

INFORMATION TO USERS

This manuscript has been reproduced from the microfilm master. UMI films the text directly from the original or copy submitted. Thus, some thesis and dissertation copies are in typewriter face, while others may be from any type of computer printer.

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted. Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleedthrough, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send UMI a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.

Oversize materials (e.g., maps, drawings, charts) are reproduced by sectioning the original, beginning at the upper left-hand corner and continuing from left to right in equal sections with small overlaps. Each original is also photographed in one exposure and is included in reduced form at the back of the book.

Photographs included in the original manuscript have been reproduced xerographically in this copy. Higher quality 6" x 9" black and white photographic prints are available for any photographs or illustrations appearing in this copy for an additional charge. Contact UMI directly to order.

UMI

**A Bell & Howell Information Company
300 North Zeeb Road, Ann Arbor MI 48106-1346 USA
313/761-4700 800/521-0600**



Université d'Ottawa • University of Ottawa

**ÉTUDE EXPLORATOIRE D'UNE MÉTHODOLOGIE MÉTAPHORIQUE
DE DIAGNOSTIC DES ERREURS ÉPISTÉMOLOGIQUES ET DE CHANGEMENT CONCEPTUEL
DANS LES MATHÉMATIQUES DES NOMBRES ENTIERS RELATIFS**

par

Ghislaine Kelly-Bégin

Thèse présentée à l'École des études supérieures
et de la recherche de l'Université d'Ottawa
en vue de l'obtention du doctorat en philosophie

© Ghislaine Kelly-Bégin, Ottawa, Canada, 1997



**National Library
of Canada**

**Acquisitions and
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

**Bibliothèque nationale
du Canada**

**Acquisitions et
services bibliographiques**

**395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26128-X

Canada

Dans cet ouvrage, le masculin désigne aussi bien les femmes que les hommes. Il est utilisé dans le seul but d'alléger le texte.

Dédicace

Cet ouvrage est dédié à toute ma famille, sans qui ce projet n'aurait pu être mené à terme. Ils n'ont jamais douté de mes capacités, et leur confiance a souvent suppléé à la mienne.

A ma mère, qui aurait aimé poursuivre des études mais qui a dû s'arrêter très tôt, et pour qui cette thèse est un prolongement de ses aspirations.

A mon père, qui ne savait ni lire, ni écrire, mais qui a toujours été très fier des réussites scolaires de sa fille.

A ma "petite soeur", Nancy, qui s'est chargée de plusieurs de mes responsabilités d'aînée pendant la réalisation de ce projet, et dont l'appréciation fidèle a toujours été une source reconstituante.

A Fernand, mon conjoint, que je tiens à remercier spécialement pour l'indulgence avec laquelle il a accepté mes absences à ses côtés, pour la générosité avec laquelle il a pourvu à de multiples besoins et pour le soutien inconditionnel qu'il m'a toujours accordé.

A Danalyn et Cédrik, nos enfants, qui m'ont soulagée de plusieurs travaux domestiques et qui ont su, par la fraîcheur de leur humour et la spontanéité de leur tendresse, me déridier et me distancer de la tâche.

Remerciements

Je désire d'abord exprimer mes remerciements au professeur Jean-Paul Dionne, sous la direction duquel cette thèse a été élaborée. Il a été un guide disponible et accueillant. Son ouverture d'esprit et son appui ont été des sources d'inspiration et de réconfort. Sa vaste expertise est féconde de suggestions efficaces pour résoudre les problèmes aussi bien théoriques qu'expérimentaux que pose une recherche.

Je tiens aussi à remercier le Conseil des écoles publiques d'Ottawa-Carleton qui m'a permis de mener cette recherche et les enseignants des écoles secondaires Louis-Riel et Garneau qui m'ont aidée à différentes étapes de ce projet. Parmi eux, je tiens à souligner mesdames Claire LaBrosse et Glady's Rocque, ainsi que messieurs Alain Vaillancourt et Richard Chartrand qui ont travaillé à l'élaboration de tests. Un merci spécial va à madame Lyne Choquette et monsieur Michel Tremblay qui m'ont accueillie dans leurs classes. Un autre merci spécial s'adresse aux deux classes d'élèves, qui ont gracieusement accepté de participer à cette expérimentation, ainsi qu'à leurs parents qui leur en ont donné la permission.

En tout dernier lieu, je tiens à remercier le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada, le Ministère de l'éducation et de la formation de l'Ontario et l'Université d'Ottawa pour les bourses d'études qu'ils m'ont accordées. J'ai été privilégiée d'en être la récipiendaire et je leur en suis profondément reconnaissante. J'apprécie grandement leur engagement à soutenir la recherche en éducation.

TABLE DES MATIÈRES

Dédicace	ii
Remerciements	iii
Table des matières	iv
Citations préliminaires	xi
Sommaire	xii
 INTRODUCTION	 1
Le but de la recherche	1
Le plan de la recherche	3
 CHAPITRE 1: CADRE CONCEPTUEL	 5
Le contexte	5
La nature de l'obstacle et de l'erreur épistémologiques	5
Le diagnostic des erreurs épistémologiques	10
Les méthodes de changement conceptuel	13
Le changement conceptuel et les émotions cognitives	23
Une solution potentielle aux problèmes posés par l'erreur épistémologique: une pratique d'évaluation formative métaphorique	25
La métaphore "structure mapping"	29
La métaphore et l'évaluation: de l'inconnu au connu	35
La métaphore et le changement conceptuel: du connu à l'inconnu	37
La métaphore et les émotions cognitives	42
Les cadres théoriques	44
La théorie piagétienne des stades de développement cognitif	44
L'approche du traitement de l'information	47
Les objectifs de recherche	51
Type de recherche	56
 CHAPITRE 2: CADRE MÉTHODOLOGIQUE	 57
Les échantillons	57
L'événement étudié	57
Le moment de la recherche	57
Les sujets	58

L'articulation de la méthodologie utilisée	62
La vérification des acquis et l'utilisation collective des tests "papier-crayon" . .	62
L'intervention formative individuelle et l'utilisation des protocoles verbaux . .	63
Les instruments	64
Le pré-test de calcul	64
Le pré-test de résolution de problèmes	65
Le pré-test métaphorique de type "structure-mapping"	66
Les post-tests personnalisés d'application et de vérification	66
La similarité des tests de résolution de problèmes	67
Les fiches de cueillette de données	69
La procédure	70
L'administration des pré-tests de calcul et de résolution de problèmes	70
L'administration du pré-test métaphorique	71
La durée des pré-tests	72
L'entrevue individuelle	74
L'administration des post-tests d'application et de vérification	81
L'utilisation des fiches de cueillette de données	81
La préparation des données	81
La transcription des protocoles verbaux concourants	81
Le développement de la grille de codage des productions métaphoriques	82
La grille de codage des productions métaphoriques	84
La grille de codage des conceptions identifiées au niveau des analogies	85
La grille de codage des lois mathématiques et des obstacles épistémologiques .	89
La grille de codage des degrés de certitude et des raisons qui les supportent . .	93
Le codage des protocoles verbaux concourants	94
Le codage et le pointage des tests de calcul et de résolution de problèmes . . .	96
L'organisation et la consolidation des données	97
L'analyse des données	98
La validité du test métaphorique comme instrument de diagnostic des erreurs et obstacles épistémologiques	98
L'efficacité de l'intervention formative de type métaphorique/analogique . . .	100
L'utilité d'une spécification des degrés de certitude en rapport avec la méthodologie proposée	100
La comparaison des résultats de la méthodologie proposée selon le niveau académique	101

PRÉSENTATION ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS	102
CHAPITRE 3: LA VALIDITÉ DU TEST MÉTAPHORIQUE	102
Les résultats aux pré-tests de calcul et de résolution de problèmes	102
La validité critériée du test métaphorique	105
La validité de contenu du test métaphorique	115
Résumé et conclusion	141
CHAPITRE 4: L'EFFICACITÉ DE L'INTERVENTION MÉTAPHORIQUE/ANALOGIQUE	145
Les résultats aux post-tests de calcul	145
Les résultats aux post-tests de résolution de problèmes	152
Les caractéristiques des résultats aux post-tests	164
Résumé et conclusion	166
CHAPITRE 5: L'UTILITÉ D'UNE SPÉCIFICATION DE DEGRÉS DE CERTITUDE . .	172
Les fondements et articulations des degrés de certitude	173
La validité des degrés de certitude	178
L'utilité des degrés de certitude	182
Résumé et conclusion	191
CHAPITRE 6: L'EFFICACITÉ SELON LE NIVEAU ACADÉMIQUE	195
Les résultats aux pré-tests de calcul et de résolution de problèmes	195
L'efficacité du test métaphorique: potentiel diagnostique	195
L'efficacité de l'intervention formative de type métaphorique/analogique . . .	200
L'ordre de difficulté des opérations et des problèmes	204
L'utilité d'une spécification de degrés de certitude	209
Résumé et conclusion	214
CHAPITRE 7: CONCLUSIONS ET IMPLICATIONS PÉDAGOGIQUES	217
La validité de l'instrument de diagnostic métaphorique "structure-mapping" .	218
L'efficacité de l'intervention métaphorique/analogique	219
L'utilité des degrés de certitude, comme indicateurs des émotions cognitives	221
La généralisabilité des résultats selon les différents niveaux de rendement . .	222
Les limites de la recherche et les pistes de recherches subséquentes	225
Les retombées et implications pédagogiques	227
BIBLIOGRAPHIE	234

APPENDICES	263
A. Formulaires de consentement	263
B. Instruments	267
C. Fiches de cueillette de données	289
D. Grilles de codage	292
E. Exemple d'un protocole verbal codé	328
F. Fiches-synthèses des résultats	353
G. Résultats aux pré-tests	356
H. Correspondances diagnostiques entre les pré-tests	387
I. Obstacles épistémologiques, lois mathématiques et analogies correspondantes	392
J. Obstacles épistémologiques, solutions des problèmes et analogies correspondantes	404
K. Résultats aux post-tests	411
L. Correspondances entre les degrés de certitude, le statut des analogies et les résultats aux autres tests	424

LISTE DES TABLEAUX

Tableau

1.	Matrice des états cognitifs	26
2.	Exemple d'une métaphore "structure - mapping": l'atome d'hydrogène est un système solaire (Rutherford)	31
3.	Exemple de la métaphore "structure-mapping" d'une élève de 10e année, représentant le système des nombres entiers relatifs	32
4.	Correspondances entre "les chips dans un jeu de poker" et le système des nombres entiers relatifs	33
5.	Données démographiques concernant les sujets	59
6.	Statut des sujets par rapport au domaine des mathématiques	61
7.	Relevé des jugements de similarité des items des tests de résolution de problèmes	68
8.	Durée des pré-tests	73
9.	Liste des modèles pour expliquer le système des nombres entiers relatifs . .	76
10.	Le système des nombres entiers relatifs selon le modèle de l'argent	78
11.	Codes et définitions des critères d'évaluation des productions métaphoriques	86
12.	Codes et définitions des types de conceptions identifiées dans les analogies	90
13.	Codes et définitions des lois mathématiques et obstacles épistémologiques .	92
14.	Codes et descriptions des degrés de certitude et des raisons qui les supportent	95
15.	Profil des erreurs aux pré-tests de calcul et de résolution de problèmes . .	103
16.	Pourcentages de correspondances diagnostiques directes entre le test métaphorique et les tests de calcul et de résolution de problèmes	107
17.	Détails des pourcentages des correspondances diagnostiques directes entre les tests	109

18.	Pourcentages de correspondances diagnostiques partielles et inverses entre le test métaphorique et les tests de calcul et de résolution de problèmes . .	112
19.	Obstacles des nombres entiers naturels (calculs) manifestés dans les analogies	117
20.	Obstacles des lois généralisées (calculs) manifestés dans les analogies . . .	120
21.	Obstacles de la notation (calculs) manifestés dans les analogies	125
22.	Autres obstacles (calculs) manifestés dans les analogies	128
23.	Obstacles (calculs) non manifestés dans les analogies	131
24.	Obstacles manifestés dans les analogies et solutions des problèmes correspondants: addition et soustraction	135
25.	Obstacles manifestés dans les analogies et solutions des problèmes correspondants: multiplication et division	137
26.	Fréquences et pourcentages des changements conceptuels aux post-tests de calcul	147
27.	Fréquences et pourcentages des patrons d'erreurs aux post-tests de calcul en comparaison avec les pré-tests	150
28.	Fréquences et pourcentages des changements conceptuels aux post-tests de résolution de problèmes	154
29.	Fréquences et pourcentages des patrons d'erreurs aux post-tests de résolution de problèmes en comparaison avec les pré-tests	159
30.	Nature des erreurs aux post-tests de résolution de problèmes en comparaison avec celles des pré-tests	162
31.	Raisons justifiant les degrés de certitude, en comparaison avec le statut des analogies correspondantes	174
32.	Correspondances entre les analogies dont les degrés de certitude sont supportés par des raisons inappropriées et les résultats aux pré-tests	180
33.	Pourcentages de correspondances entre l'évaluation des analogies erronées et les erreurs aux post-tests	183

34.	Pourcentages de correspondances entre l'évaluation des analogies adéquates et les erreurs aux post-tests	187
35.	Comparaison de la validité critériée du test métaphorique selon les niveaux	196
36.	Comparaison de la validité de contenu du test métaphorique selon les niveaux	198
37.	Caractéristiques des productions métaphoriques selon les niveaux	199
38.	Comparaison des résultats aux post-tests de calcul selon les niveaux	201
39.	Comparaison des résultats aux post-tests de résolution de problèmes selon les niveaux	203
40.	Ordre ascendant de difficulté selon la moyenne d'erreurs aux tests de calcul	205
41.	Ordre ascendant de difficulté selon la moyenne d'erreurs aux tests de résolution de problèmes	208
42.	Critères d'évaluation des productions métaphoriques selon les niveaux . . .	210
43.	Comparaison de la validité et de l'efficacité des degrés de certitude selon les niveaux	212

"...ce qui est de beaucoup plus important, c'est d'exceller dans les métaphores (...) car bien faire les métaphores, c'est bien apercevoir les ressemblances."

**Aristote
(Ricoeur, 1975, p. 33)**

"... il s'en fait plus aux halles en un jour de marché qu'il n'y en a dans toute l'Énéide, ou qu'il ne s'en fait à l'Académie dans plusieurs séances consécutives."

**Boileau et Dumarsais
(Ricoeur, 1975, p. 85)**

"And what therefore is truth? A mobile army of metaphors... Truth are illusions of which one has forgotten that they are illusions."

"To know is merely to work with one's favorite metaphors."

**Nietzsche
(Shibbles, 1972, pp. 1 et 13)**

[Bohr] never trusted a purely formal or mathematical argument. "No, no," he would say. "You are not thinking; you are just being logical."

**O. R. Frisch
(Margolis, 1987, p. 1)**

"Il existe deux modes distincts de pensée scientifique, l'un et l'autre fonction, non pas certes de stades inégaux du développement de l'esprit humain, mais des deux niveaux stratégiques scientifiques: l'un approximativement ajusté à celui de la perception et de l'imagination, et l'autre décalé, comme si les rapports nécessaires qui font l'objet de toute science - qu'elle soit néolithique ou moderne - pouvaient être atteints par deux voies différentes, l'une très proche de l'intuition sensible, l'autre plus éloignée"

**C. Lévy-Strauss, 1962
(Thibergien, 1989, p. 228)**

"If I can enter the world space as he has construed it, I am able to accompany him upon his particular quest by following the paths he follows into and through the world space. I need to know what he recognizes in the world, where he dwells, where he travels, where his eye is captured, and how, through speech and craft, he answers to the meaning he finds in the world's things."

**P. Carini
(Bartoli, 1985, p. 339)**

Sommaire

L'erreur épistémologique a été opérationnalisée en termes de conception qui a été dérivée d'une expérience personnelle extensive et qui est incompatible avec la théorie scientifique établie. Sa nature est cependant plus complexe que ne le laisse supposer cette définition, puisqu'elle fournit des réponses efficaces dans un contexte fréquemment rencontré et permet ainsi d'aborder une large classe de problèmes pratiques. Elle engendre, par contre, des réponses fausses hors de ce contexte et se manifeste particulièrement lors de résolutions de problèmes plus complexes. Elle se révèle finalement comme une source importante d'interférence et d'inhibition au niveau de l'apprentissage, puisque la maîtrise des notions correspondantes à ce genre d'erreurs tend à se faire au niveau d'une application mécanique de "recettes" et d'une mémorisation de phrases vides de sens.

Inexplorées, les erreurs épistémologiques résistent remarquablement à l'enseignement. Les recherches révèlent qu'un traitement efficace de ces erreurs nécessite un diagnostic qui dégage la structure des conceptions idiosyncratiques qui les supportent. D'un point de vue stratégique, les manifestations a posteriori de ces erreurs suggèrent que leur traitement s'insère dans un processus d'évaluation formative.

La recension des écrits révèle aussi que certaines émotions cognitives (certitude, doute, etc.) jouent un rôle important lors des démarches de changement conceptuel. Elle rapporte que les méthodes qui s'articulent sur des processus de raisonnement métaphorique ou analogique engendrent de meilleurs résultats en physique. Elle révèle finalement que les méthodes efficaces pour diagnostiquer les erreurs épistémologiques, qui ont été élaborées pour la recherche, sont inappropriées pour une utilisation en salle de classe. Elle suggère, cependant, que le recueil des métaphores des élèves pourrait offrir un moyen simple et efficace de déceler les savoirs idiosyncratiques, ainsi que d'en dégager les défauts structuraux.

Suite à ces considérations, la présente recherche explore le potentiel d'une méthodologie d'évaluation formative qui conjugue les approches métaphorique et analogique pour diagnostiquer les erreurs épistémologiques, ainsi que pour faciliter les changements conceptuels qu'elles nécessitent. Il s'agit d'une méthodologie qui inclut

également une spécification de degrés de certitude afin de tenir compte des émotions cognitives. Cette exploration s'inscrit dans le domaine des mathématiques, à un moment qui a été identifié comme particulièrement fécond en erreurs épistémologiques, celui de la transition des nombres naturels aux nombres relatifs qui est également l'occasion de la transition de l'arithmétique à l'algèbre.

Deux classes de mathématiques de 10^e année furent sélectionnées, de façon à représenter des niveaux d'habileté différents, pour participer à l'expérimentation. Ainsi, 21 élèves de niveau avancé et 22 élèves de niveau général furent exposés à la méthodologie proposée. Un test métaphorique, ainsi que des mesures parallèles de contrôle leur furent administrés collectivement, sous la forme de pré-tests et post-tests de calcul et de résolution de problèmes. Les élèves furent ensuite rencontrés individuellement afin de recueillir des données qui permettent d'étayer la validation du test métaphorique et d'étudier le phénomène des émotions cognitives. Les interventions formatives de type métaphorique / analogique furent conduites lors de ces occasions. Les verbalisations de ces entrevues furent enregistrées, transcrites et codées afin de documenter les diverses questions de la recherche. Deux séries de post-tests furent finalement administrées afin de contrôler les effets de l'intervention formative à court et à moyen termes. La première fut administrée individuellement, suite à chacune des interventions. La seconde fut administrée collectivement, 2 semaines après la dernière intervention, ce qui représente un laps de 2 à 5 semaines selon le moment où chaque élève avait été rencontré individuellement.

Les résultats indiquent que le test métaphorique est une mesure valide pour diagnostiquer les erreurs et obstacles épistémologiques. Il présente un fort pourcentage de correspondances avec des mesures parallèles et il permet de diagnostiquer la plupart des difficultés épistémologiques mentionnées par les experts, ainsi que d'en dépister de nouvelles. Le test métaphorique permet ainsi de pallier à certaines limites des méthodologies qualitatives et quantitatives existantes, qui sont inappropriées pour la salle de classe ou qui ne fournissent pas les informations nécessaires pour soutenir une intervention efficace en vue d'effectuer un changement conceptuel.

Les résultats indiquent également qu'une intervention formative de nature

métaphorique / analogique est aussi efficace en mathématiques, que lors des recherches effectuées précédemment en physique. Il s'agit d'une efficacité qui est certaine au niveau des calculs, à court comme à moyen termes. Cette efficacité, quoiqu'elle soit loin d'être négligeable, est de beaucoup inférieure lors des problèmes de transfert, comme c'est le cas en physique. Cependant, même dans les cas des erreurs subséquentes, il a été déterminé que l'intervention avait engendré des conséquences bénéfiques à court et à moyen termes. Elle a causé l'acquisition, même instable, de conceptions justes, procuré des améliorations appréciables, et réussi à ébranler de nombreuses conceptions erronées.

La présente recherche a ensuite permis de déterminer les fondements des émotions cognitives des élèves, en spécifiant les critères sur lesquels ils se basent pour évaluer leurs analogies et justifier leurs degrés de certitude. Les résultats indiquent que les degrés de certitude sont des indices valides de la maîtrise des concepts. Ils permettent d'observer différents niveaux de maîtrise, ainsi que la disponibilité de l'élève à l'égard d'un changement conceptuel. Les résultats indiquent également qu'ils sont de bons prédicteurs de la résistance des erreurs épistémologiques au niveau des calculs à court terme, mais qu'ils sont de meilleurs prédicteurs de la récurrence de ces erreurs sous toutes ses formes à moyen terme. La spécification de degrés de certitude procure ainsi une information importante sur l'état cognitif des élèves, permettant d'augmenter la puissance diagnostique du test métaphorique et d'orienter les interventions formatives en conséquence.

Quant à ce qui a trait à la généralisabilité des résultats de la méthodologie proposée ici, le potentiel diagnostique quantitatif du test métaphorique s'est montré légèrement meilleur au niveau général qu'au niveau avancé, quoique les différences entre les deux groupes se sont révélées surtout d'ordre qualitatif. Relativement à l'efficacité de l'intervention métaphorique / analogique, les résultats sont légèrement meilleurs au niveau avancé lors des calculs, à court et à moyen termes. Il en est de même en ce qui a trait à la résolution des problèmes de transfert à court terme, mais les résultats sont sensiblement meilleurs au niveau avancé à moyen terme. Compte tenu des réussites partielles, des améliorations et de la charge cognitive qui sont supérieures au niveau général, on a conclu qu'il existait plus de ressemblances que de différences entre les deux niveaux. Concernant l'utilité d'une spécification de degrés de certitude, les résultats démontrent que les élèves

des deux niveaux comprennent et utilisent les mêmes critères. La validité des degrés de certitude, comme indice de la maîtrise des concepts s'est révélée légèrement supérieure au niveau avancé. Les résultats indiquent également que l'utilité des degrés de certitude, comme prédicteurs des résistances et des récurrences des obstacles épistémologiques était comparable pour les deux groupes. La prédiction d'erreurs est seulement un peu plus précise au niveau avancé, comme l'annonçait déjà la légère différence de validité des degrés de certitude. On a finalement conclu, qu'en terme de généralisabilité, la méthodologie proposée est aussi valable pour les élèves d'un niveau d'habileté que de l'autre. Les différences locales, qui sont plutôt minimes, avantagent alternativement un groupe ou l'autre, si bien qu'elles finissent par s'annuler globalement.

Comme la présente recherche a été effectuée avec un échantillon limité de sujets provenant de classes intactes, ses résultats se présentent selon une perspective exploratoire. Ils permettent cependant de proposer une nouvelle méthodologie, appropriée à la salle de classe, pour parer aux répercussions sérieuses de l'erreur épistémologique. Ils engendrent également d'importantes implications quant à la nécessité de l'utilisation de la pensée analogique dans les écoles.

INTRODUCTION

Le but de la recherche

Depuis la reconnaissance de ses fonctions d'ornement du langage et d'outil de persuasion (Aristote dans Ricoeur, 1975; Bowers & Osborn, 1966; Reinsch, 1971, 1974), la métaphore [analogie ou modèle] a intrigué nombre de penseurs et de chercheurs qui en ont documenté plusieurs autres fonctions (voir Shibbes, 1971; van Noppen, de Knop & Jongen; 1985).

Il est maintenant couramment soutenu que la métaphore assure l'évolution du langage en comblant ses lacunes sémantiques (Müller, 1864; Ricoeur, 1975), qu'elle est fondamentale à la pensée créatrice et à l'intuition (Boden, 1994; Einstein, 1955; Koestler, 1964; Mac Cormac, 1985; Poincaré, 1955), qu'elle est le déterminant des visions du monde aussi bien personnelles que collectives (Nietzsche, 1972; Pepper, 1942) et qu'elle est ainsi cruciale aux changements de paradigme comme à la construction des théories dans nombre de disciplines (Dunbar, 1995; Hesse, 1966; Hoffman, 1980; Kuhn, 1979; Pribram, 1990).

Plus près de nous, en éducation, on a établi que la métaphore [analogie ou modèle] facilite l'apprentissage (Bean, Singer & Cowan, 1985; Burns & Okey, 1985; Harrison & Treagust, 1993; Newby, Ertmer & Stepich, 1995; Rumelhart & Norman, 1981) en jouant un rôle de médiation (ou transfert) et de triangulation du savoir par la création de nouvelles perspectives (Petrie, 1979; Sticht, 1979; Verbrugge & McCarrell, 1977; Wheelwright, 1962).

L'utilisation du langage figuratif est tellement répandue (voir Pollio, Barlow, Fine & Pollio 1977) que plusieurs penseurs et chercheurs ont proposé que le raisonnement métaphorique et analogique soit à la base de toute cognition (Carmelli, 1993; Jaynes, 1976; Lakoff, 1994; Lakoff & Johnson, 1980; Langer, 1951; Vosniadou, 1987). On a d'ailleurs observé que les apprenants, laissés à eux-mêmes, se réfèrent automatiquement à un apprentissage analogique (Anderson, Greeno, Kline & Neves, 1981; Anderson, Pirolli & Farrell, 1988; Pohl & Nutter, 1985).

Les termes de métaphore, analogie et modèle ont été utilisés indifféremment

jusqu'ici puisqu'ils représentent un même processus, à des degrés divers, selon l'ampleur de son champ d'application. Ainsi, les auteurs parlent d'analogie pour évoquer des relations simples et directes entre deux domaines (Gentner, 1982), de la métaphore comme d'une analogie complexe (Sternberg, 1985) et du modèle comme d'une métaphore élaborée de façon à englober tout un concept ou toute une théorie (Ricoeur, 1975). Ces définitions ont été précisées par Duit (1991) et Holyoak & Thagard (1995) qui présentent la métaphore comme une comparaison complexe et implicite entre deux domaines qui fait ressortir leurs similarités de façon plus floue, et moins directement utilitaire que l'analogie. Ils définissent ensuite l'analogie comme une comparaison explicite des structures des domaines comparés, qui détermine l'identité de certaines parties de ces structures et occasionne de nouvelles inférences d'un domaine à l'autre. C'est cette relation d'identité analogique qui définit le modèle, plus spécifique, comme une comparaison qui se limite habituellement à des parties des structures des domaines comparés. Ces trois termes seront donc utilisés alternativement selon leur contexte à partir d'ici.

Les fonctions de la métaphore, particulièrement celles de déterminant des visions du monde (1), de mode d'acquisition du savoir (2), de méthode de changement de paradigme (3) et d'instrument de persuasion (4), en font un outil qui présente énormément de possibilités pour dépister les erreurs épistémologiques autant que pour faciliter les changements conceptuels que ces erreurs nécessitent. L'objet de ce projet de recherche est d'explorer ce double potentiel dans une perspective d'évaluation formative, plus spécifiquement en mathématiques, bien qu'il pourrait s'inscrire à l'intérieur de n'importe quel autre domaine.

Ce projet de recherche s'inscrit également dans un effort de redressement du statut de la pensée symbolique dans les institutions scolaires. Il a été en effet suggéré que les demandes de spécificité et de logique, communes à ces milieux, frustrant les élèves de cet important instrument de pensée (Pollio & Pollio, 1974; Rummel & Dykstra, 1983; Vizmuller-Zocco, 1992).

Il vise finalement à promouvoir la pratique de l'évaluation formative qui, quoique nécessaire, semble avoir beaucoup de difficultés à s'imposer dans les écoles. Parmi les

causes de ces difficultés, on a identifié la carence d'instruments appropriés (Scallan, 1988a) et l'absence d'un cadre théorique suffisamment élaboré et unifié pour en supporter la pratique (Abrecht, 1991). Ce projet de recherche tentera de suppléer à ces deux aspects.

