



National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Canadian Theses Service    Service des thèses canadiennes

Ottawa, Canada  
K1A 0N4

## NOTICE

The quality of this microform is heavily dependent upon the quality of the original thesis submitted for microfilming. Every effort has been made to ensure the highest quality of reproduction possible.

If pages are missing, contact the university which granted the degree.

Some pages may have indistinct print especially if the original pages were typed with a poor typewriter ribbon or if the university sent us an inferior photocopy.

Previously copyrighted materials (journal articles, published tests, etc.) are not filmed.

Reproduction in full or in part of this microform is governed by the Canadian Copyright Act, R.S.C. 1970, c. C-30.

## AVIS

La qualité de cette microforme dépend grandement de la qualité de la thèse soumise au microfilmage. Nous avons tout fait pour assurer une qualité supérieure de reproduction.

S'il manque des pages, veuillez communiquer avec l'université qui a conféré le grade.

La qualité d'impression de certaines pages peut laisser à désirer, surtout si les pages originales ont été dactylographiées à l'aide d'un ruban usé ou si l'université nous a fait parvenir une photocopie de qualité inférieure.

Les documents qui font déjà l'objet d'un droit d'auteur (articles de revue, tests publiés, etc.) ne sont pas microfilmés.

La reproduction, même partielle, de cette microforme est soumise à la Loi canadienne sur le droit d'auteur, S.R.C. 1970, c. C-30.

**Résolution globale d'une équation transcendante par l'itération  
d'une fonction entière transcendante et de sa réciproque**

par

**Nasser /DOUAL**

Thèse présentée à l'école des études supérieures de l'Université d'Ottawa  
pour l'obtention de la maîtrise ès sciences en mathématiques.

le 16 juin 1988

Ottawa, Ontario, Canada K1N 6N5



Nasser DOUAL, Ottawa, Canada, 1988

Permission has been granted to the National Library of Canada to microfilm this thesis and to lend or sell copies of the film.

The author (copyright owner) has reserved other publication rights, and neither the thesis nor extensive extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her written permission.

L'autorisation a été accordée à la Bibliothèque nationale du Canada de microfilmer cette thèse et de prêter ou de vendre des exemplaires du film.

L'auteur (titulaire du droit d'auteur) se réserve les autres droits de publication; ni la thèse ni de longs extraits de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation écrite.

ISBN 0-315-46750-9



UNIVERSITÉ D'OTTAWA  
UNIVERSITY OF OTTAWA

## A FARIZA ET A MES PARENTS

" Win iwet laẓ s aqerɣu, xas yeççur uεebbuḍ-is, baqi  
iceffu; ma d win iwet laẓ s aεebbuḍ, mi gerwa, ad  
yettu. "

Proverbe Kabyle.

( Celui qui a compris le sens de la misère qui l'atteint  
continue d'y penser; celui qui ne l'a ressentie que  
physiquement, sitôt passée, sitôt oubliée.)

## Remerciements

En premier lieu, je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à Rémi Vaillancourt pour m'avoir guidé dans la réalisation de ce travail et à J.L.

Howland pour avoir proposé le sujet de cette thèse.

Je remercie également le gouvernement de mon pays (Algérie) pour l'aide financière qui a permis de mener à bien cette étude.

Enfin, je dois un grand remerciement à madame Michelle Lukaszczyk à qui est due la frappe de ce manuscrit.

## Résumé

On détermine pour  $c$  et  $P$  donnés, la  $P$ -ième racine de l'équation transcendante:  $e^z - cz = 0$  en itérant  $\frac{e^z}{c}$  ou la fonction réciproque  $\log cz$ . On

démontre la convergence pour  $P \geq 2$ . Pour  $P=1$ , l'itération évite les cycles attractifs par le choix approprié de la fonction à itérer et de la valeur initiale  $z_0$ .

## Table des matières

Chapitre 0.	Introduction .....	p. 6
Chapitre 1.	Familles normales et applications .....	p. 7
Chapitre 2.	Itération de la fonction $f_{\lambda}(z) = \lambda e^z$ .....	p. 25
Chapitre 3.	Résolution numérique de l'équation: $e^z - cz = 0$ .	p. 42
Références	.....	p. 96

## INTRODUCTION.

L'équation différentielle

$$y'' = \lambda y \quad a \leq x \leq b \quad (1)$$

admet comme solution générale

$$y(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda} x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

pour laquelle

$$y'(x) = \alpha \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda} x} - \beta \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

Les conditions aux bornes

$$\begin{cases} y(a) + y'(a) = 0 \\ \sqrt{\lambda} y(b) + y'(b) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

peuvent s'écrire sous la forme;

$$\begin{cases} \alpha (e^{\sqrt{\lambda} a} - \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda} b}) + \beta (e^{-\sqrt{\lambda} a} + \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda} b}) = 0 \\ 2\beta e^{-\sqrt{\lambda} b} = 0 \end{cases}$$

Le problème aux limites associé à (1) et (2) a une solution non triviale si et seulement si:

$$e^z - cz = 0 \quad (3)$$

où  $c = (b-a)$  et  $z = \sqrt{\lambda} (b-a)$ .

Le but de cette étude est de déterminer pour  $c$  et  $P$  donnés la  $P$ -ième racine de (3) avec  $c \in \mathbb{C}$  et  $z \in \mathbb{C}$ .

Au chapitre 1, on démontre que  $e^z - cz = 0$  admet une infinité de solutions, quel que soit  $c \in \mathbb{C}^*$ .

La première étape de l'étude proprement dite consiste à localiser les racines dans le plan de  $z$ , et à définir la  $P$ -ième racine.

Les algorithmes de résolution sont basés sur l'itération de la fonction entière  $\frac{e^z}{c}$  et de sa réciproque  $\text{Ln } cz$ .

## CHAPITRE 1

### FAMILLES NORMALES ET APPLICATIONS

#### 1. FAMILLES NORMALES

On va d'abord rappeler brièvement quelques définitions qui seront utiles pour la bonne compréhension de cette étude.

##### 1.1. Définitions

- \* Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de la variable complexe  $z$ .
- \* On appelle domaine un ensemble ouvert et connexe.
- \* On dit que  $f$  est holomorphe dans le domaine  $D$  si  $f'(z)$  existe en tout point de  $D$ .
- \*  $f$  est une fonction entière si elle est holomorphe dans le plan fini  $\mathbb{C}$ .
- \* On appelle fonction entière transcendante une fonction entière qui n'est pas un polynôme.

##### 1.2. Points singuliers

Si  $f(z)$  n'est pas holomorphe en  $z_0$ , on dit, alors, que  $z_0$  est un point singulier de  $f$ .

Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans le voisinage de  $z_0$ , sauf en  $z_0$  alors:

- \*  $z_0$  est appelé pôle d'ordre  $m$  de  $f(z)$ , si et seulement s'il existe un entier  $m > 0$  tel que:  $(z-z_0)^m f(z)$  soit holomorphe au point  $z_0$ .
- \* Si  $z_0$  n'est pas un pôle, on dit qu'il est un point singulier essentiel.

La fonction  $f(z) = \frac{\sinh z}{z^5} = \frac{1}{z^5} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{7!} z + \dots$ ,  $|z| > 0$

admet un pôle d'ordre 5 au point  $z = 0$ .

La fonction  $f(z) = e^{1/z^2} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^4} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{2n}} + \dots$ ,  $|z| > 0$

a un point singulier essentiel en zéro.

### 1.3. Définition d'une fonction méromorphe

Une fonction est dite méromorphe dans un domaine  $D$ , si ses seuls points singuliers sont des pôles.

Les fractions rationnelles sont un exemple de fonctions méromorphes dans  $\mathbb{C}$ .

### 1.4. Définition d'une famille normale

Soit  $U$  un domaine ouvert non vide de  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  et soit  $F = \{f_i : i \in I\}$  une famille de fonctions méromorphes définies sur  $U$  à valeurs dans  $\bar{\mathbb{C}}$ .

On dit que  $F$  est normale dans  $U$  si, de toute suite infinie de fonctions de la famille, on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément dans  $U$ , vers une fonction limite qui peut être la constante infinie.

#### Exemples

$$f_n : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{nx^2}$$

$\{f_n\}_n$  est une famille normale car la convergence est uniforme vers zéro.

$$g_n : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \mapsto \sin n x$$

$\{g_n\}_n$  n'est pas normale car elle n'admet pas de fonction limite.

Arzelà a montré l'existence d'un lien étroit entre les notions de famille normale et de famille équicontinue dans le cas des fonctions méromorphes.

### 1.5. Définition d'une famille équicontinue

Soit  $(X,d)$  un espace métrique.

Une famille  $F$  de fonctions  $\{f_i : X \rightarrow X ; i \in I\}$  est dite équicontinue, si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(f_i(x_1), f_i(x_2)) < \varepsilon \quad \forall i \in I$$

avec  $x_1 \in X$  et  $x_2 \in X$ .

### 1.6. Théorème d'Arzelà

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{C}$ .

La famille  $\{f_i : U \rightarrow \mathbb{C}\}$  de fonctions méromorphes est normale, si et seulement si, elle est équicontinue dans tout compact de  $U$ .

### 1.7. Condition suffisante de normalité

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{C}$ .

Si la famille  $\{f_i : U \rightarrow \mathbb{C}\}$  de fonctions holomorphes est localement uniformément bornée dans  $U$ , alors elle est normale.

En particulier, toute famille de fonctions holomorphes à valeurs dans le disque unité est normale.

Voir [A1 pp. 171-172] pour la preuve.

### 1.8. Définition

Une famille est dite normale en un point s'il existe un voisinage ouvert de ce point dans lequel la famille est normale.

On a la proposition suivante [M1 pp 33-34]

### 1.9. Proposition

Une famille normale dans un domaine  $D$  est normale en tous les points de ce domaine et réciproquement.

### 1.10. Définition d'un point irrégulier

Supposons qu'une famille de fonctions ne soit pas normale dans un domaine  $D$ . Donc il existe un compact  $K$  inclus dans  $D$  tel que la famille ne soit pas normale dans  $K$ . On partage  $K$  en deux compacts  $K_1$  et  $K_2$ , on obtient un compact ( $K_1$ ) où la famille n'est pas normale. En partageant de nouveau  $K_1$ , on obtiendrait un compact partiel dans  $K_1$  où la famille considérée ne serait pas normale.

En continuant ainsi, on définit une suite infinie de compacts partiels emboîtés qui ont au moins un point commun. Il résulte que la famille n'est pas normale autour de ce point; ce dernier est appelé par définition: point irrégulier.

Ainsi, si une famille de fonctions n'est pas normale dans un domaine  $D$ ; il existe alors un point intérieur au domaine où elle n'est pas normale.

### 1.11. Proposition

Un point irrégulier intérieur à un domaine où les fonctions de la famille sont holomorphes et bornées, n'est pas isolé.

Preuve:

Soit  $A$  un point irrégulier supposé isolé. On peut alors décrire un cercle de centre  $A$  et de rayon  $\varepsilon$  tel que tous les points de sa circonférence soient réguliers (i.e. la famille est normale en ces points). Il en résulte que, de toute suite infinie, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément sur la circonférence vers une fonction limite.

D'après le théorème de Weierstrass [M2, p. 86], la convergence serait alors uniforme dans le cercle tout entier et  $A$  ne serait donc pas un point irrégulier, d'où contradiction avec l'hypothèse.

La notion de points irréguliers nous permet de définir un ensemble jouant un rôle important dans la théorie de l'itération des fonctions entières: l'ensemble de Julia.

### 1.12. Définition de l'ensemble de Julia

Soit  $F$  une famille de fonctions holomorphes.

L'ensemble des points irréguliers de  $F$  est appelé: ensemble de Julia de  $F$ , noté:  $J(F)$ .

En d'autres termes,  $J(F)$  est l'ensemble de non-normalité de  $F$ .

Le complément de l'ensemble de Julia (ensemble de points pour lequel  $F$  est normale) ne possède pas de nom standard. Cependant, dans cette étude, il sera appelé: ensemble de Fatou.

### 1.13. Exemples.

1)  $f_1(z) = z^2$ .

Soit

$z_0$  un point intérieur au cercle unité. Il existe, alors, un voisinage ouvert  $U$  de  $z_0$  pour lequel la famille  $\{f_1^n|_U\}_n$  converge vers la fonction nulle,  $\forall z \in U$ .

Il s'ensuit que l'intérieur du cercle unité appartient à l'ensemble de Fatou de  $f_1$ .

De même, l'extérieur du cercle unité est aussi un sous-ensemble de l'ensemble de Fatou bien que la fonction limite soit différente de la précédente. Le cercle unité est, cependant, égal à l'ensemble de Julia parce que la famille  $\{f_1^n\}_n$  n'est équicontinue dans aucun ouvert

entrecoupant le cercle unité.

$f_1^n$  désigne  $f \circ f \circ \dots \circ f$  et  $f_1^n|_U$  la fonction  $f_1^n$  restreinte à  $U$ .

2)  $f_2(z) = z^2 - 2$

$J(f_2)$  est l'intervalle  $[-2, 2]$  de la droite réelle. [BL 1 p. 91]

Les deux exemples traités ici sont parmi ceux qui donnent une structure simple de  $J$ .

En général, la structure est beaucoup plus complexe. D'ailleurs, la plupart des ensembles de Julia sont des fractales [BL].

## 2. PROPRIÉTÉS DE FONCTIONS ENTIÈRES

On rappelle qu'une fonction entière est une fonction holomorphe dans le plan fini  $\mathbb{C}$ .

Une telle fonction admet un développement en séries de Taylor qui converge pour tout  $z$  dans  $\mathbb{C}$  i.e.  $f(z) = a_0 + \dots + a_n z^n + \dots$ ,

$\forall z \in \mathbb{C}$ .

Il y a trois possibilités de comportement de  $f(z)$  à l'infini:

- \*  $f(z)$  peut avoir un point régulier à l'infini et donc d'après le théorème de Liouville (toute fonction entière bornée est une constante),  $f(z)$  est une constante.
- \*  $f(z)$  peut avoir un pôle d'ordre  $k \geq 1$  à l'infini et alors  $f(z)$  se réduit à un polynôme de degré  $k$ .
- \*  $f(z)$  peut admettre un point singulier essentiel à l'infini et alors  $f(z)$  est appelée: fonction entière transcendante.

Soit  $f(z)$  une fonction entière et  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ .

$M(r)$  représente une importante caractéristique de  $f(z)$ .

### 2.1. Définition de l'ordre d'une fonction entière

Supposons qu'il existe un nombre positif  $\alpha$  tel que:

$M(r) < e^{r^\alpha}$  pour  $r$  assez grand.

Alors,  $f(z)$  est dite d'ordre fini et  $\rho = \inf \alpha$  ( $\rho \geq 0$ ) s'appelle: ordre de  $f(z)$ .

Cependant, si  $\inf \alpha = \infty$ , c'est-à-dire si pour tout  $\alpha \geq 0$ , il existe  $r_0$  tel que:  $M(r_0) > e^{r_0^\alpha}$  alors  $f(z)$  est par définition d'ordre infini.

$e^z$  est d'ordre 1 alors que  $e^{e^z}$  est d'ordre infini.

### 2.2. Théorème

L'ordre  $\rho$  d'une fonction entière est donné par la formule:

$$\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}$$

Preuve:

D'après  $M(r) < e^{r^\alpha}$  pour  $r$  assez grand et  $\rho = \inf \alpha \geq 0$  on déduit que:

$\forall \varepsilon > 0, \exists R_\varepsilon > 0$  tel que:  $M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$  pour  $r > R_\varepsilon$ .

D'autre part, il existe une suite  $\{r_n\}$  de nombres réels vérifiant:

$0 < r_1 < \dots < r_n < \dots$  et telle que:  $M(r_n) > e^{r_n^{\rho-\varepsilon}}$ .

En d'autres termes  $\frac{\text{Ln Ln } M(r)}{\text{Ln } r} < \rho + \varepsilon$  si  $r > R_\varepsilon$

tandis que  $\frac{\text{Ln Ln } M(r_n)}{\text{Ln } r_n} > \rho - \varepsilon$  pour  $r_n$  assez grand;

par conséquent:

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{Ln Ln } M(r)}{\text{Ln } r}.$$

### 2.3. Définition du type

Soit  $f(z)$  une fonction entière d'ordre fini  $\rho$ .

On suppose l'existence d'un nombre positif  $k$  tel que:

$M(r) < e^{kr^\rho}$  pour  $r$  suffisamment grand.

Par définition,  $\sigma = \inf k$  s'appelle: type de  $f(z)$ .

Le type est dit normal si  $\sigma > 0$ , minimum si  $\sigma = 0$  et infini (ou maximum) si  $\sigma = \infty$ .

Le même raisonnement appliqué dans le théorème précédent permet d'obtenir le résultat suivant.

### 2.4. Théorème

Le type  $\sigma$  d'une fonction entière d'ordre fini  $\rho$  est donné par:

$$\sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{Ln } M(r)}{r^\rho}.$$

### 2.5. Exemple

Considérons  $f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ .

Comme  $|\sin z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$  et  $\cosh y = \sqrt{\sinh^2 y + 1}$

alors:

$$|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y ;$$

on a ainsi

$$\frac{e^r - 1}{2} < \frac{e^r - e^{-r}}{2} = \sinh r \leq M(r) = \max_{|z|=r} |\sin z| \leq \cosh r < \frac{e^r + 1}{2} .$$

Il s'ensuit que  $\rho = \sigma = 1$  pour  $f(z) = \sin z$ .

### 2.6. Remarque

Comme  $f(z)$  est entière, alors  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots \forall z \in \mathbb{C}$ .

Il est possible d'exprimer l'ordre et le type de  $f(z)$  en fonction de ses coefficients de Taylor:  $a_n$  [MA 2 pp. 255-261]. On a, entre autres, les deux résultats suivants: Si  $f(z)$  est une fonction entière d'ordre  $\rho$  alors:

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} .$$

De plus, si  $f(z)$  est de type  $\sigma$  alors:

$$\sigma = \frac{1}{e\rho} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n |a_n|^{\rho/n} .$$

## 3: THEOREMES DE PICARD

Les deux théorèmes de Picard représentent une application de la théorie des familles normales à l'étude des fonctions holomorphes dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé.

### 3.1. Premier théorème de Picard

Si  $f(z)$  est une fonction entière différente d'une constante alors elle prend toutes les valeurs de  $\mathbb{C}$ , sauf une au plus.

#### Preuve

On aura besoin, dans la preuve, du théorème suivant appelé: théorème fondamental [M2 p. 24]: Une famille de fonctions holomorphes dans un domaine, qui ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1, est normale dans ce domaine.

Soit  $f(z)$  une fonction non constante telle que :  $f(z) \neq a$  et  $f(z) \neq b$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ . On peut supposer que ces valeurs sont 0 et 1, en effectuant au besoin la transformation linéaire:

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}.$$

Soit  $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$  une suite de cercles centrés à l'origine et de rayons respectifs  $2^k$ .

Posons  $f_k(z) = f(2^k z)$ .

$f_k(z)$  est une fonction entière quelque soit la valeur de  $k$ . Elle est, en particulier, holomorphe dans  $(C_1)$ ; d'ailleurs,  $f_k(z)$  prend dans  $(C_1)$  les mêmes valeurs que  $f(z)$  dans  $(C_{k+1})$ .

On a réalisé ainsi la représentation conforme, par homothétie, de chaque cercle  $(C_k)$  sur le cercle unité  $(C_0)$ . Comme 0 et 1 sont des valeurs exceptionnelles de  $f(z)$ , alors aucune fonction  $f_k(z)$  ne prendra ni la valeur 0 ni la valeur 1 dans  $(C_1)$  et par suite, d'après le théorème fondamental, la famille  $\{f_k\}_k$  serait normale dans  $(C_1)$ .

Or,  $\{f_k\}_k$  est une famille bornée au point zéro du fait que:  $f_k(0) = f(0)$ , elle est donc bornée dans tout domaine intérieur à  $(C_1)$ , en particulier dans  $(C_0)$ . On en déduit que  $f(z)$  est bornée dans tout le

plan, étant donné que tout point du plan appartient à un cercle  $(C_k)$  et que  $f(z)$  prend dans  $(C_k)$  les mêmes valeurs que  $f_k(z)$  dans  $(C_0)$ . D'après le théorème de Liouville,  $f(z)$  serait une constante, d'où contradiction.

Conséquence:  $f(z)$  ne pourrait avoir, au plus, qu'une valeur exceptionnelle.

$e^z$  admet 0 comme valeur exceptionnelle.

Le théorème est plus connu sous le nom de: petit théorème de Picard.

### 3.2. Autre formulation du théorème [MA2, p. 268]

Soit  $f(z)$  une fonction entière transcendante d'ordre fini  $\rho$  et  $A$  un point quelconque de  $\mathbb{C}$ .

On désigne par  $A(A)$  l'ensemble des antécédents de  $A$  par  $f(z)$ .

$$A(A) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = A\}$$

Alors:

$A(A)$  admet une infinité de points, quelque soit  $A$  dans  $\mathbb{C}$  sauf si  $\rho$  est un entier positif et  $f(z)$  est de la forme:

$f(z) = A + p(z) e^{Q(z)}$  où  $p(z)$  et  $Q(z)$  sont des polynômes.

Dans ce dernier cas,  $A(A)$  ne contient que les points solutions de  $p(z) = 0$ .

#### Application

On veut trouver le nombre de solutions de l'équation.

$$\sin z = cz \tag{1.1}$$

Il est évident que si  $c = 0$ , les solutions de (1.1) sont celles de  $\sin z = 0$  à savoir  $z = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Il s'ensuit alors que le nombre de solutions de (1.1) est infini si  $c = 0$ . Supposons que  $c \neq 0$ .

Les solutions de (1.1) sont celles de la fonction entière

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = C, \text{ i.e. } 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = C.$$

Donc, le problème revient à calculer le cardinal de  $A(C)$  où :

$$A(C) = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\sin z}{z} = C\}$$

Comme  $\frac{\sin z}{z}$  est d'ordre 1 alors il peut exister un point  $C_0$  tel que:

$$\text{Card } A(C_0) < \infty.$$

Cependant, en considérant la fonction entière, d'ordre  $\frac{1}{2}$ ,

$$g(\alpha) = \frac{\sin \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} = 1 - \frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^2}{4!} - \dots, \text{ on montrera qu'un tel point n'existe pas.}$$

$$\text{Posons: } z = \sqrt{\alpha}.$$

$$(1.1) \text{ peut alors s'écrire sous la forme: } \frac{\sin \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} = C. \quad (1.2)$$

Ainsi, à toute solution de (1.2) correspondent deux solutions de (1.1).

Par conséquent si (1.2) admet une infinité de solutions pour toute valeur de  $C$ , il en sera de même de l'équation (1.1).

Désignons par  $A^*(C)$  l'ensemble des antécédents de  $C$  par:  $\frac{\sin \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$ .

$$A^*(C) = \{\alpha \in \mathbb{C} : \frac{\sin \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} = C\}.$$

Or,  $\frac{\sin \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$  est une fonction entière d'ordre  $\frac{1}{2}$  (donc l'ordre n'est

pas un entier positif) et d'après le théorème de Picard,  $\frac{\sin \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} = C$

admet une infinité de solutions pour toute valeur de  $C$ . Il s'ensuit que

$$\text{Card } A^*(C) = \infty \quad \forall C \in \mathbb{C}.$$

On en conclut alors que:  $\text{Card } A(C) = \infty$ , c'est-à-dire:

$\sin z = cz$  admet une infinité de solutions, quelque soit la valeur de  $C$  dans  $\mathbb{C}$ .

### 3.3. Second théorème de Picard [M2]

Ce théorème connu aussi sous le nom du grand théorème de Picard, est l'un des théorèmes clés de la théorie des fonctions analytiques.

#### Théorème:

Une fonction holomorphe ayant un point singulier essentiel isolé prend autour de ce point toute valeur finie sauf une valeur exceptionnelle au plus.

#### Preuve:

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $z_0 = 0$  est un point singulier essentiel isolé car on peut toujours au besoin se ramener à ce cas à l'aide d'une transformation élémentaire de la forme:

$$Z = z - z_0 \quad \text{ou} \quad Z = \frac{1}{z_0}$$

Supposons que  $f(z)$  possède deux valeurs exceptionnelles  $a$  et  $b$  dans un certain voisinage  $\{z : |z| < R\}$  de  $z = 0$ . Soient  $D_0, \dots, D_n, \dots$  les anneaux définis par:

$$D_0 = \{z \in \mathbb{C} : \frac{R}{2} < |z| < R\}$$

$$D_n = \{z \in \mathbb{C} : \frac{R}{2^{n+1}} < |z| < \frac{R}{2^n}\}.$$

On construit la suite de fonctions:

$$f_1(z) = f\left(\frac{z}{2}\right), \dots, f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right);$$

$f_n(z)$  prend les mêmes valeurs dans l'anneau  $D_0$  que la fonction  $f(z)$  prend dans  $D_n$  et donc  $\{f_n(z)\}_n$  est une famille de fonctions holomorphes dans  $D_0$  telles qu'aucune d'elles ne prend les valeurs  $a$

et  $b$ , par conséquent  $\{f_n(z)\}_n$  est, d'après le théorème fondamental, une famille normale, i.e.  $\{f_n(z)\}_n$  contient une sous-suite  $\{f_{n_k}(z)\}$

convergeant uniformément à l'intérieur de  $D_0$  vers une fonction limite  $F(z)$ . Si  $F(z) \neq \infty$  alors  $F(z)$  est bornée sur le cercle  $Y = \{z : |z| = \rho, \frac{R}{2} < \rho < R\}$ .

Il s'ensuit que les fonctions  $f_{n_k}(z)$  sont uniformément bornées sur  $Y$ ,

ce qui implique que:

$$\exists M > 0 : |f(z)| \leq M \text{ pour } |z| = \frac{\rho}{2^{n_k}}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

et d'après le principe du maximum [A1 p. 108]

$$|f(z)| \leq M \text{ pour } z \text{ tel que } 0 < |z| < \rho ;$$

mais, ceci est impossible puisque  $z = 0$  est un point singulier essentiel de  $f(z)$ .

Si  $F(z) \equiv \infty$ , la suite des fonctions holomorphes  $\varphi_{n_k}(z) = \frac{1}{f_{n_k} - a}$

converge uniformément vers zéro à l'intérieur de  $D_0$  et par suite la fonction  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - a}$  est bornée dans  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \rho\}$ .

Mais alors  $z = 0$  serait un point régulier de  $\varphi(z)$  et ne pourrait donc être un point singulier essentiel de  $f(z)$ , ce qui contredit l'hypothèse.

### Exemples

- 1)  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  a un point singulier essentiel en zéro. Elle prend toute valeur de  $\mathbb{C}$ , une infinité de fois au voisinage de zéro.

D'ailleurs, la résolution de  $\sin \frac{1}{z} = A, A \in \mathbb{C}$  donne:

$$z = \frac{i}{\operatorname{Ln}(iA + \sqrt{1 - A^2})} = \frac{i}{\operatorname{Ln}(iA + \sqrt{1 - A^2}) + 2k\pi i}$$

Ainsi, on obtient une suite  $\{z_n\}$  convergant vers zéro et qui satisfait  $f(z_n) = A \quad n = 1, 2, \dots$ ,

où

$$z_n = \frac{i}{\ln(iA + \sqrt{1 - A^2}) + 2n\pi i}$$

et où

$$\ln(iA + \sqrt{1 - A^2}) = \ln|iA + \sqrt{1 - A^2}| + i \arg(iA + \sqrt{1 - A^2})$$

2)  $f(z) = e^{1/z}$

$f(z)$  admet un point singulier essentiel à l'origine. Elle prend toutes les valeurs finies sauf zéro. Si  $A \neq 0$ , alors la résolution de  $e^{1/z} = A$ ,  $A \in \mathbb{C}^*$ , aboutit à:

$$z_n = \frac{1}{\ln A + 2n\pi i}$$

### Remarque

Soit  $f(z)$  une fonction entière d'ordre  $\rho$ . Si dans l'équation  $f(z) = c$ , on remplace la constante  $c$  par une fonction méromorphe  $\varphi(z)$  d'ordre inférieur à  $\rho$ , le théorème de Picard restera valable [N1 p. 75], c'est-à-dire il existera au plus deux fonctions différentes  $\varphi$  [ $\varphi$  pouvant être la constante infinie] telles que les distributions des racines de l'équation généralisée:  $f(z) = \varphi(z)$  soient exceptionnelles.

Soit l'équation  $f(z) = cz$  où  $f(z) = e^z$ .

$\varphi_1(z) = 0$  et  $\varphi_2(z) = \infty$  sont des fonctions exceptionnelles de  $f(z) = e^z$ . De plus, l'ordre de ces deux fonctions est zéro; il est donc inférieur à celui de  $e^z$  qui est 1. On en conclut alors que:

$e^z = cz$  admet une infinité de solutions quelque soit  $c$  finie et non nulle.

#### 4. THEOREME DE JULIA

Le théorème de Picard ne nous donne aucun renseignement sur la distribution des arguments des zéros de l'équation:  $f(z) = a$ , où  $a \in \mathbb{C}$ , au voisinage du point singulier essentiel. G. Julia a apporté en 1924 [J2, p. 102] un complément remarquable au théorème de Picard.

##### 4.1. Droites de Julia

Soit  $f(z)$  une fonction entière.

On considère la famille de fonctions  $\{f_n(z)\}_n$  définies par:

$$f_n(z) = f(2^n z)$$

On a déjà vu (preuve du 1<sup>er</sup> théorème de Picard) l'impossibilité pour la famille  $\{f_n(z)\}_n$  d'être normale à l'intérieur du cercle unité (C).

Il existe donc au moins un point irrégulier dans (C). Soit M ce point, que l'on peut supposer différent de l'origine puisqu'il n'est pas isolé.

Dans le voisinage de M, la famille  $\{f_n(z)\}_n$  n'est pas normale. Donc, dans un cercle ( $\Gamma$ ) arbitrairement petit de centre M, toutes les équations:

$$f_n(z) = a, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{C},$$

ont des racines, quelque soit a, sauf pour une valeur au plus. Or, les valeurs que prennent  $f_n(z)$  dans le cercle ( $\Gamma$ ) sont celles que prend

$f(z)$  dans les cercles homothétiques de ( $\Gamma$ ), obtenus par les homothéties de pôle 0 et de rapports respectifs:  $2, 2^2, \dots, 2^n, \dots$ . Il

s'ensuit alors que  $f(z)$  prend une infinité de fois toutes les valeurs finies sauf une au plus, dans le secteur de sommet 0 et tangent au cercle ( $\Gamma$ ).

En d'autres termes, la demi-droite  $OM$  est telle que: Dans tout angle, aussi petit que l'on veut, dont elle est la bissectrice, la fonction entière  $f(z)$  prend une infinité de fois toute valeur de  $\mathbb{C}$ , sauf une au plus.

Définition:

La demi-droite  $OM$  est appelée: droite de Julia et notée  $(J)$ .

Pour  $e^z$ , les deux demi-droites portées par l'axe imaginaire sont des droites de Julia tandis que les quatres directions des bissectrices des angles des axes sont des droites  $(J)$  pour  $e^{z^2}$ .

4.2. Théorème de Julia. [MA 3 p. 346].

Soit  $f(z)$  une fonction entière transcendante. La famille  $\{f(2^n z)\}_n$  admet au moins un point irrégulier  $M$  différent de zéro. Soit  $(J)$  la demi-droite issue de l'origine et passant par  $M$ . Alors:

Pour toute valeur finie de  $a$ , avec une exception possible, il existe une suite infinie  $\{z_n\}_n$  convergeant vers  $z = \infty$  et appartenant à un secteur ayant  $(J)$  comme bissectrice et dont l'angle est fixé aussi petit que l'on veut, telle que:

$$f(z_k) = a, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Le théorème nous assure l'existence d'au moins une droite de Julia.

Exemple:

Soit l'équation:  $e^z = a, \quad a \neq 0. \quad (1.3)$

Les solutions de (1.3) sont de la forme:  $z_k = \text{Ln} |a| + i \arg a + 2k\pi i$ .

Si  $k > 0$ , la tangente de l'angle entre le vecteur  $z_k$  et l'axe des imaginaires purs et positifs vaut:

$$\text{tg } \theta_k = \frac{\text{Ln} |a|}{\arg a + 2k\pi};$$

comme  $\operatorname{tg} \theta_k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ , il s'ensuit qu'à partir d'un certain rang de  $k$ , les points  $z_k$  appartiennent à un secteur admettant l'axe  $i\mathbb{R}_+^* = \{z \in \mathbb{C} : z = ix \text{ avec } x > 0\}$  comme bissectrice et dont l'angle est fixé à l'avance.

Il est à noter que la famille  $\{f(2^n z)\}_n = \{e^{2^n z}\}_n$  n'est normale dans aucun voisinage d'un point quelconque de  $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : z = ix \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$ . En effet,  $|e^{2^n z}| = 1$ ,  $\forall z \in i\mathbb{R}$ , tandis que  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2^n z} = \infty$ ,  $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2^n z} = 0$  si  $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ .

## CHAPITRE 2

### NATURE DES POINTS FIXES DE $f_\lambda(z) = \lambda e^z$ .

Parmi les applications importantes des familles normales se trouve l'étude de l'itération des fonctions entières transcendantes.

L'étude de l'itération de ces fonctions remonte aux travaux de Fatou [F1]. Ce dernier avait remarqué que, parmi les techniques utilisées dans l'itération des fractions rationnelles, plusieurs s'appliquent encore dans le cas des fonctions entières transcendantes. En 1980, Misiurewicz [M1] a résolu une conjecture de Fatou, vieille de plus de cinquante ans [datant de 1926], en démontrant que l'ensemble de Julia de la fonction exponentielle  $f(z) = e^z$  est tout le plan complexe.

Dans ce chapitre, on définira d'abord quelques notions fondamentales (points fixes, cycles, multiplicateur,...) et on explicitera, entre autres, certains résultats relatifs à la nature de l'ensemble de Julia de la fonction  $f_\lambda(z) = \lambda e^z$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Les résultats obtenus seront ensuite [au chapitre 3] appliqués à la résolution de l'équation:  $f_\lambda(z) = z$ .

## 1. DEFINITIONS

Soit  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction entière de la variable  $z$ .

### 1.1. Suite des itérées de $f$

On appelle suite des itérées de  $f$  au point  $z$  la suite  $\{f^n(z)\}_n$  où:

$$f^0(z) = z \quad \text{et} \quad f^{n+1}(z) = f[f^n(z)] \quad \forall n \geq 0,$$

$f^n(z)$  est appelée:  $n^{\text{ième}}$  itérée de  $z$ .

Posons  $z_1 = z$ ,  $z_2 = f(z_1)$ , ...,  $z_{n+1} = f(z_n)$ , ... . La suite  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  représente l'orbite du point  $z$  qui est notée  $O^+(z)$ . Cette définition nous permet de définir les points fixes, points qui jouent dans l'itération de fonctions un rôle fondamental.

### 1.2. Points fixes

On dit que  $\alpha$  est un point fixe d'ordre  $r$  de  $f$  s'il existe un entier naturel positif  $r$  tel que:

$$f^r(\alpha) = \alpha \quad \text{et} \quad f^k(\alpha) \neq \alpha \quad \text{pour} \quad 1 \leq k < r-1, \quad k \in \mathbb{N},$$

où

$f^k(\alpha)$  représente la  $k$ -ième itérée de  $\alpha$ .

L'ensemble des points distincts  $\{\alpha, f(\alpha), \dots, f^{r-1}(\alpha)\}$  s'appelle cycle d'ordre  $r$  de  $f$  (relatif à  $\alpha$ ). Les points d'un même cycle se reproduisent périodiquement par l'itération de la fonction  $f$ .

#### Exemples:

\* Les solutions de l'équation  $\varphi(z) = 0$  où  $\varphi(z) = f(z) - z$ , sont les points fixes d'ordre 1 de  $f$ .

\* Soit  $f(z)$  la fonction suivante:  $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$   

$$z \rightarrow \frac{2}{z}.$$

L'orbite du point 1 est  $\{1,2\}$ , en effet:

$$f(1) = 2 \quad \text{et} \quad f[f(1)] = 1.$$

1 est un point fixe d'ordre 2 de  $f$  (de même pour 2);  $\{1,2\}$  est un cycle d'ordre 2.

### 1.3. Multiplicateur

Soit  $\alpha$  un point fixe d'ordre  $r$  de  $f$ .

On appelle multiplicateur de  $\alpha$  le nombre  $m$  suivant:

$$m = (f^r)'(\alpha).$$

La nature de  $\alpha$  dépend de la valeur absolue de  $m$ .

$\alpha$  est dit attractif si  $|m| < 1$

répulsif si  $|m| > 1$

indifférent si  $|m| = 1$ .

#### Remarque:

$\alpha$  étant un point fixe d'ordre  $r$  donc  $\{\alpha, f(\alpha), \dots, f^{r-1}(\alpha)\}$  est un cycle d'ordre  $r$ .

Comme  $(f^r)'(z) = f'[f^{r-1}(z)] \cdot f'[f^{r-2}(z)] \cdot \dots \cdot f'(z)$ , il s'ensuit alors que:

$$(f^r)'(\alpha) = (f^r)'(f(\alpha)) = \dots = (f^r)'(f^{r-1}(\alpha)).$$

Ainsi, tous les points d'un même cycle ont le même multiplicateur. Il est donc possible de parler de cycle attractif, répulsif ou indifférent.

## 2. PROPRIETES DE L'ENSEMBLE DE JULIA

Dans toute la suite, sauf indication contraire,  $f$  représentera une fonction entière de  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  dans  $\bar{\mathbb{C}}$ .

On désigne par  $F(f)$  et  $J(f)$  (ou simplement par  $F$  et  $J$ ) les ensembles de Fatou et de Julia de  $f$ , respectivement. On rappelle que  $F(f)$  est l'ensemble des points de  $\mathbb{C}$  pour lesquels la suite  $F = \{f^n\}_n$  des itérées est normale et que  $J(f)$  est le complémentaire de  $F(f)$  dans  $\mathbb{C}$ .

On va énoncer sans démonstration quelques propriétés importantes de l'ensemble de Julia  $J$ . [F1 ; J1].

a) J est fermé :

Si  $z \in F$  alors  $F$  est normale dans un certain voisinage de  $z$ , c'est-à-dire que  $z$  est un point intérieur de  $F$ ; donc  $F$  est ouvert et par suite  $J$  est fermé.

b) J est parfait :

Un ensemble parfait est un ensemble fermé et dense dans lui-même.

c) J est complètement invariant par  $f$ .

En d'autres termes, si  $\alpha \in J$  alors  $f(\alpha) \in J$  et  $\beta \in J$  pour toute valeur de  $\beta$  telle que  $f(\beta) = \alpha$ .

Comme conséquence immédiate on a:  $J(f^n) = J(f)$ ,  $\forall n \geq 1$ . Ainsi, toute itérée de  $f$  a le même ensemble de Julia que  $f$ .

d) Soit  $\alpha$  un point fixe d'ordre  $r$  de  $f$ .

Si  $\alpha$  est répulsif, il appartient à  $J$ .

Si  $\alpha$  est attractif, il appartient à  $F$ .

e) Si  $F$  est non vide, l'intérieur de  $J$  est vide.

En particulier, si  $f$  admet un point fixe attractif alors

$$\overset{\circ}{J}(f) = \emptyset.$$

### 3. EXISTENCE DE POINTS FIXES

L'existence et la distribution des points fixes de fonctions entières sont très importantes dans l'étude de l'itération de ces fonctions.

#### 3.1. Théorème [B1]

Si  $f(z)$  est une fonction entière autre qu'un polynôme linéaire, alors il existe des points fixes d'ordre  $n$  de  $f(z)$  pour toute valeur de  $n$ , sauf au plus une valeur exceptionnelle.

Il n'existe pas de points fixes d'ordre 1 pour la fonction  $f(z) = e^z + z$ .

#### 3.2. Théorème [B4]

Si  $f(z)$  est une fonction entière autre qu'un polynôme linéaire, alors l'ensemble des points répulsifs de  $f$  est dense dans  $J(f)$ .

#### Conséquence:

Toute fonction entière transcendante admet des points répulsifs d'ordres  $n_1, \dots, n_k, \dots$ , où  $\{n_k\}_k$  est une suite d'entiers naturels strictement croissante.

#### Remarque .

Ce théorème ne nous apprend rien au sujet de la valeur de  $n_1$  ou de la densité de la suite  $\{n_k\}$ . Il est, cependant, clair en considérant

$$f(z) = z + ie^{iz} - ia, \quad 0 < a < 2, \quad (2.1)$$

que le cas où  $n_1 > 1$  est possible.

En effet, les points fixes d'ordre 1 de l'équation (2.1) sont de la forme:  $z_k = 2k\pi - i \ln a$ .

Comme  $f'(z) = 1 - e^{iz}$ , alors  $f'(z_k) = 1 - a$ ,

$$\text{i.e. } |f'(z_k)| < 1 \quad \forall k \geq 0.$$

On en déduit que tous les points fixes d'ordre 1 sont attractifs, ce qui implique l'inexistence de points fixes répulsifs d'ordre 1.

### 3.3. Théorème [B3 p. 493]

Si  $f(z)$  est une fonction entière transcendante, alors  $J(f)$  ne peut être contenu dans aucun ensemble fini de droites. En particulier si  $f(z)$  est une fonction entière transcendante et  $\Delta$  une droite quelconque du plan complexe, alors l'ensemble de Julia de  $f$  ne peut être restreint à  $\Delta$ , en d'autres termes, il existe un entier positif  $k$  tel que l'équation  $f^k(z) - z = 0$  admet des solutions qui n'appartiennent pas à  $\Delta$ .

## 4. PROPRIETES DE $J(f_\lambda)$

Dans toute la suite,  $f_\lambda(z)$  désignera  $\lambda e^z$  où  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .  $f_\lambda$  n'admet pas de points critiques car  $f'_\lambda(z) = \lambda e^z \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$ . Zéro est une valeur exceptionnelle pour toute fonction  $f_\lambda$ ,  $\lambda \neq 0$  (i.e.  $f_\lambda(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ ). La dynamique de  $f_\lambda$  dépend fondamentalement des caractéristiques de l'orbite de zéro.

### 4.1. Théorèmes [D1]

Théorème 1: Si  $f_\lambda^n(0) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$  alors  $J(f_\lambda) = \mathbb{C}$ .

Théorème 2: Si 0 est précyclique (ou prépériodique) alors  $J(f_\lambda) = \mathbb{C}$ ; 0 précyclique veut dire que  $f_\lambda^n(0)$  est cyclique à partir d'un certain rang  $n \geq 1$ .

Théorème 3: Si  $f_\lambda$  possède une orbite cyclique attractive, alors 0 appartient au bassin d'attraction de cette orbite  $(B(0) = \{z \in \mathbb{C} : O^+(z) \rightarrow 0\})$ .

De ces théorèmes découlent des corollaires importants.

#### 4.2. Corollaires

Corollaire 1 :  $J(f_\lambda) = \mathbb{C}$  si  $\lambda > \frac{1}{e}$ .

$f_\lambda^n(0) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$  si  $\lambda > \frac{1}{e}$  et donc, d'après le

théorème 1,  $J(f_\lambda) = \mathbb{C}$ .

Corollaire 2 :  $J(f_\lambda) = \mathbb{C}$  si  $\lambda = k\pi i$ .

1<sup>er</sup> cas:  $\lambda = 2k\pi i \Rightarrow f_\lambda(z) = 2k\pi i e^z$ .

Par suite:

$$\begin{aligned} f_\lambda(0) &= 2k\pi i \\ f_\lambda^2(0) &= 2k\pi i e^{2k\pi i} \\ &= 2k\pi i; \end{aligned}$$

par conséquent:  $f_\lambda^n(0) = f_\lambda(0) \quad \forall n \geq 1$ .

2<sup>e</sup> cas:  $\lambda = (2k+1)\pi i$

$$\begin{aligned} f_\lambda(0) &= (2k+1)\pi i \\ f_\lambda^2(0) &= -(2k+1)\pi i \\ f_\lambda^3(0) &= (2k+1)\pi i. \end{aligned}$$

0 étant précyclique dans les deux cas, on en déduit alors (d'après le théorème 2) que:  $J(f_\lambda) = \mathbb{C}$  si  $\lambda = k\pi i$ .

Corollaire 3:  $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $f_\lambda$  ne peut avoir qu'une orbite cyclique attractive, au plus.

Supposons l'existence de deux orbites cycliques attractives  $O(z_1)$  et  $O(z_2)$ .

Ainsi,  $\exists z_1^* \in O(z_1)$  tel que  $f_\lambda^{m_1}(z_1^*) = z_1^*$  et

$$f_{\lambda}^k(z_1^*) = z_1^* \quad \forall 1 \leq k \leq (m_1-1), k \in \mathbb{N}.$$

De même,  $\exists z_2^* \in O(z_2)$  tel que  $f_{\lambda}^{m_2}(z_2^*) = z_2^*$  et

$$f_{\lambda}^k(z_2^*) = z_2^* \quad \forall 1 \leq k \leq (m_2-1), k \in \mathbb{N}.$$

D'après le théorème 3, 0 appartient au bassin d'attraction des deux orbites et donc:

$\exists (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tels que:  $f_{\lambda}^{n_1}(0) = z_1^*$  et  $f_{\lambda}^{n_2}(0) = z_2^*$

avec  $f_{\lambda}^k(0) \neq z_1^* \quad \forall 1 \leq k < n_1, k \in \mathbb{N}$  et

$f_{\lambda}^k(0) \neq z_2^* \quad \forall 1 \leq k < n_2, k \in \mathbb{N}.$

Il est évident que  $n_1 \neq n_2$  car autrement  $z_1^* = z_2^*$  et les deux cycles contiendraient les mêmes points. Supposons alors que  $n_1 < n_2$ .

On peut toujours écrire  $n_2$  sous la forme:

$n_2 = n_1 + p m_1 + q$  où  $p$  et  $q$  sont tels que:

$(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  et  $0 \leq q \leq (m_1-1)$ .

Donc

$$\begin{aligned} f_{\lambda}^{n_2}(0) &= f_{\lambda}^{n_1 + pm_1 + q}(0) \\ &= f_{\lambda}^{pm_1 + q} [f_{\lambda}^{n_1}(0)] \\ &= f_{\lambda}^q [f_{\lambda}^{pm_1}(z_1^*)] \\ &= f_{\lambda}^q (z_1^*) \quad \text{car } f_{\lambda}^{m_1}(z_1^*) = z_1^*; \end{aligned}$$

or,  $f_{\lambda}^{n_2}(0) = z_2^*$ ; il s'ensuit donc que

$$z_2^* = f_{\lambda}^q (z_1^*) \quad 0 \leq q \leq (m_1 - 1);$$

donc  $z_2^*$  appartient au cycle de  $O(z_1)$ , autrement dit les deux cycles

considérés ne peuvent être différents.

Conséquence:

Le cycle attractif de  $f_\lambda$  (au cas où il existe) peut toujours être obtenu en itérant  $f_\lambda$  avec  $z_0 = 0$  comme valeur initiale.

## 5. POINTS FIXES ET CYCLES ATTRACTIFS DE $f_\lambda(z) = \lambda e^z$ QUAND $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

Dans cette section, on discutera de la présence ou de l'absence d'un cycle attractif de la fonction  $f_\lambda$  dans le cas où  $\lambda$  est réel. Dorénavant, par point fixe on sous-entendra un point fixe d'ordre 1.

### 5.1. $\lambda > \frac{1}{e}$ .

$\lambda > \frac{1}{e} \Rightarrow J(f_\lambda) = \emptyset$  [Corollaire 1], i.e. tous les points fixes et tous les cycles de  $f_\lambda$  sont répulsifs.

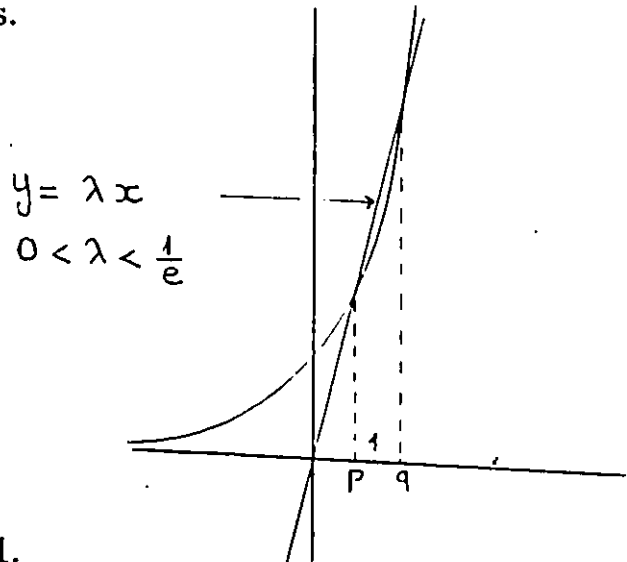


Fig. 2.1.

### 5.2. $0 < \lambda \leq \frac{1}{e}$ .

Quand  $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ ,  $f_\lambda$  admet deux points fixes réels  $p$  et  $q$  tels que:

$0 < p < 1 < q$ . (fig. 2.1)  $p$  est attractif et  $q$  est répulsif car

$$f(p) = \lambda e^p = p \Rightarrow |f'(p)| < 1 \text{ et } f(q) = \lambda e^q = q \Rightarrow |f'(q)| > 1.$$

La présence d'un point fixe attractif nous permet de déduire que la structure globale de  $J(f_\lambda)$  est très différente

suivant que  $\lambda > \frac{1}{e}$  ou  $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ . En effet, alors que

$J(f_\lambda) = \mathbb{C}$  pour  $\lambda > \frac{1}{e}$ ,  $J(f_\lambda) = \emptyset$  si  $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ . Plus

précisément, on a le théorème suivant.

Théorème [DK p. 50]

Si  $0 < \lambda < \frac{1}{e}$  alors  $J(f)$  est un ensemble de Cantor de courbes dans  $\mathbb{C}$ .

$f_\lambda$  admet un point fixe attractif unique dont le bassin d'attraction est ouvert, dense et connexe dans  $\mathbb{C}$ .

Avant d'expliciter un peu plus en détail les conclusions du théorème, on rappellera d'abord la définition d'un ensemble de Cantor.

Définition.

Soit  $K_0$  l'intervalle  $[0,1]$  de l'axe réel.

On forme  $K_1$  en enlevant de  $K_0$  le tiers du milieu à savoir l'intervalle  $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$  i.e.  $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ .

De même  $K_2$  est formé en enlevant de  $K_1$  le tiers du milieu pour chacun des deux intervalles de  $K_1$ , c'est-à-dire

$$K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

D'une façon générale,  $K_n$  est obtenu en enlevant de  $K_{n-1}$  le tiers du milieu de chacun des intervalles qui le composent. Ainsi,  $K_n$  est

l'union de  $2^n$  intervalles fermés et disjoints dont la longueur de chacun est  $(\frac{1}{3})^n$ . L'ensemble de Cantor est, par définition:

$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .  $K$  est un ensemble fermé, infini, non dénombrable et

d'intérieur vide.

Si  $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ ,  $f_\lambda(z) = \lambda e^z$  a deux points fixes réels  $p$  et  $q$  tels que:

$0 < p < 1 < q$ ,  $p$  attractif et  $q$  répulsif.

L'image de la droite  $x = q$  par  $f_\lambda$  est le cercle de centre 0 et de rayon  $q$ . En effet,  $z = q + iy \Rightarrow f_\lambda(z) = \lambda e^{q+iy} = \lambda e^q e^{iy}$  ;

donc  $f_\lambda(z) = q e^{iy}$ .

L'ensemble  $A$  des points  $z$  dont la partie réelle est strictement inférieure à  $q$ , est appliqué par  $f_\lambda$  dans le disque ouvert de centre  $0$  et de rayon  $q$ . En fait, de tels points tendent asymptotiquement vers  $p$  par itération de  $f_\lambda$ . En d'autres termes, il n'existe pas de points  $z$  appartenant à l'ensemble de Julia de  $f_\lambda$  et situés à gauche de la droite  $x = q$ .

$$f_\lambda(A) = \overset{\circ}{D}(0, q) \quad \text{où} \quad A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < q\}.$$

Pour voir que  $J(f_\lambda)$  est un ensemble de Cantor de courbes, on doit noter que la pré-image du demi-plan  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq q\}$  est un ensemble dénombrable de régions paraboliques dans  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq q\}$ .

En prenant successivement les images réciproques de ces ensembles, on obtient l'ensemble de Cantor de courbes. De plus, comme  $|f'_\lambda(z)| > 1$  si  $\operatorname{Re} z > q$ , on en déduit alors que l'ensemble précédent est bien  $J(f_\lambda)$ .

Soit  $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq q\}$ , on va définir  $B_2 = f_\lambda^{-1}(B_1)$ . On cherche donc l'ensemble des points  $z$  de  $\mathbb{C}$  ayant la propriété suivante:  $f_\lambda(z) \in B_1$ , c'est-à-dire  $\operatorname{Re} f_\lambda(z) \geq q$ . Ainsi,

$$B_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} f_\lambda(z) \geq q\}$$

$$z = x + iy \Rightarrow f_\lambda(z) = \lambda e^{x+iy} \text{ donc } \operatorname{Re} f_\lambda(z) = \lambda e^x \cos y.$$

Le problème revient à trouver l'ensemble des couples  $(x, y)$  qui vérifient:

$$\lambda e^x \cos y \geq q. \quad (2.2)$$

$\lambda > 0$  et  $\cos y \leq 1$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ , impliquent que  $\lambda e^x \cos y \leq \lambda e^x$  et d'après (2.2)

on a:

$$\lambda e^x \geq q. \quad (2.3)$$

$$(2.3) \Rightarrow x \geq q, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \text{car } \lambda e^q = q.$$

Comme  $\lambda < 0$  et  $q > 0$  alors de la relation (2.2) on déduit que  $\cos y > 0$ ,

$$\text{i.e. } y \in ]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[ \quad , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\lambda e^x \cos y \geq q \Rightarrow \cos y \geq \frac{q}{\lambda e^x} \quad \text{car } \lambda e^x > 0.$$

On désigne par  $P_k$  l'ensemble des points suivants:

$$P_k = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} ; x \geq q, \cos y \geq \frac{q}{\lambda e^x} \text{ et } y \in ] \frac{4k-1}{2} \pi, \frac{4k+1}{2} \pi [ \}.$$

$P_k$  est une région parabolique,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ .

Les droites d'équations:  $y = \frac{4k-1}{2} \pi$  et  $y = \frac{4k+1}{2} \pi$  sont des asymptotes pour

les régions  $P_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . Finalement, l'ensemble  $B_2$  est:

$$B_2 = \{z \in \mathbb{C} : z \in P_k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

L'étape suivante consiste à décrire l'image réciproque de  $P_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$z = x + iy \in f_\lambda^{-1}(P_k) \Rightarrow f_\lambda(z) = \lambda e^z \in P_k.$$

$$P_k = \{(x_k, y_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_k \geq q, \cos y_k \geq \frac{q}{\lambda e^{x_k}}, y_k \in ] \frac{4k-1}{2} \pi, \frac{4k+1}{2} \pi [ \}$$

donc

$$\text{si } f_\lambda(z) = \lambda e^z = \lambda e^x \cos y + i \lambda e^x \sin y \in P_k$$

alors on doit avoir:

- 1)  $\lambda e^x \cos y \geq q,$
- 2)  $\cos(\lambda e^x \sin y) \geq \frac{q}{\lambda e^x \cos y},$
- 3)  $\lambda e^x \sin y \in ] \frac{4k-1}{2} \pi, \frac{4k+1}{2} \pi [ , k \in \mathbb{Z}.$

Le point  $(q, 2k\pi)$  est le sommet de  $P_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . L'image réciproque de ce point est l'ensemble des couples  $(x, y)$  vérifiant:

$$\begin{cases} \lambda e^x \cos y = q \\ \lambda e^x \sin y = 2k\pi \end{cases}, \quad (2.4)$$

i.e.

$$f_{\lambda}^{-1} [(q, 2k\pi)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \text{Ln} \frac{q}{\lambda \cos y}, \text{tg } y = \frac{2k\pi}{q} \text{ avec } \cos y > 0\}.$$

Ainsi si  $k = 0$ , le point  $(q, 0)$  admet  $\{(x, y) : x = q \text{ et } y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  pour image réciproque. Les points  $\{(q, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$  représentent les sommets respectifs des régions paraboliques qui constituent  $f_{\lambda}^{-1}(P_0)$ .

Plus généralement,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , les solutions de (2.4) sont les sommets respectifs des régions paraboliques de  $f_{\lambda}^{-1}(P_k)$ . On a alors la représentation graphique suivante de  $f_{\lambda}^{-2}(B_1)$  où

$$B_1 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \geq q\}.$$

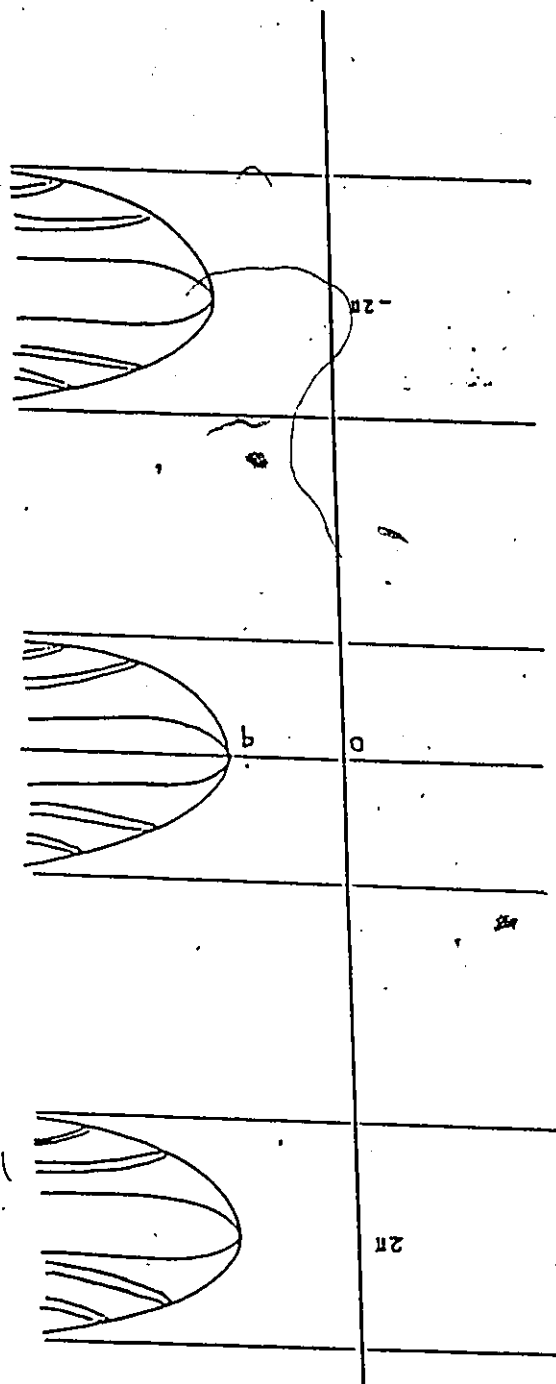


Fig. 2.2. Représentation graphique de  $f_{\lambda}^{-2}(B_1)$  où

$$B_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq q\} \text{ et } 0 < \lambda < \frac{1}{e} .$$

En prenant continuellement les images réciproques des régions obtenues, on aura (approximativement) la figure suivante.

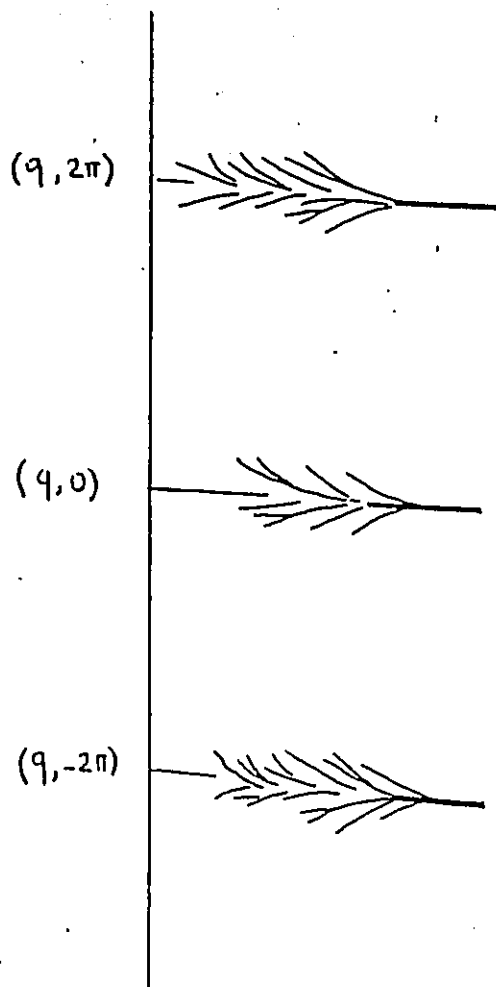


Fig. 2.3.  $J(f_\lambda)$  pour  $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ .

Cas où  $\lambda = \frac{1}{e}$ .

Quand  $\lambda = \frac{1}{e}$ ,  $f_\lambda$  admet alors un point fixe double en  $x = 1$ .

5.3.  $\lambda < 0$  [DK p. 50].

Si  $-e < \lambda < 0$  alors  $f_\lambda$  admet un point fixe réel  $\alpha$  tel que:

$$-1 < \alpha < 0.$$

$\alpha$  est attractif car  $|f_\lambda^1(\alpha)| = |\alpha| < 1$ .

Si  $\lambda < -e$ ,  $f_\lambda$  a un cycle attractif d'ordre 2. Le bassin d'attraction de ce cycle est ouvert et dense dans  $\mathbb{C}$ .

Si  $\lambda = -e$ ,  $f_\lambda$  possède un point fixe réel indifférent en  $x = -1$ .

5.4. Tableau récapitulatif

$\lambda$	$-\infty$	$-e$	$0$	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
point $f_\lambda$	Un cycle attractif d'ordre 2. cycle	Un point fixe réel $\alpha$ attractif $-1 < \alpha < 0$	Deux points fixes réels $0 < p < 1 < q$	aucun fixe attractif, aucun attractif.	aucun
$\dot{J}(f_\lambda)$	$\dot{J}(f_\lambda) = \emptyset$	$\dot{J}(f_\lambda) = \emptyset$	$\dot{J}(f_\lambda) = \emptyset$	$\dot{J}(f_\lambda) = \mathbb{C}$ .	

Si  $\lambda = -e$ ,  $x = -1$  est un point fixe indifférent de  $f_\lambda$ .

Si  $\lambda = \frac{1}{e}$ ,  $f_\lambda$  admet un point fixe double en  $x = 1$ .

## CHAPITRE 3

RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION:  $e^z - cz = 0$ .

On considère l'équation

$$e^z - cz = 0, \quad c \in \mathbb{C}^* \quad (3.1)$$

D'après le chapitre 1 [p.18], (3.1) admet une infinité (dénombrable) de solutions. Désignons ces dernières par  $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(p)}, \dots$ .

On se propose dans cette étude de trouver un moyen d'obtenir par itération n'importe quelle racine voulue  $z^{(p)}$  de (3.1), pour un  $c$  donné.

## 1. LOCALISATION DES RACINES

On va localiser les racines  $z^{(p)}$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , de (3.1) en construisant une représentation graphique des images de chacun des quatre quadrants du plan de  $c$  dans celui de  $z$ . Par image d'un point  $c$  on sous-entend l'ensemble des solutions de l'équation  $e^z - cz = 0$ .

De  $c = a + ib$ ,  $z = x + iy$  et (3.1) on déduit que:

$$a = \frac{e^x(x \cos y + y \sin y)}{x^2 + y^2} \quad (3.2)$$

$$b = \frac{e^x(x \sin y - y \cos y)}{x^2 + y^2} \quad (3.3)$$

On est plus particulièrement intéressé par les images des droites d'équations:  $a = 0$  (axe des imaginaires purs) et  $b = 0$  (axe des réels). Les résultats principaux sont regroupés dans le tableau 3.1.

$x = 0$ 

\* Si  $a = 0$  alors  $y = k\pi$  et  $b = (-1)^{k+1} \frac{1}{k\pi}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

\* Si  $b = 0$  alors  $y = \frac{(2k+1)}{2} \pi$  et  $a = (-1)^k \frac{2}{(2k+1)\pi}$

\* Si  $a = 0$  alors  $x = -y \frac{\sin y}{\cos y}$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow \begin{cases} \frac{(2k+1)}{2} \pi^+ & \text{si } k \geq 0 \\ \frac{(2k+1)}{2} \pi^- & \text{si } k < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

D'après (3.4),  $b \rightarrow (-1)^{|k|} \infty$ .

 $x \rightarrow +\infty$ 

\* Si  $b = 0$  alors  $x = y \frac{\sin y}{\cos y}$ .

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} y \rightarrow k\pi^+ & \text{si } k > 0 \\ y \rightarrow k\pi^- & \text{si } k < 0 \\ y = 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

D'après (3.5),  $a \rightarrow (-1)^{|k|} \infty$ .

\* Si  $a = 0$  alors  $x = -y \frac{\sin y}{\cos y}$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow \begin{cases} \frac{(2k+1)}{2} \pi^- & \text{si } k \geq 0 \\ \frac{(2k+1)}{2} \pi^+ & \text{si } k < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

D'après (3.6),

$$b \rightarrow \begin{cases} 0^- & \text{si } k = \frac{4m+1}{2}, m \in \mathbb{Z} \\ 0^+ & \text{si } k = \frac{4m+3}{2}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$x \rightarrow -\infty$  Si  $b = 0$  alors  $x = y \frac{\cos y}{\sin y}$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \begin{cases} y \rightarrow k\pi^- & \text{si } k > 0 \\ y \rightarrow k\pi^+ & \text{si } k < 0 \\ y = 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

D'après (3.7),  $a \rightarrow \begin{cases} 0^+ & \text{si } k = 2m + 1, m \in \mathbb{Z} \\ 0^- & \text{si } k = 2m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Au voisinage du pôle  $z = 0$  de  $c(z) = \frac{e^z}{z}$  on a:

$a = 0$

\* Si  $y \rightarrow 0^+$  alors  $x \rightarrow 0^-$  et  $b \rightarrow -\infty$

\* Si  $y \rightarrow 0^-$  alors  $x \rightarrow 0^-$  et  $b \rightarrow +\infty$

$b = 0$	$y = 0$ alors	$\begin{cases} x \rightarrow 0^- \text{ et } a \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 0^+ \text{ et } a \rightarrow +\infty \end{cases}$
---------	---------------	--

---

Tableau 3.1.

N.B.: La notation  $y \rightarrow \alpha^+$  (resp.  $\alpha^-$ ) signifie que  $y$  approche  $\alpha$  par valeurs supérieures (resp. inférieures).

Compte tenu du fait que  $z = 1$  est un point fixe double unique (obtenu pour  $c = e$ ) et du tableau 3.1, la représentation graphique des images des droites d'équations  $a = 0$  et  $b = 0$ , a l'allure suivante.

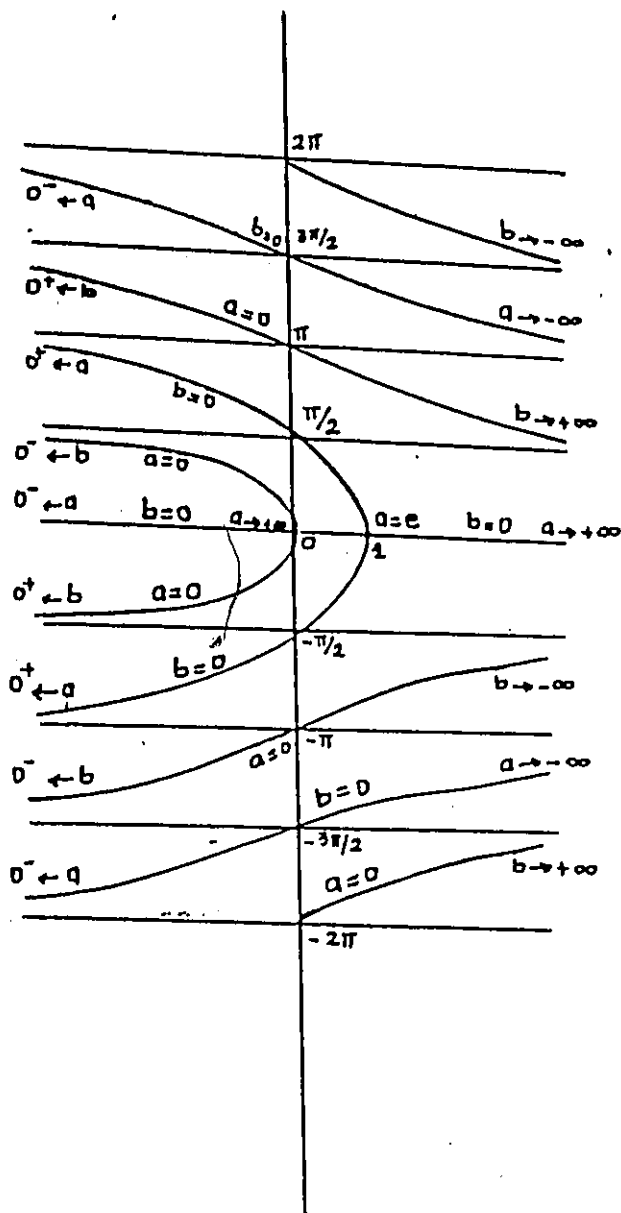


Fig. 3.1. Image par  $c \mapsto \{z : e^z - cz = 0\}$  de l'axe réel ( $b = 0$ ) et de l'axe imaginaire ( $a = 0$ ).

Pour obtenir l'image d'un quadrant  $Q$  il suffit de représenter le plan de  $c$  sous la forme:

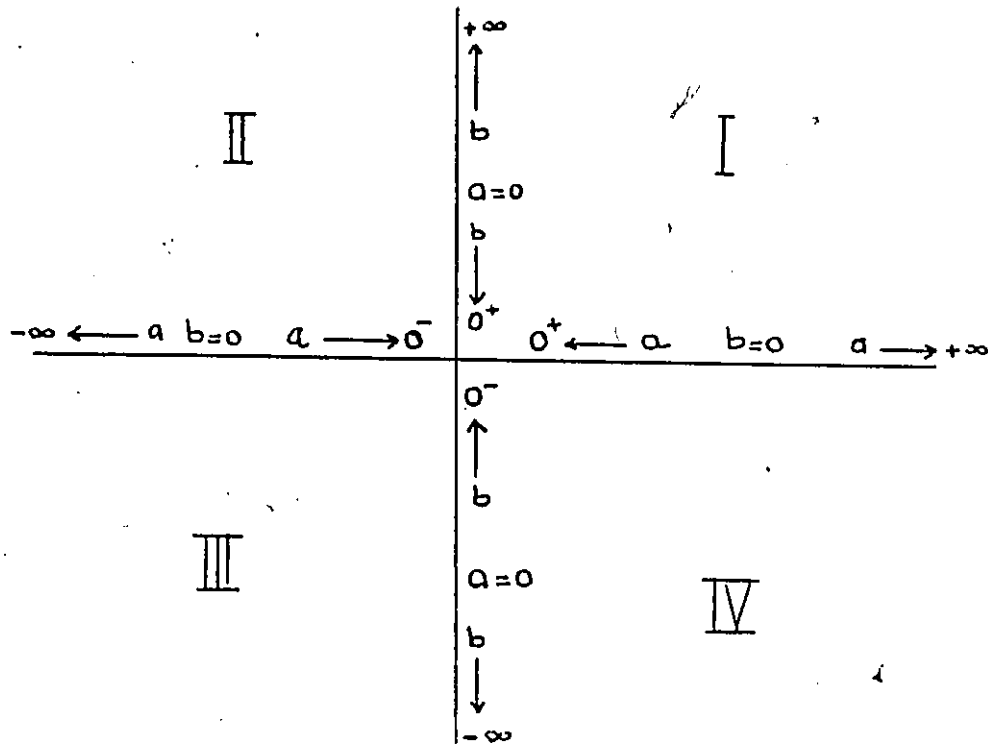


Fig. 3.2.

et de remarquer que chaque quadrant est délimité par deux demi-droites dont les images ont déjà été trouvées.

Exemple: si  $Q = I$  alors les deux demi-droites ont pour équations:

$$a = 0 \quad (\text{avec d'une part } b \rightarrow 0^+ \text{ et d'autre part } b \rightarrow +\infty)$$

$$\text{et } b = 0 \quad (\text{avec } a \rightarrow 0^+ \text{ et } a \rightarrow +\infty).$$

On complète ainsi la fig. 3.1 et on obtient alors:

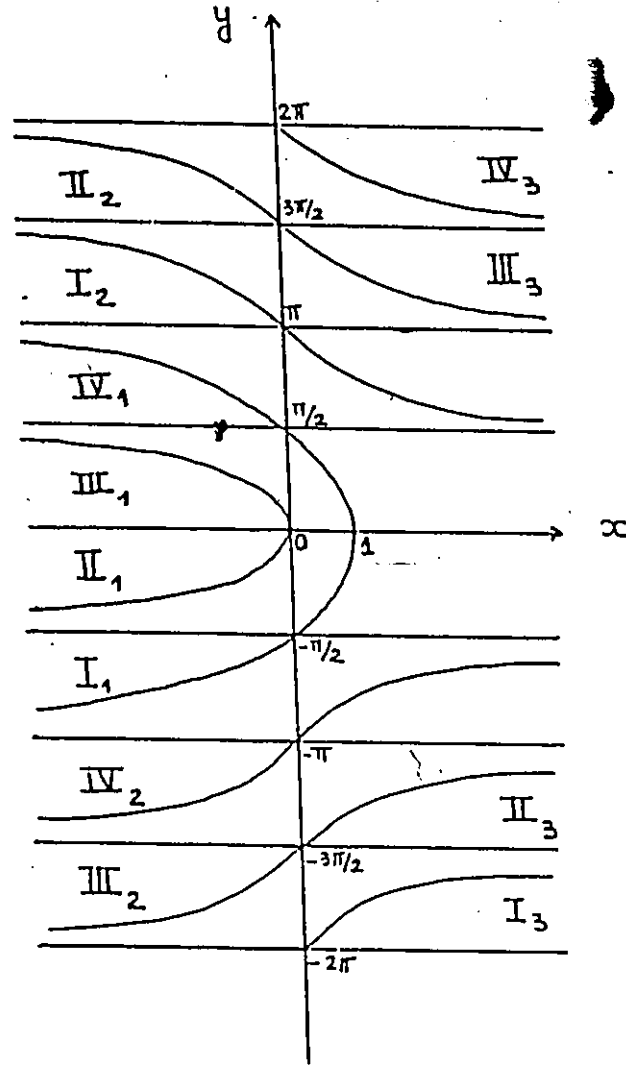


Fig. 3.3. image de chaque quadrant de plan de  $c$   
 par  $c \mapsto \{z \in \mathbb{C} : e^z - cz = 0\}$ .

Si  $Q$  est l'un des 4 quadrants du plan de  $c$  alors  $Q_p$  représente l'ensemble des  $P$ -ièmes racines de (3.1) lorsque  $c$  parcourt  $Q$ . Ainsi, si  $c \in I$  la première racine  $z^{(1)}$  de (3.1) est dans  $I_1$ , la deuxième appartient à  $I_2$  et de manière générale,  $z^{(p)}$  est dans  $I_p$ .

Avant de justifier la numérotation utilisée dans la fig. 3.3, on adoptera les définitions suivantes:

$$g_p: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$c \rightarrow g_p(c) = z^{(P)}$$

où  $z^{(P)}$  est la  $P$ -ième racine de l'équation (3.1). De plus, posons

$$g(c) = \{z \in \mathbb{C} : e^z - cz = 0\}.$$

$g$  est une fonction multivoque.

Il résulte de ce qui précède que  $g(c)$  est l'ensemble des points fixes de la fonction  $f_c(z) = \frac{e^z}{c}$ . De même si  $A$  est un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{C}$ ,

$g(A)$  (resp.  $g_p(A)$ ) est l'ensemble de toutes les racines (resp. des  $P$ -ièmes racines) de l'équation (3.1) lorsque  $c$  parcourt  $A$ .

Ainsi,  $g_p(\mathbb{I}) = \mathbb{I}_p$  et  $g(\mathbb{I}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_k$ .

La numérotation de la Fig. 3.3. a été adoptée dans le but d'avoir une symétrie par rapport à l'axe réel entre  $g_p(\mathbb{I}) = \mathbb{I}_p$  et  $g_p(\mathbb{IV}) = \mathbb{IV}_p$  d'une part et  $g_p(\mathbb{II}) = \mathbb{II}_p$  et  $g_p(\mathbb{III}) = \mathbb{III}_p$  d'autre part. En d'autres termes on a:

$$\forall c \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, g_p(\bar{c}) = \overline{g_p(c)}. \quad (3.8)$$

Conséquence:  $\forall c \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ , la connaissance de la P-ième racine de  $e^z - cz = 0$  implique celle de la P-ième racine de  $e^{\bar{z}} - \bar{c}z = 0$  (conjugué de la première) et donc pour P donné, on peut utiliser avantageusement l'un ou l'autre des demi-plans I  $\cup$  II ou III  $\cup$  IV du plan de  $c$  pour obtenir la P-ième racine de (3.1).

Cas où  $c \in \mathbb{R}^*$ :

\* Le cas où  $c$  appartient à la droite réelle est différent de celui où  $c \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$  car:  $c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c = \bar{c}$  et donc si  $z$  est solution de (3.1), il en sera de même de  $\bar{z}$ . Néanmoins on a une relation similaire à (3.8) si  $z \neq \bar{z}$  (i.e. si la racine de (3.1) n'est pas réelle) à savoir:

$$\begin{aligned} g_{2k+2}(c) &= \overline{g_{2k}(c)} \quad \text{si } c \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}, \\ \text{et } g_{2k+1}(c) &= \overline{g_{2k}(c)} \quad \text{si } c \in \mathbb{R}^-, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ces relations découlent directement de la définition de  $g_p$  et de la figure 3.3. Il nous reste à définir l'emplacement de  $z^{(2k+1)}$  et de  $z^{(2k)}$ . Prenons un exemple : soit  $c = 1$  alors  $z^{(4)} = \bar{z}^{(3)}$ ; on sait que les racines  $z^{(4)}$  et  $z^{(3)}$  appartiennent l'une à  $I_3 \cap IV_4$  et l'autre à  $I_4 \cap IV_3$  mais on ne peut spécifier l'appartenance exacte de l'une d'elles à l'un des deux ensembles. Dans la suite, on utilisera la convention suivante:

$$z^{(2k+1)} \in IV_{(2k+1)} \cap I_{(2k+2)}$$

et

$$z^{(2k+2)} \in IV_{(2k+2)} \cap I_{(2k+1)} \quad \text{si } c \in \mathbb{R}^+.$$

De plus

$$z^{(2k+1)} \in III_{(2k+1)} \cap II_{(2k)}$$

et

$$z^{(2k)} \in III_{(2k)} \cap II_{(2k+1)} \quad \text{si } c \in \mathbb{R}^-.$$

\* Le cas où la racine est réelle peut se produire uniquement dans le cas des deux premières racines où on a:

$$z^{(1)} \in \mathbb{R}^- \quad \text{si } c \in ]-\infty, 0[$$

$$z^{(1)} \in ]0, 1[ \quad \text{et } z^{(2)} \in ]1, +\infty[ \quad \text{si } c \in ]e, +\infty[.$$

$$z^{(1)} = z^{(2)} = 1 \quad \text{si } c = e.$$

En résumé,  $g_p$  admet les propriétés suivantes.

$$1) \quad g_p(\bar{c}) = \overline{g_p(c)} \quad \forall c \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

$$2) \quad g_{2k+1}(c) = \overline{g_{2k}(c)} \quad \forall c \in \mathbb{R}^-, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$3) \quad g_{2k+2}(c) = \overline{g_{2k+1}(c)} \quad \forall c \in \mathbb{R}^+, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$4) \quad g_1(c) \in ]-\infty, 0[ \quad \forall c \in ]-\infty, 0[$$

$$5) \quad g_2(c) = \overline{g_1(c)} \quad \forall c \in ]0, e[$$

$$6) \quad g_1(c) \in ]0, 1[ \quad \forall c \in ]e, +\infty[$$

$$7) \quad g_2(c) \in ]1, +\infty[ \quad \forall c \in ]e, +\infty[$$

$$8) \quad g_1(c) = g_2(c) = 1 \quad \text{si } c = e.$$

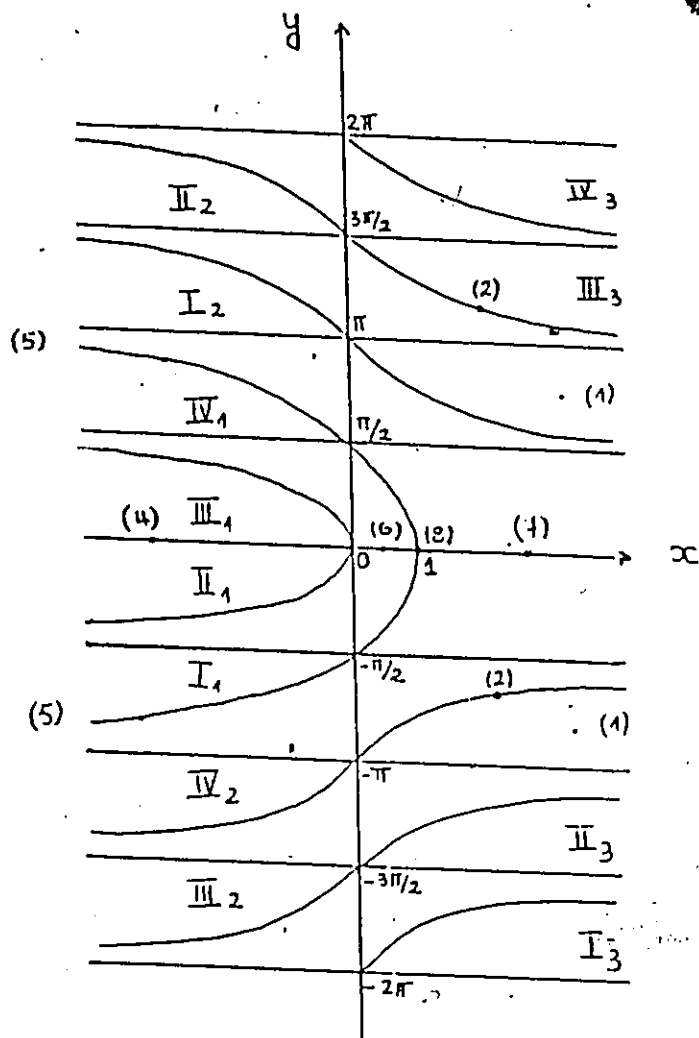


Fig. 3.4. Illustration graphique des propriétés de  $g_p$ .

## 2. ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Soit  $C_k = \{c \in \mathbb{C}^* : f_c(z) = \frac{e^z}{c} \text{ a une orbite cyclique, attractive d'ordre } k\}$ .

D'après le corollaire 3 [paragraphe 4 chap. 2],  $f_c$  n'admet au plus qu'une orbite attractive quelle que soit la valeur de  $c$ . Il résulte alors que les ensembles  $C_k$  sont disjoints dans le plan de  $c$ . Dans cette étude, on est plus particulièrement intéressé par:

$$C_1 = \{c \in \mathbb{C}^* : f_c \text{ admet un point fixe attractif}\}.$$

$C_1$  est constitué par l'ensemble des points situés à l'extérieur de la courbe  $(\Gamma)$  d'équation:  $c = \frac{e\xi}{\xi}$  où  $|\xi| = 1$ . En effet, si  $c = \frac{e\xi}{\xi}$  alors  $\xi$  est un point fixe de  $f_c$  et de plus  $f'_c(\xi) = \xi$ . Par suite comme  $|\xi| = 1$ , la valeur de  $f'_c$  au point fixe traverse le cercle unité lorsque  $c$  traverse  $(\Gamma)$ .

Pour tracer la courbe  $(\Gamma)$ , on aura besoin des valeurs numériques suivantes:

$\xi = x + iy$		$c = a + ib$	
x	y	a	b
+1.00	+0.00	+2.72	+0.00
+0.86	+0.50	+2.38	-0.06
+0.80	+0.60	+2.22	-0.10
+0.20	+0.98	+1.20	-0.46
+0.00	+1.00	+0.84	-0.54
-0.10	+0.99	+0.71	-0.56
-0.20	+0.98	+0.58	-0.58
-0.30	+0.95	+0.45	-0.59
-0.60	+0.80	+0.09	-0.54
-0.65	+0.76	+0.03	-0.52
-0.68	+0.73	-0.01	-0.51
-0.72	+0.70	-0.05	-0.49
-0.80	+0.60	-0.15	-0.43
-0.86	+0.50	-0.22	-0.36
-0.98	+0.20	-0.35	-0.15
-1.00	+0.00	-0.37	-0.00

Tableau 3.2. Valeurs de  $c = \frac{e^{\xi}}{\xi}$  quand  $|\xi| = 1$

La courbe  $(\Gamma)$  a alors l'allure suivante:

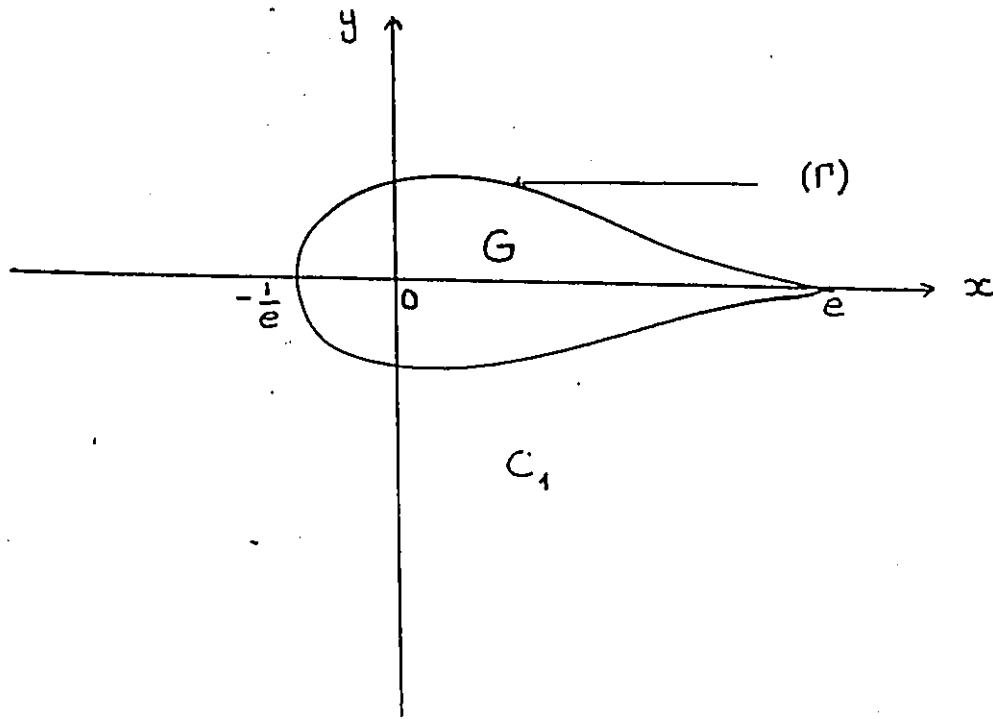


Fig 3.5. Représentation graphique de la courbe  $(\Gamma)$  d'équation

$$c(\xi) = \frac{e\xi}{\xi} \quad \text{où } |\xi| = 1.$$

Posons  $G = \mathbb{C} - (C_1 \cup (\Gamma))$ .

Si  $c \in C_1$ ,  $f_c(z)$  admet un point fixe attractif  $z$  tel que  $|z| < 1$ . Si  $c \in (\Gamma)$ ,  $e^z - cz = 0$  a une racine appartenant au cercle unité (les autres racines sont toutes situées à l'extérieur du disque unité).

Si  $c \in G$ , toutes les racines de  $e^z - cz = 0$  sont telles que:  $|z| < 1$ .

L'ensemble des points fixes attractifs de  $f_c$  lorsque  $c$  parcourt  $C_1$ , est le disque unité ouvert privé de l'origine car si  $z$  vérifie (3.1) alors  $f'_c(z) = z$  et par

suite:

$$|f'_c(z)| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1. \quad (3.9)$$

L'équivalence (3.9) exprime le fait que toute racine  $z^{(p)}$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , telle que  $|z^{(p)}| > 1$ , ne pourrait être obtenue par itération de  $f_c$ . Le théorème suivant nous indique une méthode de résolution de l'équation (3.1) lorsque  $|z| > 1$ .

**Théorème:**

Soit  $\varphi(z)$  une fonction entière transcendante. Si l'ensemble des zéros de  $\varphi(z)$  coïncide avec l'ensemble des points fixes d'une certaine fonction itérative  $\Phi(z)$ , alors il n'y a que les zéros de  $\varphi(z)$  qui sont des points fixes attractifs de  $\Phi(z)$  qui peuvent être obtenus en itérant  $\Phi$ . Les zéros de  $\varphi$  qui sont des points fixes répulsifs de  $\Phi$  peuvent être atteints en itérant la fonction réciproque  $\Phi_{-1}$  de  $\Phi$ .

Preuve :

Cela provient du fait qu'un point fixe répulsif de  $\Phi$  est un point fixe attractif de  $\Phi_{-1}$  et réciproquement. En effet,  $\Phi'_{-1}(z) = \frac{1}{\Phi'(z)}$  et donc:

$$|\Phi'(z)| > 1 \Leftrightarrow |\Phi'_{-1}(z)| < 1$$

Dans notre cas,  $\Phi(z) = \frac{e^z}{c}$  et  $\Phi_{-1}(z) = \text{Ln } cz$ .

### 3. DEFINITIONS

Dans toute la suite du chapitre,  $B(k)$  désignera la bande horizontale de largeur  $2\pi$  suivante:

$$B(k) = \{z \in \mathbb{C} : k\pi \leq \text{Im } z \leq (k+2)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

#### 3.1. Définition d'une région conflictuelle

On dira qu'un quadrant  $Q$  du plan de  $c$  admet une région conflictuelle dans la bande  $B(k)$  s'il existe deux indices  $n$  et  $m$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$  et tels que:

- 1)  $Q_m \cap B(k) \neq \emptyset$
- 2)  $Q_n \cap B(k) \neq \emptyset$
- 3)  $g^{-1}(Q_n \cap B(k)) \cap g^{-1}(Q_m \cap B(k)) \neq \emptyset$

où  $g^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \rightarrow c = \frac{e^z}{z}$$

et  $Q \in \{I, II, III, IV\}$

On notera  $g^{-1}(Q_n \cap B(k)) \cap g^{-1}(Q_m \cap B(k))$  par  $Q(n, m, k)$ . La région de "conflit en question" est constituée par l'ensemble des points  $c$  du quadrant  $Q$  qui appartiennent à  $Q(n, m, k)$ .

#### Exemple.

Considérons  $B(-1)$  et  $Q = I$ .

$I(1,2,-1)$  est non vide car  $g^{-1}(I_1 \cap B(-1)) = G^{-1}(I_1) = I$

et  $g^{-1}(I_2 \cap B(-1)) \neq \emptyset$  car  $I_2 \cap B(-1) \neq \emptyset$ .

Lorsque  $c \in I(1,2,-1)$  l'itération de  $Ln \text{ } cz$  dans  $B(-1)$  peut a priori converger vers la première racine de (3.1) ou vers la deuxième (dans le cas où il y a convergence, bien-entendu!) Cette région est par conséquent une source

probable de difficultés dans la mesure où l'on désire connaître à l'avance vers quelle racine l'itération convergera. De manière générale, la difficulté majeure dans l'itération de  $\text{Ln } cz$  réside dans l'existence de régions conflictuelles.

Ainsi, notre problème consiste en premier lieu à trouver un moyen d'éviter (si possible) la considération de ces régions dans l'itération de  $\text{Ln } cz$ . Pour cela, on distinguera trois cas dans le calcul de la P-ième racine de (3.1):

- 1)  $P \geq 3$ ,
- 2)  $P = 2$ ,
- 3)  $P = 1$ .

### 3.2. Définition du logarithme d'un nombre complexe

Soit  $c \in \mathbb{C}^*$ ; par définition  $\text{Ln } z$  est un nombre complexe tel que  $\exp(\text{Ln } z) = z$ .

On en déduit si l'on pose:

$$\rho = |z| \text{ et } \theta = \arg z$$

que

$$\text{Ln } z = \text{Ln } \rho + i(\theta + 2k\pi) \text{ , } k \in \mathbb{Z} . \quad (3.10)$$

$\theta$  s'appelle détermination naturelle (resp. principale) si elle appartient à l'intervalle  $] -\pi , \pi ]$  (resp.  $[0 , 2\pi[$ ). Dans la suite, sauf indication contraire, on considérera  $\theta \in ] -\pi , \pi ]$ .

### 3.3. Localisation de $z^{(p)}$ dans une bande $B(k)$

Soit  $z^{(p)}$  la P-ième racine de l'équation  $e^z - cz = 0$ , pour un  $c$  donné.

D'après la numérotation adoptée dans la fig. 3.3 et les propriétés de  $g_p$ , l'appartenance de  $z^{(p)}$  à une bande  $B(k)$  est donnée comme suit:

\* P pair.

$$z^{(p)} \in B(P-2) \quad \text{si} \quad c \in (\text{I} \cup \text{II}) - \mathbf{R} \quad (3.11)$$

$$z^{(p)} \in B(-P) \quad \text{si} \quad c \in \text{III} \cup \text{IV} \quad (3.12)$$

\* P impair

$$z^{(p)} \in B(P-2) \quad \text{si} \quad c \in \text{III} \cup \text{IV} \quad (3.13)$$

$$z^{(p)} \in B(-P) \quad \text{si} \quad c \in (\text{I} \cup \text{II}) - \mathbf{R} \quad (3.14)$$

Les relations (3.11) à (3.14) impliquent:

$$\forall P \in \mathbf{N}^* , \forall c \in \mathbb{C} , g_p(c) = z^{(p)} \in B(P-2) \cup B(-P). \quad (3.15)$$

4. ETUDE DU CAS OU  $P \geq 3$ 

Comme  $z^{(P)}$  appartient à  $B(P-2) \cup B(-P) \quad \forall P \in \mathbb{N}^*$ , on déduit que:  
 $\forall P \in \mathbb{N}^* \quad \text{Im } z^{(P)} \geq (P-2)\pi$  ou  $\text{Im } z^{(P)} \leq (-P+2)\pi$  (3.16)

Donc pour  $P \geq 3$  on a:

$$\text{Im } z^{(P)} \geq \pi \text{ ou } \text{Im } z^{(P)} \leq -\pi .$$

Ainsi,  $\forall P \geq 3$ ,  $z^{(P)}$  est un point fixe attractif de  $\text{Ln } cz$  car  $|z^{(P)}| \geq \pi > 1$ .

Les relations (3.11) à (3.14) suggèrent la considération de deux sous-cas suivant que  $P$  est pair ou est impair.

4.1.  $P = 2k + 2, k \in \mathbb{N}^*$ 

D'après (3.10):

$$\text{Ln } c = \text{Ln } |c| + i \arg c + i 2k \pi \text{ où } \arg c \in ]-\pi, \pi] \quad (3.17)$$

Soit  $c$  un point du demi-plan  $I \cup II$ .

$$c \in I \cup II \Rightarrow \arg c \in [0, \pi].$$

Par suite, de (3.17) on obtient:

$$2k \pi \leq \text{Im } \text{Ln } c \leq (2k+1) \pi \quad (3.18)$$

$$\text{car } \text{Im } \text{Ln } c = \arg c + 2k\pi.$$

4.1.1. Proposition 1

Soit  $c \in I \cup II$  et  $z_0 \in (I \cup II) - \{0\}$ .

On définit  $\{z_n\}_n$  par:

$$z_{n+1} = \text{Ln } c + \text{Ln } z_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.19)$$

où  $\text{Ln } c$  est défini par (3.17) et

$$\text{Ln } z_n = \text{Ln } |z_n| + i \arg z_n. \quad (3.20)$$

La suite  $\{z_n\}_n$  ainsi définie est convergente dans  $B(2k)$ ,  
 $\forall k \geq 1$ .

Preuve

Comme  $k \geq 1$  et  $\arg z_0 \in \{0, \pi\}$ , alors, par récurrence sur  $n$ , on montre que:

$$2k\pi \leq \operatorname{Im} z_n \leq (2k+2)\pi, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.21)$$

Il est évident que si  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  existe alors  $z$  appartiendra à  $B(2k)$  car d'après (3.21) on aurait:

$$2k\pi \leq \operatorname{Im} z \leq (2k+2)\pi.$$

Montrons donc la convergence de la suite  $\{z_n\}_n$ .

$$\begin{aligned} z_{n+2} - z_{n+1} &= L_n z_{n+1} - L_n z_n \\ &= \int_{[z_n, z_{n+1}]} \frac{d\xi}{\xi} \end{aligned}$$

où  $[z_n, z_{n+1}]$  est le segment de droite joignant les deux points  $z_n$  et  $z_{n+1}$ .

$$\begin{aligned} |z_{n+2} - z_{n+1}| &= \left| \int_{[z_n, z_{n+1}]} \frac{d\xi}{\xi} \right| \\ &\leq \int_{[z_n, z_{n+1}]} \frac{|d\xi|}{|\xi|} \\ &\leq \frac{|z_{n+1} - z_n|}{|\xi_n|} \end{aligned}$$

où  $\xi_n$  est un point convenablement choisi dans l'intervalle  $[z_n, z_{n+1}]$ . On rappelle que  $\int_Y |ds|$  est la longueur de  $Y$  [A1 pp. 82-84].

Comme  $\operatorname{Im} z_n \geq 2k\pi \geq 2\pi \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\operatorname{Im} \xi_n \geq 2k\pi \geq 2\pi$ .

Par conséquent:

$$|z_{n+2} - z_{n+1}| \leq \frac{|z_{n+1} - z_n|}{2k\pi}$$

$$\leq \frac{|z_1 - z_0|}{(2k\pi)^{n+1}}$$

$$= \frac{|\operatorname{Ln} c + \operatorname{Ln} |z_0| + i \arg z_0 - z_0|}{(2k\pi)^{n+1}}$$

La convergence est donc au moins aussi rapide que celle de la suite  $\left\{ \frac{M}{(2k\pi)^n} \right\}_n$  où  $(n+2)$  représente le nombre d'itérations effectuées et  $M = |\operatorname{Ln} c + \operatorname{Ln} |z_0| + i \arg z_0 - z_0|$ . On peut même, avec un choix approprié de  $z_0$ , avoir une majoration de  $|z_{n+2} - z_{n+1}|$  indépendante de  $c$  dans  $I \cup II$ .

#### 4.1.2. Proposition 2

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Si  $z_0 = 1$ , alors:

$$\forall c \in (I \cup II) - \{0\}, |z_{n+2} - z_{n+1}| \leq \frac{(\operatorname{Ln}^2 5 + \pi^2)^{1/2}}{(2k\pi)^{n-1}}, \quad (3.22)$$

où  $\{z_n\}_n$  est la suite définie dans la proposition 1.

#### Preuve

Si  $z_0 = 1$ , alors (3.19) et (3.20) entraînent:

$$z_1 = \operatorname{Ln} c$$

$$z_2 = \operatorname{Ln} c + \operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c \quad \text{avec} \quad 0 \leq \operatorname{Im} \operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c \leq \pi$$

$$z_3 = \operatorname{Ln} c + \operatorname{Ln} (\operatorname{Ln} c + \operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c)$$

$$\text{avec} \quad 0 \leq \operatorname{Im} \operatorname{Ln} (\operatorname{Ln} c + \operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c) \leq \pi$$

$$z_3 - z_2 = \operatorname{Ln} (\operatorname{Ln} c + \operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c) - \operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c$$

$$= \operatorname{Ln} \left( 1 + \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c}{\operatorname{Ln} c} \right).$$

$z_3 - z_2$  est la différence de deux logarithmes dont les parties imaginaires sont comprises entre 0 et  $\pi$ ; il s'ensuit que:

$$\left| \operatorname{Im} \operatorname{Ln} \left( 1 + \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c}{\operatorname{Ln} c} \right) \right| \leq \pi. \quad (3.23)$$

Posons:  $\operatorname{Ln} c = \beta$  et  $\varphi = \operatorname{Im} \operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c$ .

Evidemment on a:  $\operatorname{Im} \beta \geq 2k\pi \geq 2\pi$  et  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c}{\operatorname{Ln} c} \right| &= \frac{|\operatorname{Ln} \beta|}{|\beta|} \\ &= \frac{|\operatorname{Ln} |\beta| + i\varphi|}{|\beta|} \\ &\leq \frac{\operatorname{Ln} |\beta|}{|\beta|} + \frac{\varphi}{|\beta|} \\ &\leq \frac{\operatorname{Ln} |\beta|}{|\beta|} + \frac{\pi}{|\beta|} \end{aligned}$$

Pour  $x \geq e$ , la fonction  $\frac{\operatorname{Ln} x}{x}$  est décroissante; on déduit alors que:

$$\frac{\operatorname{Ln} |\beta|}{|\beta|} \leq \frac{\operatorname{Ln} 2\pi}{2\pi} \quad \text{car } |\beta| \geq 2\pi > e, \quad \text{et par suite:}$$

$$\left| \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c}{\operatorname{Ln} c} \right| \leq \frac{\operatorname{Ln} 2\pi}{2\pi} + \frac{1}{2} < \frac{4}{5}. \quad (3.24)$$

De (3.24) on obtient:

$$\frac{1}{5} \leq \left| 1 + \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c}{\operatorname{Ln} c} \right| \leq \frac{9}{5} \quad (3.25)$$

car, d'une part:

$$\left| 1 + \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c}{\operatorname{Ln} c} \right| \leq 1 + \left| \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c}{\operatorname{Ln} c} \right| < 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

et d'autre part:

$$\left| 1 + \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c}{\operatorname{Ln} c} \right| \geq 1 - \left| \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c}{\operatorname{Ln} c} \right| > 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

D'après (3.25) on a:

$$-\operatorname{Ln} 5 = \operatorname{Ln} \frac{1}{5} \leq \operatorname{Ln} \left| 1 + \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c}{\operatorname{Ln} c} \right| \leq \operatorname{Ln} \frac{9}{5} < \operatorname{Ln} 5.$$

Par conséquent:

$$\left| \operatorname{Ln} \left| 1 + \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c}{\operatorname{Ln} c} \right| \right| \leq \operatorname{Ln} 5$$

Finalement

$$|z_3 - z_2| = \left| \operatorname{Ln} \left( 1 + \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{Ln} c}{\operatorname{Ln} c} \right) \right| \leq \sqrt{\operatorname{Ln}^2 5 + \pi^2}$$

et donc:

$$\begin{aligned} |z_{n+2} - z_{n+1}| &\leq \frac{|z_3 - z_2|}{(2k\pi)^{n-1}} \\ &\leq \frac{\sqrt{\operatorname{Ln}^2 5 + \pi^2}}{(2k\pi)^{n-1}} \quad \forall n \geq 1, \end{aligned}$$

ce qui finit la démonstration.

### 4.1.3. Conclusion

Reprenons l'équation (3.1):  $e^z - cz = 0$ ,  $c \in \mathbb{C}^*$ .

Notre problème consiste à trouver la  $P$ -ième racine de (3.1) lorsque  $P = 2k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ .

On doit tout d'abord remarquer que  $I \cup II$  n'a pas de régions conflictuelles dans  $B(P-2) = B(2k)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , ce qui n'est évidemment pas le cas du demi-plan  $III \cup IV$  comme on peut le constater par l'exemple suivant:

$$k = 1, \quad B(2k) = B(2) = \{z \in \mathbb{C}; 2\pi \leq \operatorname{Im} z \leq 4\pi\}.$$

On peut montrer, en prenant les images réciproques par  $g^{-1}$  de  $(III_3 \cup IV_3) \cap B(2)$  que si  $c \in \{b \in \mathbb{C} : b \in ]-\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{4\pi}[ \}$  alors la 3<sup>e</sup> et la 5<sup>e</sup>

racines de  $e^z - cz = 0$  sont dans la bande  $B(2)$ .

Pour obtenir la P-ième racine ( $P = 2k + 2, k \in \mathbb{N}^*$ ) de (3.1) on opère comme suit:

Si  $c \in (I \cup II) - \mathbb{R}$ , on itère  $\text{Ln } cz$  dans  $B(P-2) = B(2k)$  avec  $z_0 = 1$  pour valeur initiale.

Si  $c \in III \cup IV$ , on itère  $\text{Ln } \bar{c} z$  puis on prend le conjugué de la racine obtenue.

#### 4.2. $P = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*$

On considère cette fois  $c$  dans le demi-plan  $III \cup IV$  puisque ce dernier ne possède pas de régions conflictuelles dans  $B(P)$  lorsque  $P = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*$ .

On a:  $\text{Ln } c = \text{Ln } |c| + i \arg c + 2k\pi i$

$c \in III \cup IV \Rightarrow \arg c \in ] -\pi, 0]$  et par suite:

$$(2k-1)\pi \leq \text{Im } \text{Ln } c \leq 2k\pi .$$

Soit  $z_0 \in \mathbb{C}^*$ , on définit la suite  $\{z_n\}_n$  par:

$$z_{n+1} = \text{Ln } c + \text{Ln } z_n$$

où  $\text{Ln } z_n = \text{Ln } |z_n| + i \arg z_n$ .

Il est facile de vérifier que  $\arg z_n \in [0, \pi]$ ,  $\forall n \geq 2$ .

On déduit alors que:

$$(2k-1)\pi \leq \text{Im } z_n \leq (2k+1)\pi, \quad \forall n \geq 2.$$

##### 4.2.1. Proposition 3

Si  $c \in III \cup IV$ , la suite  $\{z_n\}_n$  vérifie alors les inégalités suivantes:

$$1) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |z_{n+2} - z_{n+1}| \leq \frac{|\text{Ln } c + \text{Ln } z_0 + i \arg z_0 - z_0|}{[(2k-1)\pi]^{n+1}},$$

$$\forall n \geq 1; \quad (3.26)$$

2) Si  $k \geq 2$  et  $z_0 = 1$  alors:

$$|z_{n+2} - z_{n+1}| \leq \frac{\sqrt{1 + \pi^2}}{[(2k-1)\pi]^{n-1}} \quad \forall n \geq 1, \quad (3.27)$$

Preuve

1) Démonstration analogue à celle de la proposition 1.

2) Tout calcul fait on a (voir preuve de la proposition 2):

$$\left| \frac{\text{Ln Ln } c}{\text{Ln } c} \right| \leq \frac{\text{Ln } 3\pi}{3\pi} + \frac{1}{3} < \frac{3}{5}$$

Par suite, on déduit que:

$$\frac{2}{5} = 1 - \frac{3}{5} < \left| 1 + \frac{\text{Ln Ln } c}{\text{Ln } c} \right| < 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

et donc:

$$\left| \text{Ln} \left| 1 + \frac{\text{Ln Ln } c}{\text{Ln } c} \right| \right| < 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } z_3 - z_2 &= \text{Ln} \left( 1 + \frac{\text{Ln Ln } c}{\text{Ln } c} \right) \\ &= \text{Ln} \left| 1 + \frac{\text{Ln Ln } c}{\text{Ln } c} \right| + i \text{Im. Ln} \left( 1 + \frac{\text{Ln Ln } c}{\text{Ln } c} \right), \end{aligned}$$

$$\text{alors } |z_3 - z_2| < \sqrt{1 + \pi^2}$$

$$\text{car } 0 \leq \text{Im Ln} \left( 1 + \frac{\text{Ln Ln } c}{\text{Ln } c} \right).$$

Finalement:

$$|z_{n+2} - z_{n+1}| \leq \frac{|z_3 - z_2|}{[(2k-1)\pi]^{n-1}}$$

$$\leq \frac{(1+\pi^2)^{1/2}}{[(2k-1)\pi]^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Remarque

La méthode utilisée pour obtenir (3.27) ne s'applique pas lorsque  $k = 1$ , car il est impossible de minorer  $\left| \text{Ln} \left| 1 + \frac{\text{Ln Ln } c}{\text{Ln } c} \right| \right|$ .

En effet,  $k = 1 \Rightarrow |\text{Ln } c| \geq \pi$  et donc:

$$\left| \frac{\text{Ln Ln } c}{\text{Ln } c} \right| \leq \frac{\text{Ln } \pi}{\pi} + \frac{\pi}{\pi} = \frac{\text{Ln } \pi}{\pi} + 1.$$

Comme  $\frac{\text{Ln } \pi}{\pi} + 1 > 1$  alors on ne peut déduire l'existence d'un réel

strictement positif  $M_1$  tel que:

$$\left| 1 + \frac{\text{Ln Ln } c}{\text{Ln } c} \right| > M_1.$$

#### 4.2.2. Conclusion

Afin d'avoir la  $P$ -ième racine de (3.1) lorsque  $P = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , on opère comme suit:

Si  $c \in \text{III} \cup \text{IV}$ , on itère  $\text{Ln } cz$  dans la bande  $B(P-2)$  avec  $z_0 = 1$ .

Si  $c \in (\text{I} \in \text{II}) - \mathbb{R}$ , on se ramène au cas précédent en résolvant l'équation  $e^z - \bar{c}z = 0$  dans  $B(P-2)$ . La racine voulue est la conjuguée de celle obtenue.

4.3. Algorithme pour le cas où  $P \geq 3$ .

Numéro de la racine	Quadrants à considérer	Bande d'itération	Remarques
$P=2k+1, k \in \mathbb{N}^*$	III, IV	$B(2k-1)$	<p>* Si <math>c \in \text{III} \cup \text{IV}</math>, itérer <math>\text{Ln } cz</math>.</p> <p>* Si <math>c \in (\text{I} \cup \text{II}) - \mathbb{R}</math>, itérer <math>\text{Ln } \bar{c} z</math> puis poser: <math>g_p(c) = \overline{g_p(\bar{c})}</math></p>
$P=2k+2, k \in \mathbb{N}^*$	I, II	$B(2k)$	<p>* Si <math>c \in (\text{I} \cup \text{II}) - \mathbb{R}</math>, itérer <math>\text{Ln } cz</math>.</p> <p>* Si <math>c \in \text{III} \cup \text{IV}</math>, itérer <math>\text{Ln } \bar{c} z</math> puis poser: <math>g_p(c) = \overline{g_p(\bar{c})}</math></p>

Tableau 3.3. Algorithme pour trouver la P-ième racine ( $P \geq 3$ ) de  $ez - cz = 0$ ,  $c \in \mathbb{C}^*$ .

4.4. Résultats numériques

c = a + ib		P	k	z(p)(k) = x + iy		ez(p)(k) - c.z(p)(k) = α + iβ	
a	b			x	y	α	β
0.25×10 <sup>-3</sup>	0.11×10 <sup>-2</sup>	6	12	-0.40×10	0.16×10 <sup>2</sup>	-0.15×10 <sup>-15</sup>	-0.77×10 <sup>-16</sup>
0.20×10	-0.10×10	3	16	0.28×10	0.70×10	-0.17×10 <sup>-12</sup>	-0.34×10 <sup>-12</sup>
"	"	5	12	0.34×10	0.13×10 <sup>2</sup>	0.77×10 <sup>-12</sup>	0.17×10 <sup>-11</sup>
"	"	8	11	0.39×10	0.21×10 <sup>2</sup>	0.13×10 <sup>-12</sup>	-0.39×10 <sup>-13</sup>
0.15×10 <sup>-4</sup>	0.92×10 <sup>-4</sup>	4	14	-0.68×10	0.99×10	-0.11×10 <sup>-18</sup>	0.60×10 <sup>-18</sup>
"	"	7	12	-0.63×10	-0.19×10 <sup>2</sup>	0.44×10 <sup>17</sup>	0.80×10 <sup>-17</sup>
-0.67×10 <sup>4</sup>	0.90×10 <sup>3</sup>	3	13	0.11×10 <sup>2</sup>	-0.36×10	-0.18×10 <sup>-9</sup>	-0.13×10 <sup>-9</sup>
-0.35	0.00	3	20	0.48	-0.46×10	-0.21×10 <sup>-12</sup>	-0.17×10 <sup>-12</sup>
"	"	99	8	0.47×10	-0.31×10 <sup>3</sup>	-0.82×10 <sup>-11</sup>	-0.15×10 <sup>-11</sup>
0.24×10 <sup>2</sup>	0.00	3	14	0.54×10	0.72×10	-0.26×10 <sup>-11</sup>	-0.10×10 <sup>-14</sup>
"	"	13	10	0.69×10	-0.39×10 <sup>2</sup>	0.25×10 <sup>-11</sup>	+0.57×10 <sup>-11</sup>
0.00	-0.78	40	8	0.46×10	-0.12×10 <sup>3</sup>	0.53×10 <sup>-13</sup>	-0.59×10 <sup>-12</sup>
"	"	50	8	0.48×10	-0.15×10 <sup>3</sup>	0.57×10 <sup>-13</sup>	-0.78×10 <sup>-11</sup>

Tableau 3.4.

Commentaire

$z^{(p)}(k)$  représente la valeur approchée de  $z^{(p)}$  après  $k$  itérations.  $k$  est choisi tel que:

$$|z^{(p)}(k+1) - z^{(p)}(k)| < 10^{-12}.$$

Pour  $P \geq 3$ , on sait que  $|z^{(p)}| \geq \pi$  alors

$$\frac{|z^{(p)}(k+1) - z^{(p)}(k)|}{|z^{(p)}|} < \frac{1}{\pi} \cdot 10^{-12}.$$

La convergence est très rapide comme on peut le constater par les valeurs de  $k$  du tableau 3.4.

5. ETUDE DU CAS OU  $P = 2$ 

$\forall c \in \mathbb{C}^*$ ,  $g_2(c)$  appartient à la bande horizontale  $\{z \in \mathbb{C} : -2\pi \leq \text{Im } z \leq 2\pi\}$  de largeur  $4\pi$  (voir fig. 3.3.). On considérera deux cas suivant que  $c \in \Pi$  ou  $c \in I$ .

5.1.  $c \in \Pi$ 

$$c \in \Pi \Rightarrow \arg c \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right] \quad (3.28)$$

Soit  $z_0 \in \mathbb{C}^*$  tel que:  $\text{Im } z_0 \geq 0$ .

On définit la suite  $\{z_n\}_n$  par :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \text{Ln } c + \text{Ln } z_n \\ &= \text{Ln } |cz_n| + i (\arg c + \arg z_n) \end{aligned} \quad (3.29)$$

On montre par récurrence sur  $n$ , que:

$$\arg z_n \in [0, \pi], \quad \forall n \geq 1. \quad (3.30)$$

Les relations (3.28) à (3.30) donnent:

$$\frac{\pi}{2} \leq \text{Im } z_n \leq 2\pi, \quad \forall n \geq 1. \quad (3.31)$$

(3.31) nous permet de déduire une relation analogue à (3.26) à savoir:

$$\forall c \in \Pi, |z_{n+1} - z_n| \leq \frac{|\text{Ln } c + \text{Ln } |z_0| + i \arg z_0 - z_0|}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}, \quad n \geq 1. \quad (3.32)$$

On vient de montrer que lorsque  $c \in \Pi$ , l'ensemble des deuxièmes racines est inclus dans  $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} \leq \text{Im } z \leq 2\pi\}$ . Comme il n'existe aucune "région de conflit" dans ce cas-ci, alors pour obtenir la seconde racine de (3.1) lorsque  $c \in \Pi$ , on itère  $\text{Ln } cz$  dans  $B(0)$  avec  $z_0 \in (I \cup \Pi) - \{0\}$ .

Conséquence :

Le problème est résolu pour  $c \in \text{III}$  comme le montre l'algorithme suivant.

- \* Si  $c \in \text{II} - \mathbf{R}$ , itérer  $\text{Ln } cz$  dans  $B(0)$  avec  $z_0 = 1$ .
- \* Si  $c \in \text{III}$ , itérer  $\text{Ln } \bar{c} z$  puis prendre le conjugué de la racine obtenue.

5.2.  $c \in \text{I}$ 

Considérons toujours la bande  $B(0)$ .

D'après les propriétés de  $g_p$  [paragraphe 1] on a:

Si  $c \in ]e, +\infty[$  alors  $g_1(c)$  et  $g_2(c)$  appartiennent à la droite réelle et de plus  $g_1(c) \in ]0,1[$  et  $g_2(c) \in ]1, +\infty[$ . Comme  $\frac{1}{|g_1(c)|} > 1$  et  $\frac{1}{|g_2(c)|} < 1$ , il

s'ensuit que  $g_2(c)$  est un point fixe attractif de  $\text{Ln } cz$  tandis que  $g_1(c)$  est répulsif. Donc l'itération de  $\text{Ln } cz$  donnerait  $g_2(c)$  si  $c \in ]e, +\infty[$ .

Si  $c \in \text{I} - [e, +\infty[$ , il n'existe aucune région conflictuelle du quadrant I dans  $B(0)$ .

Algorithme:

- \* Si  $c \in \text{I} - \mathbf{R}$ , itérer  $\text{Ln } cz$  dans  $B(0)$  avec  $z_0 = 1$ .
- \* Si  $c \in \text{IV}$ , itérer  $\text{Ln } \bar{c} z$  dans  $B(0)$  puis prendre le conjugué de la racine obtenue.

5.3. Résultats numériques

$c = a + ib$		k	$z^{(2)}(k) = x + iy$		$ez^{(2)}(k) - cz^{(2)}(k) = \alpha + i\beta$	
a	b		x	y	$\alpha$	$\beta$
$0.15 \times 10^{-4}$	$0.92 \times 10^{-4}$	15	$-0.72 \times 10$	$0.40 \times 10$	$-0.57 \times 10^{-17}$	$-0.27 \times 10^{-17}$
$-0.67 \times 10^4$	$0.90 \times 10^3$	13	$0.11 \times 10^{-2}$	$0.33 \times 10$	$-0.19 \times 10^{-9}$	$0.15 \times 10^{-9}$
0.00	-0.78	28	0.84	$-0.29 \times 10$	$0.4 \times 10^{-13}$	$-0.76 \times 10^{-13}$
0.76	0.00	75	0.13	$0.15 \times 10$	$0.88 \times 10^{-13}$	$0.25 \times 10^{-12}$
$0.28 \times 10$	0.00	122	$0.13 \times 10$	0.00	$-0.10 \times 10^{-12}$	0.00
$0.30 \times 10$	0.00	65	0.1	0.00	$-0.23 \times 10^{-11}$	0.00

Tableau 3.5.

Commentaire:

$z^{(2)}(k)$  est la valeur approchée de  $z^{(2)}$  après k itérations. k étant choisi tel que:

$$|z^{(2)}(k+1) - z^{(2)}(k)| < 10^{-12}.$$

Comme  $|z^{(2)}| \geq 1 \quad \forall c \in \mathbb{C} \quad (z^{(2)} = 1 \text{ si } c = e)$ ,

alors:

$$\frac{|z^{(2)}(k+1) - z^{(2)}(k)|}{|z^{(2)}|} < 10^{-12}.$$

On a une convergence rapide sauf lorsque la valeur de c est assez proche de e auquel cas  $z^{(2)} \rightarrow 1^+$  et par suite  $\frac{1}{z^{(2)}} \rightarrow 1^-$ .

Exemple

Soit  $c = 2.719$ .

Posons:  $B = 10^{-m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Considérons l'inégalité:

$$|z^{(2)}(k+1) - z^{(2)}(k)| < B.$$

On obtient alors les résultats suivants:

$$B = 10^{-6} \Rightarrow k = 249$$

$$B = 10^{-10} \Rightarrow k = 775$$

$$B = 10^{-12} \Rightarrow k = 995.$$

Autrement dit, il a fallu 249 itérations pour avoir

$$|z^{(2)}(k+1) - z^{(2)}(k)| < 10^{-6},$$

775 pour avoir  $|z^{(2)}(k+1) - z^{(2)}(k)| < 10^{-10}$  et enfin

995 pour obtenir  $|z^{(2)}(k+1) - z^{(2)}(k)| < 10^{-12}$ .

## 6. ETUDE DU CAS OU $P = 1$ .

L'ensemble des premières racines de l'équation  $e^z - cz = 0$  est inclus dans  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1 \text{ et } \operatorname{Im} z \in [-\pi, \pi]\}$  (fig. 3.3). Dans ce cas, on sera amené à considérer les suites  $\{z_{n+1} : z_{n+1} = \frac{e^{z_n}}{c}\}_n$  ou  $\{z_{n+1} : z_{n+1} = \operatorname{Ln} cz_n\}$  suivant que la racine appartient ou non au disque unité.

### 6.1. Itération de $f_c(z) = \frac{e^z}{c}$ .

D'après (3.9), l'ensemble des points fixes attractifs de  $f_c$  est le disque unité ouvert privé de l'origine. Cet ensemble est obtenu lorsque  $c$  parcourt  $C_1$  (voir fig 3.5). En d'autres termes,

$$c \in C_1 \leftrightarrow g_1(c) \in \overset{\circ}{D}(0,1) - \{0\}.$$

Comme zéro est dans le bassin d'attraction de toute orbite cyclique attractive de  $f_c$  [D1 p.168], on déduit alors que 0 appartient au bassin d'attraction du point fixe attractif de  $f_c$  pour toute valeur de  $c$  dans  $C_1$ .

### Conséquence

Soit  $c \in C_1$ . Pour avoir la première racine de l'équation  $e^z - cz = 0$ , on itère  $f_c(z) = \frac{e^z}{c}$  avec  $z_0 = 0$  pour valeur initiale. On a alors obtenu les résultats numériques suivants.

$c = a + ib$		k	$z^{(1)}(k) = x + iy$		$ez^{(1)}(k) - cz^{(1)}(k) = \alpha + i\beta$	
a	b		x	y	$\alpha$	$\beta$
$-0.10 \times 10$	$0.10 \times 10$	39	-0.40	-0.24	$0.47 \times 10^{-13}$	$0.97 \times 10^{-14}$
$-0.1 \times 10^{-12}$	$0.93 \times 10^2$	8	$-0.12 \times 10^{-13}$	$-0.11 \times 10^{-1}$	$0.42 \times 10^{-16}$	0.00
-0.75	$0.16 \times 10$	35	-0.29	0.31	$-0.10 \times 10^{-13}$	$0.16 \times 10^{-13}$
$0.25 \times 10^6$	$0.40 \times 10^5$	4	$0.39 \times 10^{-5}$	$-0.62 \times 10^{-6}$	0.00	$-0.24 \times 10^{-16}$
-0.73	0.00	80	-0.69	0.00	$0.48 \times 10^{-13}$	0.00
$0.35 \times 10$	0.00	33	0.45	0.00	$0.34 \times 10^{-12}$	0.00
0.00	-0.86	102	-0.43	0.62	$0.72 \times 10^{-13}$	$0.18 \times 10^{-12}$
-0.38	0.00	1711	-0.984	0.00	$-0.24 \times 10^{-12}$	0.00
2.72	0.00	697	0.965	0.00	$0.85 \times 10^{-13}$	0.00
2.719	0.00	1137	0.977	0.00	$0.10 \times 10^{-13}$	0.00
0.60	0.60	1967	-0.179	-0.969	$-0.14 \times 10^{-12}$	$0.17 \times 10^{-12}$

Tableau 3.6.

$z^{(1)}(k)$  représente la valeur approchée de  $z^{(1)}$  après  $k$  itérations.  $k$  est choisi tel que:

$$|z^{(1)}(k+1) - z^{(1)}(k)| < 10^{-12}.$$

Le tableau 3.6. montre que la convergence est très lente lorsque le module de la première racine tend vers 1, c'est-à-dire lorsque  $c$  est assez

Le tableau 3.6. montre que la convergence est très lente lorsque le module de la première racine tend vers 1, c'est-à-dire lorsque  $c$  est assez proche de la courbe  $(\Gamma)$ . Pour remédier à ce problème, on accélérera la convergence en appliquant la méthode de Steffensen à la fonction  $f_c(z) = \frac{e^z}{e}$ .

## 6.2. Méthode de Steffensen.

- Soit  $f$  une fonction entière et soit  $\{z_n\}_n$  la suite des itérées de  $f$ .

$$z_{n+1} = f(z_n)$$

$$= f^n(z_0),$$

où  $z_0$  est une valeur initiale donnée.

Afin d'accélérer la convergence du processus itératif ainsi défini, Steffensen proposait en 1933 [S1] l'algorithme suivant:

- 1) choisir une valeur initiale  $z_0$ ,
- 2) calculer  $z_1 = f(z_0)$  et  $z_2 = f(z_1)$ ,

$$3) \text{ calculer } z_0^* = z_0 - \frac{(\Delta z_0)^2}{\Delta^2 z_0}$$

$$\text{où } \Delta z_0 = z_1 - z_0$$

$$\text{et } \Delta^2 z_0 = \Delta(\Delta z_0) = z_2 - 2z_1 + z_0,$$

$$4) \text{ calculer } z_{n+1}^* = z_n^* - \frac{(\Delta z_n^*)^2}{\Delta^2 z_n^*}$$

$$\text{où } \Delta z_n^* = f(z_n^*) - z_n^*$$

$$\begin{aligned} \text{et } \Delta^2 z_n^* &= \Delta(\Delta z_n^*) - z_n^* \\ &= f(f(z_n^*)) - 2f(z_n^*) + z_n^*. \end{aligned}$$

### Propriétés

\* La méthode de Steffensen consiste à itérer la fonction:

$$S(z) = z - \frac{(f(z) - z)^2}{f[f(z)] - 2f(z) + z}$$

\* Si  $\xi$  est tel que  $f(\xi) = \xi$  alors  $S(\xi)$  est définie par:

$$S(\xi) = \xi.$$

\* Si  $f(\xi) = \xi$ ,  $f'(\xi) \neq 0$  et  $f'(\xi) \neq 1$  alors  $\xi$  est un point super-attractif de  $S$  (i.e.  $S'(\xi) = 0$ ).

\* La convergence est très rapide (elle est d'ordre 2) vers le zéro de l'équation  $f(z) - z = 0$ .

Soit  $\xi$  tel que  $f(\xi) = \xi$  et soit  $z_n$  la valeur approchée de  $\xi$  après  $n$  itérations de

$S(z)$ . On dit que la convergence est d'ordre 2 si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n^2|} = c^{te}$  où

$e_n = \xi - z_n$ . (En pratique, cela signifie l'existence d'un entier  $N_0$  tel que:

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n^2|} = c^{te} \text{ pour } n > N_0).$$

\* Pour éviter la division par zéro (ou plutôt par un nombre très proche de zéro) le test de convergence se fera comme suit:

Si  $|\Delta^2 z_k| < 10^{-16}$ , on dira que  $z(k)$  est la valeur approchée de la racine  $z^{(1)}$  après  $k$  itérations. Dans le cas contraire,  $k$  sera choisi tel que:

$|z_{k+1} - z_k| < 10^{-12}$ . (Pour plus de détails, voir [HO pp. 126-128] et [O1 pp. 241-246].

### Remarque

Dans notre cas, comme  $f(z) = \frac{e^z}{c}$  alors la fonction à itérer est:

$$S(z) = z - \frac{\left(\frac{1}{c} e^z - z\right)^2}{\frac{1}{c} e^{\frac{1}{c} e^z} - \frac{2}{c} e^z + z}$$

La valeur initiale est  $z_0 = 0$ .

Résultats numériques

$c = a + ib$		k	$z^{(1)}(k) = x + iy$		$ez^{(1)}(k) - cz^{(1)}(k) = \alpha + i\beta$	
a	b		x	y	$\alpha$	$\beta$
-0.27	+0.30	7	-0.91	-0.41	$0.83 \times 10^{-16}$	$0.28 \times 10^{-16}$
$0.18 \times 10$	0.23	8	0.598	-0.804	$0.44 \times 10^{-15}$	$0.44 \times 10^{-15}$
-0.59	0.60	7	-0.187	-0.968	$-0.14 \times 10^{-16}$	$0.56 \times 10^{-16}$
-0.38	0.00	6	-0.984	-0.000	$0.43 \times 10^{-16}$	0.00
-0.37	0.00	6	-0.997	0.000	$0.69 \times 10^{-16}$	0.00
-0.368	0.00	6	-0.9 <sub>3</sub> 8	0.00	$0.42 \times 10^{-16}$	0.00
-0.36788	0.00	6	-0.9 <sub>7</sub> 1	0.00	$0.83 \times 10^{-16}$	0.00
2.719	0.000	10	0.977	0.000	$-0.60 \times 10^{-14}$	0.00
2.7183	0.00	14	0.9 <sub>3</sub> 2	0.00	$-0.34 \times 10^{-12}$	0.00

Tableau 3.7.

$z^{(1)}(k)$  est la valeur approchée de  $g_1(c) = z^{(1)}$  après k itérations où k est tel que:  $|\Delta^2 z^{(1)}(k)| < 10^{-16}$

$$\text{avec } \Delta^2 z^{(1)}(k) = \frac{1}{c} e^{\frac{1}{c} z^{(1)}(k)} = \frac{2}{c} e z^{(1)}(k) + z(k).$$

La notation 0.9<sub>3</sub>8 signifie: 0.9998.

### 6.3 Itération de $L_n cz$ .

On rappelle que  $G$  est l'ensemble des points  $c$  de  $\mathbb{C}^*$  tels que: le module de la première racine de l'équation  $e^z - cz = 0$  est strictement supérieur à 1:

$$G = \{c \in \mathbb{C}^* : |g_1(c)| > 1\}.$$

Ainsi, si  $c \in G$  alors  $\frac{1}{|g_1(c)|} < 1$  et donc  $g_1(c)$  est un point fixe attractif de  $L_n cz$ .

#### 6.3.1. $c \in G \cap III$

$$G \cap III = \{c \in III : |g_1(c)| > 1\}$$

On considère la suite  $\{z_n\}_n$  définie par:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= L_n(c z_n) \\ &= L_n |c z_n| + i \arg(c z_n) \end{aligned}$$

où  $\arg(c z_n) \in ]-\pi, \pi]$ .

L'itération se fera dans la bande  $B(-1)$ .

Dans  $B(-1)$ , le quadrant III admet une région conflictuelle, en l'occurrence  $g^{-1}[B(-1) \cap III_2]$ . En effet,  $B(-1) \cap III_1 = III_1$  donc  $g^{-1}[B(-1) \cap III_1] = III$  et par suite:

$$III(1,2,-1) = g^{-1}[B(-1) \cap III_2].$$

On va déterminer cet ensemble (plus particulièrement  $III(1,2,-1) \cap G$ ). Notons  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  les ensembles de points suivants:

$$\Delta_1 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = -\pi \text{ et } x \geq 0\}$$

$$\Delta_2 = (III_2 \cap IV_2) \cap B(-1)$$

$$g^{-1}(\Delta_1) = \{c \in III : g_2(c) \in \Delta_1\}$$

$$g^{-1}(\Delta_2) = \{c \in III \cap IV : g_2(c) \in \Delta_2\}$$

On sait, d'après (3.2) et (3.3), que si  $c = a + ib$  et  $z = x + iy$  alors:

$$a = \frac{e^x(x \cos y + y \sin y)}{x^2 + y^2}$$

et

$$b = \frac{e^x(x \sin y - y \cos y)}{x^2 + y^2},$$

Si  $z \in \Delta_1$  alors  $y = -\pi$  et donc:

$$a = \frac{-x e^x}{x^2 + y^2} \quad (3.33)$$

et

$$b = \frac{-\pi e^x}{x^2 + \pi^2}. \quad (3.34)$$

L'étude des fonctions  $a(x)$  et  $b(x)$  dans l'intervalle  $[0, +\infty[$  nous permet de conclure qu'elles sont décroissantes.

x	a	b
0	0	$-\frac{1}{\pi}$
$\frac{1}{8}$	-0.0143	-0.3601
$\frac{1}{4}$	-0.0323	-0.4062
$\frac{1}{2}$	-0.0815	-0.5118
1	-0.2501	-0.7857
2	-1.0655	-1.6737

Tableau 3.8.

Il est facile de vérifier que

$$g^{-1}(\Delta_2) = \{z = iy : y \leq -\frac{1}{\pi}\}.$$

$\text{III}(1,2,-1)$  est l'ensemble des points  $c$  compris entre la demi-droite  $g^{-1}(\Delta_2)$  et la courbe  $g^{-1}(\Delta_1)$ .

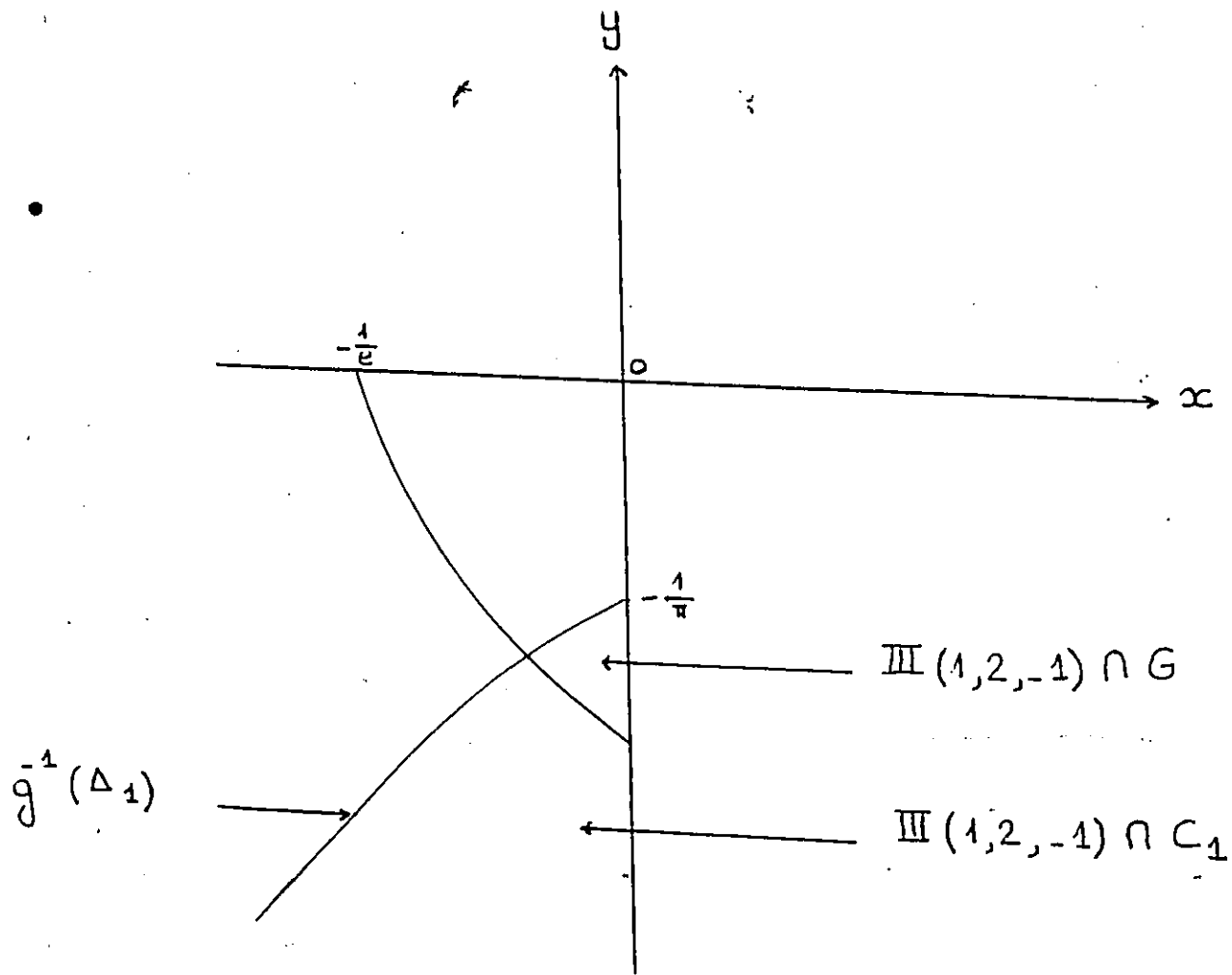


Fig. 3.6.  $\text{III}(1,2,-1)$

\* Conséquence

Lorsque  $c \in (G \cap \text{III}) - \text{III}(1,2,-1)$ ,  $e^z - cz = 0$  n'admet qu'une racine (en l'occurrence la première) dans  $B(-1)$ . Par suite, l'itération de  $\text{Ln } cz$  dans  $B(-1)$  donnera  $g_1(c)$ . Si  $c \in (G \cap \text{II}) - \text{II}(1,2,-1)$ , on itère d'abord  $\text{Ln } \bar{c} z$  puis on prend le conjugué de  $g_1(\bar{c})$  car

$$c \in (G \cap \text{II}) - \text{II}(1,2,-1) \leftrightarrow \bar{c} \in (G \cap \text{III}) - \text{III}(1,2,-1).$$

Résultats numériques

Les résultats du tableau suivant sont obtenus avec  $z_0 = 1$ .

$c = a + ib$		k	$z^{(1)}(k) = x + iy$		$ez^{(1)}(k) - cz^{(1)}(k) = \alpha + i\beta$	
a	b		x	y	$\alpha$	$\beta$
$-0.30 \times 10^{-4}$	$-0.60 \times 10^{-5}$	17	$-0.83 \times 10$	-0.18	$-0.11 \times 10^{-18}$	$0.37 \times 10^{-19}$
$0.11 \times 10^{-7}$	$0.33 \times 10^{-9}$	14	$-0.16 \times 10^2$	$-0.28 \times 10^{-1}$	$0.27 \times 10^{-22}$	$0.17 \times 10^{-23}$
-0.15	-0.12	96	$-0.13 \times 10$	-0.968	$-0.14 \times 10^{-16}$	$0.56 \times 10^{-16}$
-0.10	0.25	132	$-0.11 \times 10$	-0.65	$-0.64 \times 10^{-14}$	$0.50 \times 10^{-13}$
-0.27	0.27	1461	-0.94	-0.39	$0.10 \times 10^{-12}$	$0.13 \times 10^{-12}$
-0.35	0.00	998	-1.03	$0.9 \times 10^{-11}$	$0.20 \times 10^{-12}$	$0.66 \times 10^{-11}$
-0.355	0.00	1556	-1.02	$-0.48 \times 10^{-12}$	$0.74 \times 10^{14}$	$0.34 \times 10^{-12}$

Tableau 3.9.

Le nombre d'itérations effectuées k est choisi tel que:

$$|z^{(1)}(k+1) - z^{(1)}(k)| < 10^{-12}.$$

On remarque (d'après les valeurs du tableau 3.9.) que la convergence est lente lorsque le point fixe de  $\text{Ln } cz$  est assez proche du cercle unité. Pour accélérer la convergence, on applique la méthode de Steffensen à la fonction  $\text{Ln } cz$  où  $\text{Ln } cz = \text{Ln } |cz| + i \arg cz$  avec  $\arg cz \in ]-\pi, \pi]$ .

La fonction à itérer devient alors:

$$s(z) = z - \frac{(\operatorname{Ln} cz - z)^2}{\operatorname{Ln}(c \operatorname{Ln} cz) - 2 \operatorname{Ln} cz + z} \quad (3.35)$$

Résultats numériques

$c = a + ib$		$k$	$z^{(1)}(k) = x + iy$		$ez^{(1)}(k) - cz^{(1)}(k) = \alpha + i\beta$	
$a$	$b$		$x$	$y$	$\alpha$	$\beta$
-0.15	-0.12	7	$-0.13 \times 10$	0.39	$0.42 \times 10^{-16}$	$0.28 \times 10^{-16}$
-0.27	0.27	8	-0.94	+0.39	0.00	$0.28 \times 10^{-16}$
-0.35	0.00	8	-1.03	$-0.43 \times 10^{-20}$	$0.14 \times 10^{-16}$	$-0.30 \times 10^{-20}$
-0.367	0.00	8	-1.021	$-0.65 \times 10^{-22}$	$0.15 \times 10^{-15}$	$0.48 \times 10^{-22}$
-0.36787	0.00	8	-1.052	$-0.21 \times 10^{-25}$	0.00	$-0.15 \times 10^{-25}$

Tableau 3.10.

La notation 1.021 signifie 1.001. La convergence est extrêmement rapide même lorsque  $g_1(c)$  est proche du cercle unité. La valeur initiale est  $z_0 = 1$ .

\*  $c \in G \cap III(1,2,-1)$ .

Si  $c \in G \cap III(1,2,-1)$ , l'équation (3.1) admet deux racines ( $g_1(c)$  et  $g_2(c)$ ) dans  $B(-1)$ . L'itération de  $\text{Ln } cz$  dans cette bande peut aboutir à la première ou à la deuxième racine ou même à aucune des deux comme le montrent les exemples ci-après.

Exemple 1:  $c = -i 0.36$ ,  $z_0 = 1$ .

Après 179 itérations, on obtient la première racine:

$$z = 0.86 + i 0.81.$$

Exemple 2:  $c = -i 0.50$ ,  $z_0 = 1$ .

On obtient un cycle d'ordre 3,

$$z_1 = -0.20 \times 10 - i 0.23 \times 10$$

$$z_2 = 0.42 + i 0.24 \times 10$$

$$z_3 = 0.20 - i 0.17.$$

**Exemple 3:**  $c = -0.1 \times 10^{-5} - i 0.48$ ,  $z_0 = 0.20 - i 2.5$ .

C'est la deuxième racine qui est obtenue dans ce cas,

$$z = 0.38 - i 0.30 \times 10.$$

Si  $c \in G \cap \text{III}(1,2,-1)$ , la première racine peut être obtenue avec un choix convenable de  $z_0$ . On pourra prendre pour  $z_0$  une valeur assez proche de la racine voulue. Pour cela, on considérera la représentation graphique (approximative) de  $g_1(G \cap \text{III}(1,2,-1)) = \{g_1(c) : c \in G \cap \text{III}(1,2,-1)\}$ .

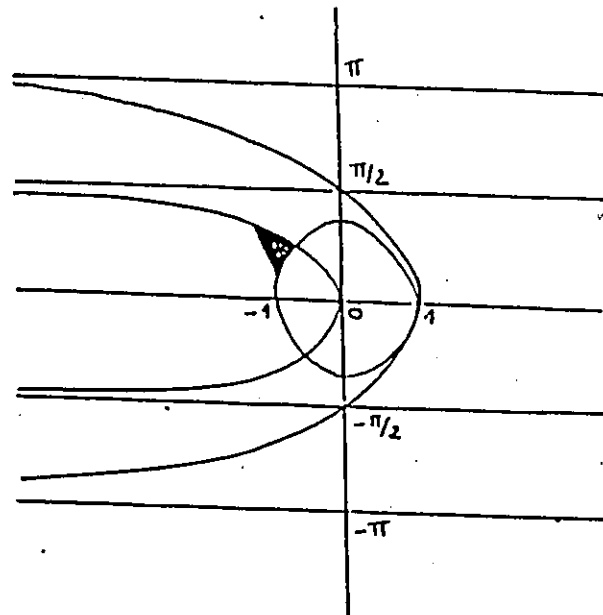


Fig. 3.7.  $g_1(G \cap \text{III}(1,2,-1))$ .

Pour avoir la première racine de (3.1) lorsque  $c \in G \cap \text{III}(1,2,-1)$ , on itère (3.35) avec  $z_0 \in g_1(G \cap \text{III}(1,2,-1))$ . Si  $c \in G \cap \text{II}(1,2,-1)$ , il suffit de considérer  $\bar{c} \in G \cap \text{III}(1,2,-1)$  et de prendre le conjugué de  $g_1(\bar{c})$ .

Avec  $z_0 = -0.75 + i 0.75$  on a les résultats numériques suivants.

$c = a + ib$		$k$	$z^{(1)}(k) = x + iy$		$ez^{(1)}(k) - cz^{(1)}(k) = \alpha + i\beta$	
$a$	$b$		$x$	$y$	$\alpha$	$\beta$
0.00	-0.36	5	-0.86	0.81	$0.28 \times 10^{-16}$	$0.28 \times 10^{-16}$
0.00	-0.50	5	-0.68	0.74	$0.28 \times 10^{-16}$	$0.28 \times 10^{-16}$
$-0.10 \times 10^{-5}$	-0.48	5	-0.70	0.75	$0.56 \times 10^{-16}$	$-0.30 \times 10^{-20}$
$-0.30 \times 10^{-3}$	-0.51	5	-0.67	-0.74	$0.56 \times 10^{-16}$	$0.14 \times 10^{-16}$
$-0.20 \times 10^{-1}$	-0.40	4	-0.81	-0.76	$-0.42 \times 10^{-16}$	$0.56 \times 10^{-16}$

Tableau 3.11.

$z^{(1)}(k)$  est la valeur approchée de  $g_1(c)$  après  $k$  itérations.  $k$  est tel que:  $|\Delta^2 z_k| < 10^{-16}$  où

$$\Delta^2 z_k = (\text{Ln } c \text{ Ln } c z_k - 2 \text{ Ln } cz_k + z_k).$$

### 6.3.2. $c \in G \cap \text{IV}$ .

$$G \cap \text{IV} = \{c \in \text{IV}: |g_1(c)| > 1\}.$$

Le quadrant IV admet une région conflictuelle dans  $B(-1)$  (voir fig. 3.3) à savoir:

$$\begin{aligned} \text{IV}(1,2,-1) &= g^{-1}(V_2 \cap B(-1)) \\ &= \{c \in \text{IV}: g_2(c) \in V_2 \cap B(-1)\}. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que  $G \cap IV(1,2,-1)$  est quasiment tout l'ensemble  $G$ . Pour appliquer un raisonnement équivalent à celui utilisé dans le cas précédent ( $c \in G \cap III$ ), il est préférable de considérer la bande  $B(0)$  au lieu de  $B(-1)$ . Soit alors la suite  $\{z_n\}_n$  définie par:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= L_n c z_n \\ &= L_n |c z_n| + i \arg(c z_n) \end{aligned}$$

où  $\arg(c z_n) \in [0, 2\pi[$ .

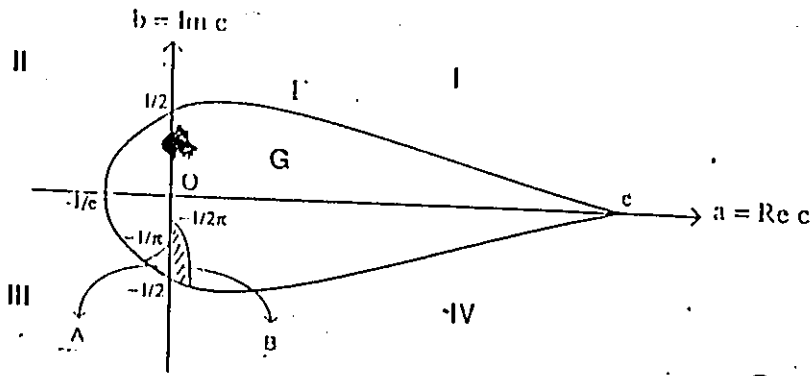
La région conflictuelle est donc:

$$\begin{aligned} IV(1,3,0) &= g^{-1}(IV_3 \cap B(0)) \\ &= \{c \in IV: g_3(c) \in IV_3 \cap B(0)\}. \end{aligned}$$

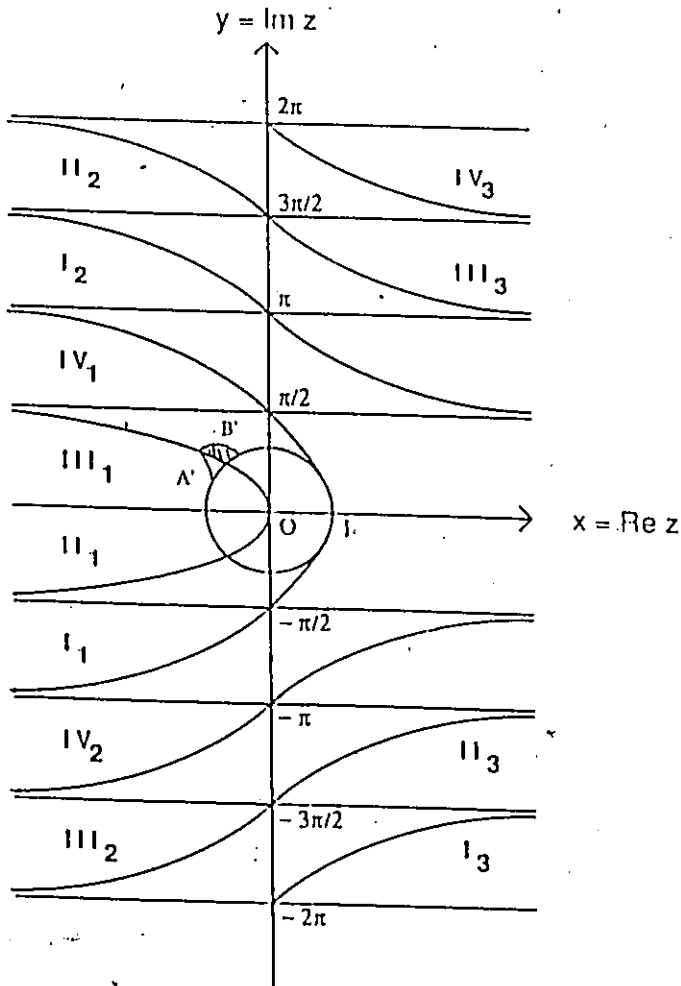
et par suite la région qui nous intéresse est:

$$G \cap IV(1,3,0) = \{c \in IV \cap G: g_3(c) \in IV_3 \cap B(0)\}.$$

Cette dernière est représentée dans la fig. 3.8.



$$B = \text{IV}(1, 3, 0) \cap G$$



$$B' = g_1(\text{IV}(1, 3, 0) \cap G)$$

Fig. 3.8. Représentation graphique de  $\text{IV}(1,3,0) \cap G$  et de son image par  $g_1$ .

Conséquence

Pour obtenir la première racine de l'équation  $e^z - cz = 0$  lorsque  $c \in IV \cap G$ , on opère comme suit:

Si  $c \in G \cap IV - IV(1,3,0)$ , l'itération de  $\text{Ln } cz$  dans  $B(0)$  donnera  $g_1(c)$ .

Si  $c \in G \cap IV(1,3,0)$ , le choix de la valeur initiale  $z_0$  est important. On pourra prendre pour  $z_0$  une valeur proche de la racine voulue  $g_1(c)$ .

Afin d'accélérer la vitesse de convergence, on applique la méthode de Steffensen à la fonction  $\text{Ln } cz$  et ainsi la fonction à itérer devient:

$$S(z) = z - \frac{(\text{Ln } cz - z)^2}{\text{Ln}(c \text{Ln } cz) - 2\text{Ln } cz + z}$$

avec  $\arg z \in [0, 2\pi[$ .

Remarque

Lorsque  $c \in G \cap IV$ , il est aussi possible d'itérer  $S(z)$  avec  $\arg z \in ]-\pi, \pi]$  pour obtenir la première racine de (3.1) à condition de bien choisir la valeur initiale  $z_0$  (très proche de la racine), comme on peut le constater par les résultats numériques du tableau 3.12.

$x = a + ib$		$z_0 = x_0 + iy_0$			$z^{(1)}(k) = x + iy$	
a	b	$x_0$	$y_0$	k	x	y
$0.50 \times 10^{-3}$	-0.22	-0.80	0.80	5	$-0.11 \times 10$	$0.28 \times 10^{-16}$
$0.3 \times 10^{-3}$	-0.45	-0.80	0.80	5	-0.74	0.77
2.718	0.00	1.00	0.00	26	0.943	$0.14 \times 10^{-1}$
0.10	-0.15	-0.80	0.80	5	$-0.11 \times 10$	$0.13 \times 10$

Tableau 3.12.

La notation 0.943 signifie 0.99993.

## 7. CONCLUSION

Soit l'équation (3.1):  $e^z - cz = 0$ ,  $c \in \mathbb{C}^*$ . Notre problème consistait à trouver pour  $c$  et  $P$  donnés, la  $P$ -ième racine de (3.1). Avant d'énoncer la conclusion de cette étude, on rappellera quelques définitions et notations.

$$* g_P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$c \rightarrow g_P(c) = z^{(P)}.$$

$g_P(c)$  représente la  $P$ -ième racine de (3.1).

$$* B(k) = \{z \in \mathbb{C}: k\pi \leq \text{Im } z \leq (k+2)\pi\}.$$

$$* C_1 = \{c \in \mathbb{C}: |g_1(c)| < 1\}.$$

$$* G = \{c \in \mathbb{C}: |g_1(c)| > 1\}.$$

$$* (\Gamma) = \{c \in \mathbb{C}: |g_1(c)| = 1\}.$$

$$* \text{III}(1,2,-1) = \{c \in \text{III}: g_2(c) \in B(-1)\}.$$

$$* \text{IV}(1,3,0) = \{c \in \text{IV}: g_3(c) \in B(0)\}.$$

$$* S_1(z) = z - \frac{\left(\frac{e^z}{c} - z\right)^2}{\frac{1}{c} e^{\frac{1}{c} e^z} - \frac{2e^z}{c} + z}$$

$$* S_2(z) = z - \frac{(\text{Ln } cz - z)^2}{\text{Ln}(c \text{ Ln } cz) - 2 \text{Ln } cz + z}$$

Le tableau suivant récapitule les principaux résultats obtenus.

Numéro de la racine	Bande d'itération	Régions à considérer	Algorithme	Remarques
$P = 2k + 2$ $k \in \mathbb{N}$	$B(2k)$	I, II	Si $c \in (I \cup II) - \mathbb{R}$ , itérer $\text{Ln } cz$ avec $z_0 = 1$ . Si $c \in (III \cup IV)$ , itérer $\text{Ln } \bar{c} z$ avec $z_0 = 1$ puis poser: $g_p(c) = \overline{g_p(\bar{c})}$ .	$\text{Ln } cz = \text{Ln } c + \text{Ln } z$ avec $\text{Ln } c = \text{Ln }  c  + i \arg c + i2k\pi$ où $\arg c \in ]-\pi, \pi[$ . $\text{Ln } z = \text{Ln }  z  + i \arg z$ où $\arg z \in ]-\pi, \pi[$ .
$P = 2k + 1$ $k \in \mathbb{N}^*$	$B(2k-1)$	III, IV	Si $c \in III \cup IV$ , itérer $\text{Ln } cz$ avec $z_0 = 1$ . Si $c \in (I \cup II) - \mathbb{R}$ , itérer $\text{Ln } \bar{c} z$ avec $z_0 = 1$ puis poser: $g_p(c) = \overline{g_p(\bar{c})}$ .	
$P = 1$	$B(-1)$	$III \cap G$	Si $c \in (III \cap G) - III(1,2,-1)$ itérer $S_2(z)$ avec $z_0 = 1$ . Si $c \in III(1,2,-1)$ , itérer $S_2(z)$ avec $z_0 \in g_1(III(1,2,-1))$ . Si $c \in II \cap G$ , considérer $\bar{c}$ et poser: $g_1(c) = \overline{g_1(\bar{c})}$ .	$\text{Ln } cz = \text{Ln }  cz  + i \arg(cz)$ avec $\arg(cz) \in ]-\pi, \pi[$ . Les calculs numériques ont été faits avec $z_0 = -0.75 + i 0.75$ .
	$B(0)$	$IV \cap G$	Si $c \in (IV \cap G) - IV(1,3,0)$ itérer $S_2(z)$ avec $z_0 = 1$ . Si $c \in IV(1,3,0)$ , itérer $S_2(z)$ avec $z_0 \in g_1(IV(1,3,0))$ . Si $c \in I \cap G$ , considérer $\bar{c}$ et poser: $g_1(c) = \overline{g_1(\bar{c})}$ .	$\text{Ln } cz = \text{Ln }  cz  + i \arg(cz)$ avec $\arg(cz) \in [0, 2\pi[$ . Les calculs numériques ont été faits avec $z_0 = -0.8 + i 0.8$ .
		$(III \cup IV) \cap (C_1 \cup \Gamma)$	Si $c \in (III \cup IV) \cap (c_1 \cup \Gamma)$ itérer $S_1(z)$ avec $z_0 = 0$ . Si $c \in [(I \cup II) \cap (c_1 \cup \Gamma)] - \mathbb{R}$ considérer $\bar{c}$ et poser $g_1(c) = \overline{g_1(\bar{c})}$ .	

## Références

- [A1] Ahlfors L.V. , Complex analysis, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [B1] Baker I.N. , The existence of fixpoints of entire functions, Math. Z. 73 (1960), 280-284.
- [B2] , Sets of non-normality in iteration theory, J. London Math. Soc. 40 (1965), 499-502.
- [B3] , The distribution of fixpoints of entire functions, Proc. London Math. Soc. (3) 16 (1966), 493-506.
- [B4] , Repulsive fixpoints of entire functions, Math. Z. 104 (1968), 252-256.
- [B5] , The domains of normality of an entire function, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 (1975), 277-283.
- [B6] , The iteration of polynomials and transcendental entire functions, J. Austral. Math. Soc. (A) 30 (1981), 483-495.
- [BL] Blanchard P. , Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bull. Amer. Math. Soc. 11 (1984), 85-141.
- [D1] Devaney R.L., Julia sets and bifurcation diagrams for exponential maps, Bull. Amer. Math. Soc. (11) 1984, 167-171.
- [D2] Devaney R.L., Chaotic bursts in nonlinear dynamical systems, Science 235 (1987), 342-345.
- [DK] Devaney R.L. and Krych M., Dynamics of  $\exp(z)$ , Ergod. Th. & Dynam. Sys. 4 (1984), 35-52.
- [F1] Fatou P. , Sur l'itération des fonctions transcendentes entières, Acta Math. 47 (1926) 337-370.
- [H0] Householder A.S., Principles of numerical analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1953.

- [HV] Howland J.L. and Vaillancourt R., Attractive cycles in the iteration of meromorphic functions, Num. Math. 46 (1985), 323-337.
- [J1] Julia G. , Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, J. Math. 8 (1918), 47-245.
- [J2] , Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, Gauthiers-Villars, Paris, 1924.
- [M1] Montel P. , Familles normales, Chelsea, New York, 1974.
- [M2] , Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes, Gauthiers-Villars, New York, 1932.
- [MA1] Markushevich A.I., Theory of function of complex variable Prentice-Hall, New York, 1965, Volume 1 .
- [MA2] , , Volume 2.
- [MA3] , , Volume 3.
- [MI] Misiurewicz M., On iterates of  $e^z$ , Ergod. Th. & Dynam. Sys. 1 (1981), 103-106.
- [N1] Nevanlinna R., Le théorème de Borel-Picard et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthiers-Villars, Paris, 1929.
- [N2] , Analytic functions, Springer-Verlag, New York, 1970.
- [O1] Ostrowski A.M., Solutions of equations and systems of equations, Academic Press, New York, 1966.
- [S1] Steffensen J.F., Remarks on iteration, Skand. Aktuar Tidskr. 16 (1933), 64-72.