriter face, while others may be from any type of computer printer.

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted. Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleedthrough, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send UMI a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.

Oversize materials (e.g., maps, drawings, charts) are reproduced by sectioning the original, beginning at the upper left-hand corner and continuing from left to right in equal sections with small overlaps.

Photographs included in the original manuscript have been reproduced xerographically in this copy. Higher quality 6" x 9" black and white photographic prints are available for any photographs or illustrations appearing in this copy for an additional charge. Contact UMI directly to order.

ProQuest Information and Learning
300 North Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106-1346 USA
800-521-0600

UMI[®]



Université d'Ottawa · University of Ottawa

**CAPACITÉ DES SYSTÈMES DE TÉLÉCOMMUNICATION À
ANTENNES MULTIPLES DANS LES CANAUX À
ÉVANOUISSEMENTS LENTS DE RAYLEIGH**

par

ÉRIC GAUTHIER

Thèse soumise à la
Faculté des études supérieures et postdoctorales
conformément aux exigences du grade de
Maître es Sciences Appliquées
en génie électrique

Thèse de maîtrise

École d'ingénierie et de technologie de l'information
Département de génie électrique
Faculté de génie
Université d'Ottawa
Ottawa, Ontario

© Eric Gauthier, Ottawa, Canada, Septembre 2001



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-66042-7

Canada

Résumé

Cette thèse porte sur la capacité des systèmes de télécommunication dans les canaux à évanouissements lents de Rayleigh. On s'intéresse plus particulièrement aux systèmes comportant plusieurs antennes à l'émetteur et au récepteur et à l'effet de cette diversité spatiale sur la capacité. La capacité de systèmes à antennes multiples est d'abord étudiée pour le cas où l'état du canal n'est connu qu'au récepteur. Ensuite, nous étudions le cas où l'émetteur connaît aussi l'état du canal, ce qui permet alors d'adapter les symboles transmis selon la réalisation du canal. Nous présentons alors un algorithme afin de déterminer le prétraitement à l'émetteur qui maximise la capacité. Finalement, nous approfondissons le cas où l'émetteur connaît aussi l'état du canal en simulant des erreurs d'estimation du canal à l'émetteur, et nous présentons l'effet de ces estimations imparfaites sur la capacité.

Remerciements

L'idée de faire une maîtrise m'est venue après avoir complété ma spécialisation en théorie des communications dans le cadre de mon baccalauréat en génie électrique. J'avais l'impression que je n'avais vu que la pointe de l'iceberg et il me fallait en savoir plus sur ce sujet passionnant. J'ai eu l'opportunité ces dernières années de réaliser cette thèse de maîtrise grâce aux recommandations et à la supervision de mes directeurs de thèse, le Dr Jean-Yves Chouinard et le Dr Abbas Yongaçoglu, que je remercie pour leur support tout au long des trois dernières années.

Aussi, je remercie le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) et l'Université d'Ottawa pour leur appui financier, sans lequel cette thèse n'aurait pas vu le jour.

Table des matières

Table des matières	v
Liste des figures	vii
Liste des symboles	viii
1 Introduction	1
1.1 Capacité des systèmes de télécommunication à antennes multiples	2
1.1.1 Définition de la capacité	2
1.1.2 Canal à évanouissements lents de Rayleigh	3
1.1.3 Diversité de transmission et réception	3
1.2 Objectif et organisation de la thèse	5
1.3 Contributions originales	6
2 Capacité du canal à antennes multiples: notions de base	8
2.1 Introduction	8
2.2 Calcul de la capacité	9
2.2.1 Canal additif gaussien sans diversité ($m = n = 1$):	10
2.2.2 Cas où m et n sont des entiers quelconques et le canal est additif gaussien	11
2.2.3 Cas où m et n sont des entiers quelconques et le canal est à évanouissements lents de Rayleigh avec bruit additif gaussien	13
2.3 Conclusion	14

3	Capacité lorsque l'état du canal est connu au récepteur seulement	15
3.1	Introduction	15
3.2	Capacité asymptotique	16
3.2.1	Configuration d'antennes $(m, n) = (1, 1)$ (sans diversité)	19
3.2.2	Configuration d'antennes $\min(m, n) = 1, (m, n) = t$ (diversité d'ordre t à l'émetteur ou au récepteur)	20
3.2.3	Diversité d'ordre supérieur à 1, $(m, n) > 1$ (cas général)	23
3.2.4	Cas limite lorsque le nombre d'antennes est très large	25
3.3	Capacité asymptotique avec corrélation parfaite entre les antennes	29
3.3.1	Effet de la corrélation pour $(m, n) = 1, (m, n) = t$	29
3.3.2	Effet de la corrélation pour $(m, n) > 1$	34
3.4	Fonction de répartition de la capacité	38
3.5	Capacité pour un canal à large bande	45
3.6	Conclusion	46
4	Canal connu au récepteur et à l'émetteur	49
4.1	Introduction	49
4.2	Expression générale de la capacité avec prétraitement	50
4.2.1	Cas particulier de la contrainte sur la puissance	52
4.3	Maximisation de l'information mutuelle	53
4.3.1	Maximisation sur la matrice des vecteurs propres \mathbf{Q}	54
4.3.2	Maximisation sur la matrice des valeurs propres \mathbf{D}	55
4.3.3	Transformation linéaire \mathbf{G}	59
4.4	Capacité asymptotique	61
4.4.1	Asymptote pour $n \geq m$	62
4.5	Gain obtenu suite à la transformation linéaire \mathbf{G} pour $\rho \gg 1$	65
4.6	Symétrie de la capacité	66
4.7	Conclusions	67

5	Erreur d'estimation du canal à l'émetteur	69
5.1	Introduction	69
5.2	Modélisation de l'erreur d'estimation	70
5.3	Résultats de simulation	71
5.3.1	Capacité en fonction de la corrélation	74
5.3.2	Capacité en fonction du rapport signal-sur-bruit	85
5.4	Conclusion	93
6	Conclusions et suggestions de travaux de recherche	94
6.1	Sommaire	94
6.2	Suggestions de travaux de recherche	96
A	Calculs alternatifs des asymptotes pour $(m, n) = 1$	97
A.1	Cas à antennes uniques de transmission et de réception ($m = n = 1$)	98
A.2	Cas avec une antenne émettrice et n antennes réceptrices ($1, n$)	99
A.3	Cas à m antennes émettrices et une antenne réceptrice ($m, 1$)	100
B	Les valeurs propres non nulles des matrices $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ et $\mathbf{H}^T\mathbf{H}^{T^H}$ sont identiques	
	(preuves)	102
C	Calcul de $\sum_{i=1}^{(m,n)} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_i]$	104
D	Calcul de $\sum_{i=1}^{(m,n)} E_{\mathbf{H}} [\lambda_i]$	106
	Bibliographie	109

Liste des figures

1.1	Modèle du canal multiplicatif et additif gaussien.	4
1.2	Évanouissements de Rayleigh typique	5
2.1	Système de télécommunications à antennes multiples.	9
3.1	Capacité pour quelques valeurs de (m, n)	17
3.2	Gain sur la capacité en fonction du nombre d'antennes:	22
3.3	Asymptotes de la capacité $(m, n) = (1, 1), (2, 2), (4, 4)$ et $(8, 8)$	24
3.4	Comparaison de la capacité du canal de Rayleigh et du canal avec bruit blanc additif gaussien pour $m = 1, 4$ ou 16 antennes émettrices et une antenne réceptrice ($n = 1$)	27
3.5	Comparaison de la capacité du canal de Rayleigh et du canal avec bruit blanc additif gaussien pour une antenne émettrice ($m = 1$) et $n = 1, 4$ ou 16 antennes réceptrices	28
3.6	Capacité asymptotique avec et sans corrélation entre les antennes réceptrices pour $(m, n) = (1, 2), (1, 4)$ et $(1, 8)$	32
3.7	Capacité asymptotique avec et sans corrélation entre les antennes émettrices pour $(m, n) = (2, 1), (4, 1)$ et $(8, 1)$	33
3.8	Capacité asymptotique avec et sans corrélation entre les antennes émettrices pour $(m, n) = (8, 2), (2, 8)$ et $(8, 8)$	36
3.9	Capacité asymptotique avec et sans corrélation entre les antennes réceptrices pour $(m, n) = (8, 2), (2, 8)$ et $(8, 8)$	37

3.10	Fonction de répartition de la capacité	39
3.11	Fonction de répartition de la capacité pour différentes valeurs de m	41
3.12	Fonction de répartition de la capacité pour différentes valeurs de n	42
3.13	Fonction de densité de probabilité de la capacité pour différentes valeurs de m	43
3.14	Fonction de densité de probabilité de la capacité pour différentes valeurs de n	44
3.15	Capacité pour un canal à large bande	47
4.1	Système à antennes multiples avec prétraitement.	50
4.2	Principe du remplissage ("waterfilling").	56
4.3	Capacité avec prétraitement optimal	60
4.4	Comparaison de la capacité: prétraitement optimal et aucun prétraitement .	63
4.5	Comparaison de la capacité: prétraitement optimal et aucun prétraitement .	64
5.1	Corrélation entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$ en fonction de la variance de l'erreur d'estimation .	72
5.2	Capacité en fonction de la corrélation, $\rho = -15$ dB et $(m, n)=(3,1)$	76
5.3	Capacité en fonction de la corrélation, $\rho = 3$ dB et $(m, n)=(3,1)$	77
5.4	Capacité en fonction de la corrélation, $\rho = 21$ dB et $(m, n)=(3,1)$	78
5.5	Capacité en fonction de la corrélation, $\rho = -15$ dB et $(m, n)=(3,3)$	79
5.6	Capacité en fonction de la corrélation, $\rho = 3$ dB et $(m, n)=(3,3)$	80
5.7	Capacité en fonction de la corrélation, $\rho = 21$ dB et $(m, n)=(3,3)$	81
5.8	Capacité en fonction de la corrélation, $\rho = -15$ dB et $(m, n)=(3,5)$	82
5.9	Capacité en fonction de la corrélation, $\rho = 3$ dB et $(m, n)=(3,5)$	83
5.10	Capacité en fonction de la corrélation, $\rho = 21$ dB et $(m, n)=(3,5)$	84
5.11	Capacité pour différentes valeurs de corrélation. $(m, n)=(3,1)$	88
5.12	Capacité pour différentes valeurs de corrélation. $(m, n)=(3,3)$	89
5.13	Capacité pour différentes valeurs de corrélation. $(m, n)=(3,3)$ (agrandissement)	90
5.14	Capacité pour différentes valeurs de corrélation. $(m, n)=(3,5)$	91
5.15	Capacité pour différentes valeurs de corrélation. $(m, n)=(3,5)$ (agrandissement)	92

Liste des symboles

Notation générale

\mathbf{x}	Vecteur
X	Variable aléatoire
\mathbf{A}	Matrice, ou vecteur/matrice de variables aléatoires
\mathbf{A}^T	Transposé de \mathbf{A}
\mathbf{A}^H	Transconjugué complexe de \mathbf{A}
$\text{tr}(\mathbf{A})$	Trace de \mathbf{A}
$\det(\mathbf{A})$	Déterminant de \mathbf{A}
I_k	Matrice identité d'ordre k
$E_X[\cdot]$	Espérance mathématique selon la variable aléatoire X

Symboles

m	Nombre d'antennes émettrices
n	Nombre d'antennes réceptrices
ρ	Rapport signal-sur-bruit
$\rho_{X,Y}$	Coefficient de corrélation entre les variables aléatoires X et Y
C	Capacité
C_{asympt}	Capacité asymptotique ($\rho \gg 1$)
$\mathbf{H}^{n \times m}$	Matrice des gains complexes du canal

Constantes

γ Constante d'Euler-Mascheroni $\approx 0.5772156649015329$

Chapitre 1

Introduction

On assiste ces dernières années à une croissance de la popularité des systèmes de communications sans fil. De plus, le nombre d'applications pour ces systèmes se multiplie et n'est maintenant plus limité à la transmission de la voix. En effet, les systèmes sans fil de troisième génération devront être capable de supporter des applications multimédia utilisant les images, vidéos, sons et voix; tout en répondant aux attentes des utilisateurs en terme de qualité d'information. Techniquement, cette nouvelle demande se traduit par un débit de transmission élevé, donc une plus grande capacité et une meilleure efficacité spectrale sont nécessaires par rapport aux systèmes actuels. Plusieurs techniques ont été proposées afin d'améliorer l'efficacité spectrale des systèmes sans fil de troisième génération, l'une d'elle étant la diversité spatiale, ou en d'autres mots l'utilisation de plusieurs antennes de transmission et/ou de réception. Jusqu'à récemment, la diversité spatiale n'était qu'une notion théorique puisque les moyens technologiques ne permettaient pas sa réalisation. En effet, les réseaux d'antennes occupaient un espace trop important et la puissance de calcul requise afin de contrôler ces antennes ne pouvait être obtenue que par de volumineux processeurs. Cependant, avec les progrès technologiques récents, dont l'augmentation toujours croissante de la puissance de calcul des processeurs et l'utilisation de fréquences plus élevées, la diversité spatiale émetteur-récepteur semble être une technique maintenant réalisable.

1.1 Capacité des systèmes de télécommunication à antennes multiples

1.1.1 Définition de la capacité

La capacité d'un canal de télécommunications peut être définie de plusieurs façons. Fondamentalement, la capacité est définie comme le maximum de l'information mutuelle entre deux variables aléatoires, X et Y [CT91]:

$$C = \max_{f_X(x)} I(X; Y) \quad (1.1)$$

où $f_X(x)$ est la fonction de densité de probabilité de X . Dans un système de communications, ces deux variables X et Y sont les données envoyées par l'émetteur et celles reçues au récepteur respectivement. La maximisation de l'information mutuelle se fait sur la distribution des données transmises et dépend du canal. De plus, la distribution des données reçues dépend de celle des données transmises et des paramètres du canal. La capacité est donc purement fonction des paramètres du canal. Pour un système à largeur de bande restreinte, la capacité peut aussi se traduire par un débit de transmission maximum avec une probabilité d'erreur arbitrairement basse. Il n'est donc pas possible de construire un code correcteur d'erreur qui pourra émettre à un débit plus élevé que la capacité tout en assurant un taux d'erreur négligeable. Un des buts poursuivis par les ingénieurs de communications est de développer des techniques permettant l'atteinte de cette capacité. Il faut comprendre que le calcul de capacité donne une limite supérieure à ce qu'un système réel pourra atteindre et donne peu d'indices sur la façon d'y parvenir. On peut donc diviser le travail de recherche de ces codes en deux parties: une première phase théorique qui consiste à calculer cette capacité, ou limite supérieure, pour un canal donné, et une deuxième plus pratique qui consiste à concevoir un système réel pour ce canal qui s'approchera le plus possible de cette limite. Dans cette thèse, nous utiliserons aussi le terme 'capacité' pour désigner le maximum de l'information mutuelle entre deux variables lorsque des contraintes sur la distribution des symboles transmis sont imposées. Nous utiliserons donc le terme capacité

pour décrire l'efficacité spectrale d'un système dans un canal donné, ce qui est une pratique courante dans la littérature récente sur la théorie de l'information.

1.1.2 Canal à évanouissements lents de Rayleigh

Comme mentionné auparavant, la capacité dépend des paramètres du canal dans lequel le système sera utilisé. Un modèle de canal très répandu pour les communications sans fil est le canal avec évanouissement de Rayleigh corrompu de bruit additif gaussien [Rap96]. Le modèle de canal utilisé tout au long de cette thèse est non-sélectif en fréquence et varie lentement par rapport au débit de transmission dans le canal. Le canal est donc simplement multiplicatif: les signaux transmis sont multipliés par un coefficient h complexe circulaire gaussien, dont les partie réelle et imaginaire sont non-corrélées. Le coefficient h peut s'exprimer par une somme de variable aléatoire normales non-corrélées, centrées à zéro avec une variance de valeur $1/2$. c'est-à-dire que $h = N(0, 1/2) + jN(0, 1/2)$. L'enveloppe de h , illustrée à la figure 1.2 en fonction du temps, est une variable aléatoire de Rayleigh, d'où le nom du canal. De plus, le canal est corrompu par un bruit blanc additif, z , qui possède une distribution gaussienne complexe centrée à zéro avec variance $= \sigma_z^2$: on a donc $z = N(0, \sigma_z^2/2) + jN(0, \sigma_z^2/2)$. Le modèle du canal multiplicatif avec bruit additif pour une entrée $x(t)$ est illustré à la figure 1.1, où les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont représentés par leur enveloppe complexe et $h(t)$ et $z(t)$ sont des coefficients complexes tels que définis auparavant et dont la valeur change avec le temps.

1.1.3 Diversité de transmission et réception

À la figure 1.2, on remarque que le canal de Rayleigh cause de profonds évanouissements. Le principe de diversité est basé sur le fait que les erreurs arrivent lors de ces évanouissements sévères. En émettant sur plusieurs canaux indépendants, créant ainsi une diversité, la probabilité que tous les canaux subissent un évanouissement prononcé simultanément est faible. d'où l'augmentation de capacité du canal avec diversité. La diversité consiste donc à ajouter de la redondance au message transmis afin de combattre les effets des évanouissements. Il

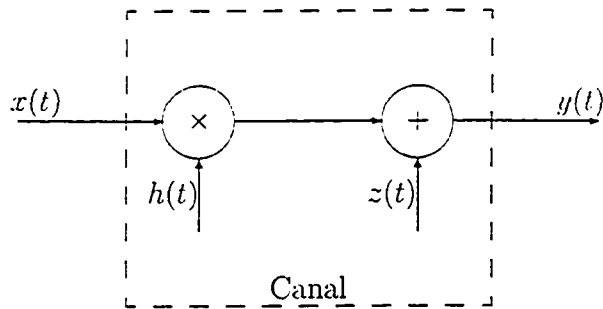


Figure 1.1: Modèle du canal multiplicatif et additif gaussien.

existe plusieurs types de diversité [Rap96]:

- diversité de fréquence: l'information est envoyée sur différentes ondes porteuses où la séparation entre chacune des porteuses est supérieure à la largeur de bande de cohérence du canal, ce qui assure l'indépendance des évanouissements de chaque porteuse. La largeur de bande de cohérence correspond à l'inverse de l'étalement en temps des réflexions du signal dans le canal [Pro95].
- diversité temporelle: on obtient ici la redondance en émettant l'information dans plusieurs intervalles de temps séparés par au moins le temps de cohérence du canal, assurant ainsi l'indépendance des signaux reçus. Le temps de cohérence correspond à l'inverse de l'étalement en fréquence du signal dans le canal [Pro95].
- diversité d'espace: il est aussi possible d'obtenir plusieurs canaux indépendants en utilisant plusieurs antennes séparées par une distance suffisamment grande pour assurer des trajets indépendants, et donc des évanouissements indépendants. Cette distance minimale dépend de l'arrangement géométrique des antennes et peut aller d'une demie longueur d'onde pour un environnement très dense à plusieurs dizaines de longueurs d'ondes pour un espace plus vaste.

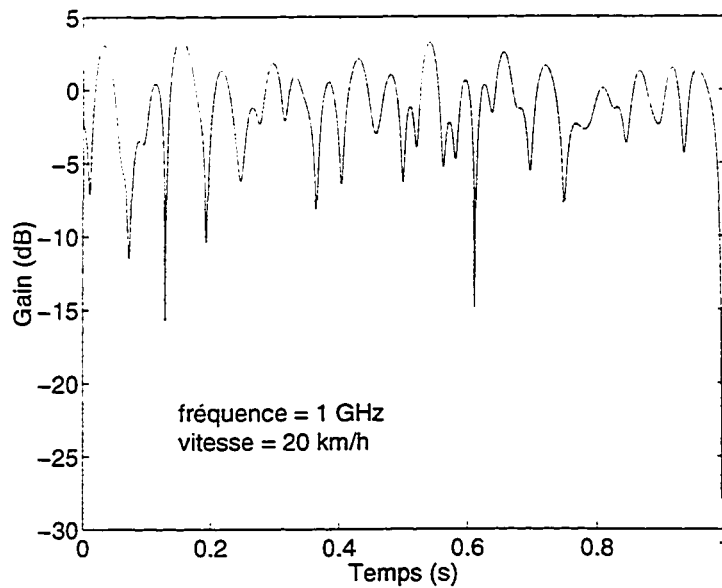


Figure 1.2: Évanouissements de Rayleigh typique ($f_c = 1$ GHz, $v = 20$ km/h).

1.2 Objectif et organisation de la thèse

En premier lieu, cette thèse s'intéresse à l'aspect théorique de l'information, c'est-à-dire aux calculs de capacité. La capacité est étudiée dans le cas où la diversité spatiale est utilisée à l'émetteur et au récepteur. La diversité spatiale à l'émetteur et au récepteur est un sujet de recherche nouveau puisque la technologie la rendait jusqu'à tout récemment impraticable. Ces dernières années, plusieurs chercheurs ont commencé l'étude de la capacité de systèmes profitant de la diversité spatiale. La plupart des travaux effectués sur le sujet ne considèrent que le cas où l'émetteur ne connaît pas l'état du canal. Notre objectif principal est de continuer les recherches sur la capacité de canaux avec diversité spatiale, en particulier pour le cas où le canal est connu de l'émetteur.

Le chapitre deux de cette thèse discute de la capacité de systèmes à antennes multiples lorsque le canal n'est pas connu à l'émetteur. Ce chapitre constitue un rappel de quelques résultats de la théorie de l'information, allant du cas le plus simple qui consiste en un système à une antenne émettrice et une antenne réceptrice, jusqu'au cas général à m antennes émettrices et n antennes réceptrices.

Au chapitre trois, l'étude du cas où l'état du canal n'est pas connu à l'émetteur est approfondi. Nous dérivons d'abord les expressions asymptotiques de capacité pour un grand rapport signal-sur-bruit: cette capacité asymptotique constitue aussi une limite inférieure de capacité. Ensuite, la fonction de densité de probabilité de la capacité prise comme variable aléatoire est aussi dérivée pour le cas où le minimum du nombre d'antennes émettrices et réceptrices, $\min(m, n)$, est égal à un. Finalement, la capacité d'un canal à antennes multiples à large bande est dérivée.

Le chapitre quatre est la suite logique du chapitre précédent et discute de la capacité lorsque le canal est aussi connu à l'émetteur. Dans ce cas, on a le problème intéressant de déterminer la distribution optimale des symboles transmis afin d'atteindre la capacité réelle du canal selon sa définition fondamentale. La matrice de covariance optimale des symboles transmis est donc dérivée et un algorithme permettant son calcul est présenté. Ensuite, les capacités asymptotiques sont aussi calculées tout comme au chapitre trois.

Finalement, le chapitre cinq traite du cas où l'estimation du canal par l'émetteur n'est pas parfaite et de l'effet de cette erreur d'estimation sur la capacité du canal.

1.3 Contributions originales

Le chapitre deux est une revue de littérature et présente quelques notions de base sur la capacité et se termine en présentant une expression générale de capacité pour les systèmes à antennes multiples obtenue par Foschini et Gans [FG98].

Les premières contributions originales de cette thèse se retrouvent au chapitre trois où les expressions asymptotiques de capacité pour un grand rapport signal-sur-bruit sont dérivées. L'expression de capacité asymptotique pour la configuration d'antennes générale (m, n) est donnée par l'équation (3.23) et quelques asymptotes pour différentes configurations (m, n) sont tracées à la figure 3.3. Ensuite, la capacité asymptotique est obtenue pour les cas où les antennes émettrices ou les antennes réceptrices sont parfaitement corrélées, dont les expressions sont données aux équations (3.40) et (3.42). Aussi, une expression générale

de capacité pour un canal à large bande est dérivée (3.52).

Au chapitre quatre, nous présentons à la page 49 un algorithme permettant de déterminer le prétraitement optimal lorsque l'émetteur connaît l'état du canal. Tout comme au chapitre trois, l'expression de capacité asymptotique pour la configuration d'antennes générale (m, n) est présentée à l'équation (4.48). Finalement, le gain sur le rapport signal-sur-bruit obtenu du prétraitement est présenté à l'équation (4.55) pour un grand rapport signal-sur-bruit.

La plus importante contribution de cette thèse se retrouve au chapitre cinq, où l'effet sur la capacité d'une erreur d'estimation du canal à l'émetteur est étudié. Ce chapitre est à notre avis entièrement original, puisque cet aspect ne semble pas avoir été étudié auparavant.

Chapitre 2

Capacité du canal à antennes multiples: notions de base

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous sommes intéressés à calculer la capacité du système de communications illustré à la figure 2.1. Ce calcul a été effectué par Foschini et Gans [FG98] d'après les travaux de Kullback [Kul68]. Dans les prochaines sections, les dérivations de ces auteurs sont rassemblées. Le système de communications est composé de m émetteurs et n récepteurs. Le canal est à évanouissements lents de Rayleigh et est corrompu de bruit additif gaussien, tel que décrit au chapitre précédent, avec la seule différence que les variables $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont maintenant considérées constantes durant chaque utilisation du canal et peuvent donc simplement s'exprimer sous la forme de variables aléatoires. Aussi, on suppose que le canal change lentement, ce qui permet de faire une analyse appelée quasi-statique, dans laquelle la capacité est calculée à partir d'une réalisation aléatoire du canal qui reste constante pour la durée de la transmission. De plus, on suppose que le canal est connu au récepteur seulement. À chaque utilisation du canal, les symboles transmis et reçus sont considérées comme des variables aléatoires définies par les vecteurs $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)^T$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$

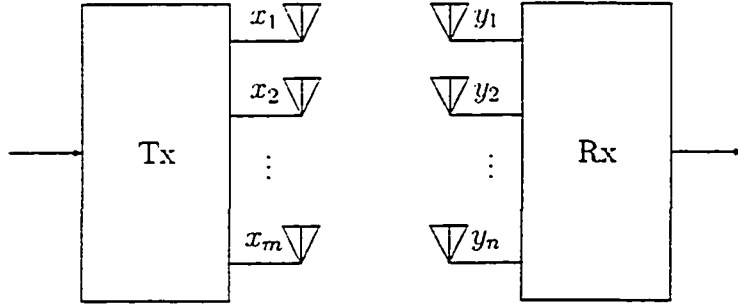


Figure 2.1: Système de télécommunications à antennes multiples.

respectivement. L'équation décrivant le canal est:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{Z} \quad (2.1)$$

où $\mathbf{H}^{n \times m}$ est la matrice de la fonction de transfert du canal à m antennes de transmission et n antennes de réception. $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$ est le vecteur du bruit gaussien, qui est par hypothèse statistiquement indépendant de \mathbf{X} . La relation entre \mathbf{X} et \mathbf{Y} est définie par la fonction densité de probabilité conjointe $f_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

2.2 Calcul de la capacité

La capacité est définie comme étant le maximum de l'information mutuelle entre les vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{Y} [CT91]:

$$C = \max_{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (2.2)$$

où la maximisation se fait sur l'ensemble des distributions possibles de la source de transmission \mathbf{X} .

Cette section se veut être un rappel de résultats importants de la théorie de l'information. Les dérivations du calcul de la capacité sont présentées pour le cas le plus simple, le canal additif gaussien sans diversité, jusqu'au système à antennes multiples.

2.2.1 Canal additif gaussien sans diversité ($m = n = 1$):

L'information mutuelle dans le cas où $m = n = 1$ est définie comme suit [CT91]:

$$I(X; Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \log_2 \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)f_Y(y)} dy dx \quad (2.3)$$

L'information mutuelle peut cependant être calculée plus facilement en utilisant la relation existante entre elle et les entropies, $H(X)$ et $H(Y)$, et équivocations, $H(X|Y)$ et $H(Y|X)$ [CT91]:

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) - H(X|Y) \quad (2.4)$$

où $H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2 f_X(x) dx$ est l'entropie différentielle de X . Celle-ci est utilisée puisque l'entropie d'une variable aléatoire continue est infinie. L'équivocation de X étant donné Y est donnée par: $H(X|Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \log_2 f_{XY}(x|y) dy dx$. On trouve que la valeur maximale de $I(X; Y)$ est obtenue lorsque X suit une distribution normale centrée à zéro avec variance σ_x^2 [CT91]. Comme $Y = X + Z$, où Z est le bruit gaussien de moyenne zéro avec variance σ_z^2 , statistiquement indépendant de X , il est facile de montrer que Y est aussi gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_z^2$. Utilisant l'équation (2.4), on obtient:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P_{signal}}{P_{bruit}} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) donne la capacité en bits par utilisation du canal (si la base 2 est utilisée pour le logarithme) lorsque la puissance moyenne est limitée à P_{signal} . Dans un canal à bande étroite avec largeur de bande égale à B Hertz, $2B$ échantillons indépendants par seconde (ou $2B$ utilisations du canal par seconde) sont nécessaires [CT91]. La capacité possède la propriété d'addition pour des réalisations indépendantes et peut donc être exprimée de la façon suivante:

$$C = 2B \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P_{signal}}{P_{bruit}} \right) \quad \text{bps} \quad (2.6)$$

$$= \log_2 \left(1 + \frac{P_{signal}}{P_{bruit}} \right) \quad \text{bps/Hz} \quad (2.7)$$

2.2.2 Cas où m et n sont des entiers quelconques et le canal est additif gaussien

La capacité lorsque m et n sont des entiers quelconques est calculée en utilisant une variante plus générale de la formule (2.3). En effet, l'équation (2.3) peut être obtenue en utilisant une définition très générale de l'information relative. Kullback [Kul68] appelait cette définition *l'information de discrimination en faveur de l'hypothèse H_1 sur H_2* . Supposons deux hypothèses H_1 et H_2 , l'information moyenne en faveur de H_1 sur H_2 est donné par [Kul68]:

$$I(1 : 2) = \int f_1(u) \log_2 \frac{f_1(u)}{f_2(u)} du \quad (2.8)$$

où $f_1(u)$ et $f_2(u)$ sont des fonctions de densité de probabilité de la variable aléatoire U . Afin de calculer l'information mutuelle entre X et Y , il faut poser deux hypothèses où f_1 représente la situation réelle et f_2 est un cas où Y ne donne aucune information sur X . Par exemple, dans le cas du canal additif gaussien où $Y = X + Z$, l'information mutuelle peut être calculée en posant les hypothèses suivantes:

H_1 : les variables aléatoires X et Y sont dépendantes et $f_1(u) = f_{X,Y}(x, y)$,

H_2 : les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et $f_2(u) = f_X(x) f_Y(y)$.

Dans ce cas, on trouve que les équations (2.3) et (2.8) sont équivalentes. Cette technique peut s'étendre à un plus grand nombre de variables ([Kul68] chap 9), comme dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire où m et n sont des entiers quelconques. Formons d'abord un nouveau vecteur $\mathbf{U} = (\mathbf{X}^T, \mathbf{Y}^T)^T$ incluant toutes les variables où $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)^T$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$. Le nouveau vecteur \mathbf{U} possède donc $k = m + n$ éléments et les hypothèses sont les suivantes:

H_1 : les variables aléatoires U_1, U_2, \dots, U_k sont conjointement dépendantes selon une fonction de densité de probabilité gaussienne,

H_2 : les variables aléatoires U_1, U_2, \dots, U_m sont conjointement dépendantes selon une fonction de densité de probabilité gaussienne, tout comme les variables $U_{m+1}, U_{m+2}, \dots, U_k$, mais les deux groupes sont indépendants.

La forme générale de la fonction de densité de probabilité pour ces deux hypothèses est:

$$f_i(u_1, u_2, \dots, u_k) = \frac{1}{|\pi \mathbf{K}_i|} \exp \left(-(\mathbf{u} - \mu_i)^H \mathbf{K}_i^{-1} (\mathbf{u} - \mu_i) \right), \quad \text{avec } i = 1, 2 \quad (2.9)$$

où μ_i et \mathbf{K}_i sont respectivement le vecteur des moyennes et la matrice des covariances. Noter que les dérivations de Kullback sont pour le cas réel seulement et que l'expression (2.9) et les dérivations qui suivent ont été modifiées afin de tenir compte du cas complexe. En utilisant l'identité $\mathbf{u}^H \mathbf{V} \mathbf{u} = \text{tr}(\mathbf{V} \mathbf{u} \mathbf{u}^H)$, on obtient:

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{f_1(u_1, u_2, \dots, u_k)}{f_2(u_1, u_2, \dots, u_k)} &= \log_2 \frac{|\mathbf{K}_2|}{|\mathbf{K}_1|} - \text{tr} [\mathbf{K}_1^{-1} (\mathbf{u} - \mu_1) (\mathbf{u} - \mu_1)^H] \\ &\quad + \text{tr} [\mathbf{K}_2^{-1} (\mathbf{u} - \mu_2) (\mathbf{u} - \mu_2)^H] \end{aligned} \quad (2.10)$$

où $|\mathbf{K}_i|$ représente le déterminant de la matrice de covariance \mathbf{K}_i . L'information mutuelle est alors donnée par:

$$\begin{aligned} I(1 : 2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u_1, u_2, \dots, u_k) \log_2 \frac{f_1(u_1, u_2, \dots, u_k)}{f_2(u_1, u_2, \dots, u_k)} du_1 \dots du_k \\ &= \log_2 \frac{|\mathbf{K}_2|}{|\mathbf{K}_1|} + \text{tr} [\mathbf{K}_1 (\mathbf{K}_2^{-1} - \mathbf{K}_1^{-1})] \\ &\quad + \text{tr} [\mathbf{K}_2^{-1} (\mu_1 - \mu_2) (\mu_1 - \mu_2)^T] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dans le cas du canal avec bruit additif gaussien:

$$\mu_1 = \mu_2 = 0 \quad (\text{Les variables sont centrées à zéro})$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{Matrice de covariance de l'hypothèse } H_1)$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{Matrice de covariance de l'hypothèse } H_2)$$

où

$$\mathbf{K}_{11} = (\sigma_{ij}) \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

$$\mathbf{K}_{22} = (\sigma_{uv}) \quad u, v = m + 1, m + 2, \dots, m + n = k$$

$$\mathbf{K}_{12} = (\sigma_{iv}) = \mathbf{K}_{21}^H$$

où \mathbf{K}_{21}^H est le transconjugué de la matrice \mathbf{K}_{21} . En remplaçant ces matrices dans l'équation (2.11), l'information moyenne en faveur de H_1 sur H_2 devient:

$$I(1 : 2) = \log_2 \frac{|\mathbf{K}_{11}| |\mathbf{K}_{22}|}{\begin{vmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{vmatrix}} \quad (2.12)$$

Finalemment, utilisant l'identité $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$, on obtient:

$$I(1 : 2) = \log_2 \frac{|\mathbf{K}_{22}|}{|\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12}|} \quad (2.13)$$

2.2.3 Cas où m et n sont des entiers quelconques et le canal est à évanouissements lents de Rayleigh avec bruit additif gaussien

Les dérivations et les résultats obtenus dans les sections précédentes ne peuvent s'appliquer directement au cas où le canal est à évanouissements de Rayleigh car les symboles reçus, \mathbf{Y} , ne suivent plus une distribution gaussienne. En effet, on a $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{Z}$, où \mathbf{H} est la matrice des coefficients d'évanouissement. Ces coefficients sont de la forme $H_R + jH_I$, où H_R et H_I sont des variables aléatoires suivant une distribution gaussienne. $\mathbf{H}\mathbf{X}$ n'est pas gaussien et par conséquent, \mathbf{Y} n'est pas gaussien. Par contre, comme les évanouissements dans le canal sont lents, on peut faire les suppositions suivantes:

1. La matrice des coefficients \mathbf{H} est constante pendant la durée de transmission.
2. La réalisation de \mathbf{H} pour la transmission courante est parfaitement connue au récepteur.

Dans ce cas, $\mathbf{H}\mathbf{X}$ et \mathbf{Y} sont gaussiens et les résultats des sections précédentes peuvent être utilisés. Par contre, la capacité obtenue est une variable aléatoire dépendante de la réalisation

du canal. Les matrices de covariance de l'équation (2.13) sont les suivantes:

$$\mathbf{K}_{11} = E_{\mathbf{H}} [\mathbf{X}\mathbf{X}^H] = E_{\mathbf{H}} \left[\begin{pmatrix} |X_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |X_m|^2 \end{pmatrix} \right] = \frac{P}{m} \mathbf{I}_m \quad (2.14)$$

$$\mathbf{K}_{22} = E_{\mathbf{H}} [\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H] = E_{\mathbf{H}} [(\mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{Z})(\mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{Z})^H] = \frac{P}{m} \mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma_z^2 \mathbf{I}_n \quad (2.15)$$

$$\mathbf{K}_{12} = E_{\mathbf{H}} [\mathbf{X}\mathbf{Y}^H] = E_{\mathbf{H}} [\mathbf{X}(\mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{Z})^H] = \frac{P}{m} \mathbf{H}^H = \mathbf{K}_{21}^H \quad (2.16)$$

Le dénominateur de l'équation (2.13) devient donc:

$$\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} = \frac{P}{m} \mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma_z^2 \mathbf{I}_n - \frac{P}{m} \mathbf{H}\mathbf{H}^H = \sigma_z^2 \mathbf{I}_n \quad (2.17)$$

La capacité par transmission, $C_{\mathbf{H}}$, telle qu'obtenue par Foschini et Gans [FG98], exprimée sous la forme d'une variable aléatoire dépendante de la matrice \mathbf{H} , est donnée par:

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{H}} &= \log_2 \frac{|\frac{P}{m} \mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma_z^2 \mathbf{I}_n|}{|\sigma_z^2 \mathbf{I}_n|} \\ &= \log_2 \left| \mathbf{I}_n + \frac{\rho}{m} \mathbf{H}\mathbf{H}^H \right| \end{aligned} \quad (2.18)$$

où $\rho = P/\sigma_z^2$ est le rapport signal-sur-bruit. Finalement, la capacité, C , du canal est donnée par l'espérance de la capacité par transmission par rapport à la matrice du canal \mathbf{H} :

$$C = E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \left| \mathbf{I}_n + \frac{\rho}{m} \mathbf{H}\mathbf{H}^H \right| \right] \quad \text{bps/Hz} \quad (2.19)$$

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait une revue des dérivations permettant d'arriver à une expression générale de la capacité pour les systèmes à antennes multiples lorsque l'état du canal n'est connu qu'au récepteur. L'expression finale de la capacité d'un canal à antennes multiples (2.19) a été obtenue par Foschini et Gans, qui ont utilisé les définitions de base de l'information relative de Kullback. Cette expression et les concepts permettant sa dérivation sont à la base des deux chapitres suivants, d'où l'importance de cette revue de littérature.

Chapitre 3

Capacité lorsque l'état du canal est connu au récepteur seulement

3.1 Introduction

Dans la majorité des systèmes de télécommunication, le canal n'est estimé qu'au récepteur et l'émetteur ne connaît donc pas l'état du canal. Ceci constitue le cas étudié au chapitre précédent et la capacité d'un tel système est alors donnée par l'expression (2.19). En se basant sur cette expression, nous obtenons dans ce chapitre quelques conclusions intéressantes sur la capacité lorsque l'état du canal n'est connu qu'au récepteur. À la section 3.2, nous calculons l'asymptote de la capacité pour différentes valeurs de (m, n) . Ensuite, nous étudions à la section 3.3 l'effet de la corrélation entre les antennes sur les asymptotes de capacité. Puis, à la section 3.4, nous dérivons la fonction de répartition de la capacité, où nous définissons la probabilité de coupure d'un canal à antennes multiples. Finalement, nous redérivons l'expression de la capacité à la section 3.5 pour le cas du canal à large bande.

3.2 Capacité asymptotique

La figure 3.1 trace la capacité pour différentes configurations d'antennes (m, n) . Chaque point de la courbe a été obtenu en faisant la moyenne de la capacité calculée à l'aide de l'équation (2.18) pour 10.000 réalisations aléatoires de la matrice du canal \mathbf{H} . Plus le nombre de réalisations du canal utilisé lors du calcul de la moyenne est élevé, plus cette moyenne se rapproche de l'espérance mathématique. En observant les graphiques de capacité présentés à la figure 3.1, on remarque que la valeur de la capacité varie linéairement avec le rapport signal-sur-bruit (en dB) lorsque celui-ci est très grand. Dans cette section, on dérive la capacité asymptotique pour plusieurs configurations (m, n) des antennes de transmission et de réception. On peut démontrer que la capacité asymptotique obtenue correspond aussi à une limite inférieure de la capacité. Afin de simplifier le calcul de l'asymptote, l'équation (2.19) peut être exprimée sous une forme plus pratique. On remarque tout d'abord que le déterminant de l'équation (2.19) est de la forme $|\mathbf{B}| = |\mathbf{I}_n + \mathbf{A}^{n \times n}|$. Il est donc possible d'obtenir le déterminant de la matrice \mathbf{B} en fonction des valeurs propres de \mathbf{A} en utilisant quelques théorèmes matriciels [Lan69]:

Théorème 1.1: Toute matrice hermitienne est une matrice simple ([Lan69], équation (2.9.4)) et par conséquent, les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont simples. Or, toute matrice simple \mathbf{A} peut s'exprimer sous la forme:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1} \quad (3.1)$$

où \mathbf{Q} et \mathbf{D} sont les matrices des vecteurs propres et des valeurs propres de \mathbf{A} respectivement [Lan69](2.4.3). Notez que la matrice \mathbf{Q} est unitaire, c'est-à-dire que $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H = \mathbf{I}$.

Théorème 1.2: Le déterminant de toute matrice \mathbf{A} est le produit de ses valeurs propres ([Lan69], équation (2.1.2)):

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n d_i \quad (3.2)$$

où $\{d_i\}$ représente l'ensemble des valeurs propres de \mathbf{A} .

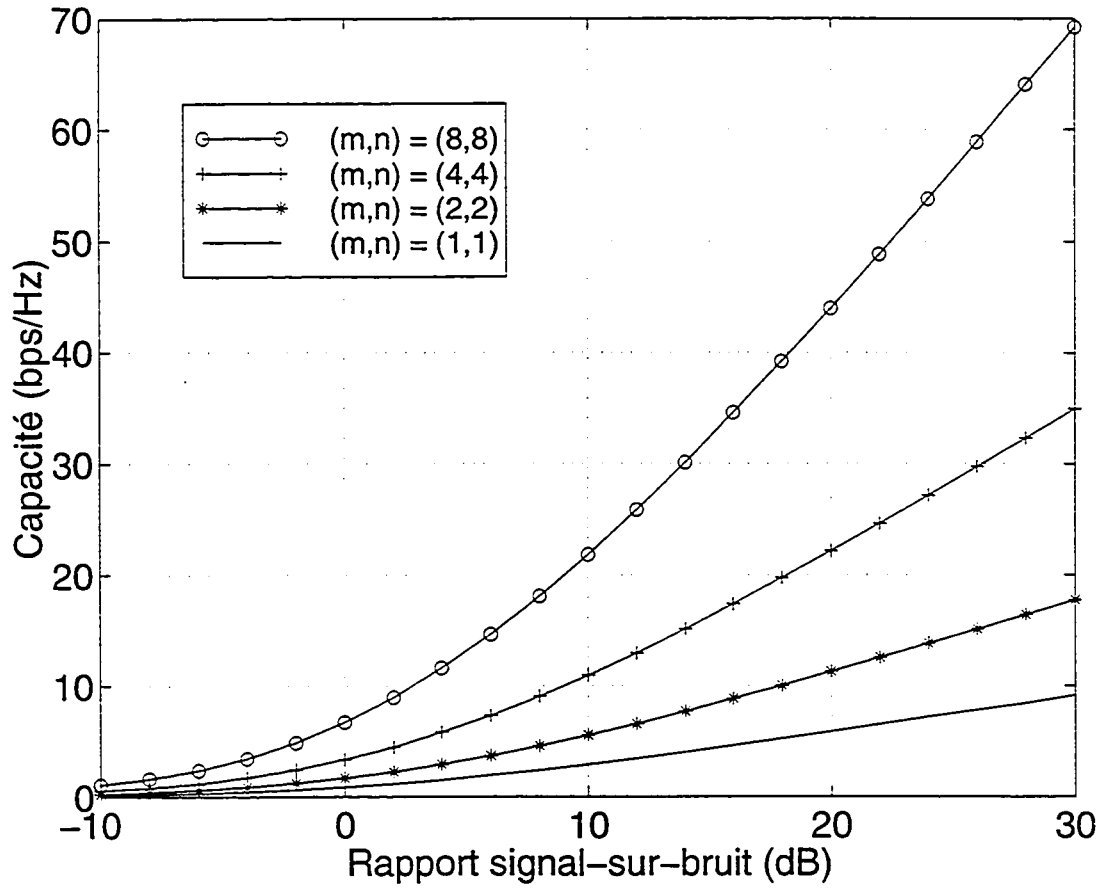


Figure 3.1: Capacité pour quelques valeurs de (m, n) .

En appliquant ces théorèmes, le déterminant de l'équation (2.19) devient:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{B}| &= |\mathbf{I}_n + \mathbf{A}| \\
&= |\mathbf{Q}\mathbf{I}_n\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}| \\
&= |\mathbf{Q}(\mathbf{I}_n + \mathbf{D})\mathbf{Q}^{-1}| \\
&= |\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^{-1}| \tag{3.3}
\end{aligned}$$

où \mathbf{V} est la matrice des valeurs propres de \mathbf{B} . Comme \mathbf{Q} est unitaire, le déterminant de \mathbf{B} est alors donné par:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}) &= \det(\mathbf{V}) \\
&= \prod_{i=1}^n (1 + d_i) \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Or, comme le nombre de valeurs propres non nulles de \mathbf{A} est égal au rang de \mathbf{A} , on obtient finalement:

$$\det(\mathbf{B}) = \prod_{i=1}^{\text{rang}(\mathbf{A})} (1 + d_i) \tag{3.5}$$

où les d_i , $i = 1, \dots, \text{rang}(\mathbf{A})$, sont les valeurs propres non nulles de \mathbf{A} ordonnées en valeurs décroissantes. En remplaçant \mathbf{A} par $\frac{\rho}{m}\mathbf{H}\mathbf{H}^H$, la capacité devient:

$$C = E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \prod_{i=1}^{\min(m,n)} \left(1 + \frac{\rho}{m} \lambda_i \right) \right] \tag{3.6}$$

$$C = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \left(1 + \frac{\rho}{m} \lambda_i \right) \right] \tag{3.7}$$

Un résultat similaire a été obtenu par Telatar [Tel99]. L'équation (3.7) montre que le système est équivalent à un système avec $\min(m, n)$ canaux parallèles de puissance P/m et de bruit équivalent σ_z^2/λ_i . La capacité asymptotique est donc ($\rho \gg 1$):

$$C_{\text{asympt}} = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \left(\frac{\rho}{m} \lambda_i \right) \right] \tag{3.8}$$

où les λ_i sont les valeurs propres non nulles de la matrice $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$. On remarque que (3.8) sera toujours inférieure à (3.7) et que l'asymptote (3.8) correspond donc à une limite inférieure de la capacité C du système:

$$C_{asympt} < C \quad (3.9)$$

En utilisant (3.8), la capacité asymptotique est donc:

$$C_{asympt} = \min(m, n) \cdot \log_2 \left(\frac{\rho}{m} \right) + \sum_{i=1}^{\min(m, n)} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_i] \quad (3.10)$$

Cette équation correspond à une limite inférieure de la capacité dans le cas général (m, n) . Afin de calculer l'espérance de (3.10), on devra utiliser la distribution des valeurs propres λ_i de $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ telle qu'obtenue par Edelman [Ede89], avec $\lambda_1 > \lambda_2 \dots > \lambda_{\min(m, n)} > 0$:

$$f_{\Lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\min(m, n)}) = \frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^{\min(m, n)} \lambda_i\right) \prod_{i=1}^{\min(m, n)} \lambda_i^{|m-n|} \prod_{i=1, i < j}^{\min(m, n)} (\lambda_i - \lambda_j)^2}{\prod_{i=1}^{\min(m, n)-1} i! \prod_{i=1}^{\min(m, n)} (\max(m, n) - i)!} \quad (3.11)$$

L'expression de capacité (3.10) et la distribution des valeurs propres (3.11) seront maintenant utilisées pour calculer la capacité asymptotique pour différentes configurations d'antennes.

3.2.1 Configuration d'antennes $(m, n) = (1, 1)$ (sans diversité)

Lorsque la paire $(m, n) = (1, 1)$, nous avons le cas où aucune diversité n'est utilisée ni à l'émetteur ni au récepteur. La matrice du canal n'est donc caractérisée que par un seul coefficient complexe et la distribution de la valeur propre devient simplement:

$$f_{\Lambda}(\lambda) = e^{-\lambda} \quad \lambda > 0 \quad (3.12)$$

L'espérance mathématique du terme $\log_2 \lambda$ dans (3.10) devient donc:

$$E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda] = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{\infty} \ln(\lambda) e^{-\lambda} d\lambda = -\frac{\gamma}{\ln(2)} \quad (3.13)$$

où $\gamma = 0.5772$ est la constante d'Euler. La capacité asymptotique est donnée par:

$$C_{asympt} = \log_2(\rho) - \frac{\gamma}{\ln(2)} \quad (3.14)$$

On constate donc que l'asymptote de la capacité d'un canal à évanouissement Rayleigh est égale à celle d'un canal AWGN ($C \approx \log_2(\rho)$) moins une constante égale à environ 0.83 bps/Hz.

3.2.2 Configuration d'antennes $\min(m, n) = 1, \max(m, n) = t$ (diversité d'ordre t à l'émetteur ou au récepteur)

Dans ce cas, le système est équivalent à un seul canal et n'a donc qu'une seule valeur propre avec une distribution égale à:

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{t-1}}{(t-1)!} \quad \lambda > 0 \quad (3.15)$$

L'espérance de $\log_2 \lambda$ est donnée par:

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{H}}[\log_2 \lambda] &= \frac{1}{\ln(2)} \int_0^\infty \ln(\lambda) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{t-1}}{(t-1)!} d\lambda \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \left[\sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{i} - \gamma \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nous allons maintenant considérer individuellement les dérivations pour les deux cas possibles: diversité de réception et diversité de transmission d'ordre t .

Cas (1, n) (diversité de réception d'ordre n)

L'asymptote de la capacité pour le cas (1, n) est obtenue en remplaçant (3.16) dans (3.10) avec $t = n$:

$$C_{asympt} = \frac{1}{\ln(2)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \ln(\rho) - \gamma \right] \quad (3.17)$$

L'équation (3.17) est un cas particulier du résultat obtenu par Aouini et Goldsmith ([AG99], équation (42)). L'équation (3.17) montre que l'effet du rapport signal-sur-bruit ρ et du nombre d'antennes réceptrices n sur la capacité sont indépendants pour $\rho \gg 1$. Donc, l'ajout d'antennes à un tel système aura toujours le même effet peu importe la valeur de ρ ; par conséquent, le gain relatif obtenu en augmentant le nombre d'antennes de réception diminue

avec ρ . De plus, on constate que chaque antenne supplémentaire apporte un gain inférieur à la précédente. En effet, l'ajout d'une antenne apporte un gain proportionnel à $1/n$, donc plus le nombre d'antennes est élevé, plus le gain différentiel d'une antenne supplémentaire est faible. L'étude de la diversité sur la probabilité d'erreur de canaux à évanouissements de Rayleigh montre un résultat semblable [Rap96].

Cas $(m, 1)$ (diversité de transmission d'ordre m)

De la même façon, l'asymptote de la capacité pour le cas $(m, 1)$ est

$$C_{asympt} = \frac{1}{\ln(2)} \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} - \ln(m) + \ln(\rho) - \gamma \right] \quad (3.18)$$

On constate que, dû au terme $-\ln(m)$ de l'équation (3.18), le gain de capacité obtenu par l'ajout d'antennes émettrices est moindre que celui obtenu lorsque le nombre d'antennes réceptrices est augmenté. La figure 3.2 montre le gain obtenu selon le nombre d'antennes émettrices et réceptrices comparativement au cas $(m, n) = (1, 1)$. On constate que le gain tend rapidement vers une constante lorsque le nombre d'antennes émettrices augmente. En effet, lorsque le nombre d'antennes émettrices tend vers l'infini, on a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[-\ln(m) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \right] = \gamma \approx 0.577 \quad (3.19)$$

L'asymptote de la capacité est alors donnée par :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_{asympt} = \log_2(\rho) \quad (3.20)$$

On constate donc qu'un canal à évanouissement de Rayleigh est équivalent à un canal AWGN lorsque le nombre d'antennes émettrices est infini. D'après la figure 3.2, on voit que le gain atteint 90% de la limite $(\gamma/\ln(2))$ avec un nombre d'antennes émettrices relativement peu élevé ($m = 8$). Il est donc clair que lorsque l'état du canal n'est connu qu'au récepteur, la diversité de réception offre un avantage marqué par rapport à la diversité de transmission.

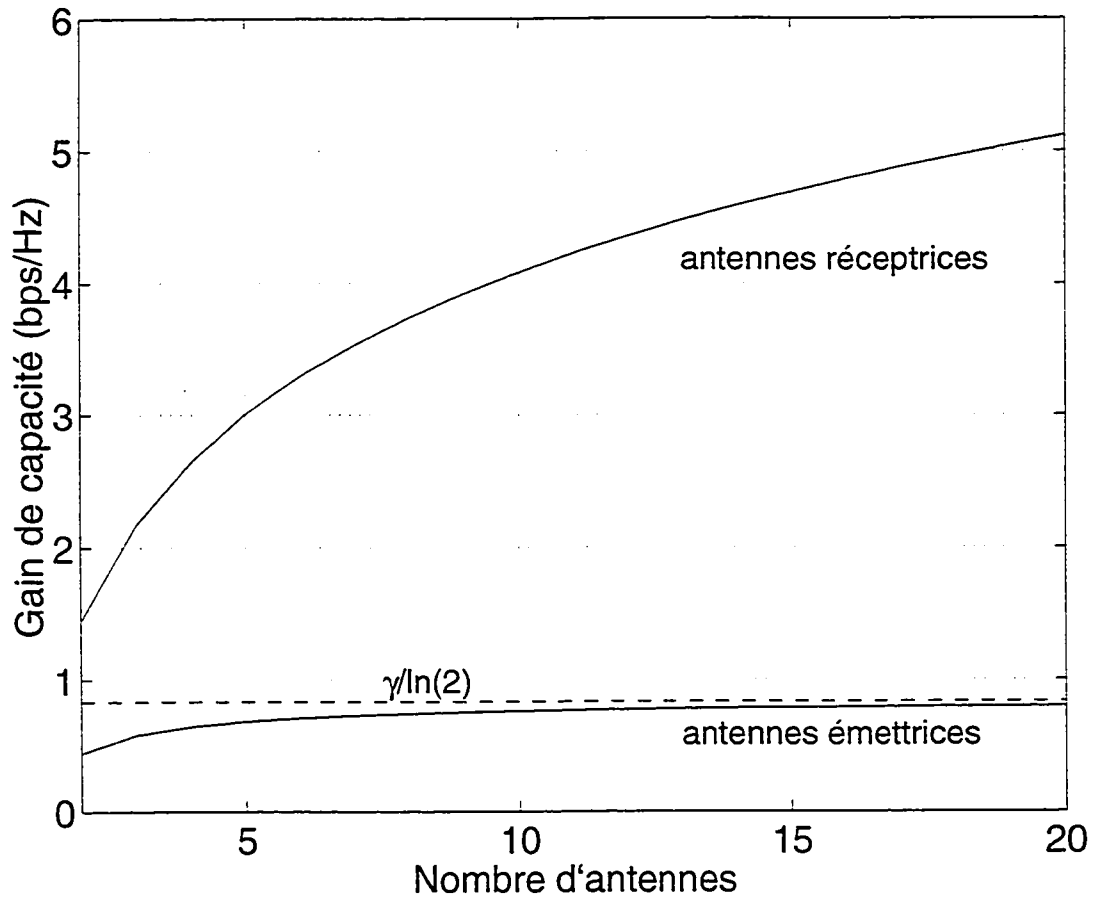


Figure 3.2: Gain sur la capacité en fonction du nombre d'antennes.

3.2.3 Diversité d'ordre supérieur à 1, $\min(m, n) > 1$ (cas général)

Afin de trouver la capacité asymptotique pour le cas $\min(m, n) > 1$, l'espérance de l'équation (3.10) a été calculée pour les cas spécifiques $\min(m, n) = 2$ et 3 (voir les calculs à l'annexe C). Une expression générale a été déterminée, puis vérifiée numériquement pour $\min(m, n) > 1$:

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_i] = \frac{1}{\ln(2)} [l - \min(m, n)\gamma] \quad (3.21)$$

où l est une constante dépendante des valeurs de m et de n :

$$l = \min(m, n) \sum_{i=1}^{|m-n|} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{\min(m,n)-1} \frac{i}{\max(m, n) - i} \quad (3.22)$$

La capacité asymptotique est donc donnée par:

$$C_{asympt} = \min(m, n) \log_2 \left(\frac{\rho}{m} \right) + \frac{1}{\ln(2)} (l - \min(m, n)\gamma) \quad (3.23)$$

où l est donnée par (3.22). Le tableau 3.1 indique quelques valeurs de l en fonction des nombres minimal et maximal d'antennes. Quelques asymptotes sont tracées à la figure 3.3 pour $(m, n) = (1, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 4)$ et $(8, 8)$.

	max(m, n)						
min(m, n)	2	3	4	5	6	7	8
2	1.00	2.50	3.33	3.92	4.37	4.73	5.04
3	-	2.50	4.33	5.42	6.20	6.82	7.33
4	-	-	4.33	6.42	7.70	8.65	9.41

Tableau 3.1: Valeurs de la constante l en fonction des nombres minimal et maximal d'antennes.

Comme les valeurs propres non nulles des matrices $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ et $\mathbf{H}^T\mathbf{H}^{T^H}$ sont identiques (voir la preuve à l'annexe B), il est possible de calculer la différence de capacité entre les cas

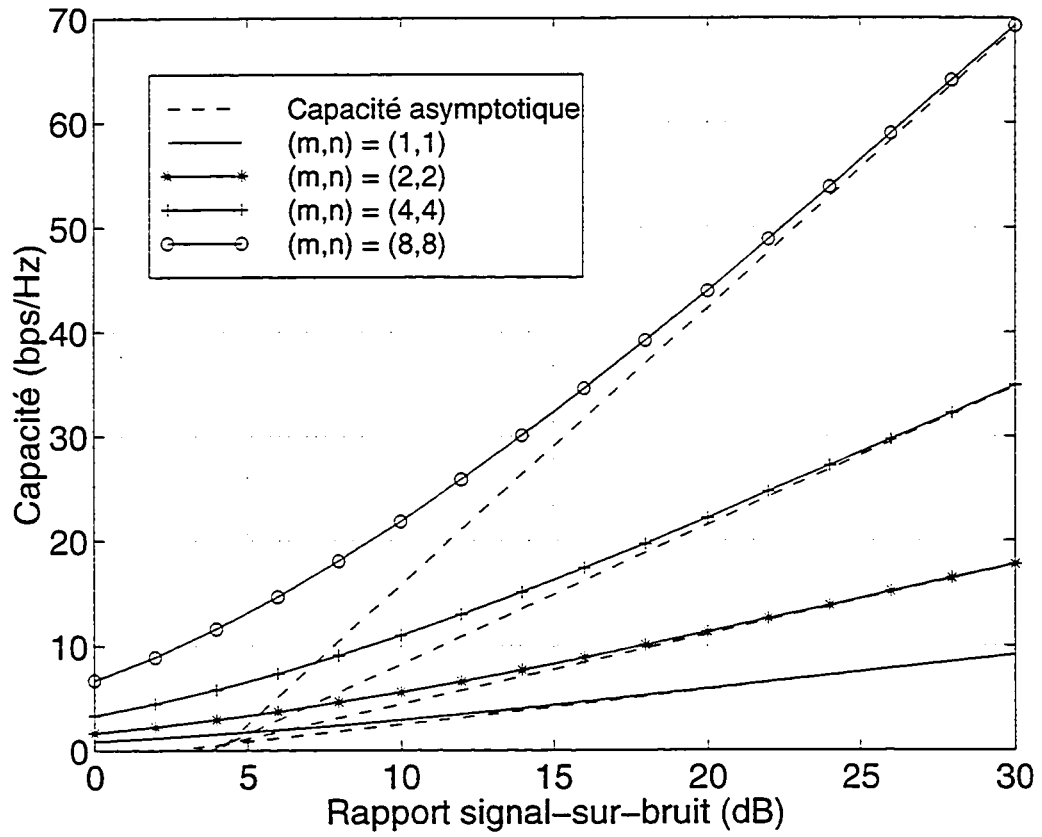


Figure 3.3: Asymptotes de la capacité $(m, n) = (1, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 4)$ et $(8, 8)$.

($m = t_1, n = t_2$) et ($m = t_2, n = t_1$) pour $\rho/m \gg 1$:

$$\begin{aligned} \Delta C_{asympt} &= \min(m, n) \cdot \log_2 \left(\frac{\rho}{t_1} \right) + \sum_{i=1}^{\min(m, n)} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_i] \\ &\quad - \left[\min(m, n) \cdot \log_2 \left(\frac{\rho}{t_2} \right) + \sum_{i=1}^{\min(m, n)} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_i] \right] \\ &= \min(m, n) \cdot \log_2 \left(\frac{t_2}{t_1} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ceci confirme que l'ajout d'antennes réceptrices augmente davantage la valeur de la capacité que lorsque l'on accroît le nombre d'antennes émettrices.

3.2.4 Cas limite lorsque le nombre d'antennes est très large

D'après la loi des grands nombres [Ede89, p.79], lorsque le nombre d'antennes émettrices est très grand, la matrice $\frac{1}{m} \mathbf{H} \mathbf{H}^H$ tend vers une matrice identité \mathbf{I}_n d'ordre n et ses valeurs propres tendent vers l'unité. En remplaçant $\lambda_i = m, i = 1, \dots, n$ dans (3.7), on obtient donc [Tel99],(6):

$$C = n \log_2(1 + \rho) \quad (3.25)$$

Aussi, lorsque le nombre d'antennes réceptrices est très élevé, la matrice $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ tend vers la matrice $n \mathbf{I}_m$ et chacune de ses valeurs propres tend vers n . En remplaçant $\lambda_i = n$ pour $i = 1, \dots, m$ dans (3.7), on obtient donc:

$$C = m \log_2 \left(1 + \frac{n\rho}{m} \right) \quad (3.26)$$

En général, si le rapport $\frac{\max(m, n)}{\min(m, n)}$ est élevé, on a:

$$C = \min(m, n) \log_2 \left(1 + \frac{\max(m, n)\rho}{m} \right) \quad (3.27)$$

On remarque que lorsque $\min(m, n) = 1$, l'équation (3.27) représente la capacité d'un canal avec bruit additif gaussien avec diversité soit au récepteur ou soit à l'émetteur. L'augmentation

du nombre d'antennes dans un canal avec évanouissements de Rayleigh permet donc de combattre ces évanouissements, ce qu'illustre les figures 3.4 et 3.5. Les courbes de capacité avec évanouissement de Rayleigh des figures 3.4 et 3.5 ont été obtenues par simulation tel que décrit au début du chapitre alors que les courbes de capacité pour le canal additif gaussien ont été obtenues avec l'expression (3.27).

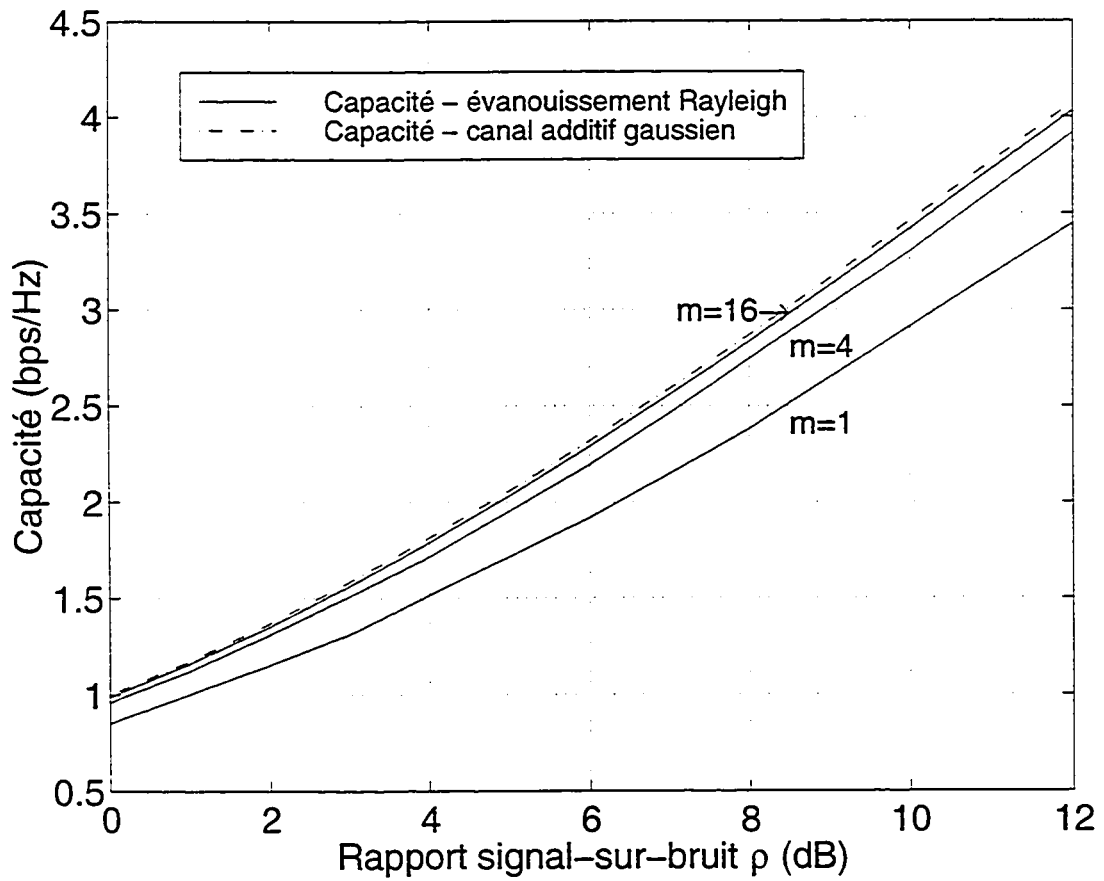


Figure 3.4: Comparaison de la capacité du canal de Rayleigh et du canal avec bruit blanc additif gaussien pour $m = 1, 4$ ou 16 antennes émettrices et une antenne réceptrice ($n = 1$).

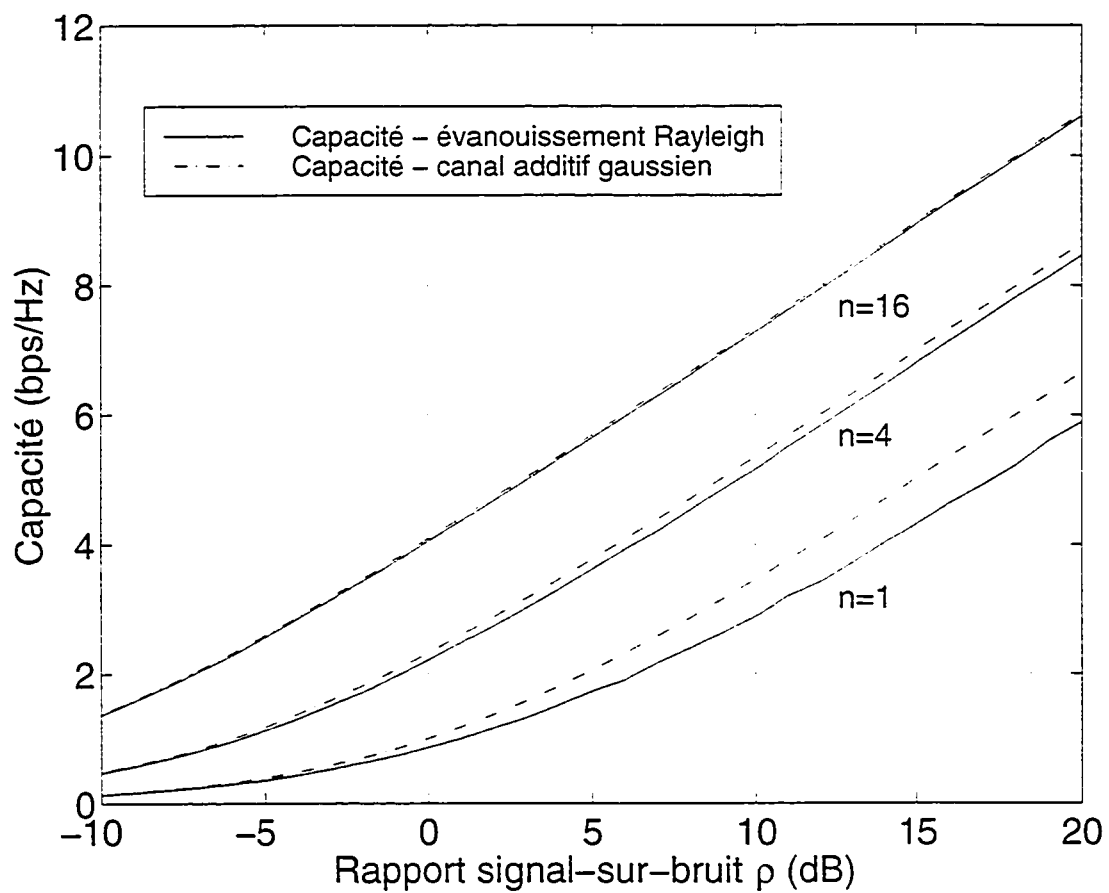


Figure 3.5: Comparaison de la capacité du canal de Rayleigh et du canal avec bruit blanc additif gaussien pour une antenne émettrice ($m = 1$) et $n = 1, 4$ ou 16 antennes réceptrices.

3.3 Capacité asymptotique avec corrélation parfaite entre les antennes

Les dérivations des expressions des asymptotes de capacité précédentes supposent que les coefficients d'évanouissement du canal sont non corrélés. En pratique, ces coefficients seront plus ou moins corrélés selon la séparation physique entre les antennes émettrices ainsi que les antennes réceptrices. Dans le cas où la distance séparant les antennes est très petite, on suppose que chaque antenne reçoit un signal subissant la même atténuation. Les expressions des asymptotes de capacité sont redérivées dans cette section pour une corrélation parfaite entre les antennes. On peut considérer que la corrélation parfaite entre les signaux provenant d'antennes distinctes constitue un pire cas pour la diversité de transmission et de réception. Comme le calcul se fait directement à partir de la matrice des coefficients d'évanouissement, l'équation générale de la capacité (2.19) est utilisée et les résultats de l'annexe A sont donc utilisés dans cette section.

3.3.1 Effet de la corrélation pour $\min(m, n) = 1$, $\max(m, n) = t$

Dans le cas où $\min(m, n) = 1$ et $\max(m, n) = t$, une corrélation parfaite entre les antennes implique que les t coefficients d'évanouissement sont tous égaux.

Capacité avec corrélation parfaite au récepteur

En posant les coefficients d'évanouissement égal à h , l'équation (2.19) devient:

$$\begin{aligned} C &= E_{\mathbf{H}} [\log_2 (1 + \rho n |h|^2)] \\ &= E_{\mathbf{H}} [\log_2 (1 + n\rho Y)] \end{aligned} \quad (3.28)$$

En remplaçant ρ par $n\rho$ dans (A.3) et (A.12), on obtient:

$$C_{asympt} = \frac{1}{\ln(2)} [\ln(\rho) + \ln(n) - \gamma] \quad (3.29)$$

La diminution de capacité due à une corrélation parfaite au récepteur est donc ((3.17)-(3.29)):

$$\Delta C_{asympt} = \frac{1}{\ln(2)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - \ln(n) \right] \quad (3.30)$$

Aussi, lorsque le nombre d'antennes tend vers l'infini, cette diminution devient:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta C_{asympt} = \frac{\gamma}{\ln(2)} \approx 0.83 \quad (3.31)$$

Suite à ces résultats, on remarque que l'augmentation de capacité causée par l'ajout d'antennes au récepteur peut être divisée en deux parties: un gain d'amplification de puissance, G_A , et un gain de diversité réelle, G_D . Comme n antennes identiques capteront une puissance n fois plus élevée qu'une seule antenne, le rapport signal-sur-bruit sera augmenté proportionnellement et le gain de capacité ainsi obtenu, que l'on définit par gain d'amplification de puissance, est:

$$G_A = \log_2(n) \quad (3.32)$$

De plus, en utilisant plusieurs antennes, on réduit la probabilité que chaque antenne reçoive un signal fortement atténué, c'est ce qu'on appelle le gain de diversité réelle G_D :

$$G_D = \frac{1}{\ln(2)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - \ln(n) \right] \quad (3.33)$$

L'asymptote de la capacité pour le système $(1, n)$ est donc égale à la capacité obtenue pour le cas $(1, 1)$ plus les deux types de diversité (3.17):

$$C_{asympt} = \frac{1}{\ln(2)} [\ln(\rho) - \gamma] + G_A + G_D \quad (3.34)$$

Avec corrélation parfaite au récepteur, on perd la diversité réelle mais le gain d'amplification demeure et la capacité asymptotique devient (3.29):

$$C_{asympt} = \frac{1}{\ln(2)} [\ln(\rho) - \gamma] + G_A \quad (3.35)$$

La capacité asymptotique avec et sans corrélation au récepteur pour $\min(m, n) = 1$ est tracée à la figure 3.6. On remarque que l'effet de la corrélation est croissant avec le nombre d'antennes réceptrices n . Par contre, comme il a été démontré auparavant, la réduction de capacité due à la corrélation sera au maximum égale à 0.83 bps/Hz.

Capacité avec corrélation parfaite à l'émetteur

Dans le cas où la corrélation est parfaite entre les antennes à l'émetteur, la capacité est donnée par:

$$C = E_{\mathbf{H}} [\log_2 (1 + \rho |h|^2)] \quad (3.36)$$

La capacité dans ce cas particulier est donc la même que pour le cas $(m, n) = (1, 1)$. La diminution de capacité due à la corrélation est alors ((3.18)-(3.36)):

$$\Delta C_{asympt} = \frac{1}{\ln(2)} \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} - \ln(m) \right] \quad (3.37)$$

Cette diminution est donc causée par la perte de diversité réelle et le résultat pouvait être trouvé intuitivement suite aux discussions précédentes. De plus, il n'est plus possible d'augmenter le nombre d'antennes émettrices afin de convertir le canal Rayleigh en canal gaussien puisqu'il n'existe plus de diversité réelle. En effet, l'asymptote de la capacité sans corrélation est donnée par (3.18):

$$C_{asympt} = \frac{1}{\ln(2)} [\ln(\rho) - \gamma] + G_D \quad (3.38)$$

Donc, pour les cas où $(m, 1)$ et $(1, n)$, une corrélation parfaite entre les antennes réduira la capacité asymptotique au maximum de 0.83 bps/Hz. On peut donc conclure que cette diminution est relativement peu élevée pour un rapport signal-sur-bruit $\rho \gg 1$. La capacité asymptotique avec et sans corrélation à l'émetteur pour $\min(m, n) = 1$ est tracée à la figure 3.7. On remarque que l'effet de la corrélation entre les antennes émettrices croît avec m mais que la réduction de capacité due à la corrélation sera au maximum égale à 0.83 bps/Hz.

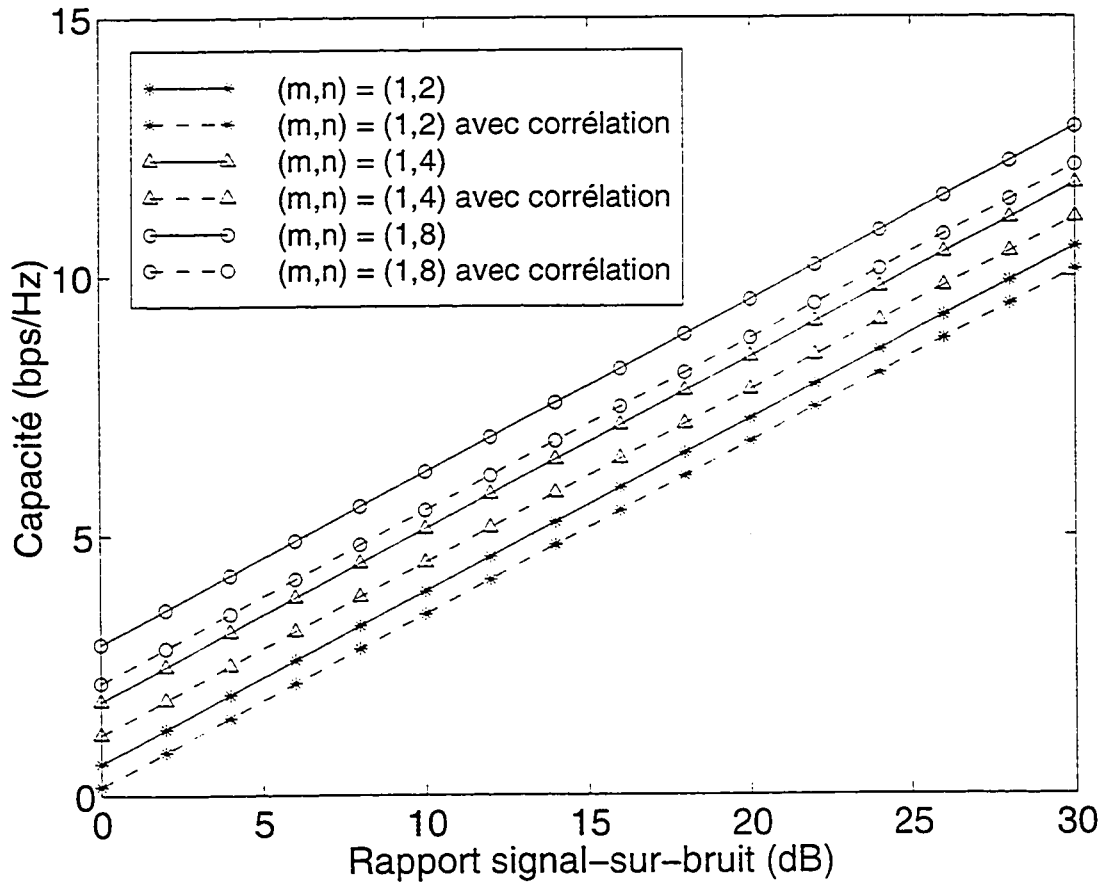


Figure 3.6: Capacité asymptotique avec et sans corrélation entre les antennes réceptrices pour $(m, n) = (1, 2)$, $(1, 4)$ et $(1, 8)$.

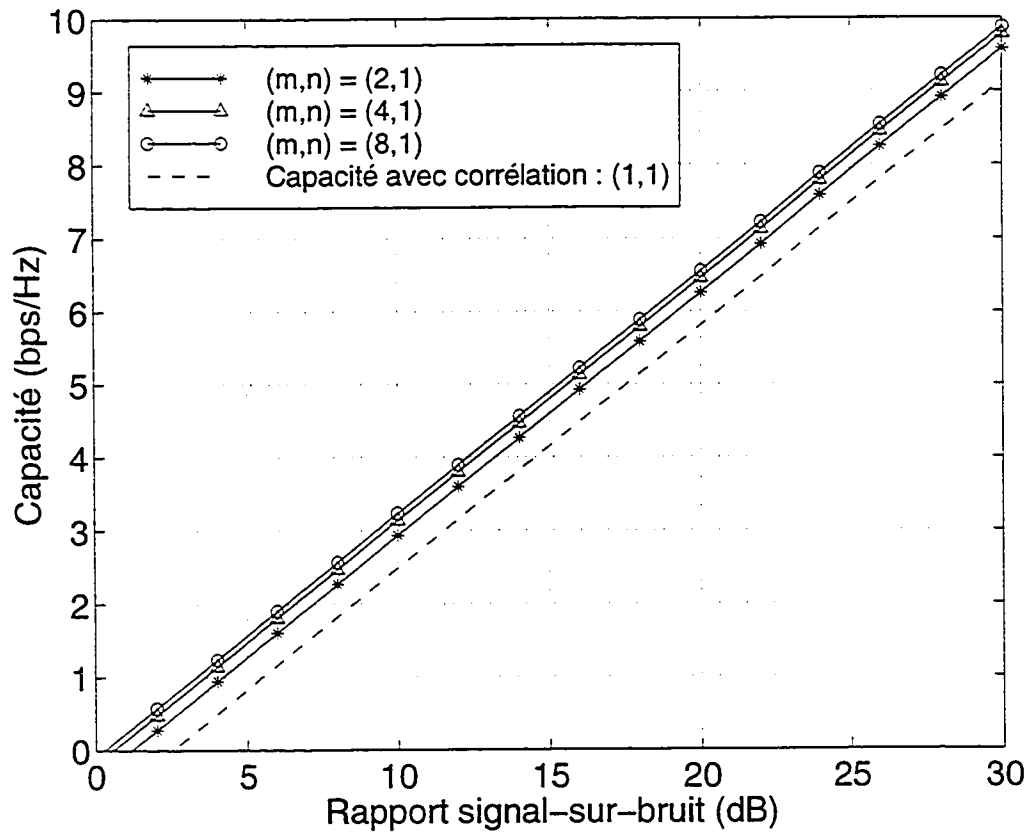


Figure 3.7: Capacité asymptotique avec et sans corrélation entre les antennes émettrices pour $(m, n) = (2, 1)$, $(4, 1)$ et $(8, 1)$.

3.3.2 Effet de la corrélation pour $\min(m, n) > 1$

Corrélation à l'émetteur:

Lorsque les antennes émettrices sont parfaitement corrélées, la matrice du canal devient:

$$\mathbf{H}^{n \times m} = \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n & \dots & h_n \end{pmatrix}$$

Le déterminant de l'expression (2.19) est alors:

$$\left| \mathbf{I}_n + \frac{\rho}{m} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right| = 1 + \rho \sum_{i=1}^n |h_i|^2 \quad (3.39)$$

On remarque que le déterminant est identique à l'expression (A.13). La capacité est donc donnée par (A.14) et la capacité asymptotique est alors (A.20):

$$C_{asympt} = \frac{1}{\ln(2)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \ln(\rho) - \gamma \right] \quad (3.40)$$

On remarque que l'équation (3.40) est identique à l'équation (3.17) pour le cas où il n'y a aucune diversité à l'émetteur.

Corrélation au récepteur:

Dans le cas où les antennes réceptrices sont parfaitement corrélées, la matrice du canal est donnée par

$$\mathbf{H}^{n \times m} = \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1 & \dots & h_m \end{pmatrix}$$

Le déterminant de l'expression (2.19) est alors:

$$\left| \mathbf{I}_n + \frac{\rho}{m} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right| = 1 + \frac{n\rho}{m} \sum_{i=1}^m |h_i|^2 \quad (3.41)$$

La capacité est obtenue en remplaçant ρ par $n\rho$ dans l'expression (A.21) et la capacité asymptotique est alors ((A.22)):

$$C_{asympt} = \frac{1}{\ln(2)} \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} + \ln\left(\frac{n}{m}\right) + \ln(\rho) - \gamma \right] \quad (3.42)$$

Dans ce cas, l'asymptote est différente de celle sans diversité au récepteur (3.18). La diminution de capacité est causée par la perte de diversité réelle alors que l'amplification de puissance reçue, $\ln(n)$ est toujours présente. La capacité asymptotique avec et sans corrélation pour $\min(m, n) > 1$ est tracée aux figures 3.8 et 3.9 pour $(m, n) = (8, 2)$, $(2, 8)$ et $(8, 8)$. On remarque que l'effet négatif de la corrélation entre antennes est plus important lorsque $m = n$. En effet, comme la pente de chaque asymptote sans corrélation est proportionnelle à $\min(m, n) \log_2(\rho)$ alors que les asymptotes avec corrélation croissent avec $\log_2(\rho)$, la plus grande différence entre les asymptotes est obtenue en maximisant $\min(m, n) - 1$, ce qui donne $m = n$.

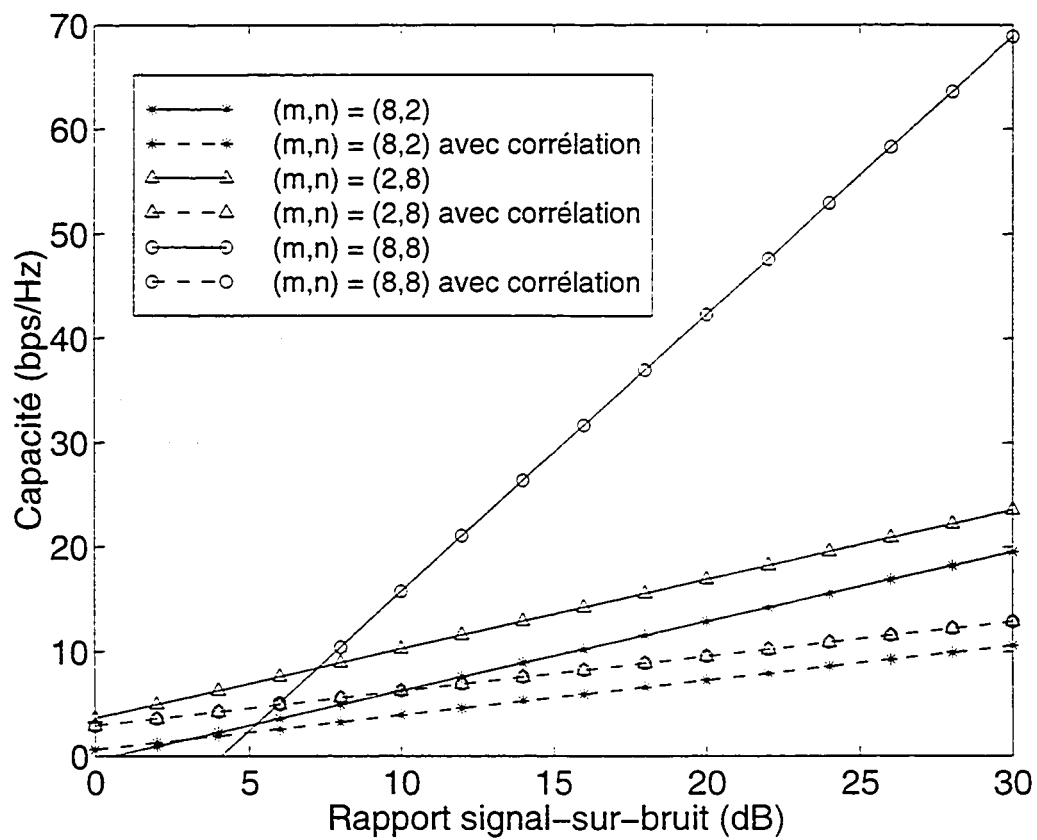


Figure 3.8: Capacité asymptotique avec et sans corrélation entre les antennes émettrices pour $(m, n) = (8, 2)$, $(2, 8)$ et $(8, 8)$.

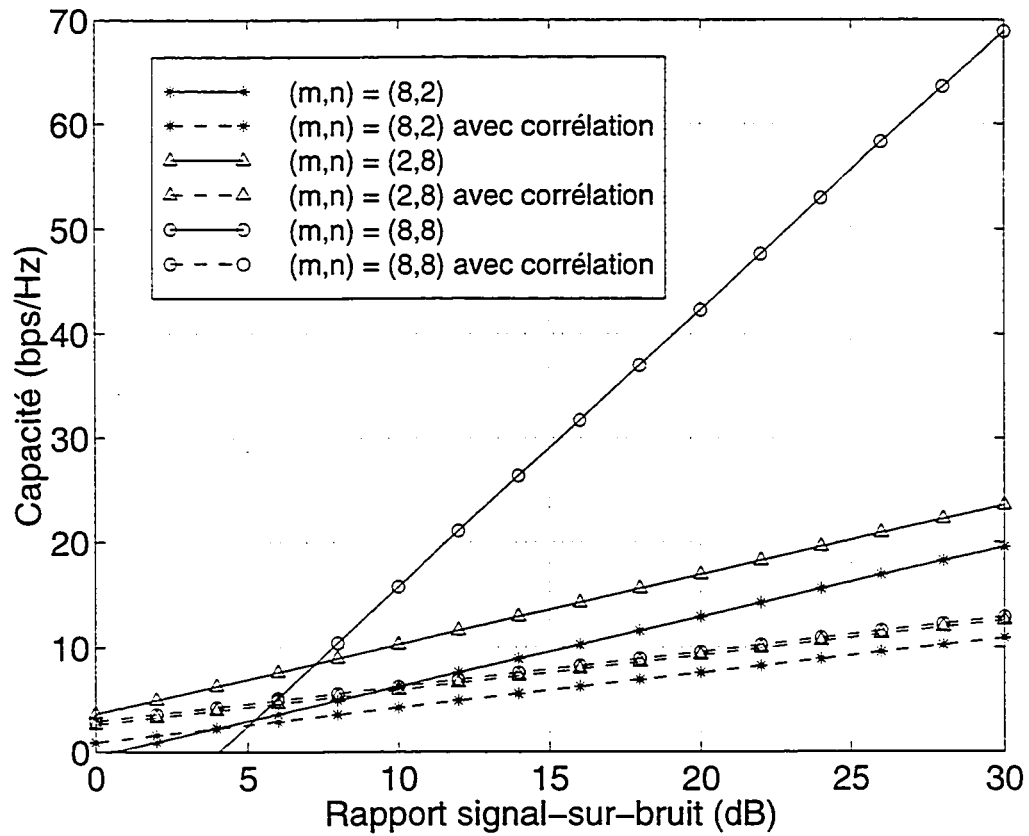


Figure 3.9: Capacité asymptotique avec et sans corrélation entre les antennes réceptrices pour $(m, n) = (8, 2)$, $(2, 8)$ et $(8, 8)$.

3.4 Fonction de répartition de la capacité

Comme discuté à la section 3.3, l'avantage de la diversité peut être décomposé en un gain d'amplification de puissance G_A et un gain de diversité G_D . On a remarqué que pour $\min(m, n) = 1$, le gain de diversité G_D sera toujours inférieur à 0.83 bps/Hz. Il semble donc que la diversité, soit à l'émetteur ou au récepteur, n'offre qu'un avantage limité. Par contre, cette conclusion ne s'applique qu'à la valeur de la capacité et non au comportement de la capacité vue comme une variable aléatoire. Nous étudions dans cette section l'effet de la diversité sur la distribution de la capacité vue comme une variable aléatoire. Les fonctions de répartition de la capacité pour différents cas peuvent être obtenues de l'équation (2.18). La capacité a été calculée pour 10000 matrices de gains complexes \mathbf{H} pour les cas $(m, n) = (1, 1)$, $(1, 8)$, $(8, 1)$ et $(8, 8)$, et les distributions obtenues sont tracées à la figure 3.10 (de façon semblable à [FG98]). L'avantage d'utiliser la diversité, soit à l'émetteur ou au récepteur, est bien connu et est illustré par les distributions cumulatives $(1, 8)$ et $(8, 1)$. Par contre, l'amélioration obtenue par une telle diversité par rapport au cas $(1, 1)$ est minime comparativement aux gains obtenus par une diversité à l'émetteur et au récepteur (cas $(8, 8)$).

Les figures 3.11 et 3.12 montrent les fonctions de répartition de la capacité dans les cas $(m, 1)$ et $(1, n)$ pour différentes valeurs de m et de n . On remarque que la pente de ces fonctions de répartition devient de plus en plus abrupte avec un nombre d'antennes croissant. Cela signifie que lorsque le nombre d'antennes tend vers l'infini, la capacité devient une variable déterministe. Il est en effet bien connu qu'un canal Rayleigh peut être converti en canal gaussien avec un nombre d'antennes infini. Le gain de capacité causé par l'augmentation du nombre d'antennes émettrices est relativement faible. L'avantage de l'augmentation du nombre d'antennes émettrices réside plutôt sur son effet sur la probabilité de coupure (P_c). On définit la probabilité de coupure, P_c , comme la probabilité que le débit de transmission possible (capacité) pour une réalisation du canal donné, soit plus petit que le débit de transmission requis. En effet, on remarque (figure 3.11) que la probabilité de coupure diminue drastiquement avec l'augmentation du nombre d'antennes émettrices malgré le fait que la

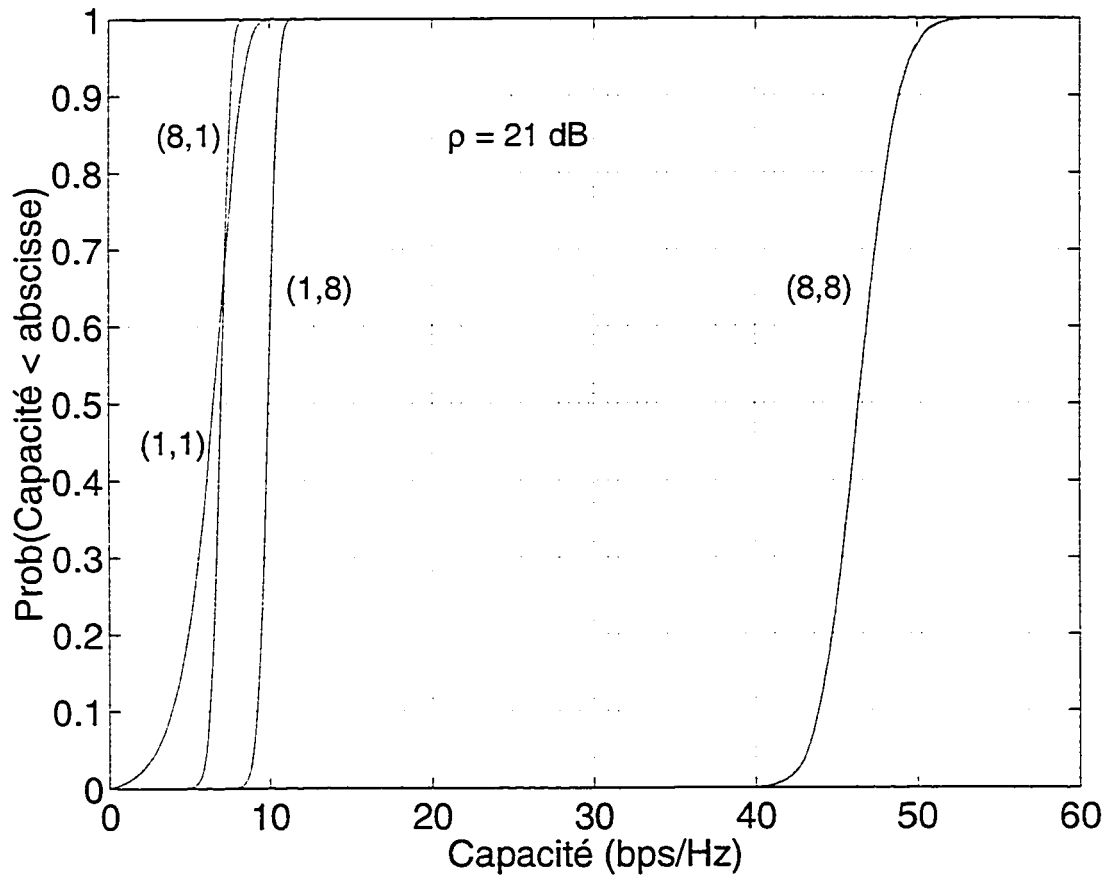


Figure 3.10: Fonction de répartition de la capacité en fonction du nombre d'antennes émettrices et réceptrices.

capacité n'augmente pas beaucoup. Par exemple, lorsque le nombre d'antennes émettrices passe de $m=1$ à $m=16$, la capacité augmente seulement de 6.5 à 7 bps/Hz. Aussi, supposons que le débit de transmission requis pour une communication soit de 6 bps/Hz. On remarque que la probabilité de coupure à 6 bps/Hz est de 40% pour $m=1$ alors qu'elle est seulement de 1% pour $m=16$.

La fonction de répartition peut être calculée facilement pour le cas $\min(m, n) = 1$, en utilisant la distribution des valeurs propres de Edelman [Ede89]. D'après l'équation (3.7), la capacité prise comme variable aléatoire est donnée par:

$$C = \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{m} \lambda \right) \quad (3.43)$$

En posant $\max(m, n) = t$, la distribution de la valeur propre λ est donnée par:

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{t-1}}{(t-1)!} \quad \lambda > 0 \quad (3.44)$$

La fonction de répartition de la capacité $F_C(c)$ est alors:

$$\begin{aligned} F_C(c) &= \text{Prob}(C < c) = \text{Prob} \left(\log_2 \left(1 + \frac{\rho}{m} \lambda \right) < c \right) \\ &= \text{Prob} \left(\lambda < \frac{m}{\rho} (2^c - 1) \right) \\ &= \int_0^x \frac{e^{-\lambda} \lambda^{t-1}}{(t-1)!} d\lambda \quad \text{où } x = \frac{m}{\rho} (2^c - 1) \\ &= 1 - e^{-x} \sum_{i=1}^t \frac{x^{t-i}}{(t-i)!} \\ &= 1 - e^{-\frac{m}{\rho} (2^c - 1)} \sum_{i=1}^{\max(m, n)} \frac{\left(\frac{m}{\rho} (2^c - 1) \right)^{\max(m, n) - i}}{(\max(m, n) - i)!} \end{aligned} \quad (3.45)$$

La fonction de densité de probabilité $f_C(c)$ est donnée par la dérivée de la fonction de répartition $F_C(c)$:

$$\begin{aligned} f_C(c) &= \frac{dF_C(c)}{dc} \\ &= \frac{m 2^c \ln(2)}{\rho} \frac{\left[\frac{m}{\rho} (2^c - 1) \right]^{\max(m, n) - 1}}{(\max(m, n) - 1)!} \exp \left[-\frac{m}{\rho} (2^c - 1) \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

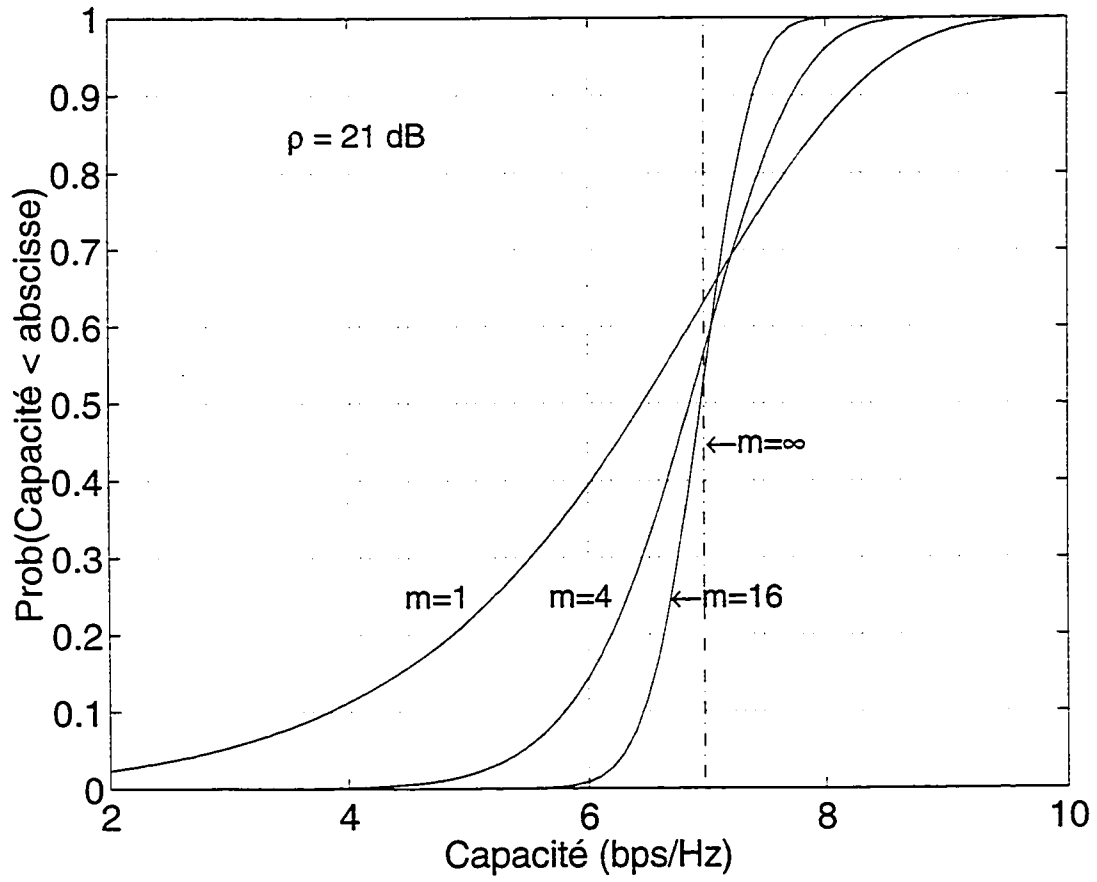


Figure 3.11: Fonction de répartition de la capacité pour $m = 1, 4$ et 16 antennes émettrices.

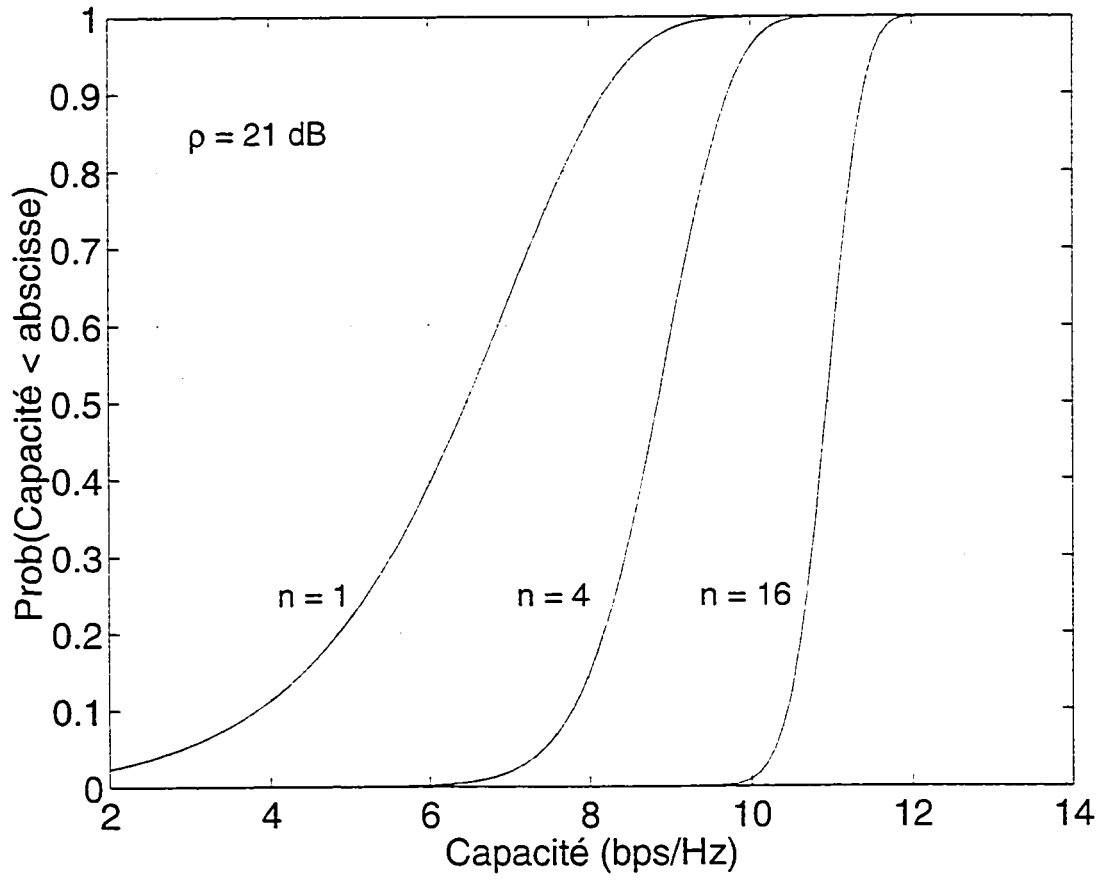


Figure 3.12: Fonction de répartition de la capacité pour $n = 1, 4$ et 16 antennes réceptrices.

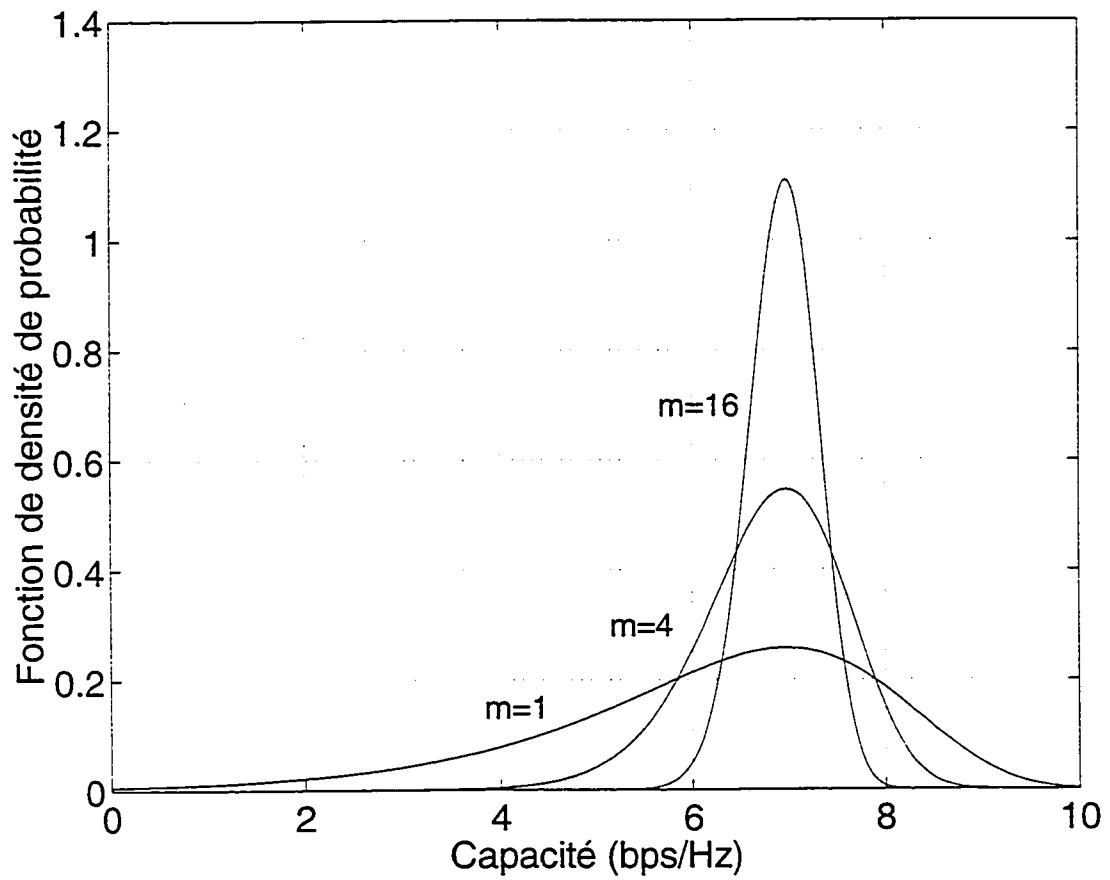


Figure 3.13: Fonction de densité de probabilité de la capacité lorsque $m = 1, 4$ et 16 antennes émettrices.

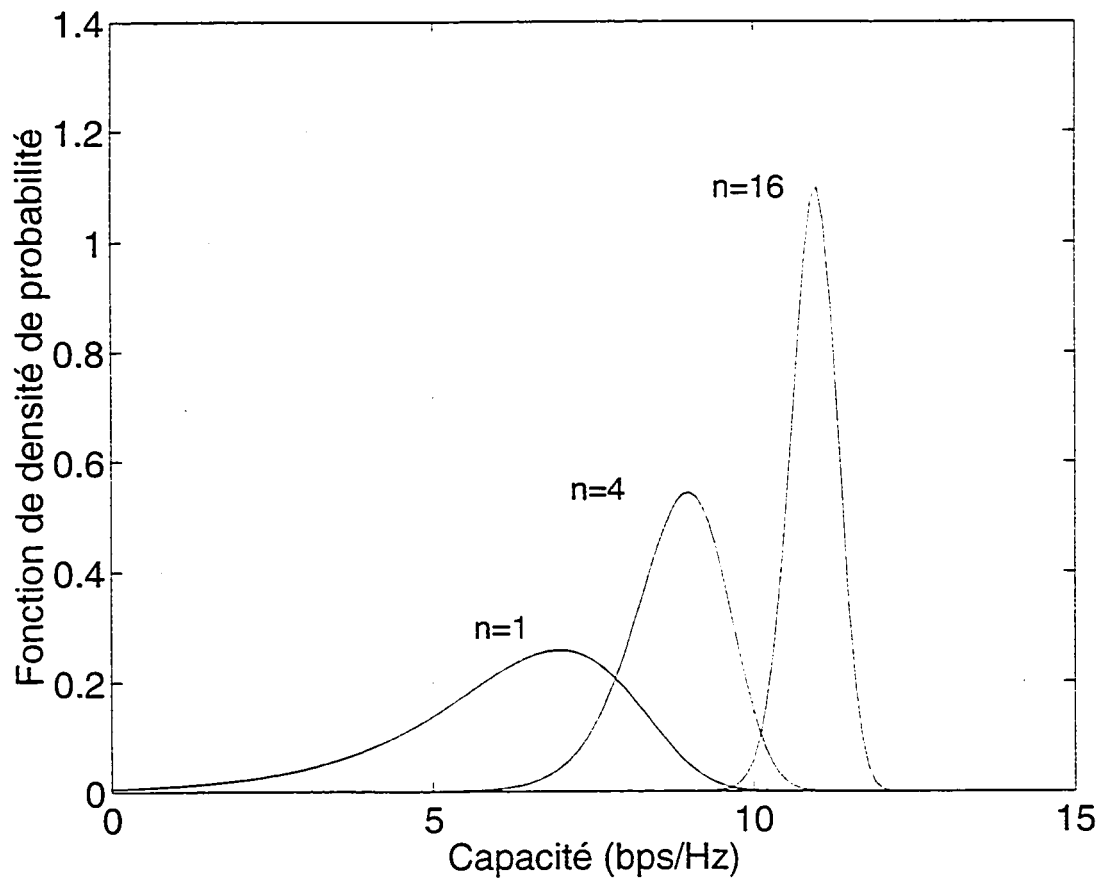


Figure 3.14: Fonction de densité de probabilité de la capacité lorsque $n = 1, 4$ et 16 antennes réceptrices.

3.5 Capacité pour un canal à large bande

Les dérivations de la capacité pour le canal à large bande sont similaires à celles effectuées dans les sections précédentes. Pour un canal à large bande, la différence se trouve dans le fait que l'on retrouve plusieurs copies retardées du même signal au récepteur. En supposant que ces copies ont chacune leur propre matrice d'évanouissement \mathbf{H}_i et que les retards (ou délais) sont des multiples de T_c , la période d'utilisation du canal, on obtient:

$$\mathbf{Y}_n = \sum_{i=0}^L \mathbf{H}_i \mathbf{X}_{n-d_i} + \mathbf{Z}_n \quad (3.47)$$

où $L + 1$ est le nombre de copies du signal et d_i est le délai. Comme les matrices \mathbf{H}_i sont supposées constantes durant la transmission et que les vecteurs \mathbf{X}_{n-d_i} sont des variables aléatoires gaussiennes centrées à zéro, $\mathbf{X}'_i = \mathbf{H}_i \mathbf{X}_{n-d_i}$ est aussi gaussien. De plus, comme les \mathbf{X}_n sont indépendants, les \mathbf{X}'_i sont aussi indépendants. Il est possible de construire un nouveau vecteur gaussien $\mathbf{W}_n = \sum_i \mathbf{X}'_i$ et l'équation (3.47) devient:

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{W}_n + \mathbf{Z}_n \quad (3.48)$$

Le reste des dérivations est alors très similaire à ce qui a été fait auparavant. En posant un nouveau vecteur $\mathbf{U} = (\mathbf{W}^T, \mathbf{Y}^T)^T$, on trouve que les matrices de covariance sont:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= E_{\mathbf{H}} [\mathbf{W}_n \mathbf{W}_n^H] = E_{\mathbf{H}} [(\mathbf{X}'_0 + \mathbf{X}'_1 + \dots + \mathbf{X}'_L)(\mathbf{X}'_0 + \mathbf{X}'_1 + \dots + \mathbf{X}'_L)^H] \\ &= \sum_{i=0}^L E_{\mathbf{H}} [\mathbf{X}'_i \mathbf{X}'_i^H] \\ &= \sum_{i=0}^L E_{\mathbf{H}} [(\mathbf{H}_i \mathbf{X}_{n-d_i})(\mathbf{H}_i \mathbf{X}_{n-d_i})^H] \\ &= \frac{P}{m} \sum_{i=0}^L \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^H \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{K}_{22} = E_{\mathbf{H}} [\mathbf{Y}_n \mathbf{Y}_n^H] = E_{\mathbf{H}} [(\mathbf{W}_n + \mathbf{Z}_n)(\mathbf{W}_n + \mathbf{Z}_n)^H] = \frac{P}{m} \sum_{i=0}^L \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^H + \sigma_z^2 \mathbf{I}_N \quad (3.50)$$

$$\mathbf{K}_{12} = E_{\mathbf{H}} [\mathbf{W}_n \mathbf{Y}_n^H] = E_{\mathbf{H}} [\mathbf{W}_n (\mathbf{W}_n + \mathbf{Z})^H] = \frac{P}{m} \sum_{i=0}^L \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^H = \mathbf{K}_{21}^H \quad (3.51)$$

Finalement, en remplaçant les matrices de covariance dans l'équation (2.13), on obtient:

$$C = E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \left| \mathbf{I}_n + \frac{\rho}{m} \sum_{i=0}^L \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^H \right| \right] \quad (3.52)$$

La figure 3.15 montre la capacité d'un système $(m, n) = (2, 2)$ pour les cas où le nombre de copies est 1, 2, 4 et 8. Les courbes de capacité ont été obtenues en faisant la moyenne de la capacité calculée à l'aide de l'équation (3.52) pour 10,000 réalisations aléatoires de la matrice du canal \mathbf{H} . La puissance moyenne est supposée la même pour toutes les copies. Aussi, le système équivalent à bande étroite est indiqué pour des fins de comparaison. Par exemple, on constate qu'un système (8,8) à large bande où le nombre de copies est 4 est équivalent à un système (8,32) à bande étroite. Il faut cependant noter que ceci est dû au fait que les copies ont toutes la même puissance moyenne.

3.6 Conclusion

En se basant sur les conclusions du chapitre deux sur les notions de base de la capacité, nous avons tout d'abord dérivé la capacité asymptotique des systèmes à antennes multiples. Les expressions de capacité asymptotique nous ont permis d'arriver à quelques conclusions intéressantes. Tout d'abord, le gain de capacité obtenu en augmentant le nombre d'antennes peut être décomposé en un gain d'amplification et un gain de diversité. Le gain de diversité obtenu en ajoutant une antenne supplémentaire n'est pas constant mais diminue avec le nombre d'antennes. Donc, pratiquement, l'ajout d'antennes devient moins efficace à mesure que le nombre d'antennes augmente. Ce phénomène est facilement identifiable lorsque le nombre d'antennes émettrices seulement est augmenté, puisque dans ce cas on a démontré qu'il n'y pas de gain d'amplification. En effet, la capacité atteint 90% de son maximum avec seulement 8 antennes émettrices. Comme l'ajout d'antennes réceptrices cause un gain d'amplification en plus du gain de diversité, on a aussi pu démontrer qu'il est plus efficace d'augmenter le nombre d'antennes réceptrices que le nombre d'antennes émettrices lorsque le canal n'est pas connu à l'émetteur. Nous avons ensuite étudié l'effet de la corrélation

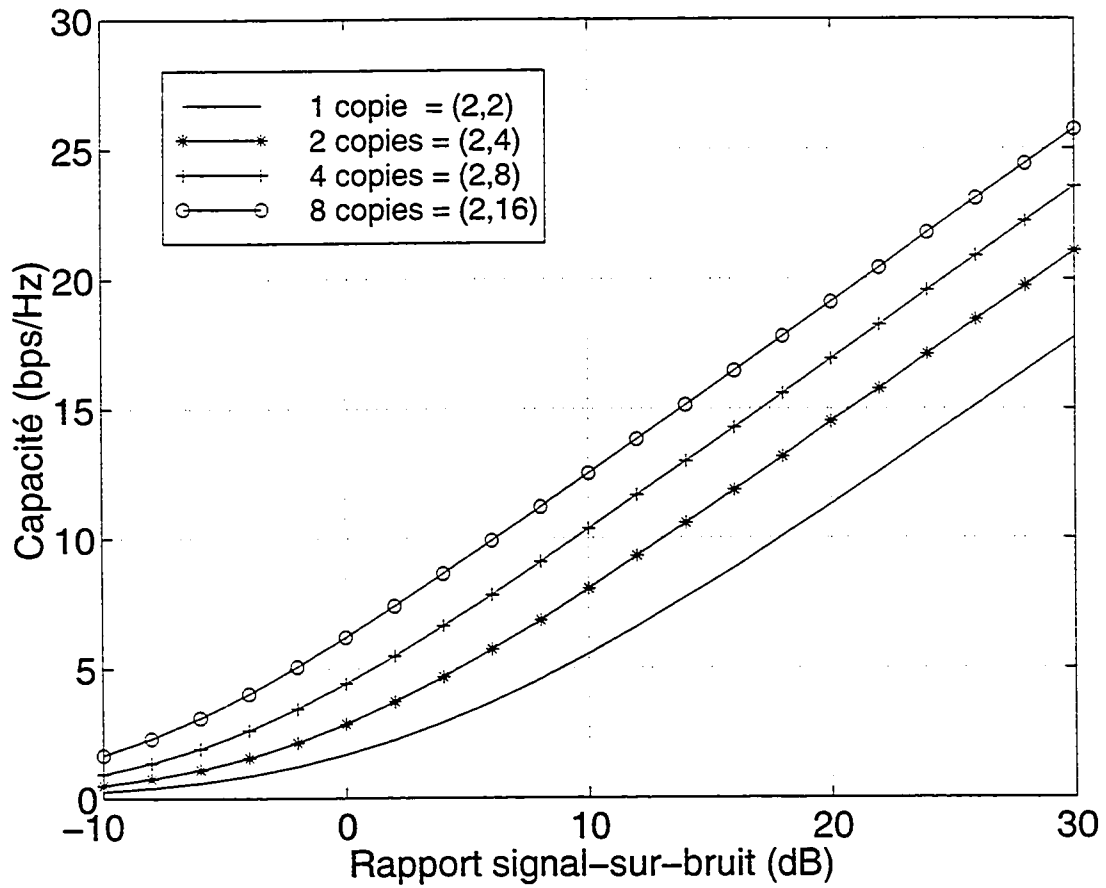


Figure 3.15: Capacité pour un canal à large bande pour un système $(m, n) = (2, 2)$ avec 1, 2, 4 et 8 copies du signal.

entre antennes sur la capacité, ce qui nous a révélé que seulement le gain de diversité est affecté par cette corrélation. La corrélation entraîne donc une diminution de capacité mineure lorsque la diversité spatiale est utilisée à l'émetteur ou au récepteur seulement, puisque le gain d'amplification au récepteur reste. En effet, on a démontré que le gain de diversité sera au maximum de 0.83 bps/Hz dans ce cas. Par contre, lorsque la diversité est utilisée à l'émetteur et au récepteur, la corrélation aura un effet important et la perte de capacité résultante croît rapidement avec le rapport signal-sur-bruit et le nombre d'antennes. Puis, nous avons dérivé la fonction de répartition de la capacité pour le cas où $\min(m, n) = 1$, ce qui nous a permis de définir la probabilité de coupure d'un canal comme la probabilité que le débit de transmission possible pour une réalisation du canal donnée soit plus petit que le débit de transmission requis. Nous avons alors remarqué que la diversité réduisait de façon considérable cette probabilité de coupure. Finalement, les dérivations du calcul de la capacité ont été reprises pour le canal à bande large. En supposant que les l copies d'un même signal d'un canal à large bande possède la même puissance, on arrive à la conclusion qu'un canal (m, n) à large bande est équivalent à un canal $(m, l \times n)$ à bande étroite.

Chapitre 4

Capacité lorsque le canal est connu au récepteur et à l'émetteur

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, des expressions de capacité ont été présentées pour des canaux à évanouissements lents de Rayleigh dans la situation où la matrice des gains complexes du canal \mathbf{H} était connue au récepteur. Dans certaines situations, il est possible que l'état du canal soit aussi connu de l'émetteur. Par exemple, lorsque le multiplexage temporel est utilisé entre deux stations et que le temps de transmission alloué à chaque station est assez court comparé au taux de changement du canal, l'estimation de l'état du canal lors de la réception peut être utilisée lors de la transmission subséquente. Comme le canal est connu à l'émetteur, celui-ci peut utiliser cette information à son avantage afin de modifier le vecteur transmis en l'adaptant aux conditions présentes du canal.

Selon la théorie sur les variables gaussiennes, il est possible d'appliquer une transformation linéaire à un vecteur de variables gaussiennes indépendantes afin d'obtenir un nouveau vecteur ayant une matrice de covariance désirée [LGon]. Le principe consiste à démultiplexer la séquence des symboles à émettre en un vecteur \mathbf{X} . On effectue ensuite une adaptation au canal sous la forme d'une transformation linéaire du vecteur \mathbf{X} en un nouveau

vecteur \mathbf{W} , tel qu'illustré à la figure 4.1. Le vecteur \mathbf{W} est alors une variable gaussienne complexe de dimension m possédant une matrice de covariance $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}$. Le problème se pose alors comme suit: comment peut-on choisir la matrice $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}$ afin de maximiser l'information mutuelle entre \mathbf{W} et \mathbf{Y} ?

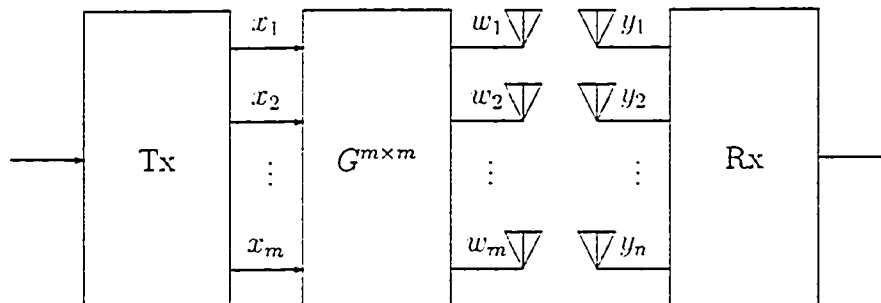


Figure 4.1: Système à antennes multiples avec prétraitement.

Nous répondons à cette question dans ce chapitre en présentant tout d'abord l'expression de capacité avec prétraitement à la section 4.2. Ensuite, la maximisation de cette expression est dérivée, ce qui nous permet alors d'obtenir à la section 4.3 la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}$ et la transformation linéaire \mathbf{G} correspondante. Puis, tout comme au chapitre 3, les asymptotes de capacité sont dérivées à la section 4.4. On calcule ensuite à la section 4.5 le gain obtenu du prétraitement à l'émetteur. Finalement, une preuve de la symétrie de la capacité est dérivée à la section 4.6.

4.2 Expression générale de la capacité avec prétraitement

En modifiant les expressions de capacité dérivées au chapitre précédent, il est possible d'exprimer la capacité avec pré-traitement en fonction de $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}$. Les nouvelles matrices de

covariance correspondantes sont:

$$\mathbf{K}_{11} = E_{\mathbf{H}} [\mathbf{W}\mathbf{W}^H] = \mathbf{C}_{\mathbf{W}} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{K}_{22} = E_{\mathbf{H}} [\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H] = E_{\mathbf{H}} [(\mathbf{H}\mathbf{W} + \mathbf{Z})(\mathbf{H}\mathbf{W} + \mathbf{Z})^H] = \mathbf{H}\mathbf{C}_{\mathbf{W}}\mathbf{H}^H + \sigma_z^2\mathbf{I}_n \quad (4.2)$$

$$\mathbf{K}_{12} = E_{\mathbf{H}} [\mathbf{W}\mathbf{Y}^H] = E_{\mathbf{H}} [\mathbf{W}(\mathbf{H}\mathbf{W} + \mathbf{Z})^H] = \mathbf{C}_{\mathbf{W}}\mathbf{H}^H = \mathbf{K}_{21}^H \quad (4.3)$$

La capacité est alors donnée par:

$$C = \max_{\mathbf{C}_{\mathbf{W}}} E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{H}\mathbf{C}_{\mathbf{W}}\mathbf{H}^H \right| \right] \quad (\text{bps/Hz}) \quad (4.4)$$

Le problème du calcul de la capacité se résume donc à maximiser l'information mutuelle en fonction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}$, avec la contrainte que la puissance moyenne de \mathbf{W} doit être égale à celle de \mathbf{X} , c'est-à-dire:

$$P = E [\mathbf{X}^H\mathbf{X}] = E [\mathbf{W}^H\mathbf{W}] = \sum_{i=1}^m E [|W_i|^2] = \text{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{W}}) \quad (4.5)$$

En représentant la transformation linéaire par une matrice \mathbf{G} , le vecteur transmis est $\mathbf{W} = \mathbf{G}\mathbf{X}$ et on obtient comme matrice de covariance $\mathbf{C}_{\mathbf{W}}$:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{W}} = E [\mathbf{W}\mathbf{W}^H] = E [\mathbf{G}\mathbf{X}\mathbf{X}^H\mathbf{G}^H] = \frac{P}{m}\mathbf{G}\mathbf{G}^H \quad (4.6)$$

On trouve alors que la capacité s'exprime:

$$C = \max_{\mathbf{C}_{\mathbf{W}}} E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \left| \mathbf{I}_n + \frac{\rho}{m} \mathbf{H}\mathbf{G}\mathbf{G}^H\mathbf{H}^H \right| \right] \quad (4.7)$$

Dans ce cas, la contrainte de puissance égale peut s'exprimer comme suit:

$$P = E [\mathbf{X}^H\mathbf{X}] = E [\mathbf{W}^H\mathbf{W}] = E [\mathbf{X}^H\mathbf{G}^H\mathbf{G}\mathbf{X}] \quad (4.8)$$

En posant que les symboles X_i sont indépendants et de puissance égale,

$$E [X_i^* X_j] = \begin{cases} \frac{P}{m} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4.9)$$

on obtient:

$$E [\mathbf{X}^H\mathbf{G}^H\mathbf{G}\mathbf{X}] = \frac{P}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |g_{ij}|^2 \quad (4.10)$$

La contrainte équivalente est donc:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |g_{ij}|^2 = \|\mathbf{G}\|_F^2 = m \quad (4.11)$$

où $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobinus.

4.2.1 Cas particulier de la contrainte sur la puissance

Un cas particulier de la contrainte donnée par (4.11) est obtenu en forçant la puissance de \mathbf{W} à être égale à celle de \mathbf{X} en tout temps, c'est-à-dire:

$$\mathbf{X}^H \mathbf{X} = \mathbf{W}^H \mathbf{W} \quad (4.12)$$

Dans ce cas, la contrainte est équivalente à dire que \mathbf{G} doit être une matrice unitaire:

$$\mathbf{X}^H \mathbf{X} = \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{X}^H \mathbf{G}^H \mathbf{G} \mathbf{X} \quad (4.13)$$

et donc,

$$\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_m = \mathbf{G} \mathbf{G}^H \quad (4.14)$$

En remplaçant l'équation (4.14) dans l'équation de capacité (4.7), on obtient:

$$C = E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \left| \mathbf{I}_n + \frac{\rho}{m} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right| \right] \quad (4.15)$$

ρ étant le rapport signal-sur-bruit. La capacité est alors la même que si le canal n'est connu qu'au récepteur seulement et n'offre aucun avantage au niveau de la capacité. Cependant, comme la seule contrainte sur la matrice \mathbf{G} est d'être unitaire, il est possible d'appliquer cette transformation sans connaître le canal. Il serait donc intéressant de vérifier si ce genre de transformation peut offrir un avantage quelconque au récepteur (autre que sur la capacité) lorsque le canal n'est pas connu de l'émetteur.

4.3 Maximisation de l'information mutuelle

Dans cette section, on s'intéresse à déterminer la matrice de covariance \mathbf{C}_w , et par conséquent la matrice \mathbf{G} , qui maximise l'équation (4.4). Comme le logarithme est une fonction monotone croissante, la maximisation de l'équation de capacité est équivalente à maximiser le déterminant seulement:

$$\max_{\mathbf{C}_w} \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{H} \mathbf{C}_w \mathbf{H}^H \right| \quad (4.16)$$

avec la contrainte:

$$\text{tr}(\mathbf{C}_w) = P \quad (4.17)$$

Cette complexe maximisation peut être décomposée en deux maximisations plus simples. En effet, comme la matrice \mathbf{C}_w est hermitienne, on peut la décomposer sous la forme:

$$\mathbf{C}_w = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^{-1} \quad (4.18)$$

où \mathbf{Q} et \mathbf{D} sont les matrices des vecteurs propres et des valeurs propres de \mathbf{C}_w respectivement ([Lan69], équation (2.4.3)). Aussi, la décomposition en valeurs singulières de la matrice du canal \mathbf{H} donne:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V} \quad (4.19)$$

Le déterminant de l'équation (4.16) est alors:

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{H} \mathbf{C}_w \mathbf{H}^H \right| &= \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V} \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V})^H \right| \\ &= \left| \mathbf{U} \mathbf{I}_n \mathbf{U}^{-1} + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V} \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{U}^{-1} \right| \\ &= \left| \mathbf{U} \left(\mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{S} \mathbf{V} \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S}^H \right) \mathbf{U}^{-1} \right| \\ &= \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{S} \mathbf{V} \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S}^H \right| \end{aligned} \quad (4.20)$$

La maximisation de l'information mutuelle peut alors s'exprimer de la manière suivante:

$$\max_{\mathbf{C}_w} \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{H} \mathbf{C}_w \mathbf{H}^H \right| = \max_{\mathbf{D}, \mathbf{Q}} \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{S} \mathbf{V} \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S}^H \right| \quad (4.21)$$

avec les contraintes:

$$\text{tr}(\mathbf{D}) = P \quad (4.22)$$

et \mathbf{Q} doit être unitaire.

4.3.1 Maximisation sur la matrice des vecteurs propres \mathbf{Q}

La maximisation posée à l'équation (4.21) est de la forme:

$$\max_{\mathbf{A}} |\mathbf{I}_n + \mathbf{A}| = \max_{\mathbf{B}} |\mathbf{B}| \quad (4.23)$$

où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont hermitiques et positives semi-définies. En effet, la matrice \mathbf{A} est positive semi-définie si elle satisfait la condition:

$$\mathbf{xAx}^H \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad (4.24)$$

où \mathbf{x} est un vecteur ligne. Comme \mathbf{A} est de la forme \mathbf{TT}^H , on peut vérifier que:

$$\mathbf{xAx}^H = \mathbf{xTT}^H\mathbf{x}^H = \mathbf{yy}^H = \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \geq 0 \quad (4.25)$$

Par la suite, on peut vérifier que \mathbf{B} est aussi positive semi-définie:

$$\mathbf{xBx}^H = \mathbf{xIx}^H + \mathbf{xAx}^H = \mathbf{xx}^H + \mathbf{yy}^H = \sum_{i=1}^n (|x_i|^2 + |y_i|^2) \geq 0 \quad (4.26)$$

Or, l'inégalité d'Hadamard [CT91] affirme que le déterminant d'une matrice positive semi-définie est plus petit ou égal au produit des éléments de sa diagonale:

$$|\mathbf{B}| \leq \prod_{i=1}^n b_{ii} \quad (4.27)$$

avec égalité si et seulement si \mathbf{B} est diagonale. Par conséquent, \mathbf{A} doit être diagonale et on doit donc poser $\mathbf{Q} = \mathbf{V}^{-1}$ dans (4.21), ce qui donne:

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{HC}_w \mathbf{H}^H \right| &= \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{SDS}^H \right| \\ &= \prod_{i=1}^{\min(m,n)} \left(1 + \frac{1}{\sigma_z^2} |s_i|^2 d_i \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

où les s_i et d_i sont les éléments de la diagonale principale de \mathbf{S} et \mathbf{D} respectivement. La limite supérieure du produit de l'équation (4.28) correspond au nombre de $|s_i|^2$ non nuls, qui est égal au nombre minimum de colonnes et de lignes de $\mathbf{S}^{n \times m}$, ou $\min(m, n)$. Or, on a [Lan69]:

$$|s_i|^2 = \lambda_i \quad (4.29)$$

où les λ_i sont les valeurs propres non nulles de $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$. On obtient donc la maximisation équivalente:

$$\max_{\mathbf{C}_w} \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{H} \mathbf{C}_w \mathbf{H}^H \right| = \max_{\mathbf{D}} \prod_{i=1}^{\min(m,n)} \left(1 + \frac{1}{\sigma_z^2} \lambda_i d_i \right) \quad (4.30)$$

avec la contrainte:

$$\sum_{i=1}^m d_i = P \quad (4.31)$$

La capacité est donc donnée par:

$$C = \max_{\mathbf{D}} \left[\sum_{i=1}^{\min(m,n)} E_{\mathbf{H}} \left\{ \log_2 \left(1 + \frac{1}{\sigma_z^2} \lambda_i d_i \right) \right\} \right] \quad (4.32)$$

La matrice de covariance \mathbf{C}_w permettant d'atteindre cette capacité est donnée par:

$$\mathbf{C}_w = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{V} \quad (4.33)$$

où \mathbf{V}^{-1} est la matrice des vecteurs propres de $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ et \mathbf{D} est la matrice des d_i obtenue après maximisation de (4.32).

4.3.2 Maximisation sur la matrice des valeurs propres \mathbf{D}

L'équation (4.32) montre que le système est équivalent à $\min(m, n)$ canaux parallèles avec les puissances $P_i = d_i$, $i = 1, \dots, \min(m, n)$, et un bruit équivalent $N_i = \sigma_z^2 / \lambda_i$. Selon Cover [CT91], la solution de l'équation est obtenue à l'aide de l'algorithme de remplissage («waterfilling»). Comme illustré à la Figure 4.2, le remplissage consiste à augmenter la puissance émise à partir de zéro en l'allouant au canal ayant le moins de bruit (N_1). La

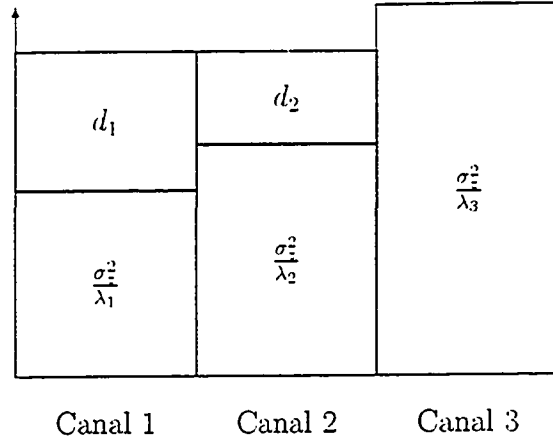


Figure 4.2: Principe du remplissage ("waterfilling").

puissance est ensuite distribuée aux canaux plus bruyants jusqu'à ce que la puissance totale soit atteinte ($d_1 + d_2 = P$). On remarque qu'il est possible que l'on alloue aucune puissance à un canal ($d_3 = 0$). Ce phénomène se produit lorsque la puissance totale transmise n'est pas suffisante pour «remplir» tous les canaux. situation causée par un trop grand écart entre les niveaux de bruit (N_i) des différents canaux. L'écart de bruit entre deux canaux est donné par:

$$\Delta N = \sigma_z^2 \left| \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j} \right| \quad (4.34)$$

Deux situations peuvent donc causer une grande différence. Premièrement, un écart entre les valeurs propres λ_i et λ_j . Les plus grands écarts seront causés par une des valeurs propres étant très petite due à une corrélation entre les antennes ou à un canal avec une forte atténuation. Deuxièmement, un niveau de bruit σ_z^2 élevé va amplifier les différences entre les λ_i . Par conséquent, on peut s'attendre à ce que le phénomène soit plus fréquent pour un rapport signal-sur-bruit peu élevé.

La solution générale du calcul de capacité s'obtient en utilisant le multiplicateur de Lagrange et en solutionnant le système linéaire. La solution a été obtenue pour quelques valeurs de $\min(m, n)$, ce qui a permis par la suite d'obtenir par déduction une équation

générale. Dans le cas où $\min(m, n) = 2$, il est facile de trouver la solution de (4.32) en utilisant le multiplicateur de Lagrange. On trouve alors que les valeurs propres de \mathbf{C}_W sont:

$$d_1 = \frac{P(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1/\rho - \lambda_2/\rho)}{2\lambda_1\lambda_2} \quad (4.35)$$

$$d_2 = \frac{P(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2/\rho - \lambda_1/\rho)}{2\lambda_1\lambda_2} \quad (4.36)$$

Cette solution peut donner une valeur négative, ce qui en pratique n'est pas possible puisque cela signifierait que l'on doit émettre une puissance négative. Comme les valeurs propres de \mathbf{C}_W ne peuvent être négatives, il faut ajouter la contrainte que $d_1, d_2 \geq 0$, ou de façon équivalente:

$$\rho > \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\lambda_1\lambda_2} \quad (4.37)$$

Ou encore, pour faire référence au principe du remplissage (voir (4.34)), on peut exprimer la contrainte de puissance positive par:

$$P > \sigma_z^2 \left| \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right| \quad (4.38)$$

i.e.. la puissance doit être plus grande que l'écart de bruit équivalent entre les deux canaux afin de les «remplir» tous les deux. En supposant que cette contrainte est respectée, le maximum de (4.32) pour le cas où $\min(m, n) = 2$ est donc:

$$\max_{\mathbf{D}} \prod_{i=1}^2 \left(1 + \frac{1}{\sigma_z^2} \lambda_i d_i \right) = \frac{(\rho\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2)^2}{4\lambda_1\lambda_2} \quad (4.39)$$

Dans le cas où la valeur de λ_2 est négative (en posant arbitrairement $\lambda_2 \leq \lambda_1$, s'il y a une valeur propre négative, ce sera λ_2), celle-ci est fixée à zéro et λ_1 est donc égale à P . Le maximum est alors simplement $1 + \rho\lambda_1$.

En utilisant la même méthode pour $\min(m, n) = 3, 4, \dots$, on trouve la solution suivante:

$$d_i = \frac{P}{\rho \min(m, n)} \left[\rho + \sum_{j=1}^{\min(m, n)} \frac{1}{\lambda_j} - \frac{\min(m, n)}{\lambda_i} \right] \quad (4.40)$$

Aussi, le maximum est donné par la formule générale:

$$\max_{\mathbf{D}} \prod_{i=1}^{\min(m,n)} \left(1 + \frac{1}{\sigma_i^2} \lambda_i d_i \right) = \prod_{i=1}^{\min(m,n)} \lambda_i \left[\frac{\rho + \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \frac{1}{\lambda_i}}{\min(m,n)} \right]^{\min(m,n)} \quad (4.41)$$

Cependant, tel qu'indiqué auparavant, il est possible qu'une valeur propre soit négative et que la solution ne soit pas valide. Cette valeur propre est alors fixée à zéro et il faut alors vérifier si la solution d'un ordre moins élevé (c'est-à-dire $\min(m,n) - 1$) est valide. Afin de vérifier si la solution est valide, on vérifie si la plus petite valeur propre est positive. Ceci peut se faire en utilisant l'équation (4.40) directement ou en vérifiant si la puissance est suffisante pour «remplir» tous les canaux: les deux tests sont équivalents. En effet, l'équation à tester à l'étape 3 de l'algorithme suivant peut être obtenue en utilisant l'équation (4.40) directement:

$$d_k = \frac{P}{\rho k} \left[\rho + \sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} - \frac{k}{\lambda_k} \right] \geq 0$$

$$\rho \geq \frac{k-1}{\lambda_k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i}$$

La même équation est aussi obtenue en vérifiant si la puissance est suffisante pour «remplir» les canaux selon le principe du remplissage (voir Figure 4.2), avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k$:

$$P \geq \left(\frac{\sigma_k^2}{\lambda_k} - \frac{\sigma_k^2}{\lambda_1} \right) + \left(\frac{\sigma_k^2}{\lambda_k} - \frac{\sigma_k^2}{\lambda_2} \right) + \dots + \left(\frac{\sigma_k^2}{\lambda_k} - \frac{\sigma_k^2}{\lambda_{k-1}} \right)$$

$$P \geq \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\sigma_k^2}{\lambda_k} - \frac{\sigma_k^2}{\lambda_i} \right)$$

$$\rho \geq \frac{k-1}{\lambda_k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i}$$

Ce processus est répété jusqu'à ce que la solution soit valide, c'est-à-dire jusqu'à ce que toutes les valeurs propres de la solution soient positives. L'algorithme suivant permet de trouver le maximum pour arriver à déterminer la capacité du canal.

Algorithme de calcul de la capacité lorsque l'émetteur connaît l'état du canal

1. $k \leftarrow \min(m, n)$

2. Calculer les valeurs propres non nulles de $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k$

3. Tester:

$$\rho \begin{cases} \geq \frac{k-1}{\lambda_k} & d_k > 0 \\ < \frac{k-1}{\lambda_k} & d_k < 0 \end{cases} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i}$$

si $d_k < 0$: $d_k = 0$, $k \leftarrow k - 1$, répéter l'étape 3.

si $d_k \geq 0$: la solution est valide:

$$d_i = \begin{cases} \frac{P}{\rho k} \left[\rho + \sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} - \frac{k}{\lambda_i} \right], & i \leq k \\ 0, & i > k \end{cases}$$

et le maximum est donné par:

$$\max_{\mathbf{D}} \prod_{i=1}^{\min(m,n)} \left(1 + \frac{1}{\sigma_z^2} \lambda_i d_i \right) = \prod_{i=1}^k \lambda_i \left[\frac{\rho + \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i}}{k} \right]^k$$

On se souvient que lorsqu'aucun traitement n'est effectué, le système est équivalent à $\min(m, n)$ canaux parallèles. Dans le cas où le traitement est optimal, on remarque que le système peut être réduit à $k \leq \min(m, n)$ canaux indépendants. La solution optimale peut donc consister à réduire le nombre de canaux équivalents en délaissant les pires canaux et en concentrant la puissance vers les meilleurs canaux. L'algorithme a été utilisé pour tracer les graphiques de capacité de la Figure 4.3. Chaque point représente la moyenne de 10000 valeurs de capacité prises comme variables aléatoires, calculées à l'aide de cet algorithme.

4.3.3 Transformation linéaire G

La solution des d_i permet de calculer la matrice de covariance qui atteint la capacité à l'aide de l'équation (4.33). Par la suite, il s'agit de déterminer la transformation linéaire

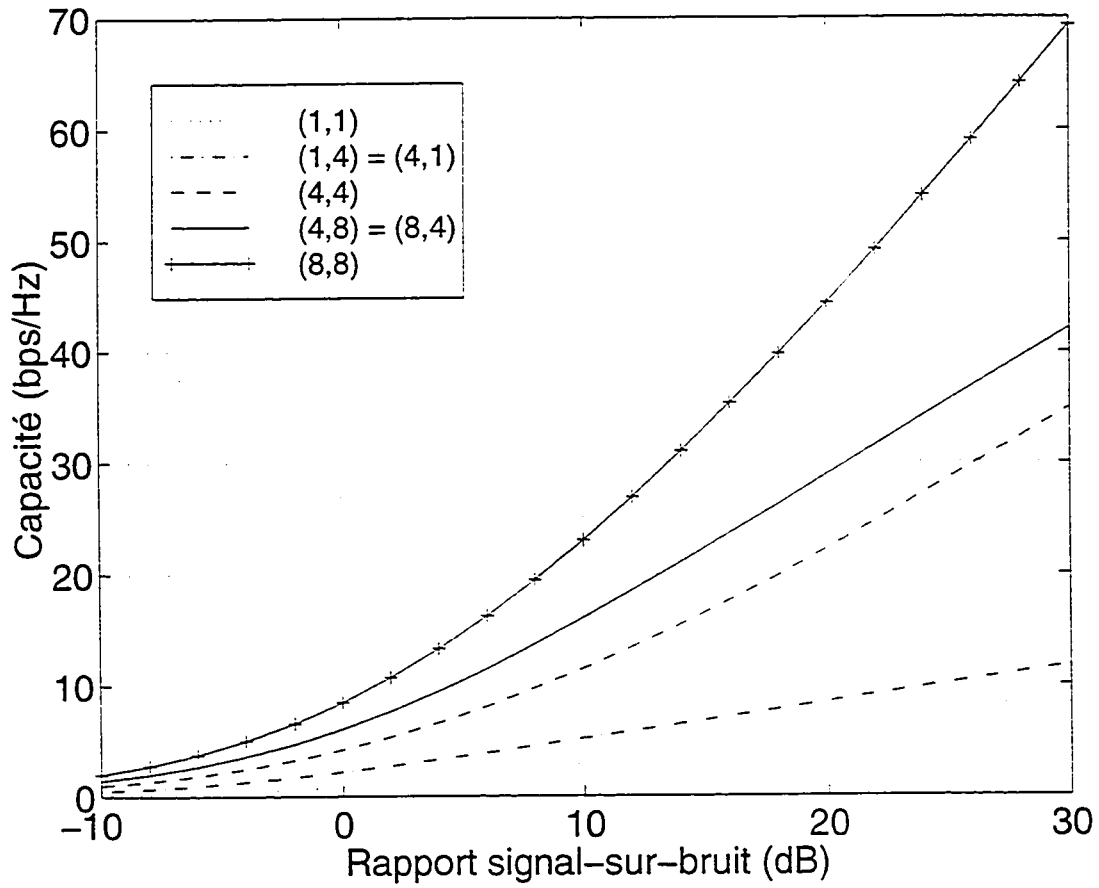


Figure 4.3: Capacité avec prétraitement optimal.

\mathbf{G} correspondante. En combinant les dérivations de la section 4.2 sur la relation entre la matrice de covariance \mathbf{C}_w et la transformation linéaire \mathbf{G} , et la solution de maximisation, on obtient:

$$\mathbf{C}_w = \frac{P}{m} \mathbf{G} \mathbf{G}^H = \mathbf{V}^H \mathbf{D} \mathbf{V} \quad (4.42)$$

La matrice \mathbf{G} n'est pas unique mais un choix judicieux est:

$$\mathbf{G} = \sqrt{\frac{m}{P}} \mathbf{V}^H \mathbf{D}^{1/2} \quad (4.43)$$

En fait, la matrice \mathbf{G} doit être de la forme:

$$\mathbf{G} = \sqrt{\frac{m}{P}} \mathbf{V}^H \mathbf{D}^{1/2} \Gamma \quad (4.44)$$

où $\Gamma^{m \times m}$ est une matrice unitaire. Afin de simplifier le traitement, on choisit $\Gamma = \mathbf{I}_m$.

4.4 Capacité asymptotique

La capacité asymptotique avec prétraitement est dérivée en posant $\rho \gg 1$ dans l'équation de maximisation (4.32):

$$\max_{\mathbf{D}} \prod_{i=1}^{\min(m,n)} \frac{1}{\sigma_z^2} \lambda_i d_i = \prod_{i=1}^{\min(m,n)} \left(\frac{1}{\sigma_z^2} \lambda_i \right) \max_{\mathbf{D}} \prod_{i=1}^{\min(m,n)} d_i \quad (4.45)$$

En utilisant le multiplicateur de Lagrange, la solution devient simplement:

$$d_i = \begin{cases} \frac{P}{\min(m,n)} & i \leq \min(m,n) \\ 0 & i > \min(m,n) \end{cases} \quad (4.46)$$

et la capacité asymptotique s'exprime par:

$$C_{asympt} = \min(m,n) \log_2 \left(\frac{\rho}{\min(m,n)} \right) + \sum_{i=1}^{\min(m,n)} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_i] \quad (4.47)$$

L'espérance mathématique a été calculée au chapitre précédent et la capacité asymptotique devient ((3.21) et (3.22)):

$$C_{asympt} = \min(m,n) \log_2 \left(\frac{\rho}{\min(m,n)} \right) + \frac{1}{\ln(2)} (l - \min(m,n) \gamma) \quad (4.48)$$

où l pour $\min(m, n) > 1$ est donné par:

$$l = \min(m, n) \sum_{i=1}^{\min(m, n)} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{\min(m, n)-1} \frac{i}{\max(m, n) - i} \quad (4.49)$$

4.4.1 Asymptote pour $n \geq m$

On remarque que pour $n \geq m$, \mathbf{C}_W est alors:

$$\mathbf{C}_W = \frac{P}{m} \mathbf{I}_m = \mathbf{C}_X \quad (4.50)$$

Ceci signifie qu'aucun traitement n'est nécessaire à l'émetteur afin d'atteindre la capacité lorsque le nombre d'antennes réceptrices est égal ou supérieur au nombre d'antennes émettrices pour $\rho \gg 1$, c'est-à-dire pour un rapport signal-sur-bruit très grand. En effet, la capacité est alors donnée par:

$$C = E_H \left[\log_2 \left| \mathbf{I}_n + \frac{\rho}{m} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right| \right] \quad (4.51)$$

Ceci est le même résultat obtenu que dans le cas où le canal n'est pas connu à l'émetteur. Les Figures 4.4 et 4.5 comparent la capacité avec et sans traitement. On remarque que le gain obtenu du prétraitement lorsque $n \geq m$ est très limité, particulièrement pour un rapport signal-sur-bruit élevé. Cette limitation du prétraitement devra être considérée lors de la conception d'un tel système, et le gain de capacité potentiel devra être comparé à l'augmentation de complexité qu'entraîne l'utilisation d'un tel prétraitement à l'émetteur.

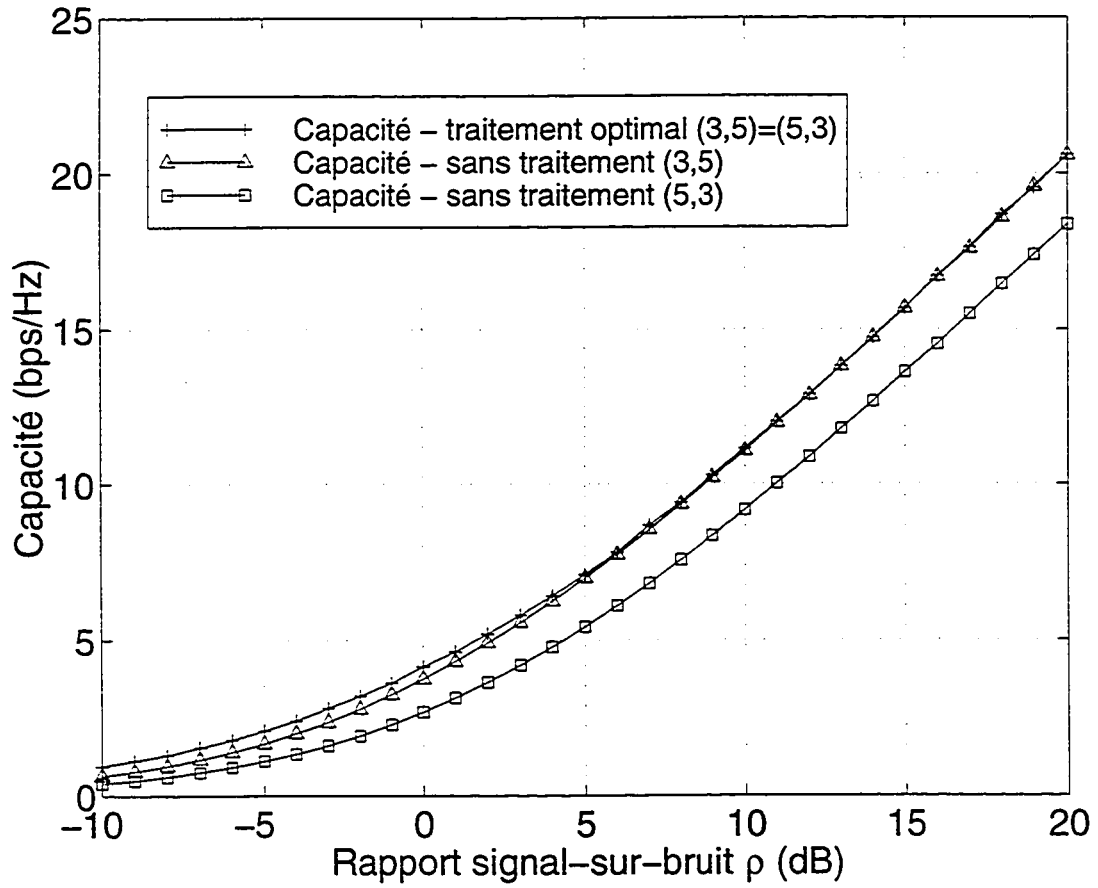


Figure 4.4: Comparaison de la capacité: prétraitement optimal et aucun prétraitement.

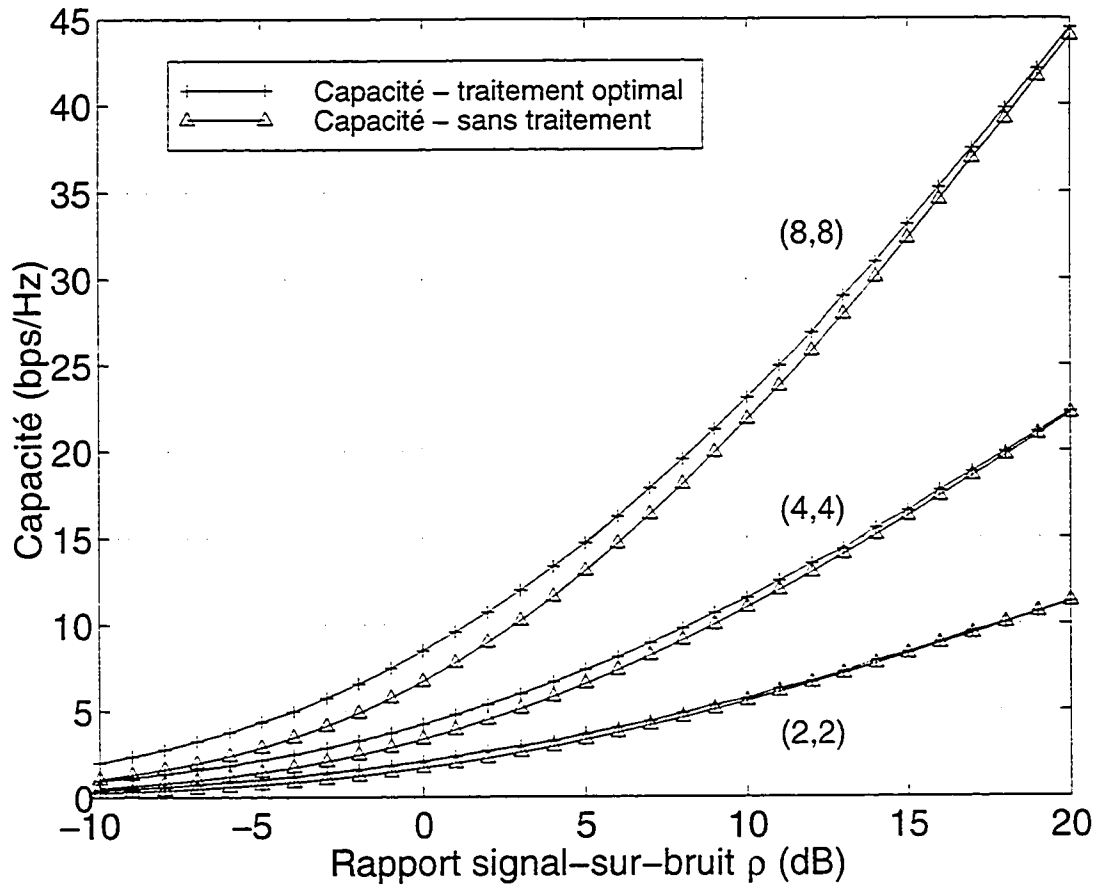


Figure 4.5: Comparaison de la capacité: prétraitement optimal et aucun prétraitement.

4.5 Gain obtenu suite à la transformation linéaire \mathbf{G} pour $\rho \gg 1$

Nous comparons maintenant les rapport-sur-bruit nécessaires, avec et sans prétraitement, afin d'obtenir la même valeur de capacité, ce qui nous donne le gain obtenu de la transformation linéaire \mathbf{G} . Le signal reçu dans le cas avec prétraitement est donné par:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{H}\mathbf{W} + \mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{G}\mathbf{X} + \mathbf{Z} \\ &= \sqrt{\frac{m}{P}} \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{X} + \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Il est possible de calculer le gain sur le rapport signal-sur-bruit dû à cette transformation. En effet, le rapport signal-sur-bruit avec prétraitement est donné par:

$$\begin{aligned} \rho_{opt} &= \frac{E \left[(\mathbf{H}\mathbf{W})^H \mathbf{H}\mathbf{W} \right]}{E \left[\mathbf{Z}^H \mathbf{Z} \right]} \quad (4.53) \\ &= \frac{E \left[\left(\sqrt{\frac{m}{P}} \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{X} \right)^H \sqrt{\frac{m}{P}} \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{X} \right]}{E \left[\mathbf{Z}^H \mathbf{Z} \right]} \\ &= \frac{E \left[\|\mathbf{S}\mathbf{D}^{1/2}\|_f^2 \right]}{n\sigma_z^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} E \left[|s_i|^2 d_i \right]}{n\sigma_z^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} E \left[\lambda_i d_i \right]}{n\sigma_z^2} \quad (4.54) \end{aligned}$$

Il est difficile de trouver l'espérance pour la solution générale des d_i . Par contre, pour $\rho \gg 1$, la simplicité de la solution permet d'obtenir:

$$\begin{aligned} \rho_{opt} &= \frac{P}{\min(m, n) n \sigma_z^2} \sum_{i=1}^{\min(m, n)} E \left[\lambda_i \right] \\ &= \frac{P \max(m, n)}{\sigma_z^2 n} \\ &= \frac{\max(m, n)}{n} \rho \end{aligned} \quad (4.55)$$

où $\rho = \frac{P}{\sigma_z^2}$ est le rapport signal-sur-bruit sans prétraitement. On remarque que pour $n \geq m$, il n'y a aucun gain sur le rapport signal-sur-bruit, ce qui confirme les résultats précédents. Il est possible d'arriver au même résultat en utilisant les équations de capacité asymptotique avec et sans traitement optimal, C_{asympt}^{opt} et C_{asympt}^{nopt} :

$$\begin{aligned} C_{asympt}^{opt}(\rho_{opt}) - C_{asympt}^{nopt}(\rho_{nopt}) &= \min(m, n) \left[\log_2 \left(\frac{\rho_{opt}}{\min(m, n)} \right) - \log_2 \left(\frac{\rho_{nopt}}{m} \right) \right] = 0 \\ \Rightarrow \log_2 \left(\frac{\rho_{opt}}{\min(m, n)} \right) &= \log_2 \left(\frac{\rho_{nopt}}{m} \right) \\ \frac{\rho_{nopt}}{\rho_{opt}} &= \frac{m}{\min(m, n)} = \frac{\max(m, n)}{n} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Donc afin d'obtenir la même capacité avec et sans prétraitement, le rapport signal-sur-bruit sans prétraitement doit être $\frac{\max(m, n)}{n}$ supérieur à celui avec prétraitement. Le gain de capacité obtenu du prétraitement à l'émetteur est donné par:

$$\begin{aligned} \Delta C_{asympt} &= C_{opt} - C_{nopt} \\ &= \min(m, n) \left[\log_2 \left(\frac{\rho}{\min(m, n)} \right) - \log_2 \left(\frac{\rho}{m} \right) \right] \\ &= \min(m, n) \log_2 \left(\frac{m}{\min(m, n)} \right) = \min(m, n) \log_2 \left(\frac{\max(m, n)}{n} \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

4.6 Symmétrie de la capacité

Tel que mentionné précédemment, les valeurs propres non nulles λ_i de $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ et $\mathbf{H}^T\mathbf{H}^T$ sont identiques. On remarque donc que le problème de maximisation est identique pour les cas (m, n) et (n, m) :

$$C = \max_{\mathbf{D}} \sum_{i=1}^{\min(m, n)} E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \left(1 + \frac{1}{\sigma_z^2} \lambda_i d_i \right) \right] \quad (4.58)$$

Par conséquent, la capacité dans les deux cas est la même, ce qui nous permet d'affirmer ce qui suit:

Déclaration 1 *La capacité d'un système (m, n) est identique à celle d'un système (n, m) lorsqu'un traitement optimal est appliqué à l'émetteur.*

Cela peut sembler intuitivement incorrect puisque comme discuté auparavant, le cas $(1, n)$ aura l'avantage par rapport au cas $(m, 1)$ de multiplier la puissance par n . Par contre, lorsque le canal est connu à l'émetteur, le prétraitement effectué correspond à une forme de formation de faisceau ("beamforming"), ce qui en fait multiplie la puissance transmise dans la direction des antennes réceptrices, et par conséquent les capacités dans les deux directions deviennent identiques.

Donc, théoriquement, il n'y a aucun avantage à utiliser un système plutôt que l'autre. Par contre, si le rapport signal-sur-bruit est élevé, il a été démontré précédemment qu'aucun pré-traitement n'est nécessaire pour un système (m, n) avec $n \geq m$, ce qui en pratique constitue un avantage important.

4.7 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons d'abord dérivé l'expression de la capacité lorsque l'état du canal est connu de l'émetteur et du récepteur. Dans ce cas, l'émetteur adapte les symboles transmis au canal en appliquant une transformation linéaire \mathbf{G} au vecteur des symboles transmis. Cette expression prends la forme d'une maximisation similaire à l'expression de capacité (2.19) présentée au chapitre 2, avec la différence que la capacité est maintenant aussi fonction de \mathbf{G} . La solution de cette maximisation a ensuite été dérivée afin d'obtenir le prétraitement linéaire \mathbf{G} requis à l'émetteur. Aussi, un algorithme permettant de trouver la solution a été présenté. Ensuite, on a remarqué que les capacités asymptotiques avec et sans traitement sont identiques lorsque le nombre d'antennes réceptrices est égal ou supérieur au nombre d'antennes émettrices ($n \geq m$). Ce phénomène a une conséquence pratique intéressante. En effet, si $n \geq m$, il n'est donc pas très avantageux de concevoir un émetteur complexe avec prétraitement. Par ailleurs, le gain de capacité obtenu du prétraitement devient de plus en plus important à mesure que le rapport m/n augmente et que le rapport signal-sur-bruit diminue. Finalement, il a été démontré que la capacité est symétrique, c'est-à-dire que la capacité est la même dans les deux directions lorsque l'émetteur connaît l'état du canal. En

d'autres mots. la capacité est identique pour les cas $(m, n) = (a, b)$ et $(m, n) = (b, a)$.

Chapitre 5

Erreur d'estimation du canal à l'émetteur

5.1 Introduction

Au chapitre précédent, le traitement optimal à l'émetteur a été analysé en supposant que le canal était connu parfaitement à l'émetteur. En pratique, les paramètres du canal doivent être estimés et on peut s'attendre à une réduction de la capacité suite à une estimation imparfaite.

On étudie donc dans ce chapitre l'effet sur la capacité d'une erreur d'estimation à l'émetteur. À cette fin, on modélise à la section 5.2 cette erreur d'estimation par un bruit gaussien. Ce modèle d'erreur nous permet ensuite de concevoir à la section 5.3 un algorithme de calcul de la capacité en fonction du niveau d'erreur d'estimation, et les résultats de simulation utilisant cet algorithme sont présentés en fonction de l'importance de l'erreur d'estimation et du rapport signal-sur-bruit.

5.2 Modélisation de l'erreur d'estimation

La méthode la plus simple pour estimer le canal consiste à émettre une matrice de symboles connus $\mathbf{X}^{m \times m}$, c'est-à-dire un symbole pour chacune des m antennes pendant m intervalles de temps. La matrice des symboles reçus est donc:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{Z} \quad (5.1)$$

L'estimation linéaire de l'état du canal consiste simplement à inverser la matrice des symboles transmis:

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{H} + \mathbf{Z}\mathbf{X}^{-1} \quad (5.2)$$

On remarque que la variance des éléments de $\hat{\mathbf{H}}$ sera en général différente de celle de \mathbf{H} , qui est de valeur unitaire dans notre cas. L'estimation finale consiste donc à normaliser $\hat{\mathbf{H}}$ par rapport à la variance:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{\hat{\mathbf{H}}}{\sqrt{\text{var}(\hat{h})}} \quad (5.3)$$

où $\text{var}(\hat{h})$ est la variance des éléments de la matrice $\hat{\mathbf{H}}$. La matrice estimée du canal $\tilde{\mathbf{H}}$ est donc de la forme:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H} + \mathbf{E}}{\sqrt{\text{var}(h + e)}} \quad (5.4)$$

où $\mathbf{E} = \mathbf{Z}\mathbf{X}^{-1}$ est la matrice d'erreur dont les éléments sont modélisés par des variables gaussiennes complexes centrées à zéro avec variance σ_e^2 . Le dénominateur $\sqrt{\text{var}(h + e)}$ impose aux éléments de la matrice estimée $\tilde{\mathbf{H}}$ cette variance unitaire, tout comme \mathbf{H} , et ce peu importe la variance de l'erreur. La variance au dénominateur est:

$$\text{var}(h + e) = E[(h + e)(h + e)^*] \quad (5.5)$$

$$= E[hh^*] + E[ee^*] \quad (5.6)$$

$$= 1 + \sigma_e^2 \quad (5.7)$$

L'erreur d'estimation n'étant pas corrélée au gain complexe du canal, la matrice d'estimation du canal est donc:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H} + \mathbf{E}}{\sqrt{1 + \sigma_e^2}} \quad (5.8)$$

La variance de l'erreur d'estimation σ_e^2 peut prendre une valeur dans l'intervalle $[0, \infty[$, où une variance nulle correspond à une estimation parfaite du canal et une variance infinie signifie que l'estimation est une variable complètement aléatoire et indépendante du canal. Il est possible de traduire la variance d'erreur en un coefficient de corrélation entre le canal et son estimation, ce qui rend les comparaisons plus intuitives. Le coefficient de corrélation entre les coefficients de la matrice du canal et de son estimation est:

$$\rho_{h, \tilde{h}} = \frac{E[h\tilde{h}^*]}{\sigma_h \sigma_{\tilde{h}}} = \frac{E[h(h+e)^*]}{\sqrt{1 + \sigma_e^2}} = \frac{E[hh^*]}{\sqrt{1 + \sigma_e^2}} \quad (5.9)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma_e^2}} \quad (5.10)$$

La Figure 5.1 montre la corrélation entre l'état réel du canal \mathbf{H} et son estimation $\tilde{\mathbf{H}}$ en fonction de la variance de l'erreur d'estimation. Le modèle d'erreur consiste donc en l'addition d'une matrice au canal dont les éléments sont des variables gaussiennes complexes.

5.3 Résultats de simulation

L'effet de l'erreur d'estimation de la matrice du canal est étudié par simulation. Pour ce faire, nous avons développé un algorithme utilisant le modèle d'erreur d'estimation dérivé auparavant afin de calculer la capacité pour un grand nombre de réalisations du canal pour ensuite en faire la moyenne.

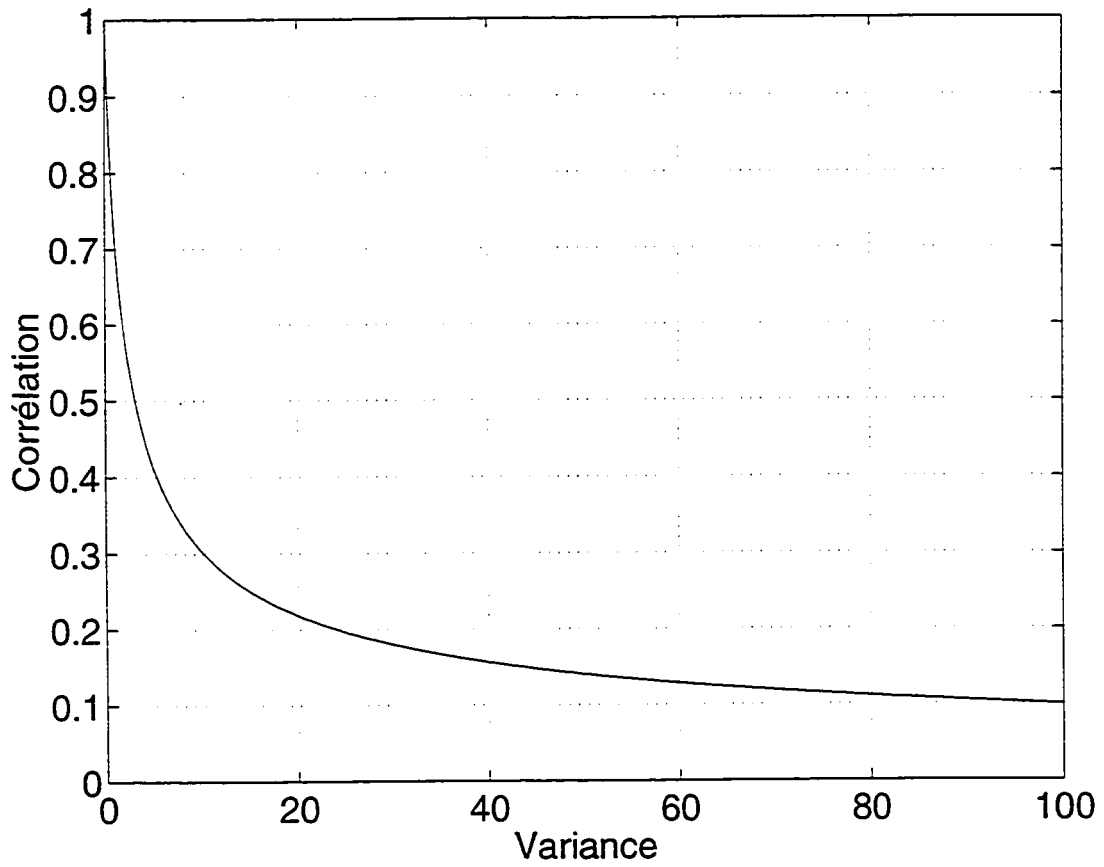


Figure 5.1: Corrélation $\rho_{h\tilde{h}}$ entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$ en fonction de la variance de l'erreur d'estimation σ_e^2 .

Algorithme de calcul de la capacité avec erreur d'estimation

- Initialiser le rapport signal-sur-bruit ρ
- Initialiser la variance de l'erreur σ_e^2
- Boucle 1: k réalisations du canal pour faire une moyenne
 - 1.1 Réalisation de \mathbf{H}
 - Boucle 2: l matrices d'erreur par réalisation du canal pour faire une moyenne
 - * 2.1 Réalisation de la matrice d'erreur \mathbf{E} avec variance σ_e^2
 - * 2.2 Simulation de l'estimation du canal:
$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H} + \mathbf{E}}{\sqrt{\text{var}(h + e)}}$$
 - * 2.3 Calcul de la matrice de covariance $\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{w}}$ basé sur l'estimation du canal
 - * 2.4 Calcul de la capacité avec erreur d'estimation \tilde{C} :
$$\tilde{C} = \log_2 \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_e^2} \mathbf{H} \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{w}} \mathbf{H}^H \right|$$
 - Fin de la boucle 2
 - 1.2 Calcul de la moyenne des l capacités pour une réalisation du canal
- Fin de la boucle 1
- Calcul de la moyenne des k capacités

Cet algorithme est utilisé pour chacune des valeurs de σ_e^2 et de ρ désirées, ce qui permet d'obtenir un graphique de la capacité soit en fonction de la corrélation entre la matrice du canal et son estimation ou soit en fonction du rapport signal-sur-bruit. Dans chacun des cas, la capacité sans traitement à l'émetteur est aussi tracée pour fins de comparaison.

5.3.1 Capacité en fonction de la corrélation

Chacun des graphiques illustrés aux figures 5.2 à 5.10 représente la capacité en fonction de la corrélation entre la matrice du canal \mathbf{H} et son estimation $\tilde{\mathbf{H}}$, pour une valeur du rapport signal-sur-bruit donnée. On remarque d'abord que la capacité est de croissance monotone avec la corrélation. Donc, une meilleure estimation du canal augmente la capacité peu importe la configuration (m, n) . Par ailleurs, il est possible, pour de faibles valeurs de corrélation, que la capacité avec prétraitement soit inférieure à la capacité sans prétraitement. Afin de mieux comprendre l'effet de l'estimation du canal sur la capacité avec prétraitement, quelques paramètres sont extraits des graphiques de capacité en fonction de la corrélation.

Pourcentage de réduction de la capacité due à l'estimation du canal

Ce pourcentage, $(C_{max} - C_{min})/C_{max}$, représente la différence de capacité entre les cas où l'estimation du canal est parfaite (corrélation de 1), C_{max} , et où l'état du canal n'est pas connu (corrélation nulle), C_{min} . Le tableau suivant résume les pourcentages de réduction de la capacité tirés des graphiques 5.2 à 5.10.

% de réduction			
(m, n)	-15 dB	3 dB	21 dB
(3,1)	66	49	25
(3,3)	52	23	2
(3,5)	44	11	0.01

Tableau 5.1: Pourcentage de réduction de la capacité avec erreur d'estimation.

On remarque que le pourcentage diminue avec le rapport signal-sur-bruit, c'est-à-dire que plus ρ augmente moins l'effet relatif de l'estimation est important. Aussi, l'effet de l'estimation diminue avec le ratio n/m . Donc, une erreur d'estimation du canal aura un effet plus important lorsque le nombre d'antennes émettrices est supérieur au nombre d'antennes réceptrices et que le rapport signal-sur-bruit est faible.

Corrélation critique

La corrélation $\rho_{h\bar{h}}$ correspondant à l'intersection de la droite de capacité sans pré-traitement et de la courbe de capacité avec erreur d'estimation est définie comme la corrélation critique $\rho_{critique}$. La corrélation critique permet de comparer différentes configurations (m, n) avec prétraitement au cas sans prétraitement.

(m, n)	Corrélation critique		
	-15 dB	3 dB	21 dB
(3,1)	-	0.3	0.48
(3,3)	0.18	0.67	0.98
(3,5)	0.23	0.78	-

Tableau 5.2: Corrélation critique.

On remarque que la corrélation critique augmente avec le rapport signal-sur-bruit et le rapport n/m . Par conséquent, une estimation de qualité est nécessaire afin d'atteindre une capacité supérieure au cas sans pré-traitement lorsque le nombre d'antennes réceptrices est supérieur au nombre d'antennes émettrices et que le rapport signal-sur-bruit est élevé.

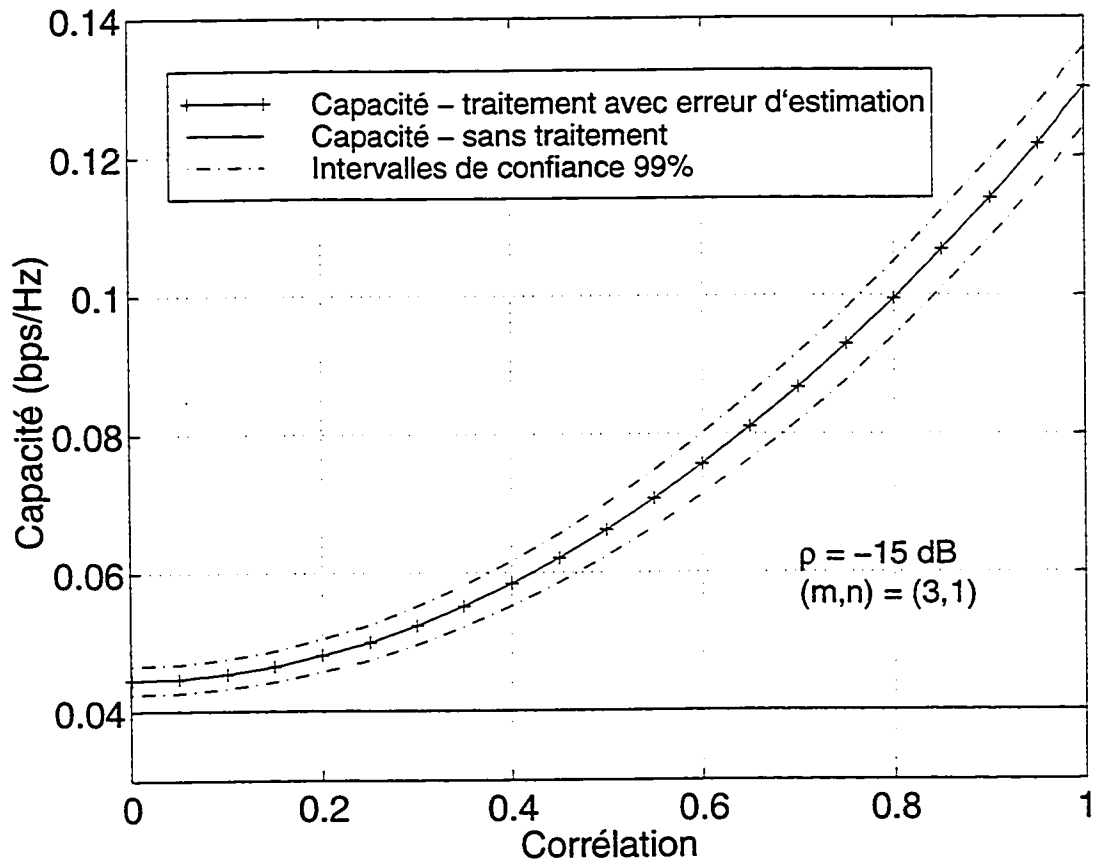


Figure 5.2: Capacité en fonction de la corrélation entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$ pour $\rho = -15$ dB et $(m, n) = (3, 1)$.

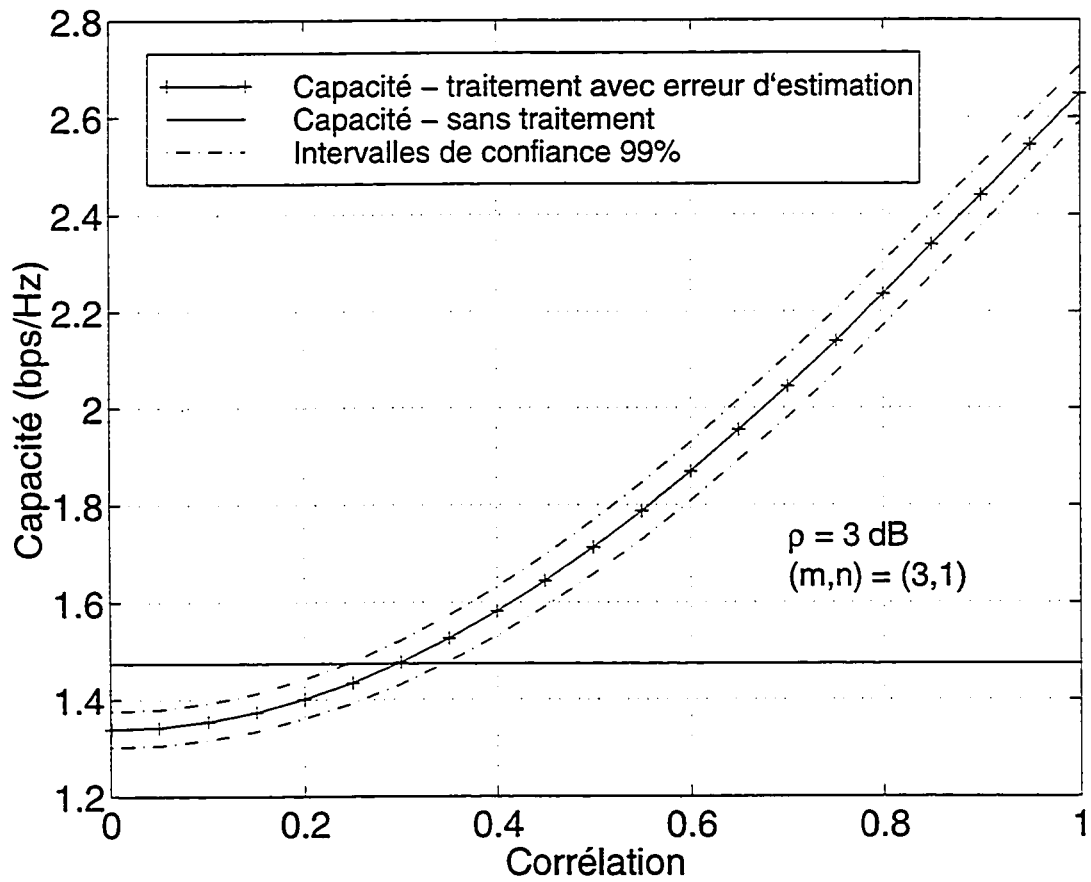


Figure 5.3: Capacité en fonction de la corrélation entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$ pour $\rho = 3 \text{ dB}$ et $(m,n) = (3,1)$.

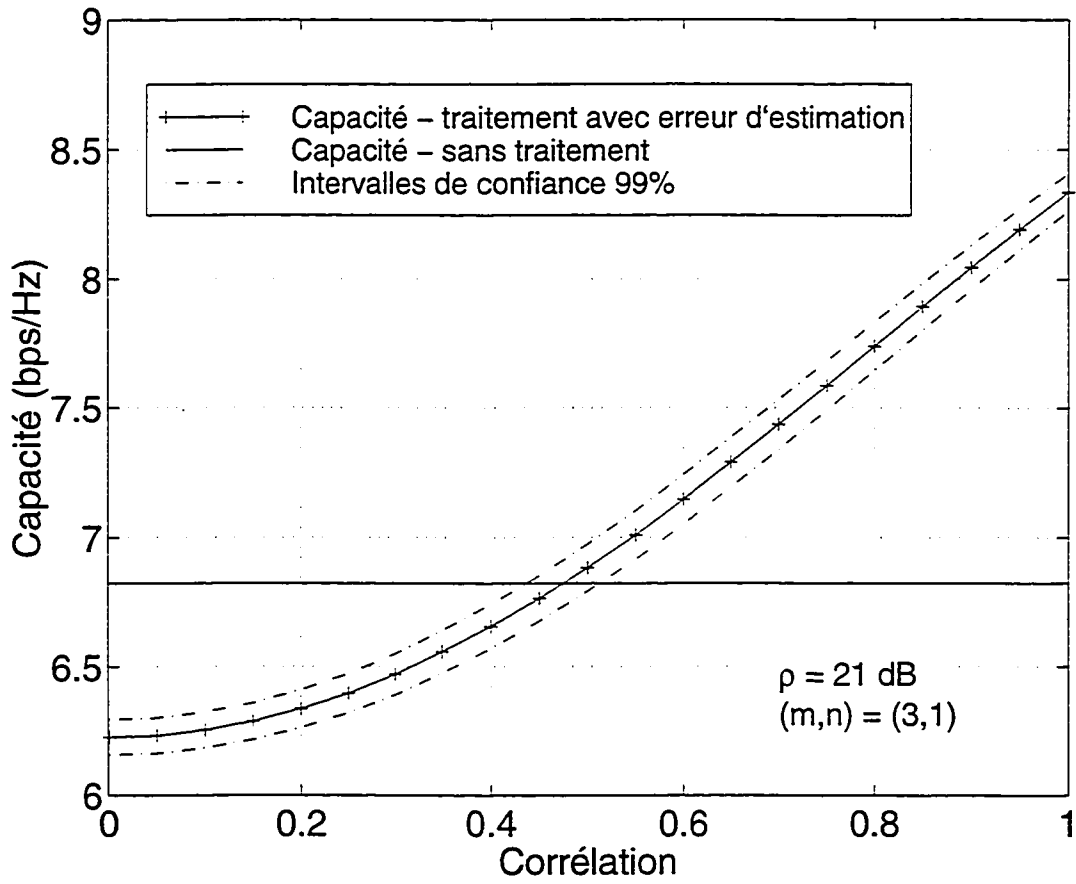


Figure 5.4: Capacité en fonction de la corrélation entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$ pour $\rho = 21 \text{ dB}$ et $(m,n) = (3,1)$.

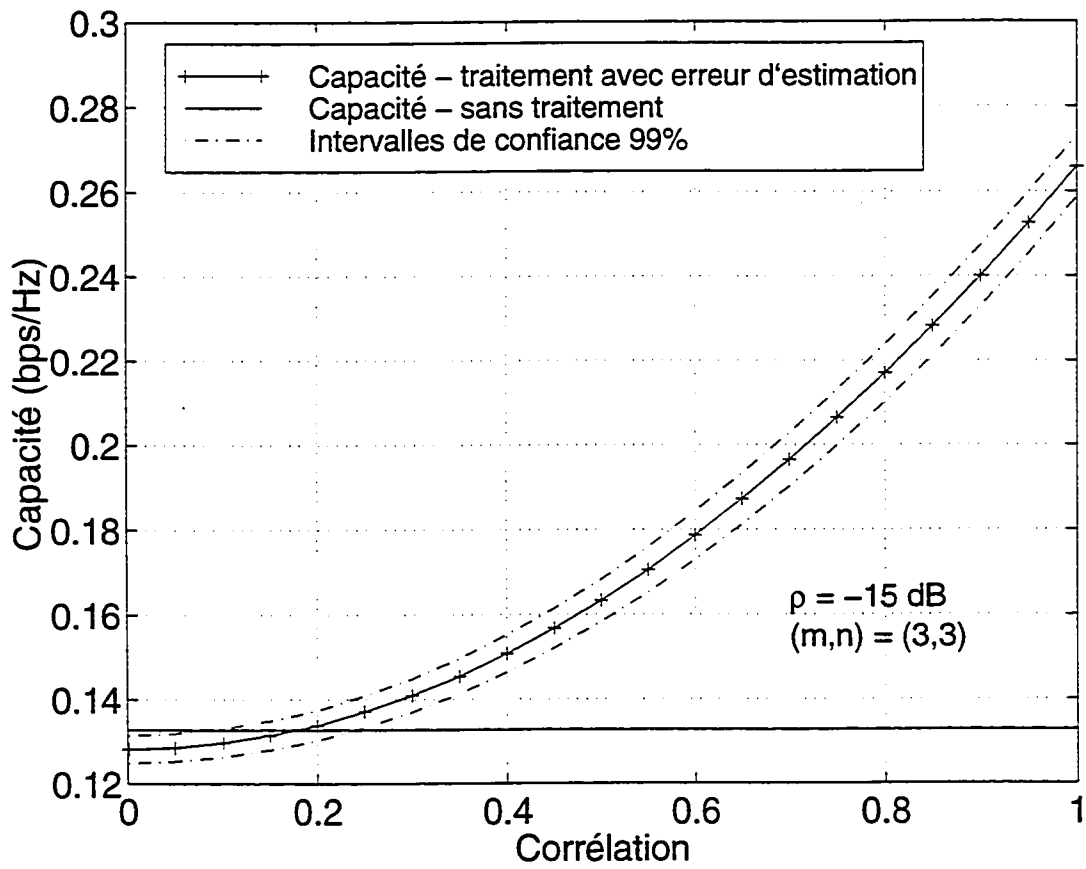


Figure 5.5: Capacité en fonction de la corrélation entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$ pour $\rho = -15 \text{ dB}$ et $(m, n) = (3, 3)$.

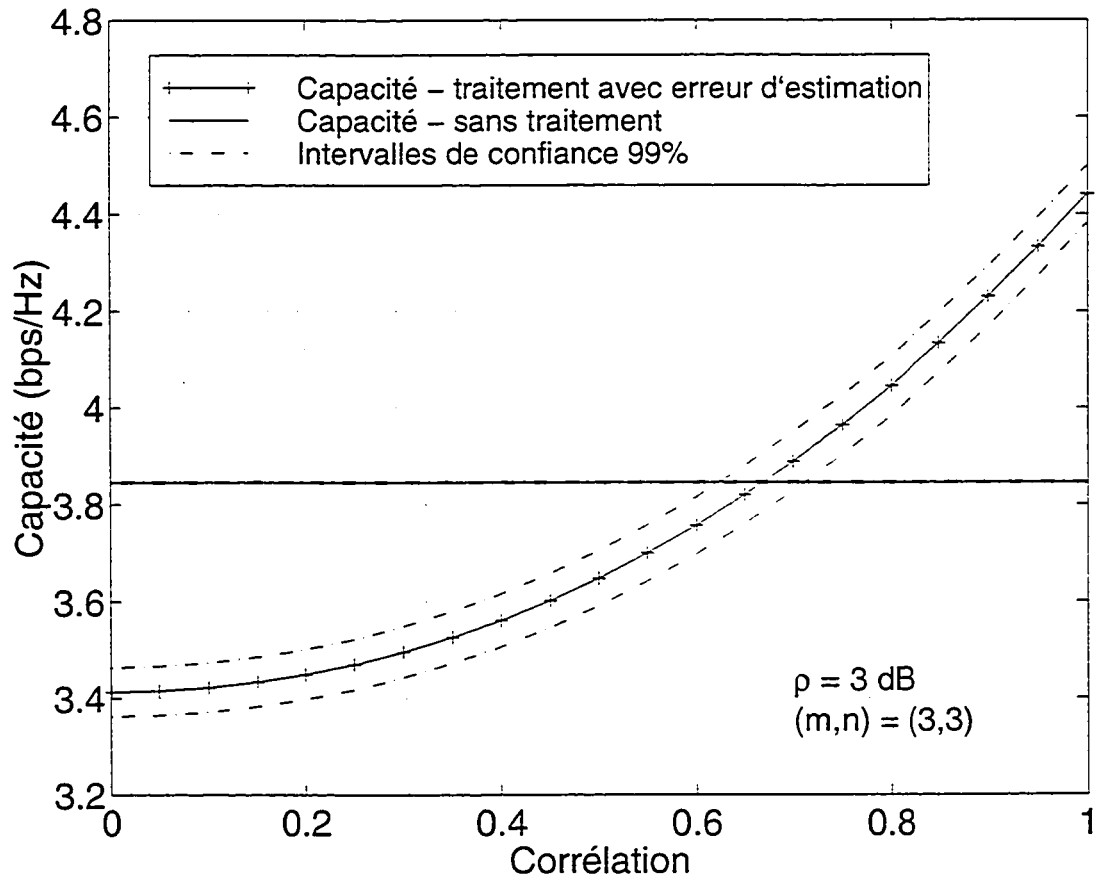


Figure 5.6: Capacité en fonction de la corrélation entre \mathbf{H} et $\hat{\mathbf{H}}$ pour $\rho = 3$ dB et $(m, n) = (3, 3)$.

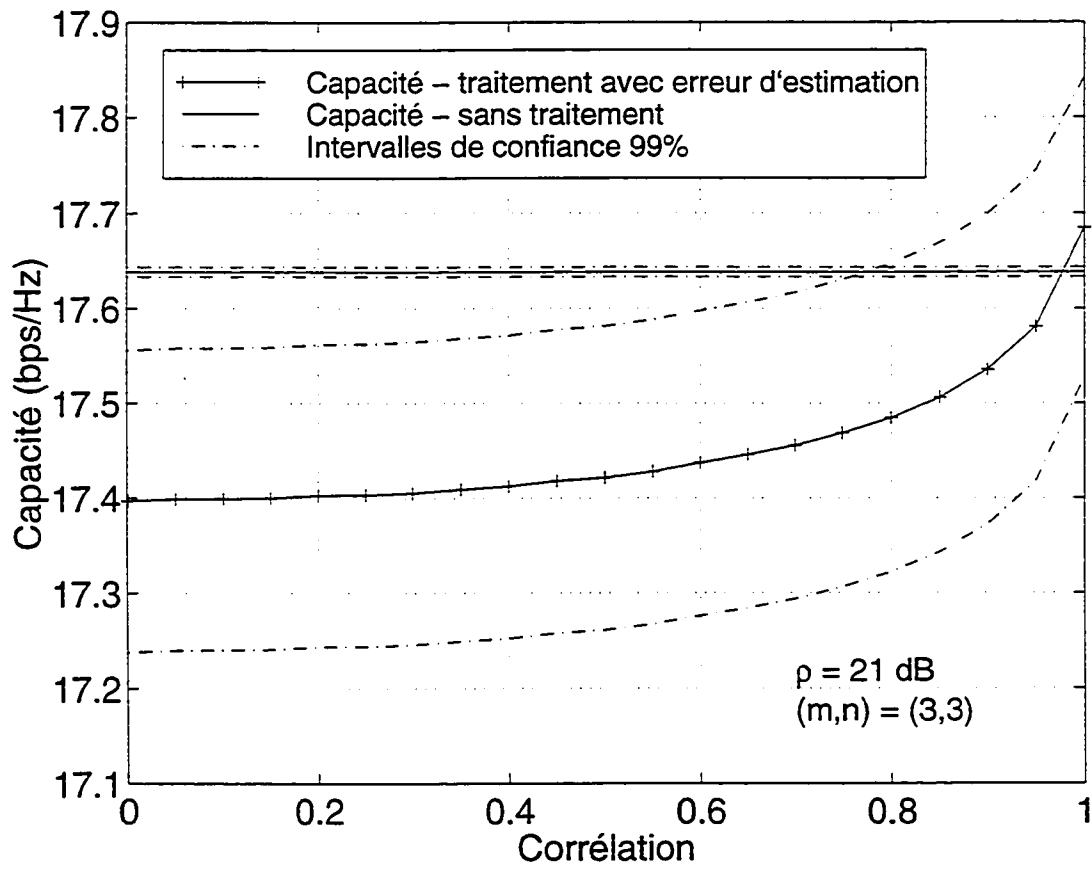


Figure 5.7: Capacité en fonction de la corrélation entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$ pour $\rho = 21$ dB et $(m, n) = (3, 3)$.

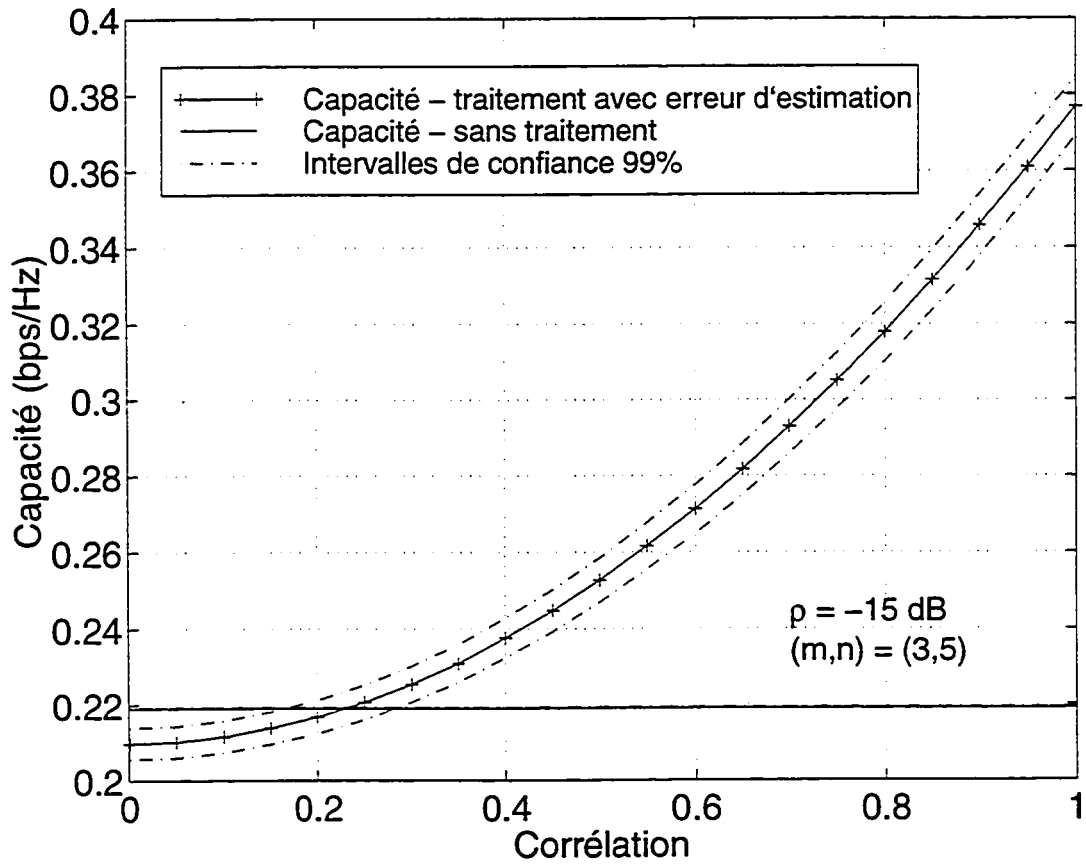


Figure 5.8: Capacité en fonction de la corrélation entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$ pour $\rho = -15$ dB et $(m, n) = (3, 5)$.

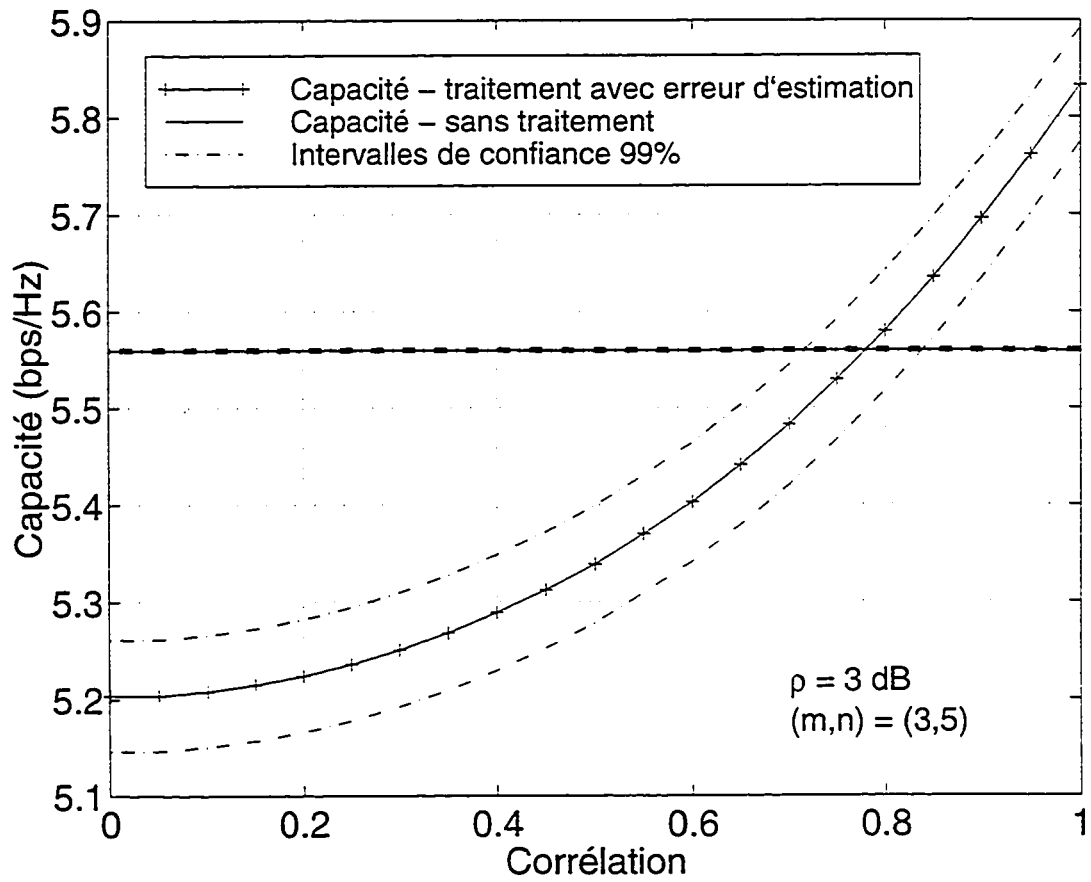


Figure 5.9: Capacité en fonction de la corrélation entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$ pour $\rho = 3 \text{ dB}$ et $(m, n) = (3, 5)$.

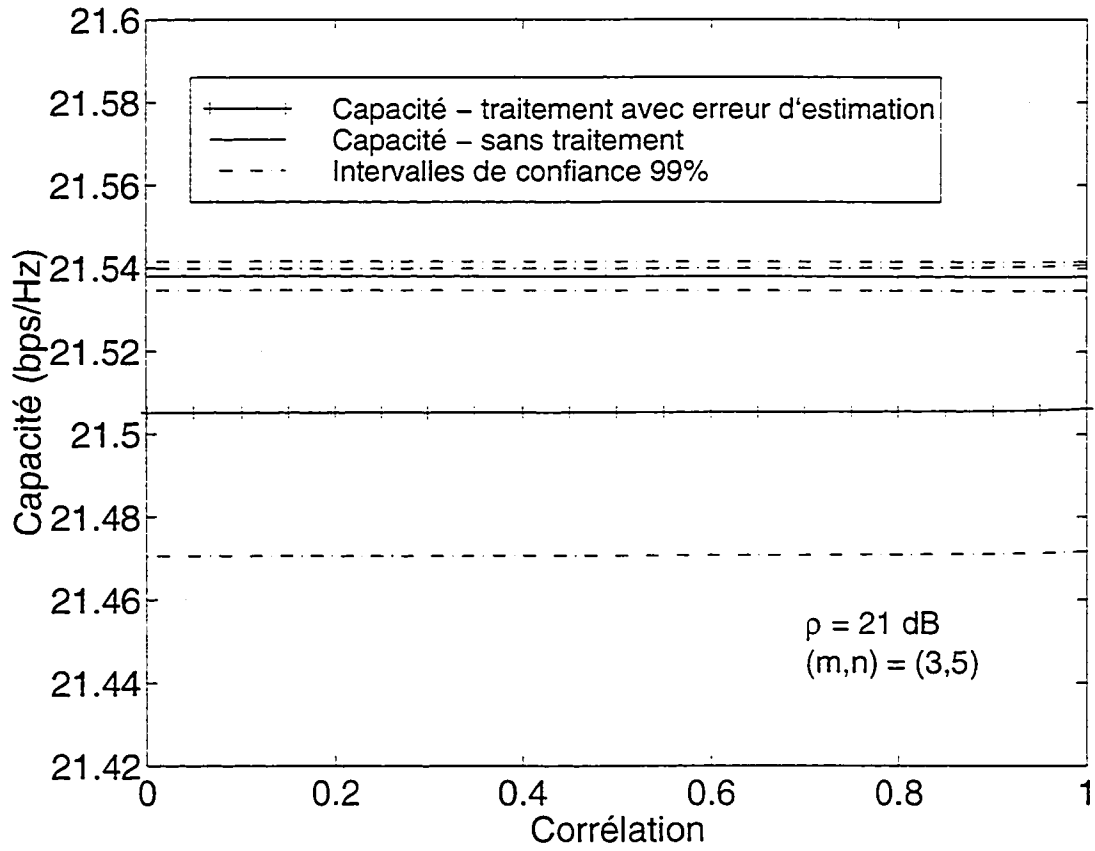


Figure 5.10: Capacité en fonction de la corrélation entre \mathbf{H} et $\hat{\mathbf{H}}$ pour $\rho = 21$ dB et $(m, n) = (3, 5)$.

5.3.2 Capacité en fonction du rapport signal-sur-bruit

La capacité avec erreur d'estimation est tracée en fonction du rapport signal-sur-bruit pour différentes configurations (m, n) et différentes valeurs de corrélation (0, 0.5, 0.85 et 1) aux figures 5.11 à 5.15.

Quelques remarques sur les graphiques de capacité en fonction du rapport signal-sur-bruit pour différentes valeurs de corrélation suivent. Premièrement, on remarque qu'une mauvaise estimation du canal peut mener à une valeur de capacité inférieure à celle obtenue sans prétraitement. Aussi, comme discuté auparavant, la réduction de capacité due à une estimation imparfaite de l'état du canal se fait sentir surtout lorsque $m > n$. En fait, pour le cas où $n \geq m$ et $\rho \gg 1$, la capacité ne dépend pas de la qualité de l'estimation du canal. Par contre, pour $m > n$, la capacité avec erreur d'estimation est toujours inférieure à la capacité avec estimation parfaite, même pour $\rho \gg 1$.

Ce comportement de la capacité pour une corrélation nulle et $\rho \gg 1$ peut être dérivé. On se base sur l'expression générale de capacité avec prétraitement et erreur d'estimation:

$$C = E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{H} \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{w}} \mathbf{H}^H \right| \right] \quad (5.11)$$

où $\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{w}}$ est la matrice de covariance obtenue après optimisation du prétraitement basée sur la matrice estimée du canal $\tilde{\mathbf{H}}$. La capacité est dérivée pour le cas où la variance de l'erreur tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque la corrélation entre l'estimation du canal et le canal est nulle et le rapport signal-sur-bruit est très grand ($\rho \gg 1$). La matrice de covariance est d'abord décomposée (comme à la section 4.3):

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \quad (5.12)$$

où $\tilde{\mathbf{D}}$ est une variable déterministe avec $\tilde{d}_{ii} = \frac{P}{\min(m, n)}$ et $\tilde{\mathbf{Q}}$ est une matrice aléatoire indépendante de \mathbf{H} due à une corrélation nulle entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$.

Pour le cas $n \geq m$, en utilisant l'identité $|\mathbf{I}_n + \mathbf{A} \mathbf{A}^H| = |\mathbf{I}_m + \mathbf{A}^H \mathbf{A}|$ et $\tilde{\mathbf{D}} =$

$\tilde{\mathbf{D}}^{1/2}\tilde{\mathbf{D}}^{1/2}$, on obtient:

$$C = E_{\mathbf{H},\tilde{\mathbf{Q}}} \left[\log_2 \left| \mathbf{I}_n + \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{H}\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{H}^H \right| \right] \quad (5.13)$$

$$= E_{\mathbf{H},\tilde{\mathbf{Q}}} \left[\log_2 \left| \mathbf{I}_m + \frac{1}{\sigma_z^2} \tilde{\mathbf{D}}^{1/2} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{D}}^{1/2} \right| \right] \quad (5.14)$$

Il est à noter que l'espérance se fait sur \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{Q}}$ puisqu'ils sont indépendants. Pour $\rho \gg 1$, on a:

$$C_{asympt} = E_{\mathbf{H},\tilde{\mathbf{Q}}} \left[\log_2 \left| \frac{1}{\sigma_z^2} \tilde{\mathbf{D}}^{1/2} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{D}}^{1/2} \right| \right] \quad (5.15)$$

$$= m \log_2 \left(\frac{1}{\sigma_z^2} \right) + \log_2 |\tilde{\mathbf{D}}| + E_{\mathbf{H}} [\log_2 |\mathbf{H}^H \mathbf{H}|] \quad (5.16)$$

$$= m \log_2 \left(\frac{\rho}{m} \right) + \sum_{i=1}^{\min(m,n)} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_i] \quad (5.17)$$

On obtient donc le même résultat que pour l'équation (4.47) avec $n \geq m$. c'est-à-dire que la capacité pour $\rho \gg 1$ est la même peu importe la qualité de l'estimation du canal lorsque $n \geq m$.

Pour le cas $m > n$, on a pour $\rho \gg 1$:

$$C_{asympt} = E_{\mathbf{H},\tilde{\mathbf{Q}}} \left[\log_2 \left| \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{H}\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{H}^H \right| \right] \quad (5.18)$$

$$= n \log_2 \left(\frac{1}{\sigma_z^2} \right) + E_{\mathbf{H},\tilde{\mathbf{Q}}} \left[\log_2 \left| \mathbf{H}\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{H}^H \right| \right] \quad (5.19)$$

En utilisant la décomposition singulière $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}$:

$$C_{asympt} = n \log_2 \left(\frac{1}{\sigma_z^2} \right) + E_{\mathbf{H},\tilde{\mathbf{Q}}} \left[\log_2 \left| \mathbf{H}\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{H}^H \right| \right] \quad (5.20)$$

$$= n \log_2 \left(\frac{1}{\sigma_z^2} \right) + E_{\mathbf{H},\tilde{\mathbf{Q}}} \left[\log_2 \left| \mathbf{S}\mathbf{V}\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S}^H \right| \right] \quad (5.21)$$

Puis, avec l'inégalité d'Hadamard, on a:

$$\left| \mathbf{S}\mathbf{V}\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S}^H \right| \leq \left| \mathbf{S}\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{S}^H \right| \quad (5.22)$$

$$\leq \prod_{i=1}^n \lambda_i d_i \quad (5.23)$$

$$\leq \prod_{i=1}^n \frac{P}{n} \lambda_i \quad (5.24)$$

avec égalité si et seulement si $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{V}^{-1}$. Or, comme $\tilde{\mathbf{Q}}$ est indépendant de \mathbf{H} , on a $\tilde{\mathbf{Q}} \neq \mathbf{V}^{-1}$ avec une probabilité de 1 et on a donc:

$$E_{\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{Q}}} \left[\log_2 \left| \mathbf{S} \mathbf{V} \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S}^H \right| \right] < E_{\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{Q}}} \left[\log_2 \left| \mathbf{S} \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{S}^H \right| \right] \quad (5.25)$$

Finalement, on obtient l'inégalité suivante:

$$C < n \log_2 \left(\frac{\rho}{n} \right) + \sum_{i=1}^{\min(m,n)} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_i] \quad (5.26)$$

En comparant l'inégalité (5.26) et l'équation (4.47) pour $m > n$, on conclue que la capacité avec erreur d'estimation infinie (corrélacion nulle) sera toujours inférieure à la capacité avec estimation parfaite lorsque $m > n$ et $\rho \gg 1$.

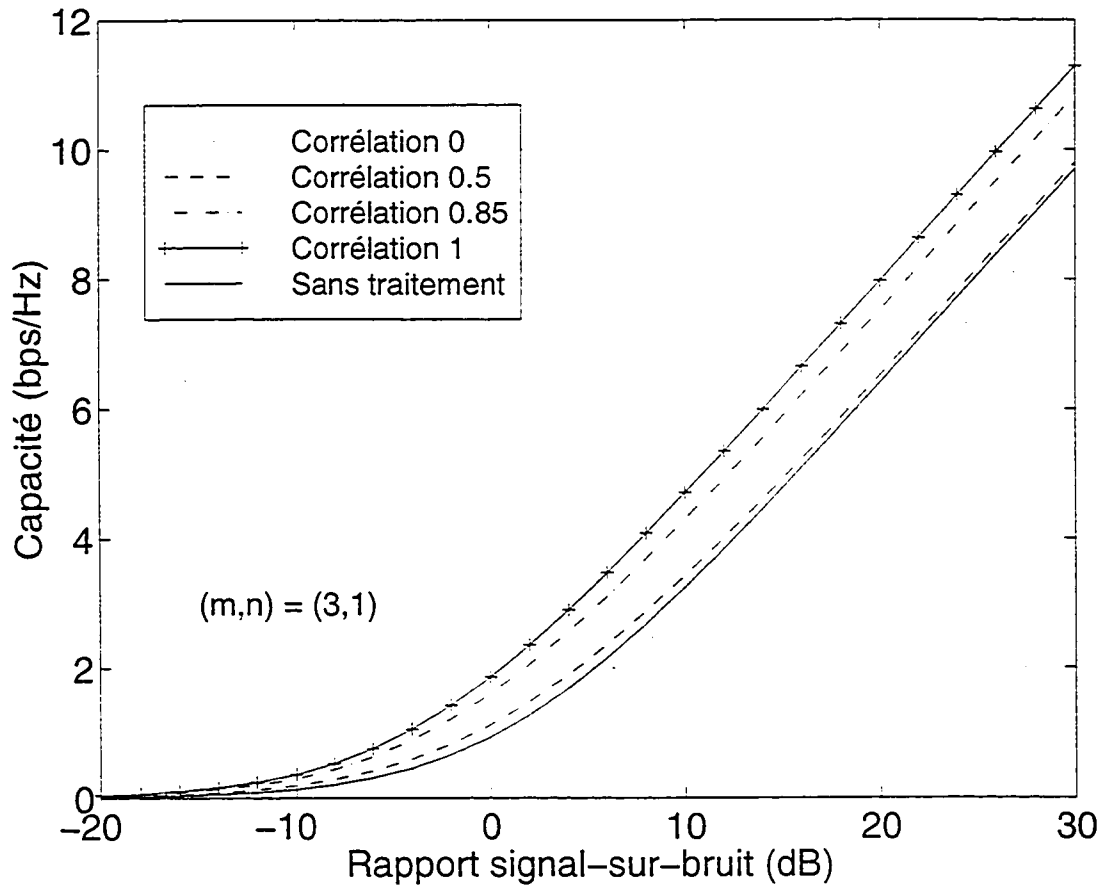


Figure 5.11: Capacité pour différentes valeurs de corrélation entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$. $(m,n) = (3,1)$.

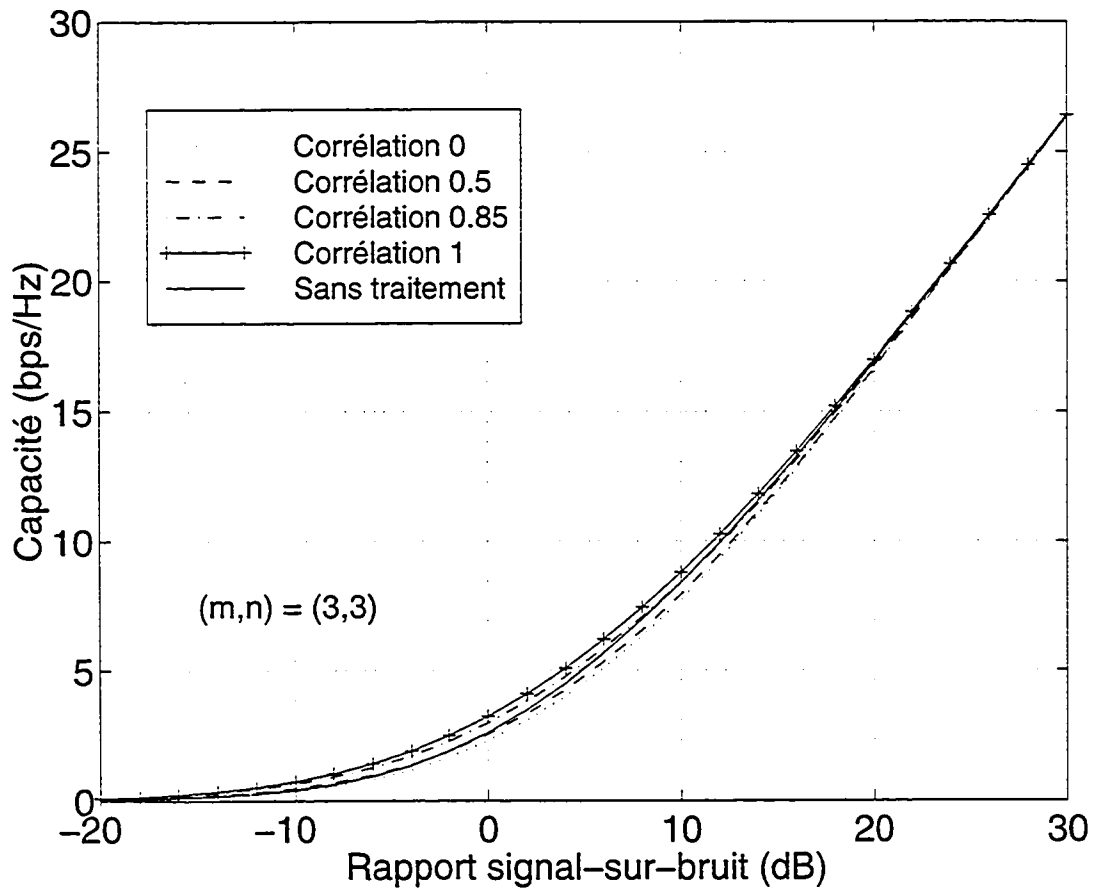


Figure 5.12: Capacité pour différentes valeurs de corrélation entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$. $(m, n) = (3, 3)$.

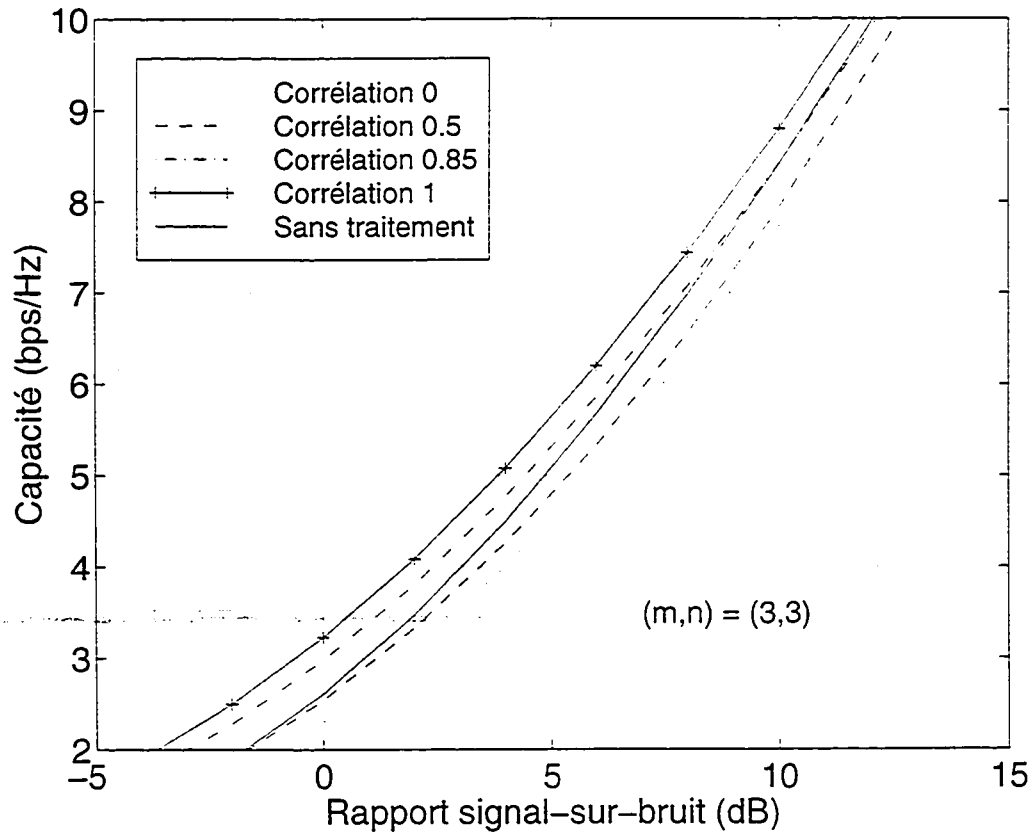


Figure 5.13: Capacité pour différentes valeurs de corrélation entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$, $(m, n) = (3, 3)$ (agrandissement).

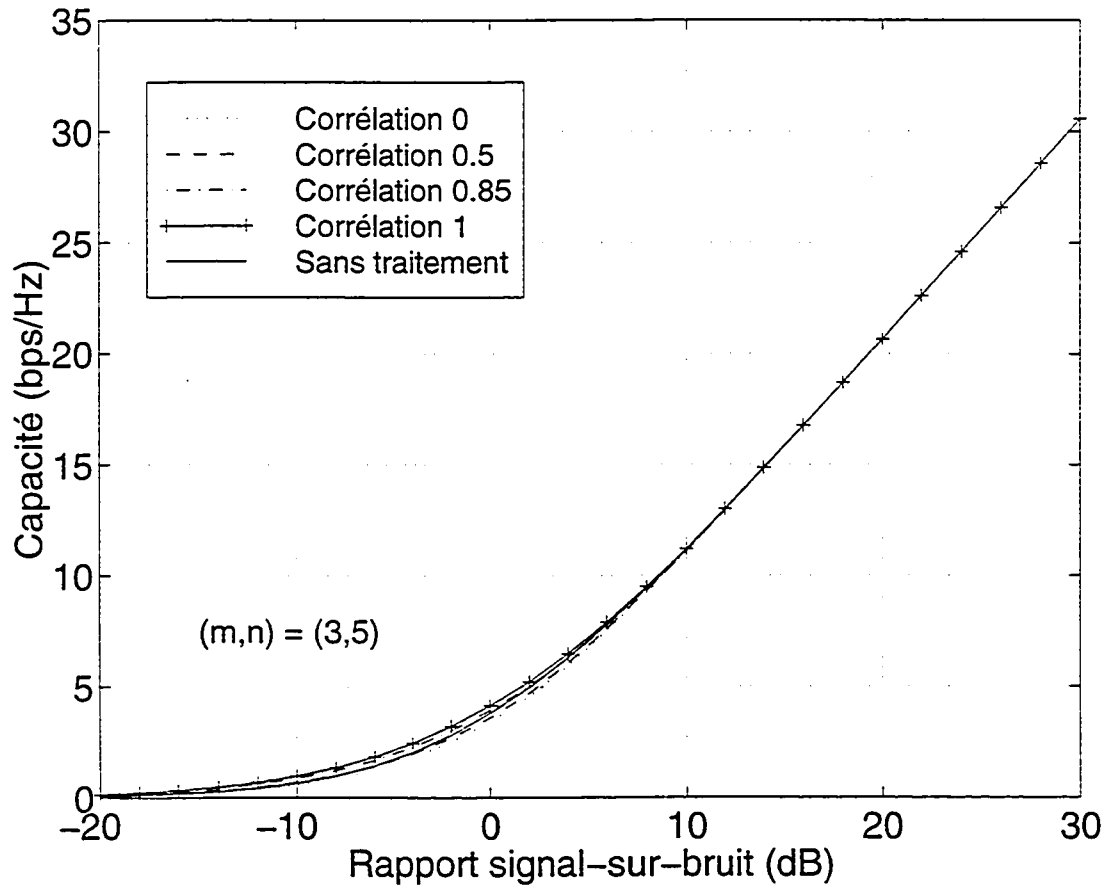


Figure 5.14: Capacité pour différentes valeurs de corrélation entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$, $(m, n) = (3, 5)$.

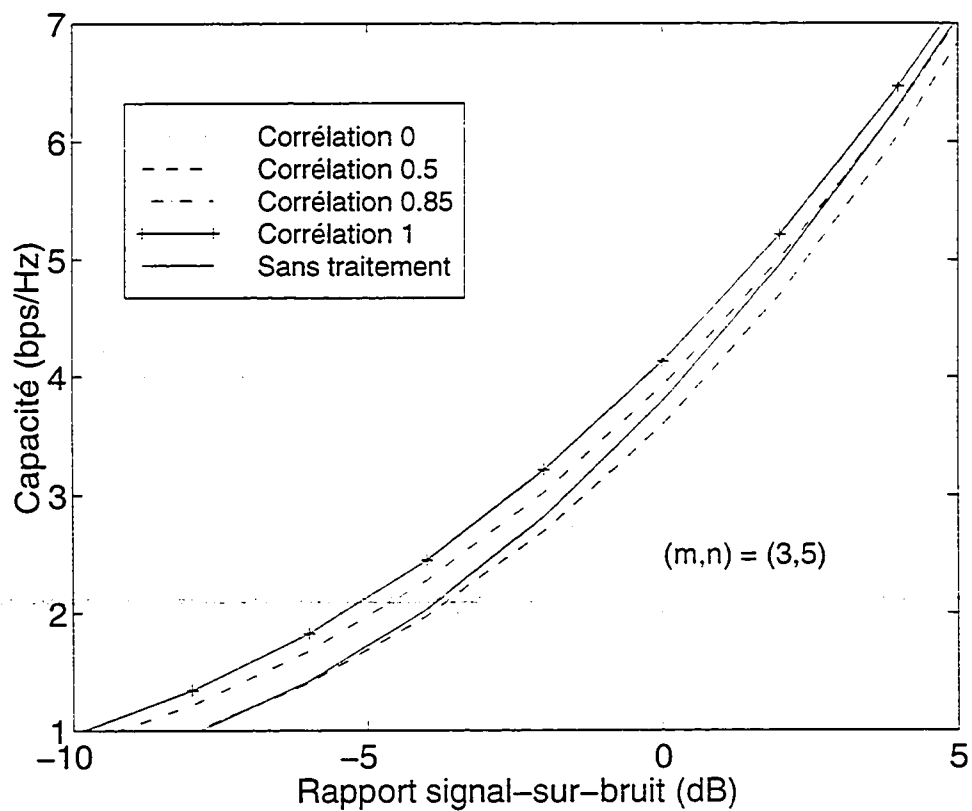


Figure 5.15: Capacité pour différentes valeurs de corrélation entre \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$. $(m,n) = (3,5)$ (agrandissement).

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'effet de l'erreur d'estimation du canal sur la capacité de systèmes avec prétraitement à l'émetteur. Cette étude s'est faite par simulation et les résultats ont été présentés en fonction de la corrélation entre la matrice du canal et son estimation, et en fonction du rapport signal-sur-bruit. Nous avons obtenu des conclusions pour deux cas opposés. Dans le cas où le nombre d'antennes émettrices est supérieur au nombre d'antennes réceptrices et que le rapport signal-sur-bruit est faible, nous avons conclu qu'une erreur d'estimation du canal a un effet important sur la capacité: la différence de capacité avec et sans erreur d'estimation est la plus élevée dans ce cas. Dans le cas où le nombre d'antennes réceptrices est supérieur au nombre d'antennes émettrices et que le rapport signal-sur-bruit est élevé, nous avons conclu qu'une estimation de qualité est nécessaire afin d'atteindre une capacité supérieure au cas sans prétraitement. Il est donc possible dans ce cas qu'un système sans prétraitement surpasse un système avec prétraitement si l'estimation du canal de ce dernier est erronée. Finalement, le comportement de la capacité avec erreur d'estimation infinie pour un grand rapport signal-sur-bruit ($\rho \gg 1$) a été étudié. Dans le cas $m > n$, la capacité avec erreur d'estimation infinie (corrélation nulle) sera toujours inférieure à la capacité avec estimation parfaite, alors qu'elle est la même peu importe la qualité de l'estimation du canal lorsque $n \geq m$. Nous concluons donc que le prétraitement est un avantage pour les systèmes où $m > n$ et le rapport signal-sur-bruit est faible, à la condition que l'estimation du canal par l'émetteur soit adéquate. Par contre, c'est justement dans une telle situation, c'est-à-dire lorsque le rapport signal-sur-bruit est faible, que les erreurs d'estimation du canal sont le plus probables, ce qui potentiellement pourrait limiter l'avantage du prétraitement au point où le gain obtenu ne justifie pas l'ajout de complexité au système.

Chapitre 6

Conclusions et suggestions de travaux de recherche

6.1 Sommaire

La diversité spatiale à l'émetteur et au récepteur est une technique qui semble très prometteuse pour les systèmes de communications dans un proche futur. Afin de connaître les avantages possibles de cette diversité en ce qui a trait à la capacité, nous avons étudié la capacité dans trois situations: le canal n'est connu qu'au récepteur, le canal est aussi connu à l'émetteur et finalement, l'émetteur connaît le canal mais avec une erreur d'estimation.

Au chapitre trois, nous avons dérivé des expressions d'asymptotes pour la capacité. Nous avons conclu que la capacité est proportionnelle à $\min(m, n)$. Aussi, nous avons montré que lorsque l'émetteur ne connaît pas le canal, un plus grand gain sur la capacité est obtenu en augmentant le nombre d'antennes réceptrices comparativement à une augmentation du nombre d'antennes émettrices. Nous avons aussi montré que la diversité soit à l'émetteur ou au récepteur ($\min(m, n) = 1$) est très peu sensible à la corrélation entre les coefficients d'atténuation des différentes antennes. Par contre, la corrélation entre les coefficients d'atténuation a un effet marqué sur un système avec diversité à l'émetteur et au récepteur. Finalement, la fonction de densité de probabilité de la capacité prise comme variable aléatoire

pour $\min(m, n) = 1$ a été dérivée.

Au chapitre quatre nous avons étudié le cas intéressant où l'émetteur possède une connaissance parfaite du canal, ce qui permet alors de modifier la distribution des symboles transmis afin de l'adapter au canal et ainsi augmenter la capacité du système. Un algorithme permettant le calcul de la matrice de covariance des symboles transmis et de la capacité résultante a été dérivé. Comme au chapitre deux, les asymptotes de capacité ont été dérivées. Nous avons déterminé que la capacité pour ces systèmes est la même dans les deux directions, contrairement au cas où l'émetteur ne connaît pas le canal. Ceci était attendu, étant donné que la capacité du système avec connaissance parfaite du canal correspond à la définition fondamentale de la capacité et que celle-ci est symétrique. Nous avons donc conclu qu'une augmentation du nombre d'antennes émettrices était aussi efficace au point de vue de la capacité qu'une augmentation du nombre d'antennes réceptrices. Finalement, nous avons remarqué que les asymptotes de la capacité avec, et sans, la connaissance du canal à l'émetteur pour $n \geq m$ étaient identiques. Il semble donc que la connaissance du canal à l'émetteur ait un effet limité dans ce cas. L'augmentation de complexité dû au traitement des symboles transmis et l'effet limité sur la capacité du traitement devront être considérés lors de la conception d'un système avec prétraitement à l'émetteur.

Au chapitre cinq, une erreur d'estimation du canal a été introduite à l'émetteur afin de déterminer son effet sur la capacité. Il a été montré que l'erreur d'estimation a un effet plus prononcé pour le cas $m > n$ et lorsque le rapport signal-sur-bruit est faible. En résumé, la connaissance de l'état du canal à l'émetteur peut mener à de plus grandes capacités, surtout lorsque le rapport signal-sur-bruit est faible et qu'il y a plus d'émetteurs que de récepteurs. Par contre, son avantage diminue grandement lorsque le nombre d'antennes réceptrices est plus élevé que le nombre d'antennes émettrices.

6.2 Suggestions de travaux de recherche

Au chapitre quatre, il a été démontré qu'un prétraitement avec matrice unitaire ne modifie pas la capacité par rapport à un système sans prétraitement. Il serait intéressant de vérifier si ce type de transformation pourrait avoir un avantage au niveau de la réception du signal. Par exemple, est-il possible d'appliquer une transformation unitaire à l'émetteur qui pourrait faciliter la tâche du récepteur, sans toutefois modifier la capacité? Aussi, la corrélation entre les antennes a été étudiée brièvement pour les deux cas extrêmes: sans corrélation et avec corrélation parfaite. Il serait possible d'étudier l'effet d'une corrélation quelconque dans l'intervalle $[0, 1]$. D'un point de vue pratique, on pourrait déterminer s'il est possible d'obtenir un algorithme plus rapide afin de déterminer la solution optimale de prétraitement. Il serait aussi intéressant d'obtenir des algorithmes non optimaux mais plus rapides et facilement réalisables. Enfin, l'étude de l'effet de l'estimation de l'état du canal sur la capacité est en grande partie obtenue par simulation. Une étude plus approfondie pourrait permettre d'obtenir les expressions des courbes de capacité en fonction de la corrélation de l'estimation, ou des approximations de ces courbes.

Annexe A

Calculs alternatifs des asymptotes

pour $\min(m, n) = 1$

Nous présentons ici des dérivations alternatives à celles présentées au chapitre 3 afin d'obtenir les asymptotes de capacité lorsque le canal n'est connu qu'au récepteur pour le cas $\min(m, n) = 1$. Ces dérivations utilisent les coefficients de la matrice du canal \mathbf{H} et non ses valeurs propres.

Le modèle du canal utilisé est le canal à évanouissement Rayleigh où les coefficients h_{ij} du canal sont de la forme $h_{ij} = N(0, 1/2) + jN(0, 1/2)$. La norme $X = |H_{ij}|$ de chaque coefficient est donc une variable Rayleigh normalisé avec $E[|H_{ij}|^2] = 2\sigma^2 = 1$ et la fonction de densité de probabilité de X est:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(x) &= \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} \\ &= 2xe^{-x^2} \quad \text{pour } x \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

La variable aléatoire $Y = X^2 = |H_{ij}|^2$ est donc une variable exponentielle avec une fonction de densité de probabilité donnée par:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}}(y) &= \frac{f_{\mathbf{X}}(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \\ &= e^{-y} \quad \text{pour } y \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A.1 Cas à antennes uniques de transmission et de réception

$$(m = n = 1)$$

Dans le cas (1, 1), l'équation de capacité est donnée par:

$$\begin{aligned} C &= E_{\mathbf{H}} [\log_2 (1 + \rho |h|^2)] \\ &= E_{\mathbf{H}} [\log_2 (1 + \rho Y)] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

En appliquant l'opérateur espérance mathématique et en utilisant la fonction de densité de probabilité exponentielle de (A.2), l'équation devient:

$$C = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{\infty} \ln(1 + \rho y) e^{-y} dy \quad (\text{A.4})$$

En posant $u = 1 + \rho y$, l'équation (A.4) devient:

$$C = \frac{e^{1/\rho}}{\ln(2)} \int_1^{\infty} \ln(u) e^{-u/\rho} du \quad (\text{A.5})$$

En utilisant l'identité:

$$\text{Ei}(-x) \equiv -x \int_1^{\infty} e^{-tx} \ln(t) dt \quad x > 0 \quad (\text{A.6})$$

$$C = -\frac{e^{1/\rho}}{\ln(2)} \text{Ei}(-1/\rho) \quad (\text{A.7})$$

De même, en utilisant l'identité:

$$\text{Ei}(x) \equiv \gamma + \ln(-x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} \quad x < 0 \quad (\text{A.8})$$

la capacité devient:

$$C = \frac{e^{1/\rho}}{\ln(2)} \left[\ln(\rho) - \gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1/\rho)^k}{k \cdot k!} \right] \quad (\text{A.9})$$

En ne gardant que les deux premiers termes de la série infinie, la limite inférieure de la capacité est donnée par:

$$C < \frac{e^{1/\rho}}{\ln(2)} \left[\ln(\rho) + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{4\rho^2} - \gamma \right] \quad (\text{A.10})$$

où $\gamma = 0.5772\dots$ est la constante d'Euler. Ce résultat a été obtenu auparavant par Alouini et Goldsmith [AG99]. L'asymptote de la capacité est donnée par:

$$C_{asympt} = \log_2(\rho) - \frac{\gamma}{\ln(2)} \quad (\text{A.11})$$

La démarche utilisée permet d'obtenir une limite inférieure aussi serrée que l'on désire en utilisant plus ou moins de termes de la série mais l'asymptote de la capacité aurait pu être obtenue plus rapidement de cette façon:

$$\begin{aligned} C_{asympt} &= \frac{1}{\ln(2)} \int_0^\infty \ln(\rho y) e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \left[\ln(\rho) + \int_0^\infty \ln(y) e^{-y} dy \right] \\ &= \frac{1}{\ln(2)} [\ln(\rho) - \gamma] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A.2 Cas avec une antenne émettrice et n antennes réceptrices

(1, n)

Si les éléments de \mathbf{H} sont indépendants, on trouve que l'argument du logarithme est:

$$\begin{vmatrix} 1 + \rho |h_1|^2 & \rho h_1 h_2^* & \dots & \rho h_1 h_n^* \\ \rho h_2 h_1^* & 1 + \rho |h_2|^2 & \dots & \rho h_2 h_n^* \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho h_n h_1^* & \rho h_n h_2^* & \dots & 1 + \rho |h_n|^2 \end{vmatrix} = 1 + \rho(|h_1|^2 + |h_2|^2 + \dots + |h_n|^2) \quad (\text{A.13})$$

La capacité est alors donnée par:

$$\begin{aligned} C &= E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \left(1 + \rho \sum_{i=1}^n |h_i|^2 \right) \right] \\ &= E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \left(1 + \rho \sum_{i=1}^n Y \right) \right] \\ &= E_{\mathbf{H}} [\log_2 (1 + \rho Z_n)] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Comme la variable Y a une distribution exponentielle, la variable $Z_n = \sum_{i=1}^n Y$ a une distribution d'Erlang:

$$f_{Z_n}(z) = \frac{z^{n-1} e^{-z}}{(n-1)!} \quad (\text{A.15})$$

En appliquant l'espérance mathématique et en utilisant la fonction de densité de probabilité d'Erlang d'ordre n de (A.15), l'équation devient:

$$C = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^\infty \ln(1 + \rho z) \frac{z^{n-1} e^{-z}}{(n-1)!} dz \quad (\text{A.16})$$

et donc:

$$C_{\text{asympt}} = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^\infty [\ln(\rho) + \ln(z)] \frac{z^{n-1} e^{-z}}{(n-1)!} dz \quad (\text{A.17})$$

En utilisant l'identité:

$$\int_0^\infty z^{n-1} e^{-z} dz \equiv \Gamma(n) = (n-1)! \quad (\text{A.18})$$

et l'identité suivante:

$$\int_0^\infty \ln(z) z^{n-1} e^{-z} dz = (n-1)! \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \gamma \right] \quad (\text{A.19})$$

l'asymptote de la capacité pour le cas $(1, n)$ s'exprime alors par:

$$C_{\text{asympt}} = \frac{1}{\ln(2)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \ln(\rho) - \gamma \right] \quad (\text{A.20})$$

A.3 Cas à m antennes émettrices et une antenne réceptrice ($m, 1$)

Si les éléments de \mathbf{H} sont indépendants, on a:

$$\begin{aligned} C &= E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \left(1 + \frac{\rho}{m} \sum_{i=1}^m |h_i|^2 \right) \right] \\ &= E_{\mathbf{H}} \left[\log_2 \left(1 + \frac{\rho}{m} Z_m \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

où Z_m est une variable aléatoire décrite par la distribution d'Erlang d'ordre m telle que définie dans la section précédente. En remplaçant ρ par ρ/m dans les dérivations pour le cas (1. n), on trouve l'asymptote suivante:

$$C_{asympt} = \frac{1}{\ln(2)} \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} - \ln(m) + \ln(\rho) - \gamma \right] \quad (\text{A.22})$$

Annexe B

Les valeurs propres non nulles des matrices $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ et $\mathbf{H}^T\mathbf{H}^T{}^H$ sont identiques (preuves)

Nous dérivons la preuve que les valeurs propres non nulles des matrices $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ et $\mathbf{H}^T\mathbf{H}^T{}^H$ sont identiques. La décomposition de \mathbf{H} en valeur singulière donne:

$$\mathbf{H}^{n \times m} = \mathbf{U}^{n \times n} \mathbf{S}^{n \times m} \mathbf{V}^{m \times m} \quad (\text{B.1})$$

où \mathbf{U} et \mathbf{V} sont unitaires et \mathbf{S} est diagonale. En utilisant ($\mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{I}_m$) et ($\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^{-1}$), on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{H}^H &= \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}(\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V})^H \\ &= \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}\mathbf{V}^H\mathbf{S}^H\mathbf{U}^H \\ &= \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{S}^H\mathbf{U}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où les éléments de $\mathbf{S}\mathbf{S}^H$ sont les valeurs propres de $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$. La matrice du canal inverse est \mathbf{H}^T et on a:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^T\mathbf{H}^{T^H} &= (\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V})^T(\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V})^{T^H} \\
 &= \mathbf{V}^T\mathbf{S}^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}^{T^H}\mathbf{S}^{T^H}\mathbf{V}^{T^H} \quad \text{où} \quad \mathbf{U}^T\mathbf{U}^{T^H} = (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U})^T = \mathbf{I}_n \\
 &= \mathbf{V}^T\mathbf{S}^T\mathbf{S}^{T^H}\mathbf{V}^{T^{-1}}
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

où les éléments de $\mathbf{S}^T\mathbf{S}^{T^H}$ sont les valeurs propres de $\mathbf{H}^T\mathbf{H}^{T^H}$. Finalement, comme \mathbf{S} est diagonale, les éléments non nuls de $\mathbf{S}\mathbf{S}^H$ et $\mathbf{S}^T\mathbf{S}^{T^H}$ sont identiques et les valeurs propres non nulles des matrices $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ et $\mathbf{H}^T\mathbf{H}^{T^H}$ sont identiques.

Annexe C

Calcul de $\sum_{i=1}^{\min(m,n)} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_i]$

Ce résultat est utilisé au chapitre trois afin d'obtenir les expressions de capacité asymptotique. L'espérance mathématique que l'on désire calculer est donnée par:

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_i] = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \log_2 \lambda_i \frac{f_{\Lambda}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\min(m,n)})}{\min(m,n)!} d\lambda_1 \dots d\lambda_{\min(m,n)} \quad (\text{C.1})$$

où la distribution des valeurs propres est obtenue en modifiant la distribution (voir Edelman [Ede89]), pour $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{\min(m,n)} > 0$:

$$f_{\Lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\min(m,n)}) = \frac{\exp(-\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \lambda_i) \prod_{i=1}^{\min(m,n)} \lambda_i^{m-n} \prod_{i=1, i < j}^{\min(m,n)} (\lambda_i - \lambda_j)^2}{\prod_{i=1}^{\min(m,n)-1} i! \prod_{i=1}^{\min(m,n)} (\max(m,n) - i)!} \quad (\text{C.2})$$

Les modifications apportées à la distribution d'Edelman consistent en deux changements simples:

- 1. Utiliser des variables gaussiennes avec une variance égale à 1/2 pour la matrice du canal dans les dérivations; Edelman utilise une variance unitaire.
- 2. Modifier l'expression de la distribution afin de tenir compte des deux cas, $n > m$ et $m > n$; Edelman ne l'exprime que pour le cas où $n > m$.

Notez que la distribution des valeurs propres $f_{\Lambda}(\lambda)$ est divisée par $\min(m, n)!$ afin d'éliminer l'ordre arbitraire $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{\min(m, n)}$. Aussi, étant donnée la symmétrie de $f_{\Lambda}(\lambda)$, on remarque que chacune des $\min(m, n)$ intégrales multiples donne le même résultat. On obtient donc:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\min(m, n)} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_i] &= \frac{\min(m, n)}{\min(m, n)!} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_1] \\ &= \frac{1}{(\min(m, n) - 1)!} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_1] \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Pour $\min(m, n) = 1$, en posant $\max(m, n) = t$, le calcul a déjà été effectué:

$$E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_1] = \frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{i} - \gamma \quad (\text{C.4})$$

Pour $\min(m, n) = 2$, on a:

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_1] &= \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \ln(\lambda_1) \frac{e^{-\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 \lambda_2)^{t-2} (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(t-1)!(t-2)!} d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= \frac{1}{(t-1)!(t-2)!} \left[t! \left(\sum_{i=1}^t \frac{1}{i} - \gamma \right) \Gamma(t-1) \right. \\ &\quad \left. - 2(t-1)! \left(\sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{i} - \gamma \right) \Gamma(t) + (t-2)! \left(\sum_{i=1}^{t-2} \frac{1}{i} - \gamma \right) \Gamma(t) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

où $\Gamma(x+1) = x!$. On obtient donc pour $\min(m, n) = 2$:

$$E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_1] = \frac{1}{\ln(2)} \left[2 \sum_{i=1}^{t-2} \frac{1}{i} + \frac{1}{t-1} - 2\gamma \right] \quad (\text{C.6})$$

De la même façon, on obtient pour $\min(m, n) = 3$:

$$\frac{1}{2} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_1] = \frac{1}{\ln(2)} \left[3 \sum_{i=1}^{t-3} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{t-i} - 3\gamma \right] \quad (\text{C.7})$$

L'équation générale peut s'obtenir par extrapolation:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\min(m, n)} E_{\mathbf{H}} [\log_2 \lambda_i] &= \frac{1}{\ln(2)} \left[\min(m, n) \sum_{i=1}^{\min(m, n)} \frac{1}{i} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\min(m, n)-1} \frac{i}{\max(m, n) - i} - \min(m, n)\gamma \right] \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

L'équation (C.8) a été vérifiée numériquement à l'aide du logiciel mathématique Maple.

Annexe D

Calcul de $\sum_{i=1}^{\min(m,n)} E_{\mathbf{H}} [\lambda_i]$

Ce résultat est utilisé au chapitre quatre afin de calculer le gain obtenu suite au prétraitement.

Par symétrie (voir l'annexe C), on a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\min(m,n)} E_{\mathbf{H}} [\lambda_i] &= \frac{\min(m,n)}{\min(m,n)!} E_{\mathbf{H}} [\lambda_1] \\ &= \frac{1}{(\min(m,n) - 1)!} E_{\mathbf{H}} [\lambda_1] \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Pour $\min(m,n) = 1$, on a:

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{H}} [\lambda_1] &= \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1} \lambda_1^{t-1} d\lambda_1 \\ &= \frac{\Gamma(t+1)}{(t-1)!} = t \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Pour $\min(m,n) = 2$, on a:

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{H}} [\lambda_1] &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda_1 \frac{e^{-\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 \lambda_2)^{t-2} (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(t-1)!(t-2)!} d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= \frac{1}{(t-1)!(t-2)!} [\Gamma(t+2)\Gamma(t-1) - 2\Gamma(t+1)\Gamma(t) + \Gamma(t)\Gamma(t+1)] \\ &= 2t \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

De la même façon, pour $\min(m,n) = 3$:

$$\frac{1}{2} E_{\mathbf{H}} [\lambda_1] = 3t \quad (\text{D.4})$$

L'extrapolation donne:

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)} E_{\mathbf{H}}[\lambda_i] = \min(m, n) \max(m, n) = mn \quad (\text{D.5})$$

L'équation (D.5) a été vérifiée également numériquement à l'aide du logiciel mathématique Maple.

Bibliographie

- [AG99] M. Alouini and A. J. Goldsmith. Capacity of rayleigh fading channels under different adaptive transmission and diversity-combining techniques. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, pages 1165–1181, juillet 1999.
- [And58] T. W. Anderson. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. John Wiley and Sons, New York, 1958.
- [CT91] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley-Interscience, New York, 1991.
- [Ede89] A. Edelman. *Eigenvalues and Condition Numbers of Random Matrices*. Thèse de doctorat, MIT, Cambridge, 1989.
- [FG98] G. J. Foschini and M. J. Gans. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas. *Wireless Personal Communications*, pages 311–335, volume 6 1998.
- [Kul68] S. Kullback. *Information Theory and Statistics*. Dover, New York, 1968.
- [Lan69] P. Lancaster. *Theory of Matrices*. Academic Press, New York, 1969.
- [LGon] A. Leon-Garcia. *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*. Addison-Wesley, New York, 1994. 2ième édition.
- [MF70] R. K. Mueller and G. J. Foschini. The capacity of linear channels with additive gaussian noise. *The Bell System Technical Journal*, pages 81–94, janvier 1970.

- [NLTW98] A. Narula, M. J. Lopez, M. D. Trott, and G. W. Wornell. Efficient use of side information in multiple-antenna data transmission over fading channels. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, pages 1423-1436, octobre 1998.
- [NTW99] A. Narula, M. D. Trott, and G. W. Wornell. Performance limits of coded diversity methods for transmitter antenna arrays. *IEEE Transactions on Information Theory*, pages 2418-2433, novembre 1999.
- [Pro95] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw Hill, New York, 1995.
- [Rap96] T. S. Rappaport. *Wireless Communications, Principles and Practice*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [Tel99] E. Telatar. Capacity of multi-antenna gaussian channels. *European Transactions on Telecommunications*, 10(6): 585-595, novembre-décembre 1999.
- [Win87] J. H. Winters. On the capacity of radio communications systems with diversity in a rayleigh fading environment. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, pages 871-878, juin 1987.