Le plan de la recherche

Ce document comprend sept chapitres. Le premier chapitre élabore, au niveau d'une recension des écrits, le cadre conceptuel qui situe et justifie la pertinence de la présente étude. Au niveau d'une première section qui concerne le contexte de la recherche, les conclusions et recommandations des recherches précédentes sont d'abord présentées. Il s'agit de la nature de l'obstacle épistémologique ainsi que des deux aspects de l'évaluation formative qui s'y rapportent, soit le diagnostic des erreurs qu'il génère et les interventions en vue d'effectuer le changement conceptuel que ces erreurs nécessitent. Il s'agit également des émotions cognitives qui affectent ce genre de changement chez l'apprenant. Au niveau d'une deuxième section, une méthodologie d'évaluation formative métaphorique, accompagnée d'une échelle de degrés de certitude, est proposée comme solution potentielle aux problèmes posés par chacun des éléments de la première section. Les mérites et les limites de la métaphore y sont discutés en rapport avec la méthodologie proposée, i.e. selon les aspects du diagnostic, du changement conceptuel et des émotions cognitives. Le chapitre se termine avec la proposition des questions de recherche et la justification de leur pertinence.

Le deuxième chapitre est consacré au cadre méthodologique et à la revue de la littérature qui s'y rapporte. Il explique les modalités selon lesquelles la méthodologie d'évaluation proposée a été appliquée dans des classes de mathématiques. Il décrit les échantillons, les instruments de cueillette de données (tests, fiches, protocoles verbaux concourants), ainsi que les procédures utilisées lors des interventions collectives et individuelles auprès des sujets. Il décrit ensuite la préparation et l'organisation des données, i.e. la transcription des protocoles verbaux, le développement des diverses grilles de codage, le codage des protocoles et l'évaluation des tests. Il décrit finalement les analyses de données qui ont été effectuées afin de répondre aux questions de recherche.

Les quatre chapitres suivants présentent les résultats concernant chacune des questions de recherche, ainsi que leur interprétation. Ces questions concernent la validité de l'instrument métaphorique proposé pour diagnostiquer les erreurs épistémologiques (1), l'efficacité de la méthode de changement conceptuel de type métaphorique / analogique, effectuée en conjonction avec un diagnostic du même type (2), l'utilité d'une spécification de degrés de certitude en rapport avec les émotions cognitives engendrées par la méthodologie proposée (3), l'efficacité de la méthodologie proposée selon différents niveaux académiques des élèves (4).

Le dernier chapitre fait un rappel des principaux résultats de la recherche et présente les conclusions qui s'y rapportent, en relation avec les recherches précédentes. Il précise les limites de la présente recherche et suggère des pistes subséquentes d'investigation. Il présente finalement des suggestions relatives à l'utilisation de la méthodologie étudiée dans la pratique éducationnelle.

CHAPITRE 1

CADRE CONCEPTUEL

Le contexte

L'obstacle épistémologique, les erreurs qu'il génère et le besoin de méthodes pour y répondre, ont été à l'origine de multiples recherches (voir Pfundt & Duit, 1991) et de plusieurs colloques internationaux (Bednarz & Garnier, 1989; Helm & Novak, 1983; Novak, 1987). Bien que ces préoccupations appartiennent presque exclusivement au domaine des mathématiques et des sciences, il ne fait cependant nul doute qu'elles concernent tous les domaines de connaissance.

La nature de l'obstacle et de l'erreur épistémologiques

Les chercheurs ont communément opérationnalisé la notion d'erreur épistémologique ("misconception") en termes de conception qui a été dérivée d'une expérience personnelle extensive et qui est incompatible avec la théorie scientifique établie (Lawson & Thompson, 1988; Peterson, Treagust & Garnett, 1989; Vosniadou & Brewer, 1992). Sa nature est cependant plus complexe que ne le laisse supposer cette définition puisqu'elle assure des réponses efficaces dans un contexte fréquemment rencontré et qu'elle permet ainsi d'aborder une large classe de problèmes pratiques (Bachelard, 1938; Brousseau, 1989a; Johsua, 1989a; Sierpiska, 1989; Vergnaud, 1989a). Elle engendre, par contre, des réponses fausses hors de ce contexte et se manifeste surtout lors de résolutions de problèmes plus complexes (Closset, 1983a; Johsua, 1989a; Mandl, Gruber & Renkl, 1993; Tirosh & Graeber, 1990, 1994).

Contrairement à la présomption commune qui veut que les erreurs soient un effet de l'ignorance, de l'incertitude, de la négligence ou du hasard (Artigue, 1990; Brousseau, 1983, 1989a) ou d'un comportement erratique issu d'une incapacité à suivre des procédures (Brown & Burton, 1978), on a observé que les erreurs épistémologiques manifestaient une pensée perceptive, imaginative et originale (Ault, 1984; Driver, 1981). Elles témoignent d'une construction personnelle du sens des relations (D'Ambrosio &

Mewborn, 1994; Lemoyne & Legault, 1989) et elles apparaissent parfaitement logiques et sensibles à leurs possesseurs (Bar, 1989; Osborne & Cosgrove, 1983). Interprétées selon un point de vue constructiviste du savoir, ces erreurs représentent des tentatives raisonnables de compréhension, d'imposition d'une signification à une nouvelle expérience en terme d'une expérience précédente (D'Ambrosio & Mewborn, 1994; Driver 1981; Matz, 1980; Peterson, Treagust & Garnett, 1989; etc.). Selon ces considérations, toute connaissance peut un jour se métamorphoser en un obstacle épistémologique; et celui-ci se définit comme une connaissance antérieure qui entrave l'établissement d'un nouveau savoir (Bachelard, 1938).

Plusieurs erreurs épistémologiques ont été défendues par les meneurs intellectuels du passé (Clement, 1983a; Glaeser, 1981; Janvier, Charbonneau & de Cotret, 1989; McCloskey, 1983; Wandersee, 1985). Les enseignants et les manuels scolaires ne sont pas à l'abri de ces erreurs (Barras, 1984; Bendall, Goldberg & Galili, 1993; Tirosh & Graeber, 1990, 1994). Il arrive également que les obstacles épistémologiques soient renforcés par des obstacles didactiques, e.g. une théorisation accompagnant le travail sur les nombres naturels qui interdit la possibilité de soustraire un plus grand nombre d'un plus petit (Vergnaud, 1989a). A ce sujet, Viennot (1989b) mentionne le fait que les unités naturelles de la connaissance ne coïncident pas avec celles des manuels. Elle parle alors d'obstacles didactiques comme de cohérences ignorées. Par exemple, en mathématiques, on introduit les nombres relatifs et certaines de leurs propriétés avant l'algèbre (mise en équation et traitement d'équations) qui joue un rôle essentiel dans la signification de ces nombres (Brousseau, 1989a).

Toujours en mathématiques, l'essence des obstacles a été circonscrite plus spécifiquement en termes de généralisations hâtives et d'extrapolations excessives où une valeur de vérité absolue est attribuée à des règles particulières (D'Ambrosio & Mewborn, 1994; Matz, 1980; Sierpiska, 1989). Il devient alors intéressant de concevoir l'erreur épistémologique en terme d'indicateur d'une rupture cognitive et d'une nécessité de changement de modèle implicite (Brousseau, 1989a). Les répertoires d'erreurs en mathématiques révèlent, en effet, une relation particulière entre leur émergence et la transition d'une catégorie de nombres (ou d'une notion) à une autre (Brousseau, 1989a;

Janvier, Charbonneau & de Cotret, 1989; Vergnaud, 1989a). Ainsi, lors de la transition des nombres naturels aux nombres entiers, le zéro (0) fait problème en multiplication et division (Brousseau, 1989a). De même, lors de la transition des nombres entiers aux nombres relatifs, le fait que la soustraction cesse d'être nécessairement une diminution et l'addition une augmentation cause des difficultés particulières (Glaeser 1981, Vergnaud, 1989). Enfin, lors de la transition des nombres naturels aux nombres rationnels, le fait que le produit cesse d'être nécessairement plus grand que les quantités multipliées et que le quotient cesse d'être plus petit que le dividende entraîne aussi des complications (Brousseau, 1989a; Tirosh & Graeber, 1990, 1994; Vergnaud, 1989a).

Pour éclairer ces difficultés, Lacasse (1997) distingue les différents niveaux de conceptualisation nécessités par ces transitions pour les quatre opérations mathématiques de base. Dans le système des nombres entiers naturels, l'addition peut être définie, soit comme le résultat de la réunion de deux ensembles, soit comme une succession répétée (comme si on comptait jusqu'au résultat: $5 + 3$ est 5, 6, 7, 8). La soustraction présente alors le premier obstacle épistémologique parce qu'elle ne peut être complétée dans l'ensemble des nombres naturels. Vue comme l'inverse de l'addition, elle ne permet pas de résoudre des équations du type $5 + x = 3$ puisque le résultat de l'opération $3 - 5$ n'existe pas dans l'ensemble des nombres naturels. C'est l'extension à l'ensemble des nombres entiers relatifs qui va permettre ce genre de calcul. Toujours dans le système des nombres naturels, la multiplication est souvent définie comme une addition répétée. De la même façon, la division, vue comme l'inverse de la multiplication, va provoquer l'extension aux nombres rationnels afin de résoudre des équations du type $2 \times x = 5$. Il devient alors nécessaire de redéfinir la somme et le produit de deux nombres entiers relatifs puisque leurs définitions comme succession et addition répétées n'ont plus de sens quand on utilise des nombres négatifs ou fractionnaires. La difficulté pour l'élève, l'obstacle épistémologique, se situe au niveau de cette redéfinition parce qu'elle implique un rejet partiel de la conception préalable de l'addition et de la multiplication et une reconstruction des deux opérations.

On peut dès lors comprendre que la validité, la cohérence et l'efficacité locales des conceptions antérieures assurent leur stabilité et leur solidité (Brousseau, 1983; Léonard

& Sackur, 1990; Vosniadou, 1994). Un autre facteur important est le biais de confirmation, qui semble général à tous les humains. Cette tendance à chercher et percevoir les informations qui sont consistantes avec les conceptions préalables, de même qu'à ignorer ou réinterpréter les évidences contradictoires, favorise la stabilité des erreurs épistémologiques (Mandl, Gruber & Renkl, 1993). Les représentations qui les soutiennent font ainsi preuve d'une extraordinaire capacité d'adaptation afin de les préserver (Brousseau, 1989a; Johsua, 1989a; Viennot, 1979). Elles se manifestent donc systématiquement et sous forme de configurations consistantes (Glaser, 1981; Matz, 1980; Resnick & Ford, 1981; Tatsuoka, 1984), les élèves se révélant très compétents à suivre des procédures, fréquemment fausses (Brown & Burton, 1978).

Comme chacun utilise une différente représentation mentale de la réalité pour extraire un sens à une nouvelle information, différentes significations sont extraites d'une même information afin qu'elles puissent fonctionner en accord avec les conceptions préalables (Glynn, Yeany & Britton, 1991; Hewson, 1985; Johsua, 1989a). De plus, à la lumière de ces conceptions, certaines informations pertinentes sont perçues par les uns alors qu'elles ne le sont pas par d'autres (Head & Sutton, 1985; Norman, 1980). Ce dernier aspect pourrait également être aggravé par l'inhabileté de l'élève à discriminer, parmi une quantité accablante de données, les informations pertinentes à l'assimilation d'une conception juste (Smith, 1984). Les erreurs épistémologiques se révèlent donc hautement idiosyncratiques (Léonard & Sackur, 1990; Resnick & Ford, 1981; Tatsuoka, 1984), leur diversité ne cessant d'étonner ceux qui en sont rendu conscients (Brown & Burton, 1978; D'Ambrosio & Mewborn, 1994; Matz, 1980).

La majorité des chercheurs qualifient les obstacles épistémologiques de croyances ou de convictions et reconnaissent la nature souvent implicite de ces conceptions sous-jacentes (Brousseau, 1989b; Brown, 1993; D'Ambrosio & Mewborn, 1994; Désautels, 1989; Resnick, 1989a; Sierpiska, 1989; Tirosh & Graeber, 1990; 1994, etc.). Le savoir implicite représente toutes les connaissances inconscientes de l'individu, ainsi que toutes les relations qui y sont activées à n'importe quel point en fonction du contexte (Fischbein, 1994; Polanyi, 1958, 1967). De plus, la structure de ce savoir n'est pas nécessairement reflétée de façon directe au niveau de ses manifestations observables (Franks, 1974). Etant

automatiquement activé, ce savoir implicite opère plutôt indépendamment du savoir explicite qu'il contredit souvent (Mandl, Gruber & Renkl, 1993; Tirosh & Graeber, 1994). Il en résulte un compartimentage entre le savoir fermement établi qui est utilisé dans la vie quotidienne et le savoir plus fragile utilisé en situation académique, le premier supplantant aisément le second quand celui-ci doit être appliqué (Glynn, Yeany & Britton, 1991; Mandl, Gruber & Renkl, 1993).

Ces particularités rendent les erreurs épistémologiques particulièrement insidieuses (Sierpinska, 1989; Tirosh & Graeber, 1990, 1994). Inexplorées, elles servent de base active aux raisonnements et deviennent des "assimilateurs" puissants de données nouvelles (Glynn, Yeany & Britton, 1991; Johsua, 1989b), comme le démontrent les répertoires de progression de plusieurs erreurs successives (Giordan, 1989b). Les hiérarchies enchevêtrées de concepts et de procédures erronés qui en découlent, s'avèrent comme les erreurs les plus difficiles à corriger parce qu'elles sont composées et sont issues de généralisations qui s'étendent à des sources différentes (Anderson, 1983). On y retrouve, par exemple, des termes scientifiques qui s'apparentent à ceux de la vie courante (Ebenezer & Gaskell, 1995; Flick, 1991; Murray & Markessini, 1982), des procédures et exemples provenant du même domaine d'étude (Brown & Burton, 1978), aussi bien que d'autres domaines (Strauss & Stavy, 1983).

Les chercheurs (Champagne, Klopfer, Solomon & Cahn, 1980; Clement, 1983b; McCloskey, 1983; Songer & Mintzes, 1994) révèlent finalement que ce genre d'erreurs est une source importante d'interférence et même d'inhibition lors de l'apprentissage. Lorsque les élèves rencontrent les notions reliées à ces erreurs, la maîtrise de ces notions tend à s'effectuer au niveau d'une application mécanique de recettes et d'algorithmes ainsi que d'une mémorisation de phrases vides de sens (Giordan, 1989a; Hills, 1989).

Quoique ces manifestations de l'erreur épistémologique soient bien connues des enseignants et que l'inhabileté subséquente à résoudre des problèmes leur soit une source répétée de perplexité et de frustration, il apparaît que les conceptions alternatives des élèves sont habituellement inconnues des enseignants (Mestre & Touger, 1989; Shuell, 1987; Stepan, 1991; Tasker, 1981). Engel Clough & Driver (1985) suggèrent qu'un mécanisme complémentaire de mémorisation chez les élèves et de synthonisation

(attention sélective) chez les enseignants soit la cause de cette lacune. En reconnaissant chez les élèves le vocabulaire et la phraséologie qu'ils ont eux-mêmes utilisés pour enseigner un concept, les enseignants inféreraient que la représentation que les élèves ont de ce concept est la même que la leur et ils n'en vérifieraient pas la compréhension sous-jacente. Cette explication est supportée par les observations d'autres chercheurs qui rapportent que les élèves peuvent fréquemment décrire un événement en termes techniquement corrects, dont la compréhension se révèle superficielle ou erronée à la suite d'un examen plus poussé (Osborne & Cosgrove, 1983; Stepans, 1991; Vosniadou, 1994).

Les chercheurs s'entendent donc pour dire que les connaissances accumulées sur l'erreur épistémologique sont maintenant au stade d'être transférées au niveau de la salle de classe et que les enseignants devraient être conscients du fait que les élèves peuvent développer leurs propres versions des concepts enseignés. Ils s'entendent également sur la nécessité de repérer ces savoirs afin de pouvoir y intégrer les nouvelles connaissances, car ces conceptions risquent de demeurer inchangées ou d'évoluer de façon non anticipée (Nussbaum & Novak, 1976; Osborne & Cosgrove, 1983). On a, en effet, observé que les idées erronées et les erreurs de raisonnement, qu'elles engendrent, continuent de se reproduire de façon déconcertante en dépit de plusieurs années d'instruction subséquente (Brousseau 1989a; Giordan, 1989a; Halloun & Hestenes, 1985; Novak & Musonda, 1991; Songer & Mintzes, 1994; Stepans, 1991).

Le diagnostic des erreurs épistémologiques

Dans une perspective de changement conceptuel, il apparaît d'abord que l'élaboration d'inventaires d'erreurs communes soit peu efficace: la spécificité d'une conception dépend de l'organisation idiosyncratique de ses éléments et une intervention efficace demande qu'on tienne compte du contexte de fonctionnement des erreurs (Giordan, 1989a; Thagard, 1991; West, Fensham & Garrard, 1985; West & Pines, 1985). Comme plusieurs erreurs épistémologiques peuvent coexister, ces erreurs et les relations qui existent entre elles doivent faire l'objet d'un examen (Bednarz & Garnier, 1989). Aussi, des procédures de "mapping" cognitif s'imposent afin de rendre explicites, au niveau d'un modèle diagnostique détaillé, les relations complexes des structures cognitives

implicites qui supportent une erreur (Bednarz & Garnier, 1989; Brown, 1993; Brown & Burton, 1978; Dykstra, Boyle & Monarch, 1992; Shuell, 1985).

Pour ce faire, de nombreuses approches qualitatives ont été explorées. Diverses méthodologies d'entrevues ont acquis une bonne réputation en tant qu'approche viable (Bendall, Goldberg & Galili, 1993; Ebenezer & Gaskell, 1995; Gilbert, Watts & Osborne, 1985; Novak & Musonda, 1991; Nussbaum & Novak, 1976; Stepan, 1991; etc.). Parmi les méthodologies papier-crayon, on retrouve principalement des questions de type-essai (Halldén, 1988; Marek, 1986; Simpson & Marek, 1988; Renner, Brumby & Shepherd, 1981), des associations contraintes de mots (Gussarsky & Gorodetsky, 1988, 1990), des cartes de concepts (Moreira, 1987; Markham, Mintzes & Jones, 1994; Novak, 1985; Wallace & Mintzes, 1990) et diverses combinaisons de ces techniques (Dreyfus & Jungwirth, 1988; Duit, 1983, Songer & Mintzes, 1994).

Ces méthodologies se sont révélées efficaces pour diagnostiquer les erreurs épistémologiques. Cependant, comme la plupart d'entre elles ont été développées dans le but spécifique d'étudier la nature de ces erreurs et d'en dresser des inventaires, elles s'avèrent inappropriées pour une utilisation en salle de classe. Elles exigent trop de temps, des traitements de données trop compliqués ou une expertise dont les enseignants ne disposent pas pour les interpréter (Fensham, Garrard & West, 1981; Moreira, 1987; Shuell, 1985; White, 1985). Outre un besoin de réduction des données, d'organisation et de systématisation afin que les informations recueillies soient significatives (Dykstra, Boyle & Monarch, 1992; Shuell, 1985), un besoin d'instruments plus simples, qui tiennent compte des critères de répliquabilité, fidélité et validité, se manifeste (Gilbert, Watts & Osborne, 1985; Hashweh, 1988; Shuell, 1985).

Au nombre des approches quantitatives, plus susceptibles de satisfaire ces critères, on a développé (et parfois validé) des tests d'items à choix multiples qui utilisent, comme distracteurs, les erreurs épistémologiques fréquemment entretenues (Doran, 1976; Halloun & Hestenes, 1985; McCutcheon, 1991; Oppenheim, 1987). A ce genre d'items, on a incorporé une spécification de degrés de certitude afin de pouvoir déceler les conceptions justes pouvant servir d'ancre à un changement conceptuel (Clement, Brown & Zietsman, 1989). Toujours au niveau des items à choix multiples, on a également ajouté une étape,

où la raison d'un choix doit être sélectionnée parmi une série d'énoncés afin de cerner la compréhension sous-jacente (Odom & Barrow, 1995; Peterson, Treagust & Garnett, 1989; Treagust, 1988; Treagust & Smith, 1989). On rencontre finalement les questions ouvertes à réponses courtes, où les erreurs sont analysées statistiquement afin d'en dégager les configurations (Birenbaum & Shaw, 1985; Birenbaum & Tatsuoka, 1982; Tatsuoka, 1983, 1984, 1985). Certaines de ces méthodologies quantitatives ont été conçues pour être administrées à l'aide de l'ordinateur (Brown & Burton, 1978; Browning & Lehman, 1988; Schultz, Murray, Clement & Brown, 1987).

Cependant, les tests d'items à choix multiples se révèlent également limités pour diagnostiquer les erreurs épistémologiques. En mathématiques, par exemple, ils ne peuvent fournir les informations nécessaires à une remédiation, quant à la source et l'articulation des règles utilisées (Tatsuoka, 1983). Il existe, en effet, une grande diversité de règles et de configurations de ces règles qui peuvent sous-tendre une même réponse, juste ou erronée (Birenbaum & Tatsuoka, 1982; Tatsuoka, 1984, 1985). Ces chercheurs ne découvrirent pas moins de 79 différentes règles erronées utilisées dans l'addition et la soustraction des nombres relatifs. De plus, Brown & Burton (1978) observèrent qu'une série de mauvaises réponses peut indiquer la présence de plusieurs conceptions erronées aussi bien que la présence d'une seule, qui soit continuellement utilisée pour calculer des résultats intermédiaires.

Toujours en mathématiques, il existe des différences considérables entre le format des réponses à choix multiples et celui des réponses ouvertes (Birenbaum & Tatsuoka, 1987). Parce que les distracteurs sont soigneusement choisis pour représenter les erreurs communes, la tâche de sélection de la réponse correcte devient plus compliquée et résulte en une plus grande variété de types d'erreur, dont une grande portion n'est pas interprétable. Les résultats semblent indiquer que les étudiants, qui n'ont pas complètement maîtrisé une tâche, tendent à être moins consistants en appliquant leurs règles d'opération lors des tests à choix multiples. On peut spéculer ici que l'effet des "devinettes", plus ou moins éclairées, soit une des causes de ces résultats.

Finalement, l'interprétation des résultats à tous ces tests quantitatifs demande également une expertise statistique et une technologie dont la plupart des enseignants ne

disposent pas. De plus, leur développement est tellement complexe qu'il faudrait attendre encore bien longtemps avant qu'ils ne soient disponibles pour tous les sujets d'intérêt, nonobstant le coût de leur acquisition. La voie demeure donc ouverte en ce qui a trait à la recherche d'un instrument peu dispendieux, qui soit à la fois efficace et simple d'utilisation en salle de classe.

Les méthodes de changement conceptuel

Il devient de plus en plus évident que les erreurs épistémologiques résistent remarquablement à l'enseignement traditionnel dans une variété de sujets, et ceci à tous les niveaux de scolarisation (Faucher, 1983; Lawson & Thompson, 1988; Marek, 1986; Peterson, Treagust & Garnett, 1989; Simpson & Marek, 1988; Songer & Mintzes, 1994).

On attribue l'inefficacité des méthodes traditionnelles à un manque d'accent sur l'aspect qualitatif d'un domaine autant dans l'enseignement que dans l'évaluation (Faucher, 1983; Glynn, Yeany & Britton, 1991; Mestre & Touger, 1989; Novak, 1985; Songer & Mintzes, 1994). Certains chercheurs vont même jusqu'à accuser les enseignants de ne viser et de n'évaluer que l'acquisition d'une accumulation de faits, de routines et de procédures; en bref, d'être peu intéressés à la compréhension des concepts (Novak, 1985; Peterson, Treagust & Garnett, 1989). Selon Connel & Peck (1993), l'enseignement des mathématiques souffre particulièrement d'une dépendance vis-à-vis des méthodes d'instruction, où les exercices plus ou moins similaires se succèdent jusqu'à ce que les élèves puissent répliquer les procédures désirées, sans qu'il n'ait été donné d'attention à la nature de leur compréhension individuelle. Marek (1986), ayant comparé les résultats scolaires des élèves avec les résultats à un test diagnostique des erreurs épistémologiques dans un même sujet, résume la situation au niveau du titre d'un article: "They misunderstand, but they'll pass".

Plusieurs méthodes de changement conceptuel ont été proposées et étudiées pour s'adresser plus explicitement aux problèmes causés par l'erreur épistémologique. L'appellation "changement conceptuel" se réfère à Toulmin (1972) pour qui l'apprentissage exige non seulement l'acquisition ou la formation de nouveaux concepts, mais également un changement conceptuel, i.e. une modification des concepts existants

ou leur remplacement par des alternatives appropriées. Le succès d'un tel apprentissage se mesure au degré d'intégration du nouveau savoir aux conceptions préalables; moins il est intégré, moins il est signifiant et utile pour l'apprenant (Anderson, 1990).

L'enrichissement, i.e. la simple assimilation d'une nouvelle information à la structure d'une conception existante, est la forme la plus simple de changement conceptuel. Il peut s'avérer relativement facile, lorsque l'information est consistante avec cette conception ou que le savoir préalable est peu étendu. Par contre, une révision est requise quand l'information est inconsistante avec des présuppositions ontologiques et épistémologiques ou avec la structure relationnelle de celles-ci. Cette accommodation peut être très difficile à réaliser parce que ces conceptions et présuppositions sont les fondations mêmes des savoirs de base, et leur révision engendre de sérieuses implications pour toutes les structures de savoir qui a été construit subséquemment sur eux (Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982; Thagard, 1991; Vosniadou, 1994). Ce qui est paradoxal, c'est que les conceptions qui résistent au changement conceptuel sont aussi celles qui sont utilisées pour comprendre et interpréter les nouvelles informations potentiellement conflictuelles (Pintrich, Marx & Boyle, 1993). Les conditions nécessaires au changement conceptuel ont été identifiées comme étant (1) une insatisfaction face à la conception existante, (2) l'intelligibilité et (3) la plausibilité initiales de la nouvelle conception, ainsi que (4) la promesse d'une fécondité à produire une meilleure compréhension des phénomènes concernés (Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982; Strike & Posner, 1985).

Les principales méthodes de changement conceptuel sont (1) la réfutation, (2) la découverte, (3) la remise en question, (4) la modification analogique progressive et (5) la substitution métaphorique. Les résultats des trois premières méthodes utilisées individuellement ont été plutôt mitigés.

La méthode de la réfutation (1) se distingue de l'enseignement traditionnel en ce qu'elle favorise l'expression des idées préalables des apprenants avant d'enchaîner par une argumentation qui réfute les conceptions erronées, pour ensuite continuer avec l'enseignement des connaissances adéquates. Bien que cette méthode ait le mérite de faire émerger les conceptions initiales des apprenants, elle ne s'en préoccupe plus par la suite. L'expression des conceptions ne devient souvent qu'un prétexte utilisé comme activité de

démarrage d'une leçon, où on met l'accent sur leur aspect pittoresque sans chercher à comprendre leur logique, sous prétexte d'un manque de temps.

Giordan (1989a) attribue l'inefficacité de la méthode de la réfutation aux faits qu'elle élude les mécanismes constructivistes d'appropriation du savoir et qu'elle mésestime la résistance des savoirs préalables. Il lui reproche également de réfuter des savoirs qui sont souvent une approximation suffisante pour aborder certains types de problèmes ou pour servir d'étape préliminaire dans la construction du nouveau savoir. Comme l'enseignement traditionnel, cette méthode risque d'introduire trop tôt des définitions stéréotypées, ayant comme conséquence de supprimer l'envie de chercher. Selon Vosniadou (1994), la simple présentation de faits contre-intuitifs ne peut conduire qu'à une accumulation d'informations inconsistantes, puisqu'elle ne fournit pas les informations nécessaires à la révision des conceptions sous-jacentes qui supportent les erreurs épistémologiques.

La méthode de la découverte (2) repose sur la croyance que l'observation et la mesure sont à la base des découvertes des lois scientifiques et qu'il est possible de faire, lors d'expériences cruciales, les mêmes changements de paradigme que les savants ont pris des siècles à effectuer lors de révolutions scientifiques. Johsua (1989b) explique l'inefficacité de la méthode de la découverte à produire des explications scientifiques en pointant la différence essentielle des cadres conceptuels (expert-novice) de ceux qui conduisent les expériences caractéristiques à cette méthode. On a, en effet, constaté que les obstacles et erreurs épistémologiques agissaient comme pré-modèles pour filtrer l'observation des données de l'expérience ainsi que leur interprétation (Champagne, Klopfer, Solomon & Cahn, 1980; Driver, 1981; Viennot, 1979). Ainsi Shepardson & Moje (1994) ont observé que bien qu'en améliorant le savoir déclaratif, cette méthode n'arrivait à déloger que peu des conceptions initiales, favorisant plutôt le développement et le renforcement de ces pré-conceptions de façon non anticipée. De même, Stepan (1991) rapporte peu de différences entre les résultats de la méthode de la découverte et ceux de la méthode traditionnelle, si ce n'est que de favoriser une attitude plus positive envers les sciences. En fait, il semble que la lecture individuelle d'un texte qui réfute les erreurs épistémologiques produise de meilleurs résultats, malgré l'aversion que démontrent les

élèves envers cette stratégie (Hynd, McWhorter, Phares & Suttles, 1994).

La méthode du conflit cognitif ou remise en question (3) s'est révélée la plus populaire jusqu'à présent (Champagne, Gunstone & Klopfer, 1985; Dreyfus, Jungwirth & Eliovitch, 1990; Nussbaum & Novik, 1982; Posner, Strike, Hewson, & Gertzog, 1982; Tirosh & Graeber, 1990, 1994; etc.). Elle s'inscrit dans la tradition d'une falsification des théories à la lumière de contradictions empiriques et théoriques (Popper, 1973). Elle a pour but d'inciter les apprenants à reconsidérer et réviser leurs croyances par rapport à la contradiction empirique de données qui vont à l'encontre de ces croyances. Sous forme de contradiction sociale, où les conceptions rivales sont soutenues par des pairs ou par des autorités reconnues, cette méthode puise sa source chez Vygotsky (1978), selon qui le savoir est construit à travers les interactions sociales.

La contradiction sociale, seule, a rencontré peu de succès à conduire les élèves vers des conceptions et des formes de raisonnement scientifique (Levin & Druyan, 1993; Resnick, 1989b; Tudge, 1989). En fait, il semblerait que cette méthode engendre de moins bons résultats que la méthode de la découverte ou la lecture d'un texte réfutatif (Hynd, McWhorter, Phares & Suttles, 1994). Les élèves faibles ou peu sûrs d'eux-mêmes tendent à accepter sans questionnement, ni réorganisation, les conceptions des étudiants plus forts ou plus convaincants, préférant souvent régresser vers une erreur épistémologique populaire plutôt que d'adhérer à l'explication scientifique. D'autres élèves cherchent à deviner la conception favorisée par l'autorité dans un besoin de réussite.

De nombreux résultats expérimentaux mettent en doute l'efficacité de la confrontation empirique à entraîner un changement des systèmes explicatifs, bien que les élèves y acquièrent de nouvelles connaissances (Erickson & Thiberghien, 1985) et peuvent affiner leurs descriptions d'un phénomène de manière à engendrer des prédictions justes (Ranney, 1987 dans Resnick, 1989b). Par contre, les apprenants y utilisent plusieurs stratégies de résolution de conflit cognitif qui leur permettent de conserver leurs conceptions. Ils fuient souvent la contradiction en la niant, rejetant des faits qui contredisent ce qu'ils croient être vrai (Champagne & Klopfer, 1980 dans Resnick, 1989b). Ils ajoutent des hypothèses ad hoc, tout en conservant l'essentiel de leur cadre d'explication ou abandonnent certaines idées pour en adopter d'autres, dans un genre

d'échange conceptuel simple (West, Fensham & Garrard, 1985). En bref, comme les sociétés savantes du passé (Kuhn, 1970), ils bricolent le modèle proposé et l'assimilent à leur organisation conceptuelle en lui conférant une signification idiosyncratique souvent peu commune avec ce modèle (Désautels, 1989; Dreyfus, Jungwirth & Eliovitch, 1990; Johsua, 1989b). Ainsi, même s'ils acceptent l'évidence, cette dernière ne devient pas pour autant la base d'une conception alternative qui permettrait d'intégrer facilement les nouvelles données (Johsua & Dupin, 1987). Gorsky & Finegold (1992) ont similairement observé que si cette méthode, utilisée sous forme de logiciel, réussit à rendre les concepts scientifiques intelligibles, elle échoue à faire admettre la plausibilité de ceux qui s'opposent aux croyances intuitives.

Il ne suffit donc pas que l'apprenant devienne conscient que sa conception est erronée pour parvenir automatiquement à une nouvelle conception. Le problème de base reposerait sur l'habileté des apprenants à atteindre un état de conflit qui soit suffisamment signifiant pour engendrer un processus de changement conceptuel. Hors de la communauté scientifique, on a plus tendance à vouloir confirmer qu'à falsifier, et il est difficile de trouver des contextes où le conflit et sa solution soient également signifiants pour les apprenants (Caravita & Halldén, 1994; Dreyfus, Jungwirth & Eliovitch, 1990). Il apparaît également que la spécificité d'un obstacle épistémologique ne dépende pas principalement des éléments qui le composent, mais de l'organisation de ceux-ci (Giordan, 1989a; West, Fensham & Garrard, 1985; West & Pines, 1985). La conception erronée demande donc à être abordée en tenant compte de son contexte de fonctionnement, ce que la confrontation, où le contexte et la signification que lui donne l'apprenant sont souvent inconnus, ne permet pas (Giordan, 1989a; Vosnadiou, 1994). Ainsi en mathématiques, on a observé que cette méthode est plus efficace quand les conceptions erronées sont explicites, même si encore là, un grand nombre d'apprenants sont prêts à changer leurs procédures afin de les préserver (Tirosh & Graeber, 1994). Même si les méthodes qui utilisent la remise en question remportent de meilleurs résultats que les précédentes (Guzzetti, Snyder, Glass & Gamas, 1993), il semble que le pouvoir réel des deux formes de confrontation réside dans leur capacité d'inciter les élèves à chercher de nouvelles explications (Johsua, 1989b; Resnick, 1989b).

Dans un cadre piagétien, Lawson & Thompson (1988) ont expliqué l'inefficacité de la méthode de la remise en question. Ayant constaté que les élèves, qui conservent le plus d'erreurs épistémologiques, raisonnaient au niveau des opérations concrètes, ils affirment qu'un niveau de raisonnement formel (raisonnement combinatoire, contrôle des variables, raisonnement probabiliste et corrélationnel) est nécessaire pour évaluer les conceptions alternatives de la façon hypothético-déductive propre à cette méthode. Les limites de la capacité mentale (mémoire de travail) ont aussi été évoquées pour expliquer une perte d'informations qui diminuerait les possibilités du changement conceptuel nécessaire pour assimiler une nouvelle théorie (Lawson, 1983; Margolis, 1987).

Ces mêmes explications ont été fournies pour expliquer la résistance des erreurs épistémologiques à l'enseignement traditionnel (Renner, Brumby & Shepherd, 1981; Simpson & Marek, 1988). Et Resnick (1989b) étend ce reproche à toutes les méthodes précédentes qui présument que les élèves ont la capacité de raisonner logiquement à partir de prémisses et de principes donnés, capacité qui ne semble pas disponible à plusieurs.

Selon Johsua (1989b) et Désautels (1989), des changements ne peuvent être opérés que s'il y a transformation du cadre épistémique qui oriente les démarches d'appropriation des concepts. Deux méthodes explorent ce changement de paradigme interprétatif à l'aide d'analogies (changement local) et de métaphores (changement global). Celles-ci ont été étudiées, dans la plupart des cas, en conjonction avec les méthodes précédentes.

La méthode de modification analogique progressive (4) implique la construction de conceptions scientifiques à partir d'éléments des conceptions initiales au moyen d'un processus graduel d'élaboration, de différenciation et de modifications successives plutôt mineures. Les élèves y sont amenés à appliquer analogiquement ("bridging analogies") leurs conceptions justes à des phénomènes auxquels ils n'auraient pas pensé qu'elles puissent l'être et à prolonger ces conceptions à travers des expériences de pensée (Brown & Clement, 1989; Clement, 1987b, 1993). Cette technique a également été développée sous forme de logiciel (Schultz, Murray, Clement & Brown, 1987).

Il s'agit d'un processus lent, qui a été documenté exclusivement en physique, mais qui y a rencontré un taux de succès plus élevé. Resnick (1989b) considère cette méthode comme prometteuse pour les raisons qui suivent. Plutôt que de contester les croyances

initiales, cette méthode a le mérite de se baser sur ces conceptions spontanées, qui produisent des racines potentielles de conceptions correctes où on peut trouver les précurseurs de nombreuses conceptions scientifiques. De plus, des historiens et philosophes des sciences, ainsi que des chercheurs, insistent maintenant beaucoup plus sur le processus évolutionniste, étape par étape, des changements conceptuels que sur le phénomène des révolutions scientifiques qui a prévalu auparavant. Finalement, cette méthode a le potentiel d'enseigner un style de raisonnement hypothétique qui est propre à la pensée scientifique.

La méthode de substitution métaphorique ou analogie modélisante (5) est une autre approche qui utilise les conceptions préalables afin d'en développer de nouvelles, quoique de façon plus globale que la précédente. En alternative aux conceptions erronées, elle propose des conceptions hypothétiques, qui respectent les principes scientifiques et dont la base est bien connue par les élèves, afin de favoriser un raisonnement basé sur de nouveaux principes (Johsua & Dupin, 1988, 1989; Resnick, 1989b). Lorsqu'utilisée en physique, on a observé son effet "spectaculaire" à lever les contradictions et les résistances, de même qu'à produire des prédictions justes qui contredisent totalement l'expérience quotidienne (Johsua & Dupin, 1989). Les résultats de cette méthode et ceux de la précédente se révèlent similaires en ce que les groupes expérimentaux obtinrent des résultats significativement supérieurs à ceux des groupes-témoins, exposés au curriculum habituel (1); et que les résultats aux questions concernant la compréhension des concepts étaient meilleurs que ceux qui concernaient leur application (2).

Une variation de cette méthode fut également utilisée en chimie, pour expliquer la diffusion moléculaire à des adultes, lors d'une expérience conçue pour favoriser l'avènement d'erreurs épistémologiques en utilisant des analogues qui avaient été associés expressément à un autre concept enseigné auparavant (Lawson, Baker, DiDonato & Verdi, 1993). Malgré ce subterfuge, le groupe expérimental obtint des résultats significativement supérieurs à ceux du groupe-témoin lors d'une question demandant d'expliquer la diffusion. Cependant, les résultats des deux groupes combinés sur une question d'application de ce concept montrent une corrélation significative avec le degré de raisonnement hypothético-déductif. Les chercheurs interprètent ces résultats en disant que

les analogues représentent un facteur-clé lors d'un changement conceptuel en clarifiant la nature des nouveaux concepts théoriques, mais que le succès de leur application requiert un raisonnement hypothético-déductif qui permet de décider lequel des concepts théoriques devrait être utilisé. Il est à noter que les explications alternatives ne furent jamais directement contrastées ou testées durant l'apprentissage afin d'engendrer un maximum d'erreurs épistémologiques. Il ne s'agit pas d'une situation typique de salle de classe, bien que les résultats de cette recherche corroborent les résultats précédemment observés en physique. Et les chercheurs recommandent d'aider les élèves à utiliser le raisonnement hypothético-déductif pour évaluer les situations où les concepts peuvent être appliqués avec succès, moyen qui a été démontré comme efficace pour provoquer le développement de ce genre de raisonnement.

Toujours en chimie, cette méthode fut utilisée au primaire (Stavy, 1991). Il s'agit d'une recherche qui se différencie des autres recherches présentées ici en ce qu'elle s'appliqua à un seul concept et qu'elle se limita uniquement à la méthode analogique. Bien que leurs conceptions préalables aient été répertoriées pour des fins de contrôle, les élèves ne les exprimèrent pas explicitement lors du processus d'apprentissage afin d'éviter les inconvénients occasionnés par la méthode du conflit cognitif, soit la perte de confiance en soi et la régression vers des conceptions erronées. Les résultats de cette méthode présentèrent une différence significative, comparés à ceux de la méthode traditionnelle. Selon Stavy (1991), l'apprentissage s'effectua hors de la conscience de l'élève. De son point de vue, il n'y avait ni conception erronée, ni apprentissage. Il comprit intuitivement les deux situations.

Cette méthode fut finalement utilisée, intégrée aux autres méthodes, lors d'unités complexes d'apprentissage en biologie au primaire (Mason, 1994a, 1994b). Les résultats de cette recherche présentent une corrélation positive élevée entre la compréhension des nouveaux concepts, la compréhension de l'analogie et l'utilisation de celle-ci en intégrant les nouvelles informations dans les structures cognitives pré-existantes. Tous les résultats concernant les items précédents présentent également une corrélation positive élevée avec la connaissance métacognitive du but de l'analogie dans le processus de changement conceptuel, contredisant ainsi les résultats des deux recherches précédentes. Les élèves

qui ne reconnurent pas le conflit entre leurs conceptions et le nouveau savoir, ou qui n'étaient pas capables d'utiliser l'analogie pour le résoudre, sont ceux qui démontrèrent le plus bas niveau de compréhension. Ces résultats indiquent que les élèves devraient être conscients du besoin de changer leurs croyances et qu'ils devraient percevoir le but de l'analogie dans ce processus pour que l'intégration du nouveau et de l'ancien savoir s'effectue, du moins lors de notions complexes comme c'est ici le cas. A ce propos, Flick (1991) affirme que si la substitution de savoir demeure implicite, l'apprenant ne saura pas à quelle notion se référer pour résoudre de nouveaux problèmes car il sera inconscient de la façon dont le savoir approprié a été acquis.

Malgré ces différentes interprétations, on explique l'efficacité des deux dernières méthodes en disant que l'aspect concret, fourni par la métaphore, crée un contexte où les nouveaux concepts deviennent plausibles (Brown, 1993; Clement, 1987b; Johsua & Dupin, 1989). Cette explication est supportée par l'énoncé des conditions nécessaires à un changement conceptuel. Ces conditions spécifient, en effet, que pour qu'on accepte de considérer une nouvelle conception, il faut d'abord qu'elle soit initialement plausible et minimalement intelligible avant qu'on puisse commencer à explorer ses possibilités et voir certaines de ses implications (Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982). Strike & Posner (1985) expliquent subséquemment qu'un concept a besoin d'un emboîtement déterminé à l'intérieur d'un contexte pour acquérir une signification. Quand les idées courantes contiennent des éléments qui sont incompatibles avec la nouvelle idée, disent-ils, la tâche est alors de tisser toutes ces idées dans une nouvelle configuration où leurs éléments ont tous un sens, e.g. dans une métaphore. Par la même occasion, l'analogue permet de concevoir le nouveau concept plus abstraitement en lui prêtant sa structure relationnelle implicite et en dévoilant des mécanismes jusque-là invisibles ou ignorés (Brown, 1993; Gick & Holyoak, 1980, 1983; Holland, Holyoak, Nisbett & Thagard, 1989). Cette structure sert non seulement à l'assimilation du nouveau savoir, mais aussi à la réorganisation du savoir initial, contribuant ainsi à éviter l'inertie des savoirs compartimentés (Mason, 1994b). Un tel modèle de révision des systèmes de croyances, basé sur des paramètres de cohérence explicatoire, a été développé sous forme de logiciel pour un cas historique, celui de la théorie de l'évolution selon Darwin. Il a ensuite été

appliqué avec succès aux données d'un étudiant qui se penchait sur des problèmes de mécanique (Ranney et Thagard, 1988).

Un autre avantage des deux dernières méthodes est qu'elles mettent l'accent sur le raisonnement qualitatif alors que la plupart des autres enseignements mettent l'accent sur la résolution de questions d'essence quantitative. Selon Resnick (1989b), les représentations qualitatives initiales et les nouvelles représentations quantitatives apprises ne peuvent être confrontées telles quelles. De plus, il est essentiel, dit-elle, de fixer les nouveaux principes dans un réseau complexe de concepts interreliés, sinon la nouvelle information sera fragile et instable, rarement mobilisée, même si elle est disponible.

Pour ces raisons, ces méthodes sont les seules qui semblent pouvoir échapper à la critique de Giordan (1989a) qui reproche aux pédagogies de changement conceptuel de mal situer le moment où les représentations peuvent jouer un rôle dans l'élaboration des connaissances. Selon lui, on ne peut saisir la différence entre deux explications que dans la mesure où on les connaît l'une et l'autre; ce n'est qu'une fois que l'explication scientifique est acquise, au moins partiellement, qu'il est possible de revenir sur les conceptions initiales afin de les modifier par une série de rectifications.

On y voit finalement une façon de procéder qui est l'essence même de la pensée issue de la révolution scientifique en ce qui a trait à la relativisation des savoirs: les sciences ne proposant plus de vérités absolues, ni de descriptions exactes du monde, mais des modèles opérationnels par rapport à certains types de situations (Giordan, 1989b; Von Glaserfeld, 1989). Ces méthodes répondent ainsi à ceux qui affirment qu'un changement conceptuel n'implique pas la restructuration d'anciennes conceptions, ni le rejet de conceptions qui conservent leur utilité dans un domaine spécifique. D'après eux, il impliquerait plutôt l'extension du répertoire de conceptions selon divers contextes, ainsi que le raffinement de leur organisation et de leur cohérence, à travers une réinterprétation des présuppositions construites à partir de l'expérience (Caravita & Halldén, 1994; Linder, 1993; Spada, 1994; Vosniadou & Brewer, 1992). Selon les méthodes métaphorique et analogique, la nouvelle conception n'est pas présentée dans le but de remettre en question la conception initiale. Elle est présentée comme une alternative à celle-ci en faisant ressortir les différences qui existent entre elles, surtout celles dont les apprenants sont le

moins conscients, afin de les mettre en garde contre certains raisonnements fondés sur les présuppositions habituelles (Resnick, 1989b).

Le changement conceptuel et les émotions cognitives

Les chercheurs s'entendent de plus en plus pour dire que le changement conceptuel est une démarche à la fois rationnelle et affective, ainsi que pour reprocher à la majorité des méthodes précédentes de ne se préoccuper que de l'aspect rationnel de ce processus (Désautels, 1989; Gowin, 1983; Pintrich, Marx & Boyle, 1993; Resnick, 1989b; West & Pines, 1983, etc.).

Sierpinska (1989) rapporte qu'il y a presque toujours beaucoup d'émotions pendant la négociation des erreurs épistémologiques. Elle considère que cette négociation ne peut être résolue uniquement à l'aide d'arguments rationnels et qu'il est vain d'évaluer les conceptions des étudiants comme vraies ou fausses, car elles sont plus ou moins fructueuses. De même, Resnick (1989b) est d'avis que le sentiment de déséquilibre, engendré par la méthode du conflit cognitif, peut favoriser une exploration additionnelle autant que renforcer chez l'élève la sensation qu'il est incapable de comprendre; sensation qui risque, à long terme, de le décourager. De fait, Dreyfus, Jungwirth & Eliovitch (1990) rapportent que les élèves forts y réagissent avec enthousiasme, alors que les élèves faibles perçoivent le conflit cognitif comme un autre échec et ne prennent pas une part active dans le processus de reconstruction de leur savoir comme les précédents. Le genre de confrontation qu'elle préconise a également le potentiel d'entraîner un durcissement des positions qui est peu propice à un changement conceptuel (Margolis, 1987).

Désautels (1989) mentionne que la différence, perçue par une personne entre ses explications et celles proposées par une autre, peut être une source de perturbation et qu'on ne peut réduire la notion de conflit conceptuel à celle de contradiction logique. Head & Sutton (1985) interprètent la résistance aux changements en terme de résistance d'une cohérence interne qui supporte un sentiment de certitude. Selon eux, il faut intégrer dans la notion de conflit conceptuel une dimension affective tout aussi importante que la dimension cognitive: les engagements émotionnels, tels le sentiment d'avoir raison et d'être sur la bonne voie, doivent aussi être considérés. Pour documenter adéquatement ce

phénomène, ils recommandent qu'on utilise des techniques qui rendent justice à la signification personnelle de l'apprenant ainsi qu'à son importance émotionnelle.

Ces considérations sont consistantes avec la notion de l'intentionnalité de tout état mental, soutenue par Brentano (dans Flanagan, 1991), qui veut que tout contenu cognitif ait un contenant affectif: "croire que...", "douter de...", "être heureux de...", etc. Ces émotions, que Klatzky (1984) appelle "conscience épistémique" ou "savoir à propos du savoir" (méta-savoirs), émergent de la mémoire en même temps que celui-ci et seraient centrales à toute vie mentale. Le terme "émotions cognitives", utilisé ici, a été introduit par Scheffler (1977) pour représenter les émotions qui accompagnent les événements cognitifs. Les sciences cognitives reconnaissent maintenant que ces émotions, conscientes aussi bien qu'inconscientes, sont des régulateurs de l'activité intellectuelle. Elles rempliraient des fonctions importantes de sélection, d'évaluation et de coordination: facilitant d'abord le choix parmi les idées qui se présentent, en définissant ensuite les aspects saillants et fixant en conséquence l'attention (Mandler, 1989a; Posner, Rothbart & Harman, 1994; Wagner, 1990). A ce propos, Viennot (1979) a observé qu'un élève, qui perçoit un conflit entre ses résultats et ce qu'il croit, décide univoquement pour ce qu'il croit. Selon Fischbein (1994), ce genre de décision s'effectue en considérant seulement le sentiment subjectif procuré par la conception implicite.

Ces avancées sont également supportées par Margolis (1987) qui a élaboré une théorie du jugement, basée sur la reconnaissance de configurations, afin d'expliquer les faiblesses des adultes à produire un raisonnement logique fiable et efficace (Tversky & Kahneman; 1982; Wason & Johnson-Laird, 1972; etc.). A l'intérieur de cette théorie, se retrouve une taxonomie des états cognitifs qui, selon l'auteur, jouent un rôle important dans toute situation d'apprentissage, et particulièrement dans une situation de changement conceptuel. Il y tient compte de deux dimensions successives de la cognition, la deuxième n'accompagnant la première que dans les cas où des raisons de vérifier ou d'expliquer la première se présentent:

- (I) -la perception intuitive implicite ("seeing what") qui correspond à une logique de la situation et qui répond à la question "Est-ce que la conception apparaît correcte?"

- (C) -la pensée critique explicite ("reasoning why") qui correspond à une logique de l'argumentation et qui répond à la question: "Est-ce que les raisons, qui soutiennent cette conception, paraissent convaincantes?"

Le tableau 1 présente une matrice des états cognitifs disponibles qui résultent des diverses combinaisons de réponses à la question posée en relation avec chacune de ces modalités de pensée. Les réponses à chacune des questions précédentes pouvant être positives (+), neutres (0), ou négatives (-), il en résulte les catégories suivantes des états cognitifs: savoir (I^+C^+), croyance (I^+C^0), paradoxe (I^+C^-), etc. Cette taxonomie permet de préciser les positions affectives, ainsi que l'ampleur du trajet à parcourir lors des démarches de changement conceptuel. Intégrée à une spécification de degrés de certitude lors du diagnostic des erreurs épistémologiques, elle pourrait permettre de documenter le phénomène des émotions cognitives lors de ces démarches, ainsi que de servir de guide aux interventions.

Une solution potentielle aux problèmes posés par l'erreur épistémologique: une pratique d'évaluation formative métaphorique

L'éclairage nouveau qu'apportent les notions d'erreur (obstacle) épistémologique, de changement conceptuel et d'émotions cognitives est lourd d'implications au niveau docimologique autant que didactique. Non seulement devient-il important d'évaluer les conceptions des élèves en situation d'apprentissage, encore convient-il de le faire d'une façon qui réponde à leurs caractéristiques afin de pouvoir y greffer des interventions efficaces. Bien qu'il existe des méthodes éprouvées de dépistage des erreurs épistémologiques, l'absence d'instruments assez simples pour être utilisés systématiquement en salle de classe demeure toujours un problème.

Etant donné leurs sérieuses répercussions, il convient également de chercher à parer à ces erreurs afin de limiter leur prolifération. En plus d'attirer l'attention sur l'importance de tenir compte des émotions cognitives, les recherches ont permis de dégager des pistes intéressantes pour de futures expérimentations en rapport avec le changement conceptuel:

Tableau 1: Matrice des états cognitifs*

		Pensée Critique Explicite (C)		
		+	0	-
Perception Intuitive Implicite (I)	+	Savoir (I⁺C⁺)	Croyance (I⁺C⁰)	Paradoxe (I⁺C⁻)
	0	Doute favorable (I⁰C⁺)	Incertitude (I⁰C⁰)	Doute défavorable (I⁰C⁻)
	-	Paradoxe (I⁻C⁺)	Incrédulité (I⁻C⁰)	Savoir contraire (I⁻C⁻)

* Traduction et adaptation de Margolis, H. (1987). Patterns, Thinking, and Cognition, A Theory of Judgment. Chicago: University of Chicago Press, p. 99.

- (1) L'erreur n'est plus nécessairement une conception ancienne à rejeter afin d'y substituer une meilleure conception puisque celle-là est efficace dans le domaine où elle s'applique. Cette notion indique un besoin de différenciation des savoirs et de relativisation de leur utilité. Cela introduit la nécessité de structurer les connaissances autour de modèles, i.e. des structures d'intégration qui valorisent l'existence des relations entre les éléments d'un même domaine. Cela suggère également d'amener les élèves à "jongler" avec différents modèles, en insistant sur leur opérationnalité par rapport aux types particuliers de problèmes et de situations (Caravita & Halldén, 1994; Giordan, 1989a, 1989b; Linder, 1993; Spada, 1994).
- (2) Si l'acquisition des connaissances se produit selon une succession de conceptions différentes, chacune formant plus ou moins obstacle à la suivante, de nombreuses pratiques justifiées par le modèle classique simplement additif est à revoir et peut-être à rejeter (Brousseau, 1989a; Giordan, 1989b). Ces considérations, ajoutées au fait que le savoir antécédent n'apparaisse en tant qu'obstacle qu'a posteriori (Giordan, 1989a, 1989b; Janvier, Charbonneau & de Cotret, 1989; Vergnaud, 1989a), fournissent un indice stratégique important sur le moment propice d'une intervention, situant celui-ci après autant que pendant la construction des connaissances, introduisant les idées de paliers d'intégration et de retours en arrière dans l'élaboration du savoir (Giordan, 1989b).
- (3) La reconnaissance des moments d'obstacles épistémologiques fournit une autre information pertinente à cette entreprise (West & Pines, 1985). C'est alors que l'idée d'objectifs-obstacles, basés sur les répertoires d'obstacles découverts par les chercheurs, s'avère prometteuse pour situer les besoins d'évaluation et orienter les interventions. Intégrés aux curriculum, ces objectifs procureraient aux enseignants une information jusque-là absente de la programmation pédagogique (Martinand, 1989).

Ce type d'objectifs pose toutefois le problème de nouvelles stratégies, et plus

généralement des modes d'activité didactique à mettre en oeuvre par rapport aux obstacles rencontrés (Martinand, 1983, 1989). L'objet du présent projet de recherche est justement de proposer une stratégie de ce genre. Il s'agit d'une stratégie qui, s'inspirant de chacune des considérations précédentes, pourrait être utilisée lors des moments reconnus d'obstacles épistémologiques.

Il est donc proposé qu'une pratique d'évaluation formative métaphorique de type "structure mapping", qui tiendrait compte des états cognitifs à l'aide d'une spécification de degrés de certitude, aurait le potentiel de combler les besoins docimologiques et didactiques entraînés par l'erreur épistémologique.

En effet, les notions de retour en arrière et de palier d'intégration rejoignent les objectifs de l'évaluation formative qui a

...pour objet d'assurer la progression de chaque individu dans une démarche d'apprentissage, avec l'intention de modifier la situation d'apprentissage ou le rythme de cette progression, pour apporter (s'il y a lieu) des améliorations ou des correctifs appropriés (Scallon, 1988a, p. 155).

Synthétisant les définitions de ce type d'évaluation fournies par différents docimologues (Cardinet, de Landsheere, Scallon, etc.), Abrecht (1991) en fait ressortir des caractéristiques qu'il juge essentielles:

L'évaluation formative s'adresse à l'élève (...). Elle l'implique donc dans son apprentissage par une conscience qu'il doit en prendre. (...) Elle cherche l'adaptation à une situation individuelle; elle doit donc comporter une certaine souplesse (...). Elle s'intéresse aussi bien aux processus qu'aux résultats (...). Elle ne se limite pas à l'observation, mais lui enchaîne une action (...). Pour cela elle relève, elle situe les difficultés pour les pallier, en cherchant à remonter aux causes, et non les sanctionner (...). ...elle peut également servir à l'enseignant en lui permettant, par des retours d'informations multiples, d'orienter efficacement et souplesment son enseignement, et de disposer de jalons pour des "stratégies" pédagogiques d'une certaine ampleur (Abrecht, 1991, pp. 26-27).

C'est selon cette perspective de stratégie pédagogique que la présente méthodologie métaphorique est proposée. Une stratégie qui vise à remonter aux causes des difficultés par une évaluation diagnostique dans un premier volet, pour ensuite enchaîner une action (intervention) formative afin d'impliquer et assister l'élève dans son apprentissage lors

d'un second volet. Une stratégie souple qui tient compte des différences individuelles autant au niveau des processus de structuration des conceptions personnelles qu'à celui des résultats en découlent.

En rapport avec cette méthodologie métaphorique, la théorie de "structure mapping" (Gentner, 1982, 1988) s'inspire de l'idée de "modèle", i.e. d'une structure qui fait ressortir l'existence des relations entre les éléments d'un même domaine. Elle s'avère ainsi un instrument potentiel autant pour examiner la structure des conceptions des élèves au niveau du diagnostic des erreurs épistémologiques, que pour intégrer les nouvelles connaissances autour d'un concept au niveau d'interventions formatives.

La métaphore "structure mapping"

Selon la théorie de l'interaction, développée par Richards (1976) et Black (1966; 1979) et reconnue dans le domaine des sciences cognitives, Ricoeur (1975) explique que la métaphore

...maintient deux pensées de choses différentes simultanément actives au sein d'un mot ou d'une expression simple, dont la signification est la résultante de leur interaction. (...) ...la métaphore tient ensemble dans une signification simple deux parties manquantes différentes des contextes différents de cette signification. Il ne s'agit donc plus d'un simple déplacement des mots, mais d'un commerce entre pensées, c'est-à-dire d'une transaction entre contextes (Ricoeur, 1975, p. 105).

Quand la métaphore est de type "structure mapping", elle devient un "mapping" du savoir d'un domaine (la base) à un autre (la cible), déterminant que le système de relations contraint entre les éléments de la base est également contraint entre les éléments de la cible. Ainsi, la métaphore est une façon d'observer des caractéristiques relationnelles communes indépendamment des éléments auxquels ses relations s'appliquent (Gentner, 1982, 1988). Il s'agit d'une comparaison explicite et non littérale entre deux concepts où leurs similarités (et souvent leurs différences) structurelles, fonctionnelles et/ou causales sont décrites (Gentner, 1982; Newby, Ertmer & Stepich, 1995; Stepich & Newby, 1988).

La métaphore "structure mapping" trouve son origine chez Gentner (1982) qui, pour répondre au besoin de différenciation entre la métaphore littéraire évocative et l'analogie scientifique explicative, proposa une liste de caractéristiques structurelles qui

définissent cette dernière. Ainsi, la validité explicative de ce type de métaphore s'établit par une réduction en analogies, i.e l'établissement des correspondances qu'elle propose entre les deux domaines (éléments + interrelations). Ces correspondances sont alors évaluées selon une série de critères, établis à partir de l'étude des modèles théoriques scientifiques (Gentner, 1982):

- clarté: mesure de la précision des correspondances entre les deux systèmes;
- validité: mesure de la justesse conceptuelle de ces correspondances;
- richesse: mesure de la quantité de ces correspondances;
- systématique: mesure de l'isomorphisme des contraintes des relations entre les deux systèmes;
- abstraction: mesure du degré des relations entre les systèmes.

Le tableau 2 donne un exemple, fourni par Gentner (1982), d'une bonne analogie scientifique explicative, où tous ces critères sont respectés. Il s'agit du modèle du système solaire utilisé par Rutherford pour expliquer la structure d'un atome d'hydrogène. Une analogie est hautement systématique quand plusieurs similarités d'un second degré peuvent être abstraites des similarités du premier degré, comme c'est ici le cas. On peut ainsi constater au tableau 2, que les équations qui permettent de déterminer les forces gravitationnelle et électromagnétique sont des représentations abstraites de l'isomorphisme des correspondances fonctionnelles entre les deux systèmes. Il semblerait qu'une préférence pour les correspondances hautement systématiques soit une contrainte psychologique réelle lorsque les gens sélectionnent une analogie appropriée pour représenter une situation (Clement & Gentner, 1991).

Une étude-pilote (Kelly-Bégin, 1990), conçue pour explorer l'utilisation de la métaphore comme instrument d'évaluation des objectifs de synthèse en mathématiques, a démontré que les enseignants utilisent naturellement ces critères pour évaluer les productions métaphoriques des élèves. Le tableau 3 présente l'exemple d'une métaphore "structure mapping" produite par une élève de 10^e année, lors de cette étude-pilote. Différents aspects d'un jeu de poker y sont utilisés pour expliquer le système des nombres entiers relatifs. Le tableau 4 présente ensuite un modèle des correspondances établies par cette métaphore. Comme on peut le voir, en comparant ce tableau au précédent, les

Tableau 2: Exemple d'une métaphore "structure mapping":
l'atome d'hydrogène est un système solaire (Rutherford)*

ATOME		SYSTÈME SOLAIRE	
Correspondances structurelles			
Proton		Soleil	
Électron		Planète	
Correspondances fonctionnelles (1er degré)			
Masse supérieure du proton par rapport à celle de l'électron		Masse supérieure du soleil par rapport à celle de la planète	
Révolution de l'électron autour du proton		Révolution de la planète autour du soleil	
Force d'attraction "proton-électron"		Force d'attraction "soleil-planète"	
Correspondances structurelles (2e degré)			
$F_{elec} = - qq' / R_2$		$F_{grav} = Gmm / R_2$	
Force électromagnétique (F_{elec})		Force gravitationnelle (F_{grav})	
Constante électromagnétique (-1)		Constante gravitationnelle (G)	
Charge du proton (q)		Masse du soleil (m)	
Charge de l'électron (q')		Masse de la planète (m)	
Inverse du carré de la distance entre le proton et l'électron ($1/R_2$)		Inverse du carré de la distance entre le soleil et la planète ($1/R_2$)	

* Traduction et adaptation de Gentner, D. (1982). Are scientific analogies metaphors?. Dans D.S. Miall (Ed.), Metaphor: Problems and perspectives. New Jersey: Humanities Press, p. 115.

Tableau 3: Exemple de la métaphore "structure mapping" d'une élève de 10e année, représentant le système des nombres entiers relatifs

Item	Analogies dérivées de la métaphore "Les chips dans un jeu de poker"
$3 + 6:$	Tu as 3 "chips" et tu en gagnes 6. Tu aboutis avec 9 "chips".
$3 - 6:$	Tu as 3 "chips" et tu perds 6 "chips". Tu aboutis avec une dette de 3 "chips".
$-3 + 6:$	Tu as une dette de 3 chips et tu gagnes 6 chips. Tu aboutis avec 3 "chips".
$-3 - 6:$	Tu a une dette de 3 chips et t'en perds 6. Tu aboutis avec une dette de 9 "chips".
$3 - (-6):$	Tu avais trois chips à ton nom. Mais la personne, à qui tu devais 6 chips, est morte. Alors maintenant, tu en as 3 à ton nom.
$3 \times 6:$	Tu gagnes trois chips six fois. Tu en obtiens 18.
$3 \times (-6):$	Tu perds (-) 6 games à trois chips la shot. Tu obtiens une perte de 18 chips.
$(-3) \times 6:$	Tu perds 3 games de 6 chips la shot. Tu obtiens une perte de 18 chips.
$(-3) \times (-6):$	Trois gars, à qui tu devais 6 chips chacun, sont morts. Tu as maintenant 18 chips à ton nom de plus que tu pensais.
$6 \div 3:$	Tu as 6 chips, mais il faut que tu les divises entre toi et tes deux nouveaux partenaires. Vous avez maintenant 2 chips chacun.
$(-6) \div 3:$	Tu as une dette de 6 chips, mais tes deux amis offrent de la partager avec toi. Vous avez maintenant une dette de 2 chips chacun.
$6 \div (-3):$	Tu as 6 chips à distribuer entre les trois amis que t'as pas. Tu aboutis avec 18 chips.
$(-6) \div (-3):$	Tu as une dette de 6 chips que tu dois distribuer entre 3 amis que t'as pas. Tu aboutis avec une dette de 18 chips.
$(3 \times -6) - (2 \times -5):$	Tu as trois dettes de 6 chips et tu perds deux dettes de 5 chips. Il te reste une dette de 8 chips.

Tableau 4: Correspondances entre "les chips dans un jeu de poker"
et le système des nombres entiers relatifs

JEU DE POKER	ENTIERS RELATIFS
Correspondances structurelles	
Possession de "chips"	Nombre positif
Dette de "chips"	Nombre négatif
Correspondances fonctionnelles (1er degré)	
Gain de "chips"	Addition
Perte de "chips"	Soustraction
Répétition d'un événement	Multiplication
Partage de "chips"	Division
Correspondances structurelles (2e degré)	
Répétition d'un gain	Multiplication d'un nombre positif
Répétition d'une perte	Multiplication d'un nombre négatif
Partage d'une dette	Division d'un nombre négatif
Annullement d'une dette	Multiplication de deux nombres négatifs

critères de clarté, de richesse et de systématisme des correspondances y sont assez bien respectés. De même, l'élève réussit à abstraire certaines similarités fonctionnelles de second niveau pour les opérations qu'elle maîtrise. Cependant, le critère de validité des abstractions n'est pas atteint lors de l'explication des opérations dont elle ne maîtrise pas le concept, telles la soustraction d'un nombre négatif et la division par un nombre négatif. C'est alors que la comparaison des correspondances erronées et des correspondances valides permettent de déceler les obstacles rencontrés par l'élève aussi bien que de suggérer des alternatives appropriées.

Pour mieux comprendre l'utilisation de la métaphore "structure mapping" qui est proposée ici, et en rapport avec les émotions cognitives où la perception intuitive implicite et la pensée critique explicite jouent un rôle important, il est utile de concevoir que la différence entre une métaphore et une analogie repose sur la rencontre des critères d'évaluation précédemment mentionnés. La métaphore (évocative) traduit une perception implicite de ressemblances entre deux systèmes alors que l'analogie (explicative) justifie explicitement ces ressemblances, établissant ainsi la validité du modèle prospectif comme représentation de l'autre système (Margolis, 1987).

De plus, la métaphore possède deux fonctions cognitives: une fonction heuristique qui permet de passer de l'inconnu au connu, et une fonction épistémique qui permet de passer du connu à l'inconnu (Hesse, 1966; Raudsepp, 1972; Wong 1993). Elle permet ainsi de répondre au double volet de l'évaluation formative (Scallan, 1988a, 1988b), chaque volet respectant les critères précédemment mentionnés. Ainsi, le volet-évaluation permet à l'enseignant de passer de l'inconnu au connu, en ce qu'il lui permet de découvrir les articulations du savoir des élèves. Ceci est accompli par l'élicitation des conceptions, jusque-là inconnues, des élèves sous forme de métaphores "structure mapping", i.e. de métaphores réduites en analogies par l'établissement des correspondances entre les domaines comparés. Une vérification des acquis peut alors s'effectuer par une évaluation de l'atteinte des critères au niveau des correspondances établies (éléments + interrelations) dans les analogies. Le volet-intervention formative permet ensuite à l'élève de passer du connu à l'inconnu, si besoin est. Les erreurs locales sont traitées selon la méthode de modification analogique progressive, i.e. par une série de rectifications

successives au niveau des correspondances erronées. Et les erreurs globales sont traitées selon la méthode de substitution métaphorique, i.e. par la proposition d'une meilleure conception afin de favoriser un raisonnement basé sur de nouveaux principes.

En relation avec cette méthodologie, il existe finalement trois éléments dont les implications s'avèrent aussi importantes pour l'enseignant que pour l'apprenant. Tout d'abord, l'habileté métaphorique ne se développe pas selon l'âge, mais plutôt domaine par domaine et en fonction de la richesse du savoir dans les deux domaines juxtaposés (Gentner & Rattermann, 1991; Goswami, 1992; Keil, 1985). Ensuite, la compréhension des métaphores est non optionnelle, automatique et instantanée pour l'auditeur qui possède les connaissances qui lui sont sous-jacentes (Glucksberg, Gildea & Bookin, 1982). Une spécification de contexte, aussi minimale soit-elle, éclaire le sens des métaphores qui s'avéraient jusque-là ambiguës (Gildea & Glucksberg, 1983). Enfin, les gens ne se souviennent pas tant des mots et des phrases utilisés, que de la restructuration des significations ou de la propriété de ressemblance qui y ont été créées (Verbrugge & McCarrell, 1977).

Les prochaines sections expliqueront, à la lumière d'une recension des écrits, comment une stratégie métaphorique peut répondre aux besoins d'évaluation des conceptions, de changement conceptuel et des états cognitifs qui l'accompagnent.

La métaphore et l'évaluation: de l'inconnu au connu

Hors du contexte des erreurs épistémologiques, il existe de nombreuses recherches où les métaphores couramment utilisées dans un domaine spécifique ont été examinées afin de déceler les croyances, attitudes et pratiques qu'elles supportent: en géographie (Kearsley, 1985), en politique et économie (De Landtsheer, 1994; Rosenthal, 1982), en administration (Barry, 1994; Sapienza, 1987), en éducation (Earle, 1995; Goulden & Griffin, 1995; Tiberius, 1986), en psychothérapie (Kopp, 1995), etc. De plus, Gabel & Samuel (1986) ont également pu établir que les résultats à un test portant sur une tâche analogique pouvaient être utilisés comme prédicteur des résultats à un test sommatif traditionnel de résolutions de problèmes en chimie, les difficultés rencontrées au niveau de l'un et de l'autre étant similaires.

Personne ne semble avoir étudié systématiquement l'utilisation de la métaphore comme instrument de diagnostic des erreurs épistémologiques. Cependant, le recueil des métaphores des élèves a été recommandé afin de découvrir leurs conceptions alternatives, ainsi que de dégager la structure cognitive qu'ils ont d'un concept (Driver & Erickson, 1983; Flick, 1991; Hewson, 1985; Thagard, 1992). Les systèmes de croyances ont, en effet, tendance à transporter des métaphores implicites et explicites (Bar, 1989; Gentner & Gentner, 1983; Head & Sutton, 1985; Johsua, 1983). Ceci s'explique par le fait que la pensée analogique est souvent utilisée lors des situations nouvelles. La métaphore devient alors l'expression apparente de l'activité cognitive qui connecte le nouveau phénomène à des expériences précédentes (Flick, 1991).

Head & Sutton (1985) suggèrent donc aux enseignants d'apporter une plus grande attention à l'expérience de l'élève et à son expression. S'appuyant sur leurs recherches et sur l'histoire des sciences, où la métaphore a joué une part prééminente dans le développement de nouvelles structures de pensée, ils en recommandent le recueil afin de comprendre les points de croissance de la structure cognitive des apprenants. Ils soutiennent que la métaphore a également le pouvoir d'illuminer les défauts structuraux d'une conception et de procurer un indice de l'expérience idiosyncratique des nouvelles situations d'apprentissage.

Les caractéristiques de la métaphore, identifiées par Ortony (1975) en font, en effet, un excellent instrument pour le dépistage des conceptions. Sa concision permet, qu'en peu de mots, elle rende possible la prédiction d'un ensemble de caractéristiques alors qu'un autre mode d'expression requerrait une longue liste de caractéristiques à énumérer. De par son expressivité, elle fonctionne comme un véhicule pour l'autrement inexprimable et sert à capter les éléments de compréhension d'une pensée qui n'est pas complètement formée, bien avant que son auteur ne soit capable de les articuler. De par sa vivacité, elle est plus proche de l'expérience perçue qu'un langage plus abstrait ne le serait et communique avec force une richesse de détails interreliés.

Ces caractéristiques de la métaphore répondent particulièrement bien à celles de l'erreur épistémologique. Outre l'idiosyncrasie, précédemment mentionnée, la métaphore procure un indice de la structure du savoir implicite dont elle est le produit: l'image, étant

une représentation holistique (éléments + relations), sa structure est déterminée par celle du savoir sous-jacent qui la supporte (Franks, 1974). De plus, les caractéristiques de la métaphore "structure mapping" permettent d'évaluer la cohérence et la systématique des erreurs qui s'y dissimulent. Elle offre ainsi des possibilités inexploitées au niveau de la mise à jour des éléments d'une conception autant que des interrelations qui existent entre eux, répondant ainsi aux besoins de "mapping" cognitif que demande le diagnostic de l'erreur épistémologique (Bednarz & Garnier, 1989; Brown & Burton, 1978; Shuel, 1985). Cet effet "rayon-x" a été remarqué par chacun des enseignants-évaluateurs qui ont participé à l'étude-pilote (Kelly-Bégin, 1990) qui en explorait le potentiel comme instrument d'évaluation des objectifs de synthèse: "C'est comme si on voyait dans la tête de l'élève".

Ce genre d'instrument répond également aux exigences d'une utilisation en salle de classe. Il est simple et rapide à construire et administrer; il est peu dispendieux et adaptable à tous les domaines. Il n'exige ni technologie, ni traitements de données compliqués pour en interpréter les résultats. Sa concision et sa systématique répondent aux besoins de réduction et d'organisation qui rendent les données significatives. Finalement, les résultats de l'étude-pilote précédemment mentionnée (Kelly-Bégin, 1990) permettent de croire que l'instrument métaphorique est prometteur au niveau de l'atteinte des critères de validité, fidélité et réplicabilité.

La métaphore et le changement conceptuel: du connu à l'inconnu

La métaphore est encore peu documentée dans le domaine du changement conceptuel. Cela s'explique par le fait qu'elle a rencontré de nombreux détracteurs à l'intérieur des traditions des sciences pures et des sciences cognitives (voir Hoffman, 1980; Johnson, 1980) et qu'elle a même été longtemps considérée comme un obstacle épistémologique en soi (Bachelard, 1938; Glaeser, 1981). En effet, le savoir antécédent peut conduire à des inférences incorrectes (Mason, 1994a; Rumelhart & Norman, 1981; Spiro, Feltovitch, Coulson & Anderson, 1988; Zook & Maier, 1994) et donner lieu à de fausses impressions de causalité (Eckstein, 1983). Il semblerait, en fait, que le raisonnement analogique soit à l'origine de la plupart des erreurs, comme des solutions

efficaces, en situation de résolution de problèmes (Anderson, 1989).

Outre les chercheurs qui sont à l'origine des méthodes de modification analogique et de substitution métaphorique, la métaphore trouve donc de plus en plus d'alliés "prudents". Bien que Sierpiska (1989) reconnaisse avec Glaeser (1981) qu'elle peut fonctionner comme un obstacle, ce chercheur dit aussi que la métaphore représente un stade important dans le développement des concepts mathématiques:

...certaines notions, avant d'être mathématiques fonctionnent également dans le langage courant. Les expressions de ce langage jouent le rôle de métaphores dans les débuts de la construction d'une théorie mathématique. Ceci concerne plus particulièrement les notions de nombres, d'infinis, d'espace, etc. Même après avoir été mathématisées, ces notions ne cessent de fonctionner en dehors des mathématiques: tout en ayant leur place au niveau technique de la culture mathématique, elles gardent une place importante au niveau formel (Sierpiska, 1989, p. 138).

D'autre part, Brousseau (1989a) remarque que ce ne sont pas toutes les conceptions de ce genre qui sont des obstacles aux acquisitions ultérieures. Il défend le fait qu'une conception, même unique (e.g. celle du "partage" en division), se révèle souvent suffisante et ne conduit à aucune difficulté pour accommoder les généralisations nécessitées subséquemment (recherche d'un reste, notion de rapport, etc.).

A partir d'entrevues avec des mathématiciens, Sfard (1994) va plus loin en affirmant que le rôle de la métaphore en mathématiques ne peut être surestimé. Selon elle, l'univers mathématique peut difficilement être conçu autrement que comme une réflexion métaphorique du monde physique. Cependant, une réification, i.e. une transition d'un mode opérationnel à un mode structurel de pensée, est par la suite fondamentale dans la formation d'un concept mathématique. La réification est la naissance d'une métaphore qui donne existence à un objet mathématique. Cette métaphore est indispensable à la sorte de compréhension qu'on qualifie de profonde, immédiate ou vraie que l'habileté à construire une preuve formelle ne suffit pas à procurer. Elle est un schéma vers l'action qui a pour avantages d'être plus intégrant, économique et manipulable. Elle procure une compréhension expérientielle qui permet d'anticiper et de prédire intuitivement les comportements des objets matériels. Perkins & Unger (1994) abondent également dans ce sens et utilisent la théorie de "structure mapping" de Gentner (1982, 1988) pour

expliquer ces avantages, en ajoutant celui d'une charge cognitive réduite. A partir de l'observation de sujets plus jeunes, Pirie & Kieren (1994), affirment que les métaphores ne facilitent pas seulement ce stade de structuration finale, mais qu'elles servent également de transition tout au long des autres stades qui conduisent à la formalisation, e.g. la conception de morceaux pour les fractions, de balance pour l'équation, etc.

Champagne, Gunstone & Klopfer (1985) insistent sur le besoin de représentations multiples pour comprendre un concept et considèrent aussi que les critères proposés par Gentner (1982, 1988) sont un excellent guide d'application afin d'en dépasser les limites. L'utilisation de métaphores multiples et complémentaires présente, en effet, des possibilités intéressantes pour la différenciation et relativisation des savoirs dans le contexte où ils s'appliquent (Gentner & Gentner, 1983; Spiro, Feltovitch, Coulson & Anderson, 1988; Stevens & Collins, 1980).

Head & Sutton (1985) justifient son utilisation en insistant sur son importance dans l'histoire intellectuelle des individus et l'augmentation du savoir public. Les gens "achètent" la métaphore, non seulement comme une nouvelle façon de penser, mais comme un nouveau vocabulaire pour décrire une appréhension de la réalité qu'ils prennent vite pour acquise. C'est d'ailleurs l'instrument privilégié par les scientifiques pour guider leurs découvertes et les introduire auprès de leurs collègues (Hesse, 1966; Pribram, 1990). Aussi, Bachelard (1949), tout en considérant la métaphore comme un obstacle épistémologique, lui reconnaît également un rôle important dans la formation des connaissances. Selon lui, la pensée scientifique découvre ses lois en démantelant ses images premières. Les concepts ainsi rectifiés représentent alors la somme des critiques auxquelles on a soumis ces images. D'une bonne image, dit-il, il ne reste plus rien. Ce disant, l'auteur décrit précisément le rôle pédagogique d'une méthodologie métaphorique de changement conceptuel, en ce sens que la métaphore proposée n'est pas la connaissance, mais un support à son acquisition, support qui disparaîtra quand la connaissance sera maîtrisée.

De plus, les nombreuses recherches sur la métaphore (analogie) supportent l'utilisation proposée. En effet, elle s'est révélée efficace pour faciliter l'apprentissage, sous formes de méthode d'instruction (Burns & Okey, 1985; Harrison & Treagust, 1993;

Newby, Ertmer & Stepich, 1995; Rumelhart & Norman, 1981) et de guide d'étude (Bean, Searles, Singer & Cowen, 1990; Bean, Singer & Cowen, 1985). Utilisée comme "advance organizer", elle engendre un savoir qui se transfère à de nouvelles tâches quand les autres stratégies plus traditionnelles n'y réussissent pas (Mayer, 1980; Mayer & Bromage, 1980). Le raisonnement analogique a également été documenté quant à son efficacité comme outil de transfert (Clement, 1994; Gick & Holyoak, 1980, 1983; Novick & Holyoak, 1991; Reeves & Weisberg, 1994) et comme heuristique dans la résolution de problèmes (Clement, 1987a, 1988, 1989; Gabel & Sherwood, 1983; Wong, 1993).

Ces recherches fournissent également plusieurs moyens de circonvenir aux limites de la métaphore, facteurs dont s'inspire la méthodologie proposée. (1) Le savoir antécédent de l'élève est crucial à son efficacité (Gabel & Sherwood, 1980; Hardiman, Well & Pollatsek, 1984; Hayes & Tierney, 1982; Friedel, Gabel & Samuel, 1990), facteur dont tient compte une articulation des interventions à partir de la métaphore de l'élève. (2) Les analogies complexes sont plus efficaces que celles à basse complexité (Gick & Holyoak, 1980; Polland, 1982), facteur dont tient compte la complexité élevée d'un processus "structure mapping". (3) L'enseignant doit y déterminer explicitement les correspondances pertinentes (Friedel, Gabel & Samuel, 1990; Mason, 1994a; Polland, 1982; Zook & Maier, 1994), facteur dont tient compte un "mapping" systématique. Finalement, (4) l'élève doit reconnaître les défauts d'une analogie afin d'éviter la simplification induite de concepts complexes, aussi bien que les inférences erronées (Glynn, 1991; Harrison & Treagust, 1993; Mason, 1994b), facteur dont tient compte l'utilisation d'analogies multiples et la relativisation de leur utilité selon les types particuliers de situations (Holyoak & Thagard, 1995; Wong, 1993).

Outre le support d'un aspect concret (Simons, 1984; Brown, 1993; etc.), on explique l'efficacité de la métaphore en disant que le savoir antécédent qu'elle évoque procure une structure pour ancrer, discriminer et organiser les éléments pertinents de l'information nouvelle (Hayes & Tierney, 1982; Glynn, 1991; Mayer & Bromage, 1980; Petrie, 1979; Verbrugge & McCarrell, 1977). Sa fonction heuristique permet également de prédire des relations entre de nouveaux prédicats (Donnelly & McDaniel, 1993; Hayes & Tierney, 1982; Hesse, 1966; Mayer & Bromage, 1980; Wong, 1993). Ces fonctions

sont directement reliées à l'acquisition d'une conception juste et à son application efficace dans la résolution de problèmes.

Parallèlement, les caractéristiques de la métaphore suggèrent qu'elle pourrait jouer un rôle de regroupement ou "chunking" (Miller, 1956), en permettant de considérer simultanément plusieurs éléments d'une conception ainsi que leurs interrelations. Elle permettrait ainsi de dépasser les limites de la capacité mentale, ou mémoire de travail, qui ont précédemment été évoquées en relation avec des échecs de changement conceptuel (Lawson & Thompson, 1988; Margolis, 1987). Cette hypothèse est supportée par l'identification d'un obstacle épistémologique au niveau même du raisonnement. Cet obstacle se traduit par une tendance à réduire la complexité des dépendances fonctionnelles impliquées dans l'évolution de systèmes à plusieurs variables interdépendantes sous la forme d'un raisonnement séquentiel, linéaire, causal à une seule variable (Closset, 1983b; Viennot, 1989a, 1989b).

Bien qu'elles soient encore peu documentées, les méthodes de modification analogique et de substitution métaphorique semblent se présenter comme des outils privilégiés pour accompagner un instrument métaphorique de diagnostic des erreurs épistémologiques dans une perspective d'évaluation formative. Sous le vocable "analogy therapy", cette façon d'aborder l'erreur épistémologique est recommandée pour pallier au fait que le savoir de l'élève n'est souvent pas organisé de la manière dont l'enseignant l'assume (Thagard, 1992; Holyoak & Thagard, 1995). Il semblerait également qu'une modalité de changement conceptuel qui soit de même nature qualitative que l'instrument de dépistage puisse offrir des possibilités accrues. En effet, selon Resnick, (1989b) une accumulation quantitative d'éléments de savoir ne se prête pas à une comparaison avec les conceptions initiales qui sont d'essence qualitative (éléments + interrelations); il ne serait donc pas surprenant que des élèves, compétents en classe, continuent d'utiliser leurs conceptions spontanées pour aborder les problèmes quotidiens qui se posent en termes qualitatifs. Pines (1985) et Giordan (1989b) mettent aussi l'accent sur l'importance de la notion d'organisation, car ce qui est une relation conceptuelle centrale dans une organisation peut être une profonde erreur épistémologique à l'intérieur d'une autre. Ces relations ne peuvent donc pas être traitées isolément au niveau d'une intervention; étant

contingentes à des organisations conceptuelles, elles doivent être traitées dans leur contexte de fonctionnement. Il semble finalement que le pouvoir de persuasion de la métaphore n'est pas non plus à négliger dans un processus de changement conceptuel. Etant donné la résistance des conceptions préalables, une partie du travail de l'enseignant semble être de persuader ses élèves de concevoir les choses différemment (Sutton, 1981).

La métaphore et les émotions cognitives

Il n'est pas nouveau que métaphore, signification personnelle et émotions soient associées au niveau des processus cognitifs (Mac Cormac, 1985; Ricoeur, 1979; Scheffler, 1977). Parallèlement, Gowin (1983) affirme que le changement conceptuel demande non seulement de penser différemment, mais de ressentir différemment afin d'agir différemment. Il soutient que le pouvoir des métaphores, les siennes propres et celles des autres, vient de cette combinaison du sentiment et de la pensée où les significations sont d'abord senties, sans souvent qu'on soit capable de dire pourquoi. Selon lui, ce phénomène se produirait quand les correspondances sont établies entre les deux domaines comparés, avant même que l'apprentissage en résulte:

"The image touches depths before it stirs the surface. We are moved before we think. (...) As the expression holds us, so it becomes a part of our being, and we begin to express it (Gowin, 1983, p. 40).

De même, Duit (1991) et Burnham (1992) pensent que l'utilisation de métaphores peut permettre l'intégration des aspects cognitif et affectif de l'apprentissage que plusieurs considèrent comme dichotomiques et même contradictoires. Head & Sutton (1985) ont observé que les métaphores implicites et explicites, transportées par les systèmes de croyances, possèdent souvent une qualité affective de certitude. Ils mettent également un accent sur l'importance de l'intuition acquise en présence d'une nouvelle métaphore ainsi que sur les émotions cognitives qui s'y allient, évoluant du doute initial jusqu'à la dévotion lorsqu'une intuition devient partie indispensable de la vision du monde d'un individu. Selon eux, la cognition, l'émotion et la rhétorique ne sont pas dissociées quand les mots persuadent les gens d'acquiescer à une nouvelle compréhension. Ils considèrent ce domaine suffisamment important pour justifier une recherche qui documenterait les

articulations spontanées des intuitions des élèves et explorerait des moyens de fournir un support positif à leur expression.

Les méthodes de modification analogique et de substitution métaphorique ont, en effet, le potentiel de réduire les résistances affectives, comme l'explique Margolis (1987) dans sa théorie du jugement. La première méthode axe ses interventions sur les conceptions justes dont l'élève s'est déclaré certain lors d'un test diagnostique; elle supporte ainsi un ajustement des intuitions en permettant à une conception, apparemment rivale, d'être perçue comme une variante de la conception initiale. La deuxième méthode, qui présente une nouvelle conception sous la forme d'une configuration (métaphore), peut être considérée comme une gestalt alternative de la même image. Comme on ne peut considérer les deux gestalts en même temps, les conflits cognitifs sont minimisés. Les arguments qui inhibent ainsi la conception initiale sont cognitivement plus faciles à intégrer que ceux qui accentuent la rivalité entre les conceptions et qui demandent un démembrement de structures existantes. Cette méthode présente également l'avantage d'un argument en une étape qui résume une somme d'arguments logiques complexes qui risquent d'excéder les limites de la capacité mentale. On remarquera que ces explications de Margolis (1987) sont complémentaires aux conditions nécessaires au changement conceptuel précédemment énoncées, soit l'intelligibilité et la plausibilité initiales de la nouvelle conception (Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982; Strike & Posner, 1985).

Cependant, même si ces méthodes semblent avoir le potentiel de réduire les résistances affectives, il serait mal avisé de négliger le phénomène peu documenté des émotions cognitives lors d'un diagnostic effectué en vue d'une remédiation. Une spécification de degrés de certitude, inspirée de la matrice des états cognitifs de Margolis (1987), semble être un bon moyen d'en tenir compte. Intégrée au test métaphorique "structure mapping" (Kelly-Bégin, 1990), une telle spécification permettrait d'abord de déceler la stabilité des conceptions justes qui pourraient servir d'ancres à une remédiation (Clement, Brown & Zietsman, 1989). Elle permettrait ensuite de documenter davantage l'effet des diverses émotions cognitives sur les résultats d'intervention. L'explicitation, par l'élève, de ses degrés de certitude a aussi le potentiel de révéler des indices supplémentaires sur l'organisation de ses connaissances et de fournir ainsi une information

importante pour guider des interventions formatives. L'intégration de cette mesure au test métaphorique est en accord avec Head & Sutton (1985) qui recommandent l'utilisation de techniques qui rendent justice à la signification personnelle de l'apprenant ainsi qu'à son importance émotionnelle de façon à pouvoir documenter proprement le phénomène des émotions cognitives.

Les cadres théoriques

A part quelques recherches de type vygotskyien, les recherches sur l'erreur épistémologique et le changement conceptuel se sont effectuées principalement, soit dans un cadre piagétien, soit dans le cadre des théories du traitement de l'information appartenant au courant des sciences cognitives / intelligence artificielle.

La théorie piagétienne des stades de développement cognitif

Le niveau de raisonnement des opérations formelles est un modèle de pensée hypothético-déductive, qui se caractérise par le raisonnement combinatoire, le contrôle des variables ainsi que le raisonnement probabiliste et corrélationnel (Lawson & Thompson, 1988). Il constituerait la condition nécessaire et suffisante pour accéder à la compréhension des concepts, des lois et des théories scientifiques, dont les mathématiques sont communément considérées comme l'apogée (Schoenfeld, 1991). Aussi, a-t-on souvent imputé les problèmes rencontrés par les élèves en mathématiques au fait qu'ils n'avaient pas encore atteint le stade de raisonnement nécessaire à leur compréhension (Baruk, 1973). De même, l'inefficacité de plusieurs méthodes de changement conceptuel a-t-elle été attribuée à ce facteur (Lawson & Thompson, 1988; Renner, Brumby & Shepherd, 1981; Resnick 1989b; Simpson & Marek, 1988).

Cependant, les recherches ont démontré que la pensée formelle n'est pas un stade qui s'atteint de façon générale et universelle au niveau de la pensée d'un sujet, mais qui se développe par contextes et situations (voir Flanagan, 1991). Des adultes, ayant atteint des niveaux élevés d'abstraction et manifestant ces compétences dans divers domaines de savoir, raisonnent dans certains autres domaines de façon comparable à de jeunes élèves

(Giordan, 1989b). Ainsi, des adultes qui sont novices dans un domaine, ou dont la compréhension conceptuelle sous-jacente à un domaine est déficiente, sont affectés par les particularités perceptuelles d'un événement ou d'une tâche. Ils font alors preuve d'une inhabileté similaire à celles des plus jeunes à se décentrer de leur propre perspective qui caractérise l'erreur épistémologique (Clement, 1983b; di Sessa, 1982; McCloskey, 1983; Viennot, 1979). De même, on a observé que les adultes ont énormément de difficultés à résoudre des tâches de raisonnement qui sont présentées de façon abstraite. Leur raisonnement semble dépendre très souvent d'aspects logiquement non pertinents à la tâche ainsi que de facteurs extra-logiques, comme leurs croyances personnelles (Evans, 1982). Ces constatations amènent des chercheurs en changement conceptuel à penser que ce qui est en cause ne se situerait non pas au niveau opératoire mais au niveau référentiel ou sémantique des contenus de connaissance (Giordan, 1989b; Vergnaud, 1987).

D'autres recherches sur le raisonnement adulte ont montré que loin d'opérer par déduction logique à partir de principes abstraits, le raisonnement est grandement influencé par les caractéristiques des situations (e.g. Donaldson, 1978; Wason & Johnson-Laird, 1972). Les adultes pensent souvent en termes de cas spécifiques et d'expériences vives (Tversky & Kahneman, 1982). La pensée est toujours, comme le pointe Rogoff (1984), intimement interreliée au contexte du problème à résoudre (situation et contenu spécifiques), faisant de celui-ci un aspect intégral des événements cognitifs et non une variable nuisible comme on a voulu longtemps le laisser croire (Marková, 1982). On affirme donc de plus en plus que la logique formelle n'est pas une habileté naturelle qui se développe, mais qu'elle est plutôt un modèle idéal de raisonnement élaboré par l'homme lui-même afin d'assurer la rigueur de ses raisonnements; il s'agirait d'un modèle de raisonnement appris dont la qualité dépend de celle du raisonnement plus informel qui le soutient (Margolis, 1987; Schoenfeld, 1991).

De plus, le stade de la pensée formelle ne subsumerait pas automatiquement les stades précédents comme on l'avait prétendu, affirme Artaud (1991). D'ailleurs, les caractéristiques des stades pré-opératoires (Legendre-Bergeron, 1986), évoquent singulièrement les caractéristiques observées chez ceux qui entretiennent des conceptions erronées: raisonnement pratique, centration de la pensée, explications animistes (pensée

par participation), généralisations indues (raisonnement transductif) et raisonnement logique limité aux représentations imagées. Artaud (1991) stipule donc le besoin d'un recours à des stratégies cognitives pré-opérationnelles, où la pensée globale symbolique devient l'outil par excellence pour récupérer le vécu cognitif d'un sujet afin de pouvoir y ancrer un savoir théorique signifiant. Il considère cette réintégration de la pensée symbolique à la pensée formelle comme cruciale à l'intégration personnelle du savoir.

En mathématiques, ces avancées sont corroborées par ceux qui insistent sur l'importance d'intégrer les raisonnements formels et informels, symboliques ou autres, afin de pouvoir attacher un sens aux concepts mathématiques (Perkins & Unger, 1994; Schoenfeld, 1991), particulièrement à ceux qui sont contre-intuitifs, e.g. les solutions négatives (Vergnaud, 1989b). Ils sont également corroborés par ceux qui considèrent le raisonnement métaphorique ou analogique comme étant une composante centrale du raisonnement mathématique (Presmeg, 1992; Sfard, 1994; Suzuki, 1994). Des recherches, qui ont comparé l'efficacité de l'approche analogique et de l'approche traditionnelle, comme stratégie générale d'instruction, semblent également supporter ces affirmations. Gabel & Sherwood (1983) précisent que cette approche profite surtout aux élèves qui présentent des lacunes au niveau du raisonnement formel, associées à une anxiété élevée en mathématiques. Burns & Okey (1985) rapportent que des élèves, n'ayant pas atteint le niveau de la pensée formelle, ont augmenté leur rendement à travers l'approche analogique au point de surpasser celui des élèves d'un groupe-témoin exposé à l'approche traditionnelle, qui eux avaient atteint le niveau de la pensée formelle. Ils ont également déterminé que cet effet n'était pas dû au fait que les élèves aient entre-temps développé l'habileté à raisonner formellement de façon générale.

La théorie piagétienne des stades de raisonnement jette des lumières, à la fois concordantes et conflictuelles, sur le présent problème de recherche. Cependant, il est fort possible qu'une réintégration de la pensée symbolique (pré-opérationnelle) à la pensée formelle, telle que proposée ici selon un processus métaphorique / analogique, ait le potentiel de dépasser les limites des autres méthodes de changement conceptuel. C'est pourquoi cette approche sera conservée comme cadre conceptuel de triangulation (Huberman & Miles, 1991; Pourtois & Desmet, 1988).

L'approche du traitement de l'information

Devant les limites des théories piagétienne et autres à démontrer l'existence de structures cognitives générales, des modèles non formels de compétence déductive ont été proposés à l'intérieur des théories du traitement de l'information. L'approche du traitement de l'information est un cadre théorique général appartenant au courant des sciences cognitives et de l'intelligence artificielle. Le postulat central de cette approche est qu'il existe un nombre d'opérations ou de stades de traitement de l'information qui surviennent entre un stimulus et une réponse. La présentation d'un stimulus initie une séquence de stades de traitement qui transforment l'information. Le résultat de chaque stade de traitement se présente sous la forme d'une information transformée qui est l'"intranant" du stade qui suit. Deux composantes théoriques sont postulées dans les analyses de traitement de l'information: une composante structurale qui décrit ou définit la nature de l'information à un stade particulier du traitement; et une composante fonctionnelle qui décrit les opérations de ce stade (Palmer & Kimchi, 1986; Rose, 1980).

En rapport avec l'apprentissage, l'approche du traitement de l'information a évolué d'une attention sur le stimulus à une concentration sur le savoir apporté par l'apprenant lors de la présentation du stimulus (Stepich & Newby, 1988), i.e. le savoir antécédent qui sert de contexte assimilatif ou de médiateur pour acquérir le nouveau savoir (Ausubel, 1960; Ausubel, Novak & Hanesian, 1978; Glass, Holyoak & Santa, 1979). Central à cette médiation est le principe que tout savoir est emmagasiné et organisé dans la mémoire sous forme de structures cognitives qui interagissent, telles les schémas (Bartlett, 1932; Mandler, 1985; Rumelhart & Ortony, 1977) et les modèles mentaux (Gentner & Stevens, 1983; Johnson-Laird, 1983; Holland, Holyoak, Nisbett & Thagard, 1989).

Les schémas sont des concepts génériques (Rumelhart, 1980) qui incluent les interrelations existant entre les aspects variés de ce qu'ils représentent et qui sont induits à partir d'un ensemble d'expériences similaires (Bartlett, 1932; Mandler, 1985). Des schémas existent pour toutes sortes de concepts, situations, événements et séquences d'actions et d'événements (Rumelhart & Ortony, 1977). Ils sont synthonisés et activés en fonction des indices repérés dans l'environnement ainsi que des interrelations existant entre les schémas eux-mêmes (Mandler, 1985; Rumelhart, 1977). Ce phénomène conduit

à une identification rapide et facile des stimuli et, dépendamment de leurs connexions à d'autres structures, à une réponse appropriée (Flanagan, 1991).

Les schémas pragmatiques de raisonnement ont permis à des adultes d'accomplir instantanément des raisonnements que six mois de cours de logique n'avaient pas réussi à établir (Cheng & Holyoak, 1985; Cheng, Holyoak, Nisbett & Oliver, 1986). Ces schémas sont des ensembles de règles implicites, plus ou moins généralisées, qui concernent des actions et des buts. Des métaphores familières, comme celles se rapportant à la permission ou à l'obligation dans les situations de vie courante, y servent de structures mentales pour guider le raisonnement. Repris avec des jeunes enfants, les expériences avec les schémas pragmatiques de raisonnement ont révélé une même efficacité (Giroto, 1989).

La notion de schéma a évolué vers la version plus dynamique, flexible et fonctionnelle du modèle mental qui fournit un pouvoir inférentiel que les structures plus statiques ne rendaient pas possible (Collins & Gentner, 1982; Greeno, 1991). Une des propriétés du modèle mental est de manifester la causalité d'un système. La simulation mentale y est donc une notion centrale car elle permet d'anticiper, par un raisonnement causal très simple, le comportement d'un système sous différentes configurations d'éléments et d'interrelations afin de faire des prédictions et de répondre adéquatement à de nouvelles situations (Collins & Gentner, 1982; de Kleer & Brown, 1981; Greeno, 1991; Norman, 1983; Stevens & Collins, 1980; Vosniadou, 1994). Selon Greeno (1991), cette évolution entraîne des conséquences pour l'enseignement et l'apprentissage. Selon la théorie des schémas, le savoir des concepts est séparé des activités qui les utilisent. Le savoir abstrait est primordial et la modélisation est un aspect auxiliaire du savoir conceptuel. L'apprentissage est alors analogue à l'écriture d'un texte en mémoire à long terme, selon des propositions qui forment un ensemble organisé de structures qui peuvent être activées et interprétées efficacement pour guider l'action. Selon la théorie des modèles mentaux, la modélisation des concepts est primordiale et leur description joue un rôle auxiliaire. L'habileté que l'on veut développer est un raisonnement conceptuel qui est une version mentale de l'activité concrète, où les symboles utilisés pour représenter des choses, des propriétés et des relations se comportent de façon à supporter

implicitement ce raisonnement.

Les modèles mentaux sont, en effet, des modèles homomologues de la réalité, i.e. des croyances acquises à travers l'expérience (observations, instructions, inférences, etc.). Ils incluent les éléments de cette réalité et leurs interrelations, les règles de transition entre ses états, ainsi qu'une topologie des connexions entre ces états (Collins & Gentner, 1982; Holland, Holyoak, Nisbett & Thagard, 1989). Ils sont cependant partiels et parsimonieux, parce que contraints par la robustesse des connexions établies lors des expériences précédentes, par les limites de la capacité mentale et par les éléments saillants (du contexte) ou pertinents (à l'accomplissement d'une tâche) qui les activent. Modèles pragmatiques, ils génèrent des règles d'une grande précision pour des situations spécifiques. Quoiqu'ils soient aptes à être déficients de plusieurs façons (informations contradictoires, erronées ou superflues), les modèles mentaux se révèlent cependant fonctionnels pour répondre aux situations qui les activent. Ils sont également aptes à évoluer afin de produire des solutions plus efficaces, tous les réseaux d'associations ayant le potentiel d'être activés dans des connexions nouvelles et complexes (Norman, 1983; Holland, Holyoak, Nisbett & Thagard, 1989). Selon Vosniadou (1994), les modèles mentaux générés ou activés durant le fonctionnement cognitif sont les structures auxquelles les nouvelles informations sont incorporées dans la base du savoir. Comme tel, un modèle mental peut également contraindre le processus d'acquisition du savoir et engendrer ainsi des erreurs épistémologiques.

Finalement, les modèles mentaux contiennent souvent une information sur leurs propres limitations ainsi que les sortes d'erreurs qu'ils peuvent engendrer. Ainsi, les degrés de certitude ressentis sont inclus en relation avec les différents aspects du savoir représenté. Y est également incluse, la validité douteuse des croyances "dites superstitieuses" qui relèvent d'une expérience éprouvée par les actions et les résultats, mais impliquent une incertitude quant à la compréhension des mécanismes, e.g. des règles qui semblent fonctionner même si leur possesseur ne peut fournir d'explications justifiant leur fonctionnement (Norman, 1983).

C'est à la lumière de la théorie des modèles mentaux que Halford (1987, 1990, 1992) affirme que le raisonnement humain est fondamentalement analogique. Les

problèmes, dit-il, ne sont pas solutionnés par une application de logique, mais par le rappel de modèles mentaux en mémoire. Si aucun modèle n'existe pour une situation particulière, alors un modèle mental provenant d'une autre situation structurellement similaire est rappelé et utilisé analogiquement. Tout en reconnaissant une dette à la théorie piagétienne qui a mis l'accent sur le rôle des structures cognitives, ce chercheur propose qu'un modèle de raisonnement analogique "structure mapping" est plus apte à rendre compte du développement progressif des modes complexes de raisonnement et à expliquer la difficulté de plusieurs des tâches piagésiennes classiques. Il postule quatre niveaux de structures cognitives qui correspondent approximativement aux stades de Piaget: le "mapping" des éléments (1), le "mapping" des relations (2), le "mapping" des systèmes (3) et le "mapping" multiple de systèmes (4). Cependant, ces niveaux de structures ne représentent pas des stades de développement cognitif en tant que tels, mais reflètent plutôt la complexité des concepts ou des tâches. Cette complexité influence le raisonnement des adultes, autant que celui des enfants, parce que des "mappings" complexes imposent de plus grandes charges opérationnelles, qui sont différentes de la charge de la mémoire à court terme. Ces charges opérationnelles résultent du fait que plusieurs relations doivent être considérées conjointement afin d'effectuer le "mapping". Comme c'est précisément en terme de "structure mapping" entre deux modèles mentaux que s'inscrit le type de métaphore qui inspire le présent projet de recherche, cette théorie ouvre des avenues intéressantes pour une méthodologie de changement conceptuel qui ne nécessiterait pas l'atteinte d'un stade de raisonnement hypothético-déductif.

Quoiqu'il en soit, l'approche du traitement de l'information, basée sur les schémas et modèles mentaux est crédible cognitivement; elle l'est également du point de vue des sciences biologiques et de la théorie de l'évolution (P.M. Churchland, 1989; P.S. Churchland, 1986; Edelman, 1989; Margolis, 1987). Elle a aussi mené à la construction de systèmes informatiques qui sont efficaces pour représenter la cognition (Anderson, 1983; Newell, 1990), et rendre compte du raisonnement analogique (Boden, 1994; Holyoak & Thagard, 1995).

C'est aussi selon une version assez similaire de schémas, organisations invariantes de la conduite pour une classe donnée de situations, que Vergnaud (1990) a élaboré sa

théorie des champs conceptuels pour fournir un cadre aux recherches sur les activités cognitives complexes. Un champ conceptuel est un ensemble de concepts et de théorèmes qui permettent d'analyser les tâches cognitives d'une situation, ainsi que les opérations de pensée utilisées dans les schèmes de traitement employés par les élèves (Laborde & Vergnaud, 1994). Il permet ainsi de repérer et d'étudier les liens et les ruptures entre les contenus conceptuels des connaissances; il permet aussi d'analyser la relation entre les concepts explicites et les schèmes implicites dans les comportements des sujets. Cette théorie implique qu'une bonne stratégie didactique devrait s'appuyer sur la connaissance des difficultés relatives des tâches cognitives, des obstacles communément rencontrés, du répertoire de représentations possibles et de procédures disponibles. C'est dans cet esprit que la présente recherche a été conçue et l'analyse de ses résultats fera d'ailleurs appel à plusieurs éléments des champs conceptuels déjà élaborés en mathématiques.

Comme cette recherche ne se situe pas au niveau des stades de développement du raisonnement cognitif, mais plutôt à celui de l'efficacité du raisonnement analogique, l'approche du traitement de l'information est le cadre de référence le mieux approprié pour interpréter ses résultats. Non seulement permet-elle de rendre compte des structures cognitives (éléments + interrelations) et de leur évolution, elle permet aussi d'y intégrer les émotions cognitives (Norman, 1983). De plus, elle permet d'expliquer la genèse des erreurs épistémologiques (Vosniadou, 1994). Enfin, les chercheurs en changement conceptuel s'entendent de plus en plus sur une conception de l'apprentissage basée sur le système représentationnel de cette approche (Johsua, 1989a; Pines, 1985; Shuell, 1985; Vosniadou, 1994; Vosniadou & Brewer, 1992; etc.). C'est également dans ce cadre que la majorité des recherches récentes sur la métaphore et l'analogie a été conduite.

Les objectifs de recherche

Les connaissances accumulées sur l'erreur épistémologique sont maintenant au stade d'être transférées au niveau de la salle de classe. Cependant, il existe un besoin de méthodologies appropriées pour le faire. Ce projet de recherche se propose de tenter de répondre à ce besoin.

L'objectif général de la présente recherche est donc d'explorer le potentiel d'une méthodologie métaphorique "structure mapping", accompagnée d'une spécification des degrés de certitude, comme instrument de dépistage des erreurs épistémologiques ainsi que de changement conceptuel.

Cette recherche sera effectuée dans le domaine des mathématiques au niveau secondaire. Il s'agit d'un domaine où l'utilisation de la métaphore est peu explorée et d'un niveau où les élèves éprouvent des difficultés épistémologiques particulières.

Pour réaliser cet objectif, ce projet se propose de répondre aux questions suivantes:

Question 1: Quelle est la validité prospective de l'instrument métaphorique "structure mapping" pour diagnostiquer les erreurs épistémologiques?

Bien que plusieurs chercheurs aient recommandé le recueil des métaphores des élèves dans le but de découvrir leurs conceptions alternatives ou de dégager les défauts des structures cognitives qu'ils ont des concepts (Driver & Erickson, 1983; Flick, 1991; Head & Sutton, 1985; Hewson, 1985; Thagard, 1992; etc.), personne ne semble avoir étudié systématiquement l'utilisation de la métaphore comme instrument de diagnostic des erreurs épistémologiques. Cette question de recherche tentera de remédier à cette lacune en étudiant la validité de l'instrument métaphorique "structure mapping" pour ce faire.

Les instruments de diagnostic qualitatif existants, bien qu'ils soient efficaces, se sont révélés inappropriés pour une utilisation en salle de classe sous de multiples aspects (Fensham, Garrard & West, 1981; Shuell, 1985; Moreira, 1987; White, 1985). De plus, le besoin d'instruments qui tiennent compte des critères de répliquabilité, fidélité et validité est manifesté dans ce domaine (Gilbert, Watts & Osborne, 1985; Hashweh, 1988; Shuell, 1985). Si le critère de validité était atteint, l'instrument métaphorique permettrait de suppléer à plusieurs limites des méthodologies qualitatives actuelles. Plus précisément en mathématiques, il offrirait finalement une alternative viable aux méthodologies quantitatives qui, en plus de poser des contraintes de tout ordre, ne fournissent pas les informations nécessaires à une remédiation (Birenbaum & Tatsuoka, 1982, 1987; Brown & Burton, 1978; Tatsuoka, 1983, 1984, 1985).

Bien que l'étude de validation d'un instrument de mesure ne fasse pas

habituellement l'objet d'une thèse de doctorat, elle est incluse ici parce qu'elle se situe dans un contexte de recherche exploratoire et que les items de cet instrument servent de base aux interventions formatives ainsi qu'à l'interprétation des degrés de certitude qui font l'objet des deux prochaines questions de recherche.

Question 2: En terme de changement conceptuel, quels sont les résultats d'apprentissage engendrés par une intervention formative basée sur des modalités de modification analogique (erreur locale) et de substitution métaphorique (erreur globale), effectuée en conjonction avec un diagnostic du même type?

Il semble que, parmi les méthodes existantes de changement conceptuel, la modification analogique progressive et la substitution métaphorique soient les plus prometteuses (Désautels, 1989; Giordan, 1989b; Johsua, 1989b, Resnick, 1989b; etc.). Cependant, ces méthodes ont été documentées exclusivement en sciences (Clement, 1987b, 1993; Johsua & Dupin, 1988, 1989; Lawson, Baker, DiDonato & Verdi, 1993; Mason, 1994a, 1994b; Stavy, 1991). De plus, elles furent utilisées en conjonction avec d'autres méthodes dans la plupart des cas. Comme le déplorent Guzzetti, Snyder, Glass & Gamas (1993), il est difficile de d'évaluer les mérites d'une méthode en particulier quand les résultats rapportés représentent l'impact total des interventions. Finalement les résultats des deux méthodes ne furent vérifiés qu'en une seule occasion, à court ou à moyen terme. Etant donné les pouvoirs de résistance des erreurs épistémologiques, il semble qu'il aurait été important d'étudier la stabilité des changements conceptuels entraînés par ces méthodes en contrôlant leurs effets à différents moments.

Cette question de recherche vise d'abord à documenter l'utilisation des méthodes métaphorique / analogique de changement conceptuel dans un autre domaine, soit celui des mathématiques. Elle veut ensuite étudier l'efficacité exclusive de ce genre de méthodes, sans recours à d'autres stratégies de changement. Elles veulent finalement suppléer aux limites des recherches précédemment mentionnées, qui n'ont pas documenté les effets longitudinaux des méthodologies métaphorique et analogique (Dagher, 1995), en assurant un contrôle des effets des interventions à différents moments, soit en vérifiant les changements à court terme et leur rétention à moyen terme.

Question 3: Quelle est l'utilité d'une spécification de degrés de certitude, comme indicateur des émotions cognitives correspondant aux conceptions initiales, en rapport avec la méthodologie proposée?

Les chercheurs s'entendent de plus en plus pour dire que le changement conceptuel est une démarche à la fois rationnelle et affective (Désautels, 1989; Gowin, 1983; Pintrich, Marx & Boyle, 1993; Resnick, 1989b; Sierpinska, 1989; West & Pines, 1983). Cependant, le phénomène des émotions cognitives est peu documenté en rapport avec le changement conceptuel. Afin de suppléer à cette lacune, Head & Sutton (1985) recommandent l'utilisation de techniques qui rendent justice à la signification personnelle de l'apprenant ainsi qu'à son importance émotionnelle. La conjonction d'une méthodologie métaphorique et d'une spécification de degrés de certitude, inspirée de la taxonomie des états cognitifs de Margolis (1987), semble bien adaptée pour répondre à ces recommandations. D'autant plus que selon ce dernier auteur, il s'agit d'états qui jouent un rôle particulièrement important dans les situations de changement conceptuel.

L'explicitation de ces degrés de certitude sera utilisée afin d'élucider des informations supplémentaires sur les conceptions des élèves et de déterminer la stabilité des conceptions justes qui pourraient servir d'ancres aux interventions formatives (Clement, Brown & Zietsman, 1989). Cependant, bien que les méthodes de modification analogique et de substitution métaphorique aient le potentiel de réduire les résistances affectives (Margolis, 1987), cette question de recherche veut d'abord et avant tout éclairer la question des émotions cognitives. Elle s'emploiera donc à préciser le fondement et les articulations de ces émotions avec les conceptions qu'ils soutiennent par le biais d'une analyse des justifications que les élèves en font. Elle permettra également de spécifier les effets qu'ils engendrent en rapport avec la méthodologie proposée.

Question 4: Est-ce que la méthodologie proposée engendre des résultats différents selon le niveau de rendement académique des élèves?

Cette question relève autant du souci de la généralisabilité des résultats de cette recherche (Huberman & Miles, 1991) que d'un besoin de précision quant à l'étendue de l'efficacité des procédés analogiques comme stratégies de changement conceptuel. Comme

stratégie générale d'instruction et en comparaison avec les approches traditionnelles, il a été déterminé que l'approche analogique profite surtout aux élèves qui présentent des lacunes au niveau du raisonnement formel (Burns & Okey, 1985; Gabel & Sherwood, 1983). Il a également été déterminé que cette approche est plus efficace auprès des élèves dont la moyenne est habituellement inférieure à 70% (Bean, Singer & Cowan, 1985). Dans un cadre de changement conceptuel, ces résultats sont compatibles avec les observations de Johsua & Dupin (1989) qui rapportent que l'analogie modélisante a été particulièrement appréciée par les élèves qui éprouvent des difficultés en physique. Ils sont également compatibles avec celles de Clement (1987b; 1993), qui rapporte qu'une classe d'élèves faibles, exposée à la méthode de modification analogique, ont obtenu de meilleurs résultats qu'une classe hétérogène exposée à la méthode traditionnelle.

Ils sont finalement compatibles, en quelque sorte, avec les résultats des méthodes non analogiques de changement conceptuel, dont l'inefficacité est attribuée à des lacunes au niveau du raisonnement formel (Lawson & Thompson, 1988; Renner. Brumby & Shepherd, 1981; Resnick 1989b; Simpson & Marek, 1988). Bien que faiblesse de rendement académique et lacunes au niveau du raisonnement soient deux variables différentes, elles semblent recouvrir une réalité similaire, en ce qu'elles traduisent des toutes deux des difficultés d'apprentissage. Et tout semble indiquer qu'une approche analogique profiterait davantage à ceux qui éprouvent de telles difficultés.

Par contre, certaines recherches effectuées dans le domaine des mathématiques permettent de supposer que tel n'est pas nécessairement le cas. En effet, Novick & Holyoak (1991) ont déterminé que l'expertise mathématique était un prédicteur significatif de transfert analogique. De même, Presmeg (1992) et Sfard (1994) ont observé que l'habileté métaphorique était une composante centrale de la réussite en ce domaine.

Quoiqu'il en soit, il existe peu d'information exacte sur l'étendue de l'efficacité des procédés analogiques comme stratégies de changement conceptuel. Selon une recherche dans les bases de données informatisées, il ne semble pas exister de recherche qui ait comparé les résultats d'élèves forts et faibles, exposés à une même méthode analogique de changement conceptuel. Cette question de recherche tentera donc de pallier à cette lacune en comparant les résultats obtenus aux questions précédentes par deux

groupes d'élèves de niveaux de rendement académique différents (niveaux avancé et général), qui correspondent à des niveaux différents d'habileté.

Type de recherche

La présente recherche est de type exploratoire. Elle se situe sur le continuum qui relie les courants constructivistes aux courants positivistes. Selon la perspective d'un travail exploratoire, le cadre conceptuel, qui rend compte de ce qui a été accompli dans le domaine étudié, puise ses sources à même ce continuum. A partir de ce cadre de réflexion, la présente recherche ne propose pas d'hypothèses, elle soulève des questions de recherche et génère des hypothèses pour des recherches subséquentes. C'est aussi de ce cadre qu'elle emprunte les outils disponibles pour dégager des résultats sur lesquels on peut s'appuyer pour éclairer les questions de recherche.

Ainsi, la méthode de changement conceptuel de type métaphorique / analogique, qui est étudiée ici, relève d'une approche constructiviste. Elle ne conteste pas les croyances initiales, mais les utilise plutôt afin d'en développer de nouvelles. Elle propose d'agrandir le répertoire de conceptions afin de permettre la différenciation et la relativisation des savoirs dans le contexte où ils s'appliquent.

D'un autre côté, les outils utilisés pour dégager les résultats de cette méthode procèdent d'une approche plus positiviste. Les instruments de mesure et d'analyse disponibles dans le domaine des mathématiques, et autres, s'articulent le plus souvent autour de la notion d'erreur épistémologique, définie comme incompatible avec la théorie établie. Bien qu'on reconnaisse le point de vue constructiviste de l'apprentissage selon lequel l'erreur est constitutive du savoir et relative à son contexte de fonctionnement, ces instruments et le vocabulaire utilisé lors des analyses de leurs résultats demeurent à tendance positiviste.

CHAPITRE 2

CADRE MÉTHODOLOGIQUE

Le cadre méthodologique qui permet de répondre aux questions de recherche formulées précédemment comprend les éléments suivants: la description des échantillons (1); l'articulation de la méthodologie utilisée (2); la présentation des instruments (3); la description de la procédure (4); la préparation des données (5); l'exposé des analyses de données (6).

Les échantillons

L'événement étudié

L'événement sélectionné pour cette recherche est la transition des nombres naturels aux nombres entiers relatifs, où la signification des nombres négatifs et du zéro fait problème (Brousseau, 1989a; Glaeser, 1981; Vergnaud, 1989a, 1989b). Cette transition a été identifiée comme étant à l'origine de problèmes épistémologiques graves rencontrés lors de la transition de l'arithmétique à l'algèbre (Vergnaud, 1989a, 1989b; Vergnaud, Cortes & Favre-Artigue, 1987).

Le moment de la recherche

La constatation que le savoir antécédent n'apparaisse en tant qu'obstacle qu'a posteriori (Giordan, 1989a; Janvier, Charbonneau & de Cotret, 1989; Vergnaud, 1989a) fournit un indice stratégique important sur le moment propice d'une intervention. Cette constatation permet de situer cette activité autant après que pendant la construction des connaissances, introduisant les idées de paliers d'intégration et de retours en arrière dans l'élaboration du savoir (Giordan, 1989a). Dans les écoles ontariennes, la notion de nombres relatifs est étudiée au niveau de la 9^e année et révisée au début de la 10^e année dans toutes les classes de mathématiques. Selon ces considérations, l'expérimentation a été conçue comme un retour en arrière et conduite à mi-terme de la 10^e année. Plus précisément, elle fut conduite à la fin du premier terme pour le groupe avancé et au début

du deuxième terme pour le groupe général. Ce moment répond également à des soucis de validité externe des résultats de la présente recherche, puisqu'il permet de diminuer les possibilités que l'enseignement régulier fournisse un support au traitement expérimental (Richard, 1985).

Les sujets

L'échantillon qui servit à la présente recherche provient de deux classes à horaire semestriel que le Conseil de écoles publiques d'Ottawa-Carleton avait rendues disponible pour l'expérimentation (Appendice A-1). Au moment de la recherche, cette école comptait quatre classes de mathématiques en 10^{ième} année, toutes rendues disponibles par leur enseignant pour participer à l'expérimentation (Appendice A-2). Deux classes ont été sélectionnées pour participer à cette recherche. Il s'agit d'une classe de niveau général, niveau qui regroupe des élèves éprouvant des difficultés en mathématiques, ainsi que d'une classe de niveau avancé, niveau qui regroupe des élèves démontrant de la facilité dans ce domaine. Ce choix répond autant à un souci de généralisabilité des résultats (Huberman & Miles, 1991) qu'au besoin de comparaison entre différents niveaux d'habileté mathématique. Comparativement à des groupes de mêmes niveaux rencontrés lors des années précédentes, le groupe de niveau avancé a été caractérisé par son enseignant comme étant d'un degré d'aptitude moyen, celui du niveau général comme étant d'un degré d'aptitude faible.

La totalité des 22 élèves de niveau avancé et des 24 élèves de niveau général de ces classes se portèrent volontaires pour participer à la recherche et obtinrent dûment la permission de leurs parents/tuteurs (Appendices A-3 et A-4). De ce nombre, 21 élèves de niveau avancé et 22 élèves de niveau général furent retenus. Un élève se retira à cause de difficultés linguistiques et deux autres furent retirés parce qu'il n'avaient pas complété les pré-tests. Le tableau 5 présente les données démographiques concernant les sujets.

Comme le révèle ce tableau, le groupe de niveau avancé était composé de 14 filles et 7 garçons dont les âges variaient entre 14 et 16 ans, la moyenne d'âge étant de 14.85 ans et l'âge médian de 15 ans. Le groupe de niveau général était composé de 6 filles et 16 garçons dont les âges variaient entre 14 et 19 ans, la moyenne d'âge étant de 16.05

Tableau 5: Données démographiques concernant les sujets

Catégorie	Niveau	
	Avancé *	Général **
Nombre (%)	21 (%)	22 (%)
Genre		
Filles	14 (66.7)	6 (27.3)
Garçons	7 (33.3)	16 (72.7)
Origine		
Franco-Ontariens	12 (57.1)	19 (86.4)
Autres provinces	5 (23.8)	1 (4.5)
Autres pays	4 (19.1)	2 (9.1)
Langues parlées à la maison		
Français	15 (71.4)	13 (59.1)
Anglais	1 (4.8)	2 (9.1)
Français et anglais	4 (19.0)	5 (22.7)
Français et autres	1 (4.8)	2 (9.1)
Age		
Etendue	14 à 16	14 à 19
Age moyen	14.85	16.05
Age médian	15	16

* De ce niveau, une(1) élève, participant à un échange étudiant Allemagne-Canada, s'est retirée à cause de difficultés linguistiques.

** De ce niveau, deux(2) élèves furent retirés, l'un pour sa réticence à compléter les pré-tests, et l'autre pour s'être absenté lors de chacun des pré-tests.

ans et l'âge médian de 16 ans. Il est à noter qu'une disparité de genre et d'âge inter et intra-niveaux est un trait représentatif des populations visées, quoique qu'elle soit normalement moins prononcée par rapport au genre au niveau avancé. Elle est accentuée ici par des besoins d'horaire, la majorité des filles étant aussi inscrites au cours de danse.

On remarque également que le groupe de niveau général provient d'une population plus sédentaire que le groupe de niveau avancé, où 29.3% moins d'élèves sont d'origine franco-ontarienne. De même, le groupe de niveau général semble provenir d'un milieu où le français est moins exclusivement parlé à la maison par une marge de 12.3%. Selon notre expérience, ce sont également des traits représentatifs de ces populations, quoique la dernière différence est souvent plus accentuée.

Le tableau 6 présente le statut des sujets par rapport aux mathématiques. Il révèle, qu'en comparaison avec le groupe de niveau avancé, celui de niveau général compte plus d'élèves pour qui les mathématiques est le sujet le moins bien réussi, ainsi que plus d'élèves qui y ont connu des faillites au secondaire. En conséquence, il compte plus d'élèves pour qui les mathématiques est le sujet le moins aimé, et moins d'élèves pour qui il s'agit du sujet préféré. Par contre, ce cours est plus souvent déclaré comme le mieux réussi au niveau général, qu'au niveau avancé. Cette donnée s'explique par le fait qu'à la suite d'une faillite, plusieurs de ces élèves reprennent ce cours pour la deuxième fois, et souvent à un niveau de difficulté inférieure afin de maximiser leurs chances de réussite de ce cours obligatoire. Ce fait explique également pourquoi le sujet le moins aimé est parfois le mieux réussi au niveau général.

Ces traits représentent la disparité habituellement rencontrée entre les élèves des deux niveaux de rendement académique dans le domaine des mathématiques. Il s'agit de populations très différentes au point de vue des habiletés mathématiques, d'où leur classement dans des niveaux différents de difficulté. Ces populations sont également différentes au point de vue de leur attitude envers les mathématiques. Le fait que ceux qui réussissent le moins bien dans ce domaine sont généralement ceux qui l'aiment le moins est la seule ressemblance notable qui existe entre les deux.

Tableau 6: Statut des sujets par rapport au domaine des mathématiques

Catégorie	Niveau	
	Avancé	Général
Nombre (%)	21 (%)	22 (%)
Préférence		
Préféré	7 (33.3)	2 (9.1)
Moins aimé	6 (28.6)	12 (54.5)
Réussite		
Mieux réussi	3 (14.3)	7 (31.8)
Moins réussi	6 (28.6)	12 (54.5)
Combinaison préférence / réussite		
Préféré / mieux réussi	2 (9.5)	0 (0.0)
Préféré / moins réussi	0 (0.0)	0 (0.0)
Moins aimé / mieux réussi	0 (0.0)	3 (13.6)
Moins aimé / moins réussi	5 (23.8)	9 (40.9)
Faillite au secondaire (maths)		
9e année avancée	2 (9.5)	4 (18.2)
10e année avancée	2 (9.5)	4 (18.2)
10e année générale	- -	4 (18.2)
Total (faillite)	4 (19.0)	12 (55.5)

L'articulation de la méthodologie utilisée

Les étapes de la procédure et la combinaison des différentes techniques de cueillette de données de la présente expérimentation ont d'abord été déterminées par les types d'informations requises pour répondre aux questions de recherche. Un souci de respecter le processus naturel de l'évaluation formative en salle de classe a également prévalu dans ce schème. Le choix de classes régulières et complètes, au niveau de l'échantillonnage, a été le premier pas effectué dans cette direction.

La vérification des acquis et l'utilisation collective des tests "papier-crayon"

En salle de classe, la façon courante et la plus fonctionnelle de vérifier les acquis de tous est l'utilisation systématique de tests écrits. De même, l'efficacité d'une intervention formative s'y vérifie habituellement au niveau d'un devoir, puis d'un test subséquent. Ces conditions permettent de recueillir les données nécessaires pour répondre à la deuxième question de recherche. Elles furent préservées au niveau de l'expérimentation sous forme d'un pré-test et de deux post-tests, administrés à court et à moyen termes après les interventions formatives de changement conceptuel. Ainsi, la comparaison des résultats au pré-test et aux post-tests permettent de déterminer l'effet du traitement sur les erreurs décelées dans les pré-tests, et la répétition des post-tests fournit également des informations sur la rétention de cet effet.

La première question de recherche concerne la validité du test métaphorique, comme instrument de diagnostic des erreurs épistémologiques. Une validation demande la comparaison des résultats à ce test avec ceux d'autres tests, qui représentent des performances reliées à des variables importantes du comportement des élèves en situation d'erreurs épistémologiques (Crocker & Algina, 1986). Le pré-test fut donc subdivisé en trois tests. Il s'agit d'un test de calcul concernant les opérations du système des nombres entiers relatifs, d'un test de résolution de problèmes simples nécessitant ces opérations, ainsi que du test métaphorique qui dégage la signification de ces mêmes opérations.

L'intervention formative individuelle et l'utilisation des protocoles verbaux

La façon habituelle d'apporter une assistance aux élèves d'une salle de classe est l'intervention orale. Cette intervention est de nature collective ou individuelle, selon les besoins et les opportunités. Deux considérations motivèrent la décision de rencontrer personnellement les élèves pour effectuer la médiation prévue par cette expérimentation et ce faisant, recueillir les protocoles verbaux concourants comme source de données.

Premièrement, la recension des écrits suggère que, dans une perspective de changement conceptuel, une intervention efficace doit tenir compte du contexte de fonctionnement des erreurs car la spécificité d'une conception dépend de l'organisation idiosyncratique de ses éléments (Giordan, 1989b; Thagard, 1991; West, Fensham & Garrard, 1985; West & Pines, 1985). Cette considération laisse prévoir que l'efficacité des interventions dépende de leur agencement précis aux conceptions de chaque élève. L'entrevue individuelle, quoiqu'onéreuse dans une situation de salle de classe, semble être la façon la plus appropriée d'offrir ce genre d'interventions. Les protocoles verbaux concourants, qu'elle donne l'occasion de recueillir ici, sont une source de données qui permettent de documenter le processus de changement conceptuel et de préciser les exigences de spécificité individuelle qu'elles réclament.

Deuxièmement, l'analyse de ces mêmes protocoles verbaux concourants procure des données supplémentaires, qui seraient autrement inaccessibles, pour étayer la validation du test métaphorique comme instrument diagnostic des erreurs épistémologiques. En effet, la découverte de conceptions implicites n'est pas facilement accomplie car elles ne sont habituellement pas directement disponibles à l'inspection. Les protocoles verbaux concourants, qui donnent une description des activités, sont alors reconnus comme étant le meilleur outil pour découvrir les modèles mentaux, particulièrement ceux de nature procédurale dont il est ici question (Norman, 1983). Il s'agit également d'une méthode éprouvée dans les recherches concernant le dépistage des erreurs épistémologiques et le changement conceptuel (Gilbert, Watts & Osborne, 1985; Novak & Musonda, 1991; Nussbaum & Novak, 1976; Tirosh & Graeber, 1990, 1994; etc.), ainsi qu'en ce qui a trait aux recherches sur le raisonnement mathématique (voir Ginsburg, Kossan, Schwartz & Swanson, 1983). Elle est finalement recommandée par

Mandler (1989b) afin de documenter le phénomène des émotions cognitives.

Les instruments

Cinq tests ont été administrés à chacun des sujets. Il s'agit d'abord de trois pré-tests diagnostiques, dont le but était de documenter les diverses manifestations des erreurs épistémologiques: un pré-test de calcul, un pré-test de résolution de problèmes et un pré-test métaphorique. Il s'agit ensuite de deux post-tests personnalisés de calcul et de résolution de problèmes dont le but était de vérifier, à court et à moyen termes, l'efficacité des interventions formatives de changement conceptuel sur les erreurs diagnostiquées lors des pré-tests. Le premier post-test fut administré individuellement, suite à chacune des interventions. Le second post-test fut administré collectivement, 2 semaines après la dernière intervention, ce qui représente un laps de 2 à 5 semaines selon le moment où chaque élève avait été rencontré individuellement. Ces tests sont similaires en termes de contenu et de structure, les items de l'un correspondant strictement aux items des autres. De plus, les tests de calculs et de résolution de problèmes comportent des items semblables afin de vérifier la stabilité des réponses.

Trois fiches, conçues pour recueillir des données additionnelles, furent également utilisés pendant l'expérimentation. Il s'agit d'une fiche de renseignements personnels, d'une fiche d'observation "au vol", ainsi que d'une fiche-synthèse d'événements.

Le pré-test de calcul

Le pré-test de calcul (Appendice B-1) est composé de 80 items. Il consiste en trois séries d'items semblables correspondant aux opérations simples sur les nombres entiers relatifs. Il a été construit selon le modèle utilisé pour le dépistage des erreurs épistémologiques en addition et soustraction (Birenbaum & Tatsuoka, 1982; Tatsuoka, 1983, 1984, 1985). La multiplication, la division et les calculs avec le zéro(0) y ont cependant été ajoutés.

Selon ce modèle, chaque opération est représentée par plusieurs séries d'opérations résultant d'une permutation des conditions qui présentent des difficultés différentes:

- chiffre inférieur initial, e.g. $3 - (-6)$ et $-3 - (-6) / 3 \times (-6)$ et $(-3) \times 6$,
- chiffre supérieur initial, e.g. $6 - (-3)$ et $-6 - (-3) / 6 \times (-3)$ et $(-6) \times 3$,
- nombre positif initial, e.g. $3 - (-6)$ et $6 - (-3) / 6 + (-3)$,
- nombre négatif initial, e.g. $-3 - (-6)$ et $-6 - (-3) / (-6) + 3$,

Des précautions furent prises afin d'éviter que des facteurs étrangers aux notions testées, soit l'incapacité d'effectuer un calcul sans calculatrice ou d'interpréter la notation utilisée, ne contaminent les résultats. Ainsi, la notation des tests-modèles (Birenbaum & Tatsuoka, 1982; Tatsuoka, 1983, 1984, 1985) ne fut conservée qu'après vérification de sa conformité à la notation adoptée par l'école où s'est déroulée l'expérimentation. De même, les coefficients numériques qui composent les 80 items de ce test furent choisis de façon aléatoire, jusqu'à épuisement d'un ensemble de nombre dont la somme n'excède pas 20 pour les opérations d'addition et de soustraction, et le produit n'excède pas 50 pour les opérations de multiplication et de division.

Le pré-test de résolution de problèmes

Le pré-test de résolution de problèmes (Appendice B-2) est composé de 48 items. Il consiste en trois séries d'items semblables concernant des situations de problèmes simples correspondant aux opérations du test précédent. Ces problèmes sont similaires à ceux qui sont fournis dans les manuels en usage à l'école aux niveaux de 9e et 10e années (Baxter, Newton & Del Grande, 1977; Bober & al., 1989; Bourbeau-Tessier, Saumier & Renaud, 1985; Clermont, 1986a, 1986b; Drolet & Rochette, 1984; Flewelling & Newton, 1987). De nouveaux problèmes ont été créés pour correspondre à la multiplication de deux nombres négatifs et à la division d'un nombre positif par un nombre négatif, puisqu'aucun problème de ce genre ne se retrouvait dans les manuels consultés. Les 48 situations, que décrivent les problèmes de ce test, rejoignent la réalité des étudiants de ce niveau. Les nombres qui les composent ont été choisis de façon à ce que les opérations se résolvent par simple calcul mental.

Le pré-test métaphorique de type "structure mapping"

Une métaphore de type "structure mapping" se compose d'une suite d'analogies, formulées de façon à décrire un système entier (éléments + relations). Comme on l'a vu au chapitre précédent, la métaphore produit alors un modèle explicatif de ce système (Gentner, 1982, 1988). Le pré-test métaphorique (Appendice B-3), où la tâche est d'expliquer le système des nombres entiers relatifs, consiste en une série de 18 opérations à interpréter sous forme d'analogies, selon un contexte métaphorique choisi par l'élève. Construit selon le modèle utilisé lors de l'étude-pilote (Kelly-Bégin, 1990), il permet à l'élève de sélectionner un autre contexte métaphorique si le contexte initial ne s'avère pas aussi fructueux que prévu.

Une spécification du degré de certitude, similaire à celle utilisée dans les tests de dépistage des erreurs épistémologiques en physique (Clement, Brown & Zietsman, 1989), fut ajoutée à chacun des items du test original afin de tenir compte des émotions cognitives. Il s'agit ici d'une adaptation de la matrice des états cognitifs de Margolis (1987) qui permet de préciser les positions affectives lors des démarches de changement conceptuel. Les neuf catégories proposées par l'auteur ont été réduites à cinq et les titres en ont été modifiés de la façon suivante pour faciliter leur interprétation par les élèves: certitude contraire (savoir contraire), méfiance (catégorie allant de l'incrédulité au doute défavorable), incertitude, confiance (catégorie allant du doute favorable à la croyance), certitude (savoir). Dans le test métaphorique, ces degrés s'échelonnent comme suit:

- 0 - Certitude contraire: je suis certain que mon explication est erronée.
- 1 - Méfiance (doute sérieux): je crois que mon explication est erronée.
- 2 - Incertitude: je suis incertain que mon explication soit correcte.
- 3 - Confiance: je crois que mon explication est juste.
- 4 - Certitude: je suis certain que mon explication est juste.

Les post-tests personnalisés d'application et de vérification

Le post-test d'application, différent pour chaque élève, consiste en deux séries d'items semblables (Appendices B-4 et B-5) qui correspondent à ceux qui étaient erronés lors des pré-tests de calcul et de résolution de problèmes. Il aurait été préférable que ce

post-test, ainsi que le suivant, correspondent exactement au pré-test. Cette mesure aurait permis de vérifier les possibilités de régression sur les items précédemment réussis, suite à l'intervention formative. Cependant, comme la limite du temps alloué auprès des sujets ne le permettait pas, l'expérimentateur dut se limiter aux catégories d'items qui étaient erronés lors du pré-test. Ceci explique que le nombre d'items de ces post-tests varient d'un élève à l'autre puisqu'ils correspondent aux erreurs propres à chacun.

Le post-test de vérification, similaire au post-test précédent, est aussi composé de deux séries d'items semblables à ceux qui étaient erronés lors des pré-tests de calcul et de résolution de problèmes administrés de 5 à 6 semaines auparavant.

La similarité des tests de résolution de problèmes

Le pré-test et le post-test de résolution de problèmes ont été soumis à trois juges-experts afin d'établir la similarité des items correspondants et d'améliorer la clarté de leur formulation. Les juges sont des enseignants provenant de la même école que les sujets, mais qui ne leur enseignaient pas au moment de l'expérimentation. Il ont une moyenne de 17.3 années d'expérience en mathématiques au niveau secondaire. Ils reçurent comme tâches de:

- juger de la correspondance entre les items, ainsi que de la similarité de la difficulté des 3 séries parallèles d'items correspondants sur une échelle de 1 (désaccord total) à 5 (accord parfait),
- suggérer les modifications nécessaires afin d'assurer la correspondance entre les items et d'en clarifier la formulation.

Le tableau 7 présente un relevé des jugements de similarité des problèmes. Il révèle que les enseignants ont alloué aux items des moyennes de similarité variant de 4.33 à 5.00, pour une moyenne intra-juges de 4.90 sur 5. Les modifications suggérées, discutées par la suite avec chacun des juges, furent effectuées selon l'accord de la majorité.

Ces tests modifiés furent administrés aux élèves de deux classes additionnelles de mathématiques de 10^e année, l'une de niveau avancé et l'autre de niveau général, provenant d'une autre école. Ces élèves reçurent comme instructions de répondre aux problèmes et de rapporter à l'expérimentateur tout vocabulaire ou formulation qui leur

Tableau 7: Relevé des jugements de similarité des items*
des tests de résolution de problèmes

Item**	Juge A	Juge B	Juge C	Moyenne
$x + y$	5	5	5	5
$-x + y$	5	5	5	5
$X - y$	5	5	4.67	4.89
$-x - y$	5	5	5	5
$x - (-y)$	5	5	4.67	4.89
$-x - (-y)$	4.67	4.67	5	4.78
$x X y$	5	5	5	5
$x X (-Y)$	5	5	5	5
$(-x) X Y$	5	5	5	5
$(-x) X (-y)$	4.2	5	4.67	4.61
$X + y$	5	5	5	5
$(-X) + y$	4.67	5	5	4.89
$X + (-y)$	5	5	4.67	4.89
$(-X) + (-y)$	4.67	5	5	4.89
Add./Soust. avec 0	4.33	5	5	4.78
Mult./Div. avec 0	4.67	5	4.67	4.78
Moyenne totale	4.83	4.98	4.90	4.90

* La similarité fut jugée selon une échelle de 1 à 5.

** Lors de la description des items, la majuscule représente un nombre supérieur à celui représenté par la minuscule.

causait problème en expliquant les raisons de leurs difficultés. Quelques modifications finales furent apportées, suite à leurs recommandations.

Il est à noter que les résultats à ces tests se révèlent très similaires à ceux obtenus par la suite par les groupes expérimentaux. Les mêmes erreurs y furent commises selon une fréquence semblable.

Les fiches de cueillette de données

Trois formulaires, construits selon les spécifications d'Huberman et Miles (1991), servirent à recueillir des données additionnelles par rapport aux sujets et à l'expérimentation. Il s'agit d'une fiche de renseignements personnels, d'une fiche d'observations "au vol" et d'une fiche-synthèse d'événement.

La fiche de renseignements personnels (Appendice C-1) demande des informations démographiques concernant les sujets. Elle demande également des précisions sur ses préférences et ses réussites scolaires, ainsi que sur son orientation future. Une section y est réservée pour spécifier son horaire afin de déterminer sa disponibilité pour les entrevues individuelles.

La fiche d'observations "au vol" (Appendice C-2) est un formulaire conçu pour permettre une prise de note rapide et efficace pendant un événement. Elle se compose des éléments suivants: clarification de faits observés, correspondances entre les éléments des données, hypothèses ou intuitions, impressions et questions.

La fiche-synthèse d'événement (Appendice C-3) est un formulaire conçu pour être complété immédiatement après un événement et servir par la suite d'aide-mémoire. Elle contient les items suivants: points saillants, résumé, détails intéressants, réflexions et planification.

Ces deux dernières fiches, devant être complétées par l'expérimentateur, ont pour but principal de servir d'aide-mémoire et de support à l'analyse finale. Sous forme de pré-analyses, elles permettent également de revoir les interventions afin d'y discerner les problèmes, de noter les nouvelles hypothèses, etc. Elles obligent ainsi à lier directement les données aux questions de recherche afin de pouvoir affiner les cueillettes subséquentes.

La procédure

Les pré-tests ont été administrés à chacun des groupes, lors de leurs classes régulières de mathématiques, selon la séquence suivante:

- pré-test de résolution de problèmes,
- pré-test de calcul,
- pré-test métaphorique.

Cette séquence répond à un souci de validité interne en prévenant l'effet d'un test sur les résultats du suivant. Elle assure que les résultats soient représentatifs de la performance habituelle des élèves. Ainsi, le test de résolution de problèmes précéda celui de calcul afin de ne pas prédisposer les élèves à y utiliser toutes les opérations qui se retrouvaient dans le second. Le test métaphorique fut administré en dernier afin d'éviter un effet curatif sur les deux autres.

Les deux premiers tests furent administrés lors de deux journées successives pour chacun des groupes. Le test métaphorique fut administré 5 jours scolaires plus tard pour le groupe avancé, et 4 jours scolaires plus tard pour le groupe général. Les élèves absents reprirent ces tests selon la même séquence lors des journées suivantes. Ces reprises ainsi que la nécessité de poursuivre les classes régulières expliquent l'intervalle entre les premiers et derniers tests.

Pour chacun des tests, on demanda aux élèves d'inscrire l'heure à laquelle ils avaient terminé. Aucune limite de temps ne fut prescrite pour la complétion des questionnaires.

L'administration des pré-tests de calcul et de résolution de problèmes

Le test de résolution de problèmes fut clairement identifié comme un exercice sur les nombres entiers relatifs. La tâche fut introduite par un rappel que certaines expressions sont représentées par des nombres négatifs ("perte", "diminue", etc.) et positifs ("gain", "augmente", etc.) dans la formulation de problèmes. Un remue-méninges s'en suivit afin de dresser une liste extensive de ces expressions.

L'expérimentateur expliqua ensuite que toutes ces expressions qui apparaîtraient

dans les problèmes du test devaient être exprimés avec les signes appropriés dans les solutions. Il recommanda aux élèves d'être particulièrement alertes pour les déceler et les utiliser. Il précisa expressément que ces signes ne devaient être éliminés que par une procédure mathématique. Ces recommandations furent faites en interaction avec les élèves (questions-réponses) et accompagnées d'exemples au tableau, précédant et intercalant une période de pratique (Appendice B-2). Les élèves furent finalement avisés, que si la formulation ou le vocabulaire des problèmes leur causaient des difficultés, ils n'avaient qu'à lever la main: l'expérimentateur répondrait à leurs questions au fur et à mesure. Peu d'élèves usèrent de cette prérogative.

Le lendemain, les élèves furent priés de répondre au pré-test de calcul sans avoir recours à leur calculatrice.

L'administration du pré-test métaphorique

L'expérimentateur introduisit la tâche en demandant aux élèves si on leur avait déjà expliqué le système des nombres relatifs en utilisant des exemples-modèles et, si oui, lesquels. Un remue-ménages produisit ensuite une liste d'autres analogues qui pourraient être exploités pour ce faire. L'expérimentateur expliqua aux élèves que leur tâche était maintenant de décrire analogiquement chacun des items du questionnaire, comme s'ils devaient les expliquer à leur tour à un non-initié, un enfant plus jeune par exemple.

Les contraintes d'une tâche métaphorique furent précisées. Ainsi, les élèves furent invités à:

- examiner tous les items afin de déterminer si leur choix d'un modèle conviendrait à chacun de ces items,
- conserver le même modèle d'une opération à l'autre, et de n'en changer qu'en cas de besoin,
- respecter la séquence des termes ainsi que des signes opératoires et prédicatifs de chaque item afin de préserver les correspondances,
- proscrire les termes mathématiques usuels, tels que:
 - additionner, soustraire, multiplier, diviser
 - plus, moins, fois, divisé par,
 - négatif, positif.

Finally, the specification of the degree of certainty was defined as a judgment on the relevance of all the elements of an analogical statement according to the criteria of clarity, mathematical validity and plausibility. The significance of each of the degrees of the scale was also clarified.

Once again, these explanations were elaborated in interaction with the students and accompanied by examples on the board. The comprehension of the students was verified concurrently.

La durée des pré-tests

Tableau 8 reports the duration of the pre-tests. One observes, on average, that the students of the general level spent a little less time to finish the pre-test of problems (3 min.) and the pre-test metaphorical (2.32 min.). The proximity of the medians and the averages of the two groups suggests symmetrical distributions, which contradicts the large differences of spread.

The fact that the students of the general level have more difficulties in mathematics than the students of the advanced level seems to go against the fact that they spend less time to accomplish the same tasks. However, the differences of spread reveal another trait representative of the populations targeted. A lot of students of the general level work faster than those of the advanced level, spending less time to ensure the soundness of their answers. On the other hand, some others spend a huge amount of time to arrive at results often inferior to those who work quickly.

One will notice, on the contrary, that the students of the general level took on average 3.29 minutes more than the advanced group to accomplish the tasks of the pre-test of calculation, a considerable difference for a test as simple. This difference reveals their usual dependence on the calculator to determine the signs of the answers to elementary calculations. In fact, several students of this level expressed their doubt, as to their capacity to succeed in this test without calculator, while those of the advanced level considered this condition as normal (summary-sheet of the event).

Tableau 8: Durée des pré-tests (en minutes)

Statistique	Niveau	
	Avancé	Général
Pré-test de calcul		
Étendue	7 à 17	10 à 23
Écart	10	13
Durée moyenne	11.71	15.0
Durée médiane	11	14
Pré-test de problèmes		
Étendue	37 à 75	25 à 75
Écart	38	50
Durée moyenne	49.19	46.89
Durée médiane	48	45
Pré-test métaphorique		
Etendue	35 à 65	29 à 80
Écart	30	51
Durée moyenne	47.9	45.58
Durée médiane	45.5	45

L'entrevue individuelle

Dans chaque groupe, les élèves ont été rencontrés individuellement, selon leur disponibilité, sur une période de 3 semaines. La collaboration des enseignants des autres cours fut assurée afin qu'ils libèrent les élèves pour ce faire. En général, ces rencontres se sont déroulées à raison de deux par jour, sauf dans les cas d'activités scolaires (journée de remise de bulletins, journée thématique, etc.).

Afin d'éviter que les élèves faibles ne soient privés de leur cours de mathématiques régulier, ils furent rencontrés à un moment où ils n'avaient pas ce cours à leur horaire. Les autres élèves furent rencontrés pendant la demi-journée où ce cours s'enseignait. Cette précaution entraîna l'alternance d'élèves faibles et forts.

La durée des entrevues s'étendit de 70 à 140 minutes selon le nombre d'erreurs de l'élève au pré-test, post-test d'application inclus. Ces entrevues eurent lieu en une seule session, sauf dans les cas où les étudiants durent réintégrer leur salle de classe régulière. Dans ces cas, elles furent continuées au cours de la même journée (pour un élève de niveau avancé et deux de niveau général), ou les jours suivants (quatre élèves de niveau général). Ces entretiens furent enregistrés sur bandes sonores afin de permettre une transcription verbatim des protocoles verbaux concourants pour fins d'analyse.

Les entrevues poursuivaient trois objectifs:

- recueillir des informations afin de clarifier le diagnostic des obstacles épistémologiques sous-tendant les erreurs relevées dans les pré-tests de l'élève,
- offrir à l'élève un enseignement formatif afin de favoriser les changements conceptuels que nécessitait la rectification de ses erreurs,
- vérifier l'efficacité des interventions formatives sur ces erreurs.

Les objectifs diagnostiques et formatifs furent poursuivis concurremment au fur et à mesure de l'entrevue. Le pré-test métaphorique de l'élève, dont une copie lui fut remise, en est l'outil principal. Au niveau diagnostique, les tâches suivantes furent assignées à l'élève pour chacun des 18 items du test métaphorique:

- expliquer les lois qui régissent le calcul,
- lire l'analogie qui sous-tend le calcul,
- réitérer l'accord avec le degré de certitude précédemment alloué, sinon le changer,

- expliquer les raisons qui sous-tendent le degré de certitude en rapport avec les correspondances établies entre les éléments du calcul et ceux de l'énoncé analogique.

Au niveau formatif, les interventions en vue de produire un changement conceptuel furent conduites selon les techniques de modification analogique (Brown & Clement, 1989; Clement, 1987b, 1993) et/ou de substitution métaphorique (Johsua & Dupin, 1988, 1989; Mason, 1994a, 1994b). Pour ce faire, l'expérimentateur s'était fixé les tâches suivantes:

- demander des corrections ou offrir une analogie alternative quand la conception est inadéquate, tout en respectant le modèle de l'élève (modification analogique),
- discuter des limites du modèle utilisé et proposer des analogies provenant d'un autre modèle quand celui de l'élève est inadéquat pour expliquer certaines opérations (substitution métaphorique),
- jongler avec plus d'un modèle au niveau d'un même item quand le concept est plus difficile à saisir,
- recourir à des schémas pour illustrer les analogies quand elles s'y prêtent.

Cette dernière tâche est inspirée de Bean, Searles, Singer & Cowen (1990) qui ont observé que l'ajout d'une illustration augmentait l'efficacité de l'analogie. Finalement, la tâche de déterminer explicitement les correspondances analogiques pertinentes (Friedel, Gabel & Samuel, 1990; Mason, 1994a; Polland, 1982; Zook & Maier, 1994), qu'exige l'instrument "structure mapping" qui sert de support aux interventions, accompagne toutes les tâches précédentes.

L'expérimentateur voulait également tenir compte des degrés de certitude au niveau de ses interventions. Pour ce faire, il s'était fixé les tâches suivantes:

- rassurer l'élève sur une conception juste accompagnée d'un degré de certitude faible,
- tenter d'ébranler un degré de certitude excessif accompagnant une conception inadéquate, en amenant des objections,
- utiliser les degrés de certitude pour déterminer la stabilité des conceptions justes pouvant servir d'ancres à l'élaboration d'un nouveau savoir.

Le tableau 9 montre un autre outil utilisé pendant l'entrevue. Il s'agit d'une liste

Tableau 9: Liste des modèles pour expliquer le système des nombres entiers relatifs

Type	Modèle
"MONTER / DESCENDRE"	Température / thermomètre (en bas et en haut de 0°C)
	Altitude (au-dessous et au-dessus du niveau de la mer)
	Ascenseur (au-dessous et au-dessus du rez-de-chaussée)
	Niveau d'eau (en bas et en haut de la normale)
	Jeux avec pointage (négatif et positif)
"AUGMENTER / DIMINUER"	Argent - profit(gain) / perte, - économie / dépense, - augmentation / rabais (coût, valeur), - dépôt / retrait (compte de banque), - remise / emprunt (dette), - recevoir / donner, etc.
	Jeux avec mises (poker, courses, etc.)
	Nombre d'objets (billes, cartes de baseball, petites autos, pommes, carottes, bonbons, gommes, biscuits, etc.)
	Nombre de personnes (population, party, en classe, etc.)
	Longueur (cheveux, jupes)
	Pesanteur (personnes, objets)
	Vitesse
"AVANCER / RECULER"	Années / âge (avant et après Jésus-Christ)
	Jeux avec cases (monopoly, etc.)
	Distance (par rapport à un point fixe)

des principaux modèles soumis par les élèves lors des pré-tests métaphoriques. Ces modèles ont été classés selon les catégories perceptuelles "monter et descendre", "augmenter et diminuer" et "avancer et reculer". Un modèle de catégorie différente de celui utilisé par l'élève, et avec lequel il se sentait à l'aise, fut sélectionné à partir de cette liste afin de jongler avec un modèle additionnel au niveau des items plus difficiles. Ce changement de catégorie avait pour but d'élargir le répertoire d'utilisations de la nouvelle conception. Ce fut également l'occasion de souligner les défauts de certains modèles afin de mettre en garde contre les inférences erronées (Glynn, 1991; Harrison & Treagust, 1993; Mason, 1994b) et de faire valoir l'opérationnalité des différents modèles selon les types particuliers de situations (Giordan, 1989a, 1989b; Spada, 1994; Wong, 1993; etc.).

Les modèles qui ont été le plus fréquemment utilisés pendant l'entrevue sont "l'argent", "la température", "les années" et "l'altitude". Le modèle de "l'argent" a servi d'alternative dans la plupart des cas puisque tous les élèves ont une expérience extensive de ce modèle, et que le savoir antécédent est crucial à l'efficacité d'une analogie (Friedel, Gabel & Samuel, 1990; Hardiman, Well & Pollatsek, 1984; Hayes & Tierney, 1982; etc.). Comme les analogies complexes sont reconnues comme plus efficaces que celles à basse complexité (Gick & Holyoak, 1980; Pollard, 1982), "l'argent" a également servi de modèle unificateur du système de nombres à l'étude.

Le tableau 10 présente un exemple du genre d'analogies produites avec ce modèle. Ces analogies ont toutes été utilisées pendant l'entrevue. Elles ont cependant été souvent modifiées afin de respecter l'approche que chaque élève voulait adopter. A ce propos, il est intéressant de mentionner que le concept de transactions dans un magasin rend certains élèves anxieux, alors qu'ils sont tout à fait confortables avec des transactions similaires effectuées avec un ami ou à la banque.

Si on examine le modèle du tableau 10, on remarquera que les correspondances ne sont pas tout à fait univoques d'une analogie à l'autre. Ce critère a été quelque peu sacrifié en faveur du critère de validité externe (vraisemblance). Ainsi dans la division, il aurait été simple de formuler l'item " $0 + 3$ " dans la même veine que l'item " $6 + 3$ ", ce qui aurait donné:

Tableau 10: Le système des nombres entiers relatifs selon le modèle de l'argent

Item	Exemple d'analogie utilisée lors de l'intervention formative
ADDITION	
3 + 6:	J'avais 3\$ et j'en ai gagné 6. J'ai maintenant 9\$.
-6 + 3:	Je devais 6\$ à mon ami et j'ai gagné 3\$. Après avoir remis le montant que j'ai gagné à mon ami, je lui dois encore 3\$.
SOUSTRACTION	
6 - 3:	J'avais 6\$ et j'en ai remis 3 à mon ami. Il me reste 3\$.
0 - 6:	Je n'ai pas d'argent et j'emprunte 6\$ de mon ami. Je suis en dette de 6\$.
-3 - 6:	Je devais 3\$ à mon ami et je lui en ai emprunté 6. Je lui dois maintenant 9\$.
-3 - 0:	Je devais 3\$ à mon ami et je ne lui en ai pas emprunté. Je lui dois toujours 3\$.
3 - (-6):	Hier, j'avais 3\$. Aujourd'hui, j'en dois 6. L'écart entre les deux montants est de 9\$.
0 - (-6):	Hier, je n'avais pas d'argent. Aujourd'hui, j'en dois 6. L'écart entre les deux montants est de 6\$.
-3 - (-6):	Hier, je devais 3\$. Aujourd'hui, j'en dois 6. L'écart entre les deux montants est de 3\$.
MULTIPLICATION	
3 X 6:	J'ai 3 amis qui m'ont donné 6\$ chacun. J'ai reçu 18\$.
3 X (-6):	J'ai 3 amis de qui j'ai emprunté 6\$ chacun. Je leur dois 18\$.
(-3) X 6:	J'ai accumulé 3 dettes d'une valeur de 6\$ chacune. Je dois 18\$. (*)
(-3) X (-6):	Les 3 amis, à qui je devais 6\$ chacun, ont déménagé sans laisser d'adresse. Cela me fait un avoir de 18\$ de plus. (*)

... à suivre

Tableau 10 (suite)

Item	Exemple d'analogie utilisée lors de l'intervention formative
MULTIPLICATION (suite)	
3 X 0:	Je gagne 3\$ l'heure, mais je n'ai pas travaillé cette semaine. Je n'ai gagné aucun argent.
(-3) X 0:	On soustrait 3\$ de mon salaire à chaque fois que j'arrive en retard. Je ne suis pas arrivé en retard la semaine dernière, donc aucun argent n'a été soustrait de mon salaire.
0 X 6:	J'ai travaillé bénévolement pendant 6 heures. Je n'ai gagné aucun argent.
0 X (-6):	Je travaille bénévolement. Même si on diminue ma tâche de 6 heures par semaine, cela n'entraîne aucune perte d'argent pour moi.
DIVISION	
6 ÷ 3:	J'ai 6\$ que je partage à parts égales entre 3 de mes amis. Ils reçoivent 2\$ chacun.
(-6) ÷ 3:	Je dois 6\$ à parts égales à 3 de mes amis. Je leur dois 2\$ chacun.
6 ÷ (-3):	J'avais 6\$ dans mon compte de banque. Je l'ai vidé en faisant 3 retraits égaux. J'ai retiré 2\$ à chaque fois. (*)
(-6) ÷ (-3):	Je dois 6\$. A combien d'amis ai-je emprunté 3\$ pour accumuler cette dette? A 2 amis.
0 ÷ 3:	Un billet de lotterie que 3 amis avaient payé à parts égales n'a rien rapporté. Chacun n'a reçu aucun argent.
6 ÷ 0:	Les décimaux après les centièmes sont considérés comme 0\$ dans les transactions bancaires. Combien de ces 0\$ y a-t-il dans 6\$? Le nombre est indéfini puisque l'on ignore la valeur réelle de ce 0. (*)
0 ÷ 0:	De la même façon, si l'on se demandait combien de ces 0\$ il y a dans ce genre de 0\$, le nombre est indéfini car on ne connaît pas les valeurs respectives de ces 0\$, valeurs qui pourraient varier l'une de l'autre. (*)

(*) Analogies présentées aux élèves comme des moyens de mieux comprendre et de mieux se rappeler lors d'opérations qui dépendent en fait de règles mathématiques.

"Je partage 0\$ à parts égales entre 3 de mes amis. Donc, chacun d'eux ne reçoit aucun argent."

Cependant, il s'agit d'une situation qui ne se présente pas dans la réalité et à laquelle l'élève ne peut pas s'identifier facilement. Aussi, lui a-t-on préféré la situation suivante:

"Un billet de lotterie que 3 amis avaient payé à parts égales n'a rien rapporté. Chacun n'a reçu aucun argent."

Comme la discussion sur la convenance d'un modèle représentatif du système des nombres relatifs le laissait précédemment prévoir, ce modèle de l'argent n'est pas un modèle parfait. La représentation analogique de cinq opérations pose des difficultés. Il s'agit des opérations suivantes: $(-3) \times 6$, $(-3) \times (-6)$, $6 + (-3)$, $6 + 0$ et $0 + 0$.

En ce qui a trait aux trois premières opérations, il faut se rappeler que la loi des signes est une définition justifiée par la suite logique des opérations dans le système des nombres naturels. C'est la suite $6 \times 3 = 18$, $6 \times 2 = 12$, $6 \times 1 = 6$, $6 \times 0 = 0$ qui suggère la définition $6 \times (-1) = -6$. Une même argumentation permet d'amener $(-3) \times 6$ et $(-6) \times (-3) = 18$, ainsi que $6 + (-3)$ lors de la division. Ces suites ne constituent pas un calcul spécifique à des situations, ni une preuve de la règle des signes. Il s'agit d'un argument qui suggère la définition de cette règle, ce qui est suffisant sur le plan logico-mathématique, même si cette définition ne précise pas le sens à donner à toutes les opérations engendrées par ces suites (Lacasse, 1997).

En ce qui concerne les items $6 + 0$ et $0 + 0$, ces expressions n'ont pas le même statut épistémologique que les autres, comme le fait remarquer Lacasse (1997). Les mathématiciens ne leur accordent aucun sens, ce qui rend leur emploi problématique puisqu'on peut sembler leur donner, aux yeux des élèves, un statut qu'elles n'ont pas en tant que représentation d'un nombre. S'il n'y pas d'inconvénient à demander aux élèves le sens qu'ils donnent aux expressions $6 + 0$ et $0 + 0$, il peut être hasardeux de confondre la précision du zéro avec l'imprécision d'un arrondissement au niveau de représentations analogiques. Zéro (0) est un nombre précis qui possède des propriétés particulières et l'analyse de valeurs qu'on néglige par arrondissement font appel à d'autres concepts mathématiques, tels la limite d'une suite, la convergence d'une série, etc.

En accord avec ces réserves, l'expérimentateur expliqua aux élèves que le résultat

de ces opérations dépendait de règles mathématiques. Il leur présenta les analogies qui s'y rapportent comme des moyens de mieux comprendre et/ou de mieux se rappeler pour une utilisation subséquente, considérant avec Wong (1993) qu'une analogie n'est jamais la représentation parfaite d'un phénomène et qu'elle agit plutôt comme un outil de croissance conceptuelle, un moyen plutôt qu'une fin dans le processus de compréhension.

L'administration des post-tests d'application et de vérification

Le post-test personnalisé d'application, qui ne contenait que les items correspondant aux erreurs de chaque élève aux pré-tests de calcul et de résolution de problèmes, fut administré en entier à la fin de l'entrevue, ou en deux ou trois sections pendant l'intervention formative. Le nombre et le moment des applications ont été déterminés par le nombre et la nature des erreurs identifiées dans les pré-tests de chacun.

Parallèle au post-test précédent, le post-test personnel de vérification ne contenait que les items erronés aux pré-tests de calcul et de résolution de problèmes. Il fut administré en salle de classe, exactement 2 semaines après la dernière entrevue et un peu plus de 5 semaines après sa première administration comme pré-test pour chacun des groupes. Il fut repris le lendemain par les absents.

L'utilisation des fiches de cueillette de données

La fiche de renseignements servit d'introduction à chacune des entrevues individuelles. L'expérimentateur compléta le formulaire en faisant connaissance avec le sujet. L'expérimentateur compléta également une fiche d'observations "au vol" et une fiche-synthèse d'événement pour chacune des étapes de la procédure, qu'il s'agisse de l'administration collective d'un test ou d'une entrevue individuelle.

La préparation des données

La transcription des protocoles verbaux concourants

Les enregistrements sonores des entrevues furent transcrits verbatim sur ordinateur en utilisant le traitement de texte WordPerfect, version 5.1. Selon les procédures

recommandées par Ericsson & Simon (1993), ces transcriptions incluent les pauses, hésitations, exclamations, interrogations et phrases inachevées qui caractérisent les verbalisations des participants. Une filière fut allouée à chaque entrevue. Ces filières furent identifiées avec le niveau de l'élève et l'ordre selon lequel il fut rencontré. Ainsi la référence "7G/D2" indique qu'une citation provient de la 2^{ième} page de la section-division du protocole verbal du 7^{ième} élève de niveau général rencontré en entrevue.

Le développement de la grille de codage des productions métaphoriques

Les critères d'évaluation des productions métaphoriques furent établis lors d'une étude-pilote qui explorait l'utilisation de la métaphore pour évaluer les objectifs de synthèse en mathématiques (Kelly-Bégin, 1990). Les experts de cette étude étaient quatre enseignants ayant chacun plus de 10 années d'expérience dans l'enseignement des mathématiques au secondaire. Leur tâche était de procéder à l'évaluation de 6 modèles métaphoriques du système des nombres entiers relatifs. Ce faisant, les sujets furent priés de verbaliser toutes pensées relatives à la tâche d'évaluation, à ses critères ou à la technique utilisée à mesure qu'ils procédaient.

Les 6 modèles évalués avaient été sélectionnés à partir des productions d'une classe de 23 élèves de 10^e année de niveau avancé de calibre moyen-faible, selon les critères suivants:

- leur représentativité quant à la forme: 3 modèles uniques et 3 modèles mixtes,
- la diversité des cibles choisies (modèles uniques: jeux de poker, de Snakes & Ladders et de Monopoly; modèles mixtes: température et compte de banque, monnaie et billes, thermomètre, argent et marche),
- la compétence en mathématiques des élèves qui avaient produit ces modèles: 2 élèves forts, 2 élèves moyens et 2 élèves faibles.

Les enseignants-experts de l'étude-pilote furent rencontrés individuellement. Afin de minimiser les biais, ils ne furent informés ni des fondements théoriques soutenant la recherche, ni des critères ayant présidé à la sélection du matériel à évaluer. Les productions métaphoriques furent présentées à chacun dans un ordre différent afin d'éviter l'apparition d'effets imputables à l'ordre de correction. Ils reçurent la consigne d'établir leurs propres critères et de procéder à l'évaluation des 6 productions comme s'ils les

avaient eux-mêmes prescrites à des élèves de 10^e année. La contrainte de répartir une note globale de 10 points sur les 14 énoncés de chacune des productions fut imposée afin d'éviter une évaluation individuelle des énoncés qui aurait négligé l'aspect synthétique des productions. Cette mesure permettait également de déterminer la gravité des diverses violations aux critères d'évaluation.

Les protocoles verbaux concourants de ces évaluations furent enregistrés sur bandes sonores et transcrits verbatim afin d'en disposer pour analyse. Plusieurs auteurs ont suggéré que les transcriptions de protocoles verbaux doivent être traitées avec soin, de crainte que l'interprétation des données n'altère, néglige ou même rehausse certains aspects du comportement (Ericsson & Simon, 1993; Rowe, 1985; Schoenfeld, 1985). Selon Newell & Simon (1972) et Rowe (1985), on augmente l'objectivité de l'analyse si les catégories sont déterminées à partir des données, plutôt qu'imposées sur celles-ci. En conséquence, la grille de codage des productions métaphoriques fut développée selon les procédures prescrites par Ericsson & Simon (1993).

Afin de générer les critères spécifiques qui sont inclus dans la grille de codage, les protocoles des enseignants-experts furent analysés dans le but de dégager les définitions de leurs critères d'évaluation et l'utilisation qu'ils en faisaient. Ces données furent compilées sous forme de tableaux comparatifs afin de déterminer l'accord des 4 juges sur les critères globaux devant présider à l'évaluation des 6 productions ainsi que sur les critères individuels concernant chacun de leurs 14 énoncés.

Il s'avéra que les critères utilisés naturellement par les enseignants correspondaient aux critères de validité explicative proposés par Gentner (1982) pour différencier l'analogie scientifique descriptive et prédictive de l'analogie littéraire expressive. Ces derniers critères furent donc adoptés comme catégories de base pour le codage des protocoles verbaux. Il s'agit de:

- la clarté: mesure de la précision des correspondances entre les deux systèmes,
- la validité: mesure de la justesse conceptuelle de ces correspondances,
- la richesse: mesure de la quantité de ces correspondances,
- la systématique: mesure de l'isomorphisme des contraintes des relations entre les deux systèmes,

- l'abstraction: mesure du niveau des relations entre les systèmes.

Les trois premiers critères, de nature individuelle, s'adressent à chacune des correspondances établies à l'intérieur des systèmes comparés. Les deux derniers, de nature globale, concernent les systèmes en entier.

En appliquant ces critères, les enseignants-experts leur apportèrent cependant de nombreuses précisions et distinctions qui s'appliquent plus spécifiquement aux mathématiques. Celles qui reçurent un accord majoritaire furent organisées en catégories, selon les critères auxquels elles se rapportent. De cette façon, les cinq critères initiaux furent subdivisés pour créer dix critères d'évaluation définitifs. Par exemple, le critère de validité fut précisé selon trois aspects spécifiques des productions concernées: validité externe de l'importation analogique, validité conceptuelle de l'énoncé et validité mathématique. Ainsi, les critères proposés par Gentner (1982) spécifient la perspective avec laquelle les données ont été analysées, mais ce sont les données elles-mêmes qui ont déterminé les catégories spécifiques à être codées. Ces catégories répondent ainsi aux besoins particuliers de l'évaluation des productions métaphoriques en mathématiques.

La grille de codage des productions métaphoriques

La matrice fournie par les dix critères définitifs d'évaluation fut transformée en une grille de codage, où les définitions des critères furent accompagnées d'une description diagnostique de chacune des violations majeures et mineures qu'ils proscrivent. Des exemples-prototypes de chaque violation, provenant des productions évaluées, furent également inclus afin d'illustrer la façon dont chaque critère pouvait être appliqué à des données. Certaines de ces violations y sont également identifiées par un code afin de faciliter l'analyse de données.

Il est à noter qu'une violation majeure est une déficience qui infirme la validité explicative d'une métaphore pour représenter un concept. Par contre, une violation mineure est une déficience qui indique certaines limites au niveau de l'utilisation d'une métaphore pour représenter un concept, limites qui à elles seules ne pourraient invalider l'explication. C'est à partir de la qualité et de la quantité de ces violations que les métaphores ont été évaluées comme:

- parfaite (MP): aucune violation,
- bonne (MB): une ou plusieurs violations mineures,
- approximative (MA): une violation majeure,
- erronée (ME): plus d'une violation majeure.

Le tableau 11 présente une version condensée de la grille de codage définitive (Appendice D-1). On y retrouve les définitions et les codes des critères d'évaluation. L'appellation double des critères en identifie les fondements, la première faisant référence à leur origine théorique et la seconde répondant aux distinctions fournies par les évaluateurs. Un exemple de violations majeure et mineure de chacun de ces critères accompagne ici leur définition. Il est à noter que les violations majeures sont codées en caractères gras, alors que les violations mineures le sont en caractères réguliers. Il est également à noter qu'une analogie, fournie en exemple, peut violer plus d'un critère. Pour faciliter le repérage des violations, elles ont été ici soulignées autant que possible. Plusieurs autres sortes de violations à chacun des critères d'évaluation ont été identifiées par les enseignants-experts; la liste complète de ces violations, leur description détaillée ainsi que des exemples de chacune sont fournis à l'Appendice D-1.

La grille de codage des conceptions identifiées au niveau des analogies

Pour établir cette grille de codage, tous les énoncés provenant des productions métaphoriques des élèves ont été examinés et regroupés en catégories de conceptions similaires. Les catégories ainsi obtenues ont été comparées aux listes de conceptions identifiées par Brousseau (1987) et Vergnaud, Cortes & Favre-Artigue (1987) au niveau des opérations sur les nombres relatifs. De ces listes, les types de conceptions qui recouvraient le plus économiquement les catégories fournies par les données furent extraites afin de servir d'identification à ces catégories. Quelques appellations furent créées pour accommoder les catégories restantes: telles la "comparaison" en multiplication, les conceptions "mixtes" et "indéterminées". Toutes les multiplications, qu'elles représentent un rassemblement simultané ou répété d'éléments, furent incluses sous l'appellation "combinaison".

Des définitions ont ensuite été formulées pour décrire les éléments-clés des

Tableau 11: Codes et définitions des critères d'évaluation des productions métaphoriques

Critère d'évaluation	Code* & exemple de violation	Exemple-prototype
Clarté / précision des correspondances Précision avec laquelle les éléments de l'importation sont définis dans l'énoncé pour correspondre à chacun des éléments de la situation représentée.	{CI/pré} Attribution erronée de signes prédicatifs. {CI/pré} Absence de clarification ("parts égales") qui rend le résultat ambigu.	3 X (-6): "J'ai <u>perdu 3 jetons à chaque des 6 matchs</u> . D'abord, j'ai perdu 18 jetons." (3G/M1) 6 + 3: "J'ai 6 livres que j'ai déjà lus. Je veux les donner à mes 3 amies. Elles en auront chacune 2." (14A/D1)
Clarté / suffisance Suffisance de l'importation à représenter la totalité de la situation de base sans recours à des éléments de celle-ci.	{CI/suf} Déficience de la description analogique au niveau des signes prédicatifs.	(-6) + 3: "Si <u>tu as -6 pommes</u> et que tu les partages entre 3 personnes égal, cela donne combien de pommes par personnes? -2." (12G/D1)
Clarté / univocité des correspondances Constance de la correspondance établie entre une importation et l'élément qu'il représente à l'intérieur d'un même énoncé ou d'un énoncé à l'autre.	{CI/uni} Expression qui laisse sous-entendre un résultat différent. {CI/uni} Ambiguïté quant à la signification d'un élément de l'importation.	-3 - 6: "Je dois 3 jetons, j'en perds 6. <u>Combien m'en reste-t-il?</u> -9. (3 raturé)" (17G/AS6) (-6) + (-3): "Je dois 6\$ et je fais des <u>paiements</u> de 3\$. Combien de paiements dois-je faire? 2 paiements?" (5A/D3)
Validité de l'importation Vraisemblance de l'importation comme descripteur de la situation de base.	{Va/imp} Inefficacité de la conception utilisée pour expliquer l'opération. {Va/imp} Invraisemblance d'un élément de l'importation.	-3 - (-6): "Georges doit 3 autos à Joe, mais Georges lui <u>en doit pas</u> 6. Georges se trouve avec 3 autos." (4A/AS4) 6 + 3: "Tu vas au magasin et tu vois quelque chose que tu aimes pour 6\$. Tu as seulement des <u>billets de 3\$</u> (...) Combien de billets de 3\$ dois-tu utiliser?" (2G/D1)

... à suivre

Tableau 11 (suite)

Critère d'évaluation	Code* & exemple de violation	Exemple-prototype
Validité conceptuelle de l'énoncé Justesse conceptuelle de l'énoncé.	{Va/con} Le résultat correct ne découle pas de l'énoncé potentiellement correct.	0 X 3: "Lise devait faire un calcul mathématique, 3 fois. Mais, elle ne l'a pas fait. Donc, <u>sa réponse était 0</u> ". (18A/M3)
	{Va/con} Une réponse absolue suit un énoncé relatif.	3 X 6: "Un ascenseur <u>a monté 3 fois 6 étages</u> . Alors, l'ascenseur <u>se trouve à la 18ième étage</u> ." (21A/M1)
Validité mathématique Justesse du calcul.	{Va/mat} Le résultat de l'opération représentée est erroné.	(-3) X 6: "J'ai emprunté 3\$ et j'ai gagné 6 fois le nombre que j'avais emprunté. = <u>18</u> ." (21G/M2)
	{(Va/mat)} Le résultat erroné a été changé pour le résultat juste à la suite de la rédaction de l'analogie.	-3 - 6: "...je dois à la banque 3\$, puis 6\$... donc, en tout, je dois 9\$. = -9 (<u>-3 raturé</u>).". (11G/AS6)
Richesse-densité des importations Quantité d'importations provenant d'un même modèle.	{Ri/den} Changement de modèle à l'intérieur d'une même catégorie d'opérations.	(-6) + 3: "Je dois un total de 6\$ à 3 amis. Alors, je dois 2\$ à chacun de mes amis." (2A/D1)
		(-6) + (-3): "La température descend de 6°, dans l'espace de 3 heures. Alors, il y a... il a descendu de 2° à chaque heure. (Rz = 2)" (2A/D3)
	2{Ri/den} Changement de modèle d'une catégorie d'opérations à une autre.	3 X 6: "Si l'ascenseur est au 3ième étage et elle monte 6 fois plus haut, elle va être au 18ième étage." (9G/M1)
		6 + 3: "Si j'ai 6 billes et on... et on est 3 personnes, on va avoir 2 billes chaque." (9G/D1)

... à suivre

Tableau 11 (suite)

Critère d'évaluation	Code* & exemple de violation	Exemple-prototype
Richesse du détail Présence de détails qui ne recèlent aucune valeur de vérité nécessaire à l'importation, mais qui ajoutent à sa plausibilité.	{Ri/dét} Omission empêchant de vérifier l'utilité d'une conception juste. {Ri/dét} Omission d'un détail pertinent à la résolution de la situation (remise de l'argent d0).	0 + 3: "Je n'ai pas de l'argent, mais <u>combien de 3 est-ce qu'il y a en 0?</u> Y en a pas." (10G/D5) -6 + 3: "Je devais... (...)6\$, puis j'en ai gagné 3. (...) Ca fait que je dois juste 3\$." (4G/AS2)
Systématicité Un "mapping" est systématique quand n'importe quelle correspondance peut être dérivée ou au moins partiellement contrainte par les autres.	{Sy} Représentation de la soustraction d'un négatif en terme d'addition.	3 - (-6): "Je commence la joute avec une dette de 3\$. La prochaine main me donne une fortune lorsque <u>je gagne 6\$</u> . Je paie ma dette de 3\$ et je finis avec 3\$." (3A/AS3)
Systématicité-Abstraction Les contraintes entre correspondances du premier degré peuvent être explicitement représentées comme des relations du second degré, ce qui engendre une hiérarchie de niveaux qui définit l'abstraction d'un "mapping".	{Sy-Ab} Représentation de la multiplication en termes d'additions répétées.	3 X (-6): "Tu dois <u>6 billes à ton frère, 6 à ta soeur et 6 à ton voisin.</u> (...) -18." (8A/M3)

* Les violations majeures ont été codées en caractères gras alors que les violations mineures l'ont été en caractères réguliers.

énoncés regroupés dans chacune des catégories de conceptions. Cette matrice fut alors transformée en grille de codage (Appendice D-2) où les codes et définitions des conceptions sont accompagnés d'un échantillon représentatif d'exemples-prototypes de chacune des opérations que fournissent les données. Le tableau 12 présente une version condensée de cette grille.

La grille de codage des lois mathématiques et des obstacles épistémologiques

Cette grille a été élaborée au fur et à mesure du codage des protocoles verbaux. Un item y fut ajouté à chaque nouvelle loi mathématique qu'un élève démontrait et/ou énonçait et à chaque obstacle épistémologique qu'il rencontrait ou essayait de contourner.

Ainsi, comme on peut le constater au tableau 13, toutes les lois utilisées dans les opérations mathématiques furent numérotées par genre d'items et codées sous forme algébrique, afin de faciliter l'identification des patrons de solution au niveau des items similaires. Ainsi, le code "3b" identifie un item de type "3 - 6", codé correctement sous la forme " $x - Y$ ". Le "x" indique le premier chiffre et le "y" indique le second. De même, la minuscule indique le nombre inférieur et la majuscule indique le nombre supérieur. Quand la loi utilisée pour résoudre l'item enfreignait la théorie mathématique établie, l'erreur était décrite de façon abrégée. Ici, le code "3b[L:Y-x=S+]" signifie que la loi (L) utilisée représente une inversion où l'on soustrait (S) le nombre inférieur du nombre supérieur (Y-x), pour obtenir une réponse positive (+) de la façon suivante: $6 - 3 = 3$.

Une catégorie de lois conflictuelles (LC) fut créée afin de différencier les lois justes généralisées incorrectement des lois inventées. Ainsi, le code "2b[LC:-/+=-]" indique que la loi de la multiplication-division, qui veut qu'un signe négatif et un signe positif entraînent un résultat négatif, a été généralisée à l'addition-soustraction pour un item de type " $-3 + 6$ ". Il est à noter qu'afin de faciliter l'analyse des données, la numérotation utilisée ici pour identifier les items accompagne aussi tous les autres codes relatifs à ces mêmes items, qu'ils proviennent de l'une ou l'autre des grilles de codage.

Les obstacles épistémologiques relatifs à ces erreurs furent ensuite repérés à la lumière des définitions déjà opérationnalisées par les chercheurs. Ceux qui s'y prêtaient furent alors identifiés selon les répertoires d'erreurs mathématiques déjà établis par ces

Tableau 12: Codes et définitions des types de conceptions identifiées dans les analogies

Conception	Code	Exemple-prototype
ADDITION-SOUSTRACTION		
Transformation Modification linéaire d'une mesure ou d'une quantité d'éléments similaires par un événement subséquent, e.g. augmentation, diminution.	[Trans]	-6 + 3: "Il manque 6 personnes à un party. 3 personnes arrivent en autobus. Combien manque-t-il de personnes au party? Il manque 3 personnes." (5A/AS1).
Relation Rapport linéaire de quantités d'éléments similaires, e.g. bilan, comparaison.	[Rel]	-3 - 6: "Dominique a une dette de 3\$ et une autre dette de 6\$. Maintenant sa dette au total est de 9\$." (1A/AS3)
Abscisse Détermination de l'écart entre deux coordonnées de l'abscisse ou de l'ordonnée, e.g. différence.	[Abs]	-3 - (-6): "Hier, il faisait -3°C. Aujourd'hui, il fait -6°C. La différence est de -9°C." (19G/AS10)
Mixte Interaction de deux conceptions au niveau de la représentation d'une même opération.	[Trans+Abs]	6 - 3: "Si l'ascenseur est au 6ième étage et elle descend de... au 3ième étage, elle a descendu (...) de 3 étages." (9G/AS6)
MULTIPLICATION		
Combinaison Rassemblement de quantités égales d'éléments similaires dont l'avènement est répétitif ou simultané.	[Comb]	3 X 0: "Un bâton de baseball se fait swigner 3... eh, 3 fois, mais la balle ne le frappe pas. Donc, le bâton a été frappé 0." (6G/M4)
Comparaison Rassemblement de quantités égales d'éléments similaires qui se répètent ou sont rassemblés simultanément en comparaison avec un événement antérieur.	[Comp]	3 X 6: "...dans une journée, mon amie Justine a gagné 3 joutes de billes. Et moi, j'en ai gagné 6 fois plus qu'elle. Combien de joutes ai-je gagnées? (...)" 18." (10A/M1)
Soustractions répétées Rassemblement linéaire d'une série de quantités égales d'éléments similaires dont l'avènement est répétitif et/ou simultané.	[SoustRép]	3 X (-6): "La mère à Julien a acheté un sac de pommes. Julien mange 6 pommes la première journée. Ensuite, il mange 6 pommes la seconde... et 6 pommes, la troisième. Julien doit remettre 18 pommes avant que sa mère le sache." (15A/M1)

... à suivre

Tableau 12 (suite)

Conception	Code	Exemple-prototype
DIVISION		
Valeur d'une part Partage d'une quantité d'éléments similaires qui détermine la valeur de parts égales dont le nombre est défini.	[Vpart]	(-600) + 3: "Lors d'un party, 3 filles ont cassé la télévision de 600\$. (...) Ils doivent tout payer pour la télévision, et payer le montant égal de 200\$ chaque." (19A/D2)
Nombre de parts Partage d'une quantité d'éléments similaires qui détermine le nombre de parts égales dont la valeur est définie.	[Nparts]	6 + 3: "S'il y a 6 life savers et tu les mets en groupes de 3. (...) Combien que t'as de groupes? Ben, ça fait 2." (13G/D1)
Soustractions répétées Partage d'une quantité d'éléments similaires qui détermine le nombre de parts sous forme d'une série de soustractions de parts égales.	[Soustrép]	6 + 3: "Un ascenseur contient 6 personnes. A chaque étage, 3 personnes débarquent de l'ascenseur. Elle a dû prendre 2 étages jusqu'à ce que l'ascenseur se vide." (15G/D1)
Opération Inverse Division conçue comme une extension de la multiplication.	[OpInv]	6 + 3: "Il y a 6 familles dans une maison. Il y a 3 fois moins... de, de familles? = 2." (17G/D1)
Mixte Interaction de deux ou trois conceptions au niveau de la représentation d'une même opération.	[Vpart+OpInv]	6 + 3: "Il fait 6°C. Pendant 3 heures, la température augmentait de 2°C chaque heure." (19G/D1)
	[Nparts+OpInv]	(-6) + (-3): "J'ai commencé avec 0\$ et j'ai perdu 3\$ 'x' fois pour faire un total de -6\$. Je m'aperçois que j'ai joué 2 joutes." (3A/D2)
	[Vpart+Soust rép+Nparts]	6 + 3: "Tu as acheté 6 billes. Ta mère dit de les partager avec ta soeur en parts égales. Tu en as (...) 3. Elle en a 3. Tu as séparé le paquet de billes en 2." (8A/D1)
Indéterminée Conception dont il est impossible d'extraire une opération.	[Ind]	0 + 3: "Natalie a 0\$. Elle fait une histoire et dit qu'elle doit 3\$ à 2 de ses amis. Mais en réalité, elle a quand même 0\$." (17A/D7)

Tableau 13: Codes et définitions des lois mathématiques et obstacles épistémologiques

Loi et obstacle	Exemple de code	Explication du code
Loi mathématique (Éléments et Séquence) Description des procédures utilisées pour effectuer un calcul.	3b[L:Y-x=S+]	3b,5a,5b,8,13,: identification de l'item
	5a[L:-Y-x=A-]	x: 1er terme / y: 2e terme
	5a[L:x-(-Y)=X+]	Majuscule: le plus grand terme Minuscule: le plus petit terme
	8[L:-xXY=S-]	=+ : résultat positif / -= : résultat négatif
	8[L:-xXY=+]	=S+: résultat positif d'une soustraction =A-: résultat négatif d'une addition =X+: rés. positif d'une multiplication
	13[L:-Y+x=-]	
Loi conflictuelle Généralisation d'une loi, où une vérité absolue est attribuée à des règles particulières.	5b[L:X-y/=-S-] (procédure)	L'opération est effectuée et le signe de la réponse est ensuite déterminé par une procédure.
	[LC: /+=-]	Un signe négatif et un signe positif entraînent un résultat négatif, e.g. $-3 + 6 = -9$.
	[LC: par=X]	Une parenthèse entraîne nécessairement une multiplication, e.g. $3 - (-6) = 18$.
Obstacle épistémologique d'ordre perceptuel L'habitude de calculer dans un autre système de nombres entraîne des procédures erronées au niveau de la résolution des opérations sur les nombres entiers relatifs.	[OPC:-(x+Y)]	L'addition ou soustraction dans le système des nombres naturels entraîne une associativité erronée, e.g. $-3 + 6 = -(3 + 6)$ et $-6 - 3 = -(6 - 3)$.
	[OPC:-(X-y)]	
Obstacle épistémologique d'ordre conceptuel Toute conception dérivée de l'expérience personnelle qui entre en conflit avec l'utilisation et la résolution efficaces des opérations sur les nombres entiers relatifs, selon la théorie mathématique établie.	[OC:N(G-p)=Inv]	La soustraction en nombres naturels entraîne une inversion, e.g. $-3 - 6 = 6 - 3$.
	[OC:0 abs]	Le zéro(0) est absolu et ne permet pas de réponse qui lui soit inférieure, e.g. $0 - 3 = 0$.
	[OC:lolX+] [OC:lol+-]	Application d'une loi pertinente à une autre catégorie d'opérations.
	[OC:NégDéb→X+]	Un nombre négatif initial entraîne une multiplication et un résultat positif, e.g. $-3 + 6 = (-3) \times 6 = 18$.
	[OC:-(=-)]	Les deux signes de la notation sont confondus en un seul, e.g. $3 - (-6) = 3 - 6$.
	[OC:DrUnif]	Calculs effectués exclusivement du côté négatif ou positif de la droite dirigée.

chercheurs. Ainsi, le code "[OC:N(G-p)=Inv]" indique l'obstacle créé par la soustraction dans le système des nombres naturels, où le plus petit nombre est soustrait du plus grand nombre, entraînant une inversion de type " $3 - 6 = 6 - 3$ ". Les obstacles ne se rapportant pas à ces répertoires furent identifiés d'une abréviation du nom de la notion mathématique qui entraine en conflit avec une exécution efficace des tâches assignées. Ainsi, la loi originale qui veut qu'un nombre inférieur négatif initial entraîne un résultat positif dans une multiplication a été codée "[OC:NégDéb→X+]".

Ces obstacles épistémologiques furent classés en deux catégories, les obstacles d'ordre perceptuel et les obstacles d'ordre conceptuel, afin de permettre une distinction importante qui semble avoir été ignorée jusqu'ici par les chercheurs. Les obstacles d'ordre perceptuel qui relèvent tous d'une associativité erronée ont été codés conformément au patron utilisé. Ainsi, le code "[OPC:-(x+Y)]" signifie qu'un item de type " $-3 + 6$ " a été perçu sous la forme $-(3 + 6)$. Dû à leurs grands nombres, les obstacles d'ordre conceptuel (OC) furent différenciés selon les catégories suivantes: système des nombres naturels (OC:N); zéro et nombres absolus (e.g., OC:0abs); lois et conceptions pertinentes à d'autres opérations (e.g., OC:loiX+); notations (OC:not); lois et conceptions originales (e.g., OC:NégDéb→X+); autres conceptions, lois et procédures (e.g., OC:DrUnif).

Des descriptions ont ensuite été formulées pour décrire les lois et les obstacles identifiés. Cette matrice fut alors transformée en grille de codage (Appendice D-3) où ces descriptions et les codes qui s'y rapportent sont accompagnés d'exemples. Le tableau 13, qui précède, présente une version très condensée de cette grille. Suivant la description du codage général des lois, seulement quelques exemples des autres catégories y sont cités.

La grille de codage des degrés de certitude et des raisons qui les supportent

Les degrés de certitude, par lesquels les élèves portaient un jugement quant à la justesse des éléments inclus dans chacune de leurs analogies, ont été codés selon les définitions qui leur en avait été données en première page du test métaphorique. Afin de faciliter l'analyse de données, un symbole indiquant le statut réel de l'analogie tel qu'établi lors de l'évaluation des productions métaphoriques fut ajouté à chacun de ces codes. Les raisons fournies par les élèves pour justifier leurs degrés de certitude furent

codées selon les mêmes critères d'évaluation des productions métaphoriques qui ont été définis et utilisés précédemment afin de faciliter la comparaison des évaluations lors de l'analyse des données. Ainsi, au tableau 14, le code "1(C4:M+)" signifie que l'élève a accordé un degré de certitude de 4 (certitude) à une analogie parfaite au 1er item, en invoquant que le critère de validité mathématique avait été rencontré (M+). De même, le code 6*♦(C0:P-) signifie que l'élève a accordé un degré de certitude de 0 (certitude contraire) à une analogie dont la conception (*) et la réponse (♦) étaient erronées au 6ième item, en invoquant que le critère de précision n'avait pas été respecté (P-).

Les raisons qui n'entraient pas dans les catégories précédemment définies ont ensuite été identifiées selon leur contenu particulier pour former une autre catégorie. Par exemple, le code "for-" signifie que la formulation de l'énoncé a été jugée syntaxiquement inadéquate. Comme la plupart des élèves n'évoquaient qu'un seul critère pour justifier un degré de certitude, seulement le critère dominant fut retenu lors des évaluations multiples.

Des descriptions ont ensuite été formulées pour expliquer chacun des critères selon l'utilisation qu'en faisaient les élèves. Cette matrice fut ensuite transformée en grille de codage (Appendice D-4) où ces descriptions et les codes qui s'y rapportent sont accompagnés d'exemples-prototypes. Le tableau 14 présente une version très condensée de cette grille. Il ne fournit que la liste des codes utilisés et une brève description de chacun. Les critères d'évaluation n'y ont pas été définis puisqu'ils l'avaient déjà été lors d'une précédente section (voir tableau 11).

Le codage des protocoles verbaux concourants

Les protocoles verbaux furent codés entièrement sur ordinateur selon les procédures suivantes:

- (1) Les protocoles furent divisés en trois sections selon les catégories d'opérations concernées: addition-soustraction, multiplication et division. Chaque section fut codée séparément, i.e. que la section concernant l'addition-soustraction fut codée pour tous les élèves avant de procéder à la section suivante.
- (2) Chacune des grilles de codages fut appliquée indépendamment à chaque section selon l'ordre suivant:

Tableau 14: Codes et descriptions des degrés de certitude et des raisons qui les supportent

Définition	Code	Description
Degré de certitude		1, 2, 3, etc.: numéros de l'item
Jugement évaluatif que l'élève porte sur la justesse de tous les éléments inclus dans la métaphore qu'il a produit pour expliquer une opération.	1(C4:M+) 2=(C3:s-) 4=(C2:inc) 5*(C1:C-) 6*♦(C0:P-) 7(C?)	C4 : certitude C3 : confiance C2 : incertitude C1 : méfiance C0 : certitude contraire C? : absence de degré de certitude
	3(C2↑4:I+) 8=(C4↓:U-)	↑ : augmentation du degré de certitude ↓ : diminution du degré de certitude
	4*(C3:I?)	M+,I+: justification positive selon le critère s-,P-: justification négative selon le critère I? : doute exprimé selon le critère
		<u>Statut de la métaphore correspondante</u>
		: parfaite (aucun symbole) = : bonne ≈ : approximative * : conception erronée ♦ : réponse erronée
Justification*		<u>Critères d'évaluation</u>
Raison évoquée par l'élève pour justifier son degré de certitude.	P, p U s	Clarté / précision Clarté / univocité Clarté / suffisance
	I C M	Validité de l'importation Validité conceptuelle de l'énoncé Validité du résultat mathématique
		<u>Autres</u>
	for loi inc	Formulation de l'énoncé jugée inadéquate Référence à une loi mathématique Incertitude sans référence à un critère
	aff ? aut	Réaffirmation forte du degré Aucune raison Autres

* Une majuscule fait référence à une violation majeure de ce critère et une minuscule se réfère à une violation mineure.

- évaluation des productions métaphoriques,
 - identification des conceptions,
 - détermination des degrés de certitude et des raisons qui les supportent,
 - identification des lois,
 - identification des obstacles épistémologiques.
- (3) Lors de chacun de ces codages,
- i) Chaque section fut lue en entier afin de situer le codage dans le contexte de la sorte d'opérations concernée.
 - ii) La procédure de codage resta ouverte à la formation de nouvelles catégories et les nouveaux codes furent ajoutés au fur et à mesure que le nécessitaient les données, comme il a déjà été mentionné.
 - iii) Des fichiers furent créés pour chacune des opérations de la section concernée et les extraits codés de chacun des protocoles se rapportant à cette opération y furent rassemblés.
 - iv) Le codage des items similaires de chaque fichier fut comparé, et normalisé au besoin, afin d'assurer l'attribution uniforme des codes. Cette mesure avait pour but d'éviter les glissements de codage ainsi que de garantir la pertinence des nouvelles catégories de codes.
- (4) Quand la normalisation de chacun de ces codages fut terminée, les protocoles furent revus dans une perspective de codage global afin d'établir les liens existant entre les éléments mis en évidence par chacun des codages individuels. Ce codage permit d'éclairer la signification de certaines portions de protocoles qui pouvaient être ambiguës, ainsi que d'identifier les relations de cause à effet. Ces relations se traduisirent, soit par l'émergence de codes doubles au niveau d'un même élément, soit par l'établissement de codes combinés. Ces codes furent ajoutés aux diverses grilles de codage quand ils déterminaient une nouvelle catégorie ou qu'ils spécifiaient un nouvel aspect d'une catégorie déjà existante.
- On peut retrouver l'exemple d'un protocole codé à l'Appendice E.

Le codage et le pointage des tests de calcul et de résolution de problèmes

Les codes définis dans la grille de codage des lois mathématiques furent utilisés afin de spécifier la nature qualitative des réponses aux tests de calcul ainsi que des solutions et réponses des tests de résolution de problèmes.

Ces tests ont également reçu un pointage selon le barème suivant:

- (1) Un point fut alloué à chacun des items des tests de calcul. Le point fut accordé pour une réponse exacte; une réponse erronée entraînant un pointage de zéro (0).
- (2) Deux points ont été alloués à chacune des solutions des items des tests de résolution de problèmes.
 - i) Les deux points furent accordés à une solution où la notation (signes prédictifs des termes) correspondait exactement à la situation décrite par le problème et dont la structure (ordre des termes et signes opérationnels) permettait de répondre correctement à la question posée par ce problème.
 - ii) Un point fut accordé à une solution dont la structure (ordre des termes ou signes opérationnels) ne démontrait qu'une maîtrise partielle du concept sous-jacent à la résolution correcte de ce problème. Ces cas regroupent des inversions de termes ou de signes au niveau des problèmes demandant une soustraction de nombres négatifs et une division.

L'organisation et la consolidation des données

Toutes les données qualitatives et quantitatives ont été synthétisées sous forme de matrices afin de dégager et de comparer les tendances et configurations significatives (Huberman & Miles, 1991).

Lors d'une première étape, les résultats provenant de tous les pré-tests et posts-tests furent rassemblés et classés sous la forme d'une fiche-synthèse des résultats pour chaque élève. Cet outil permet de comparer les résultats aux items parallèles provenant des différents tests et de déterminer l'évolution de ces résultats d'un genre d'items à un autre. Un exemple de la première page de cette fiche se retrouve en Appendice F-1.

Lors d'une seconde étape, ces résultats furent codés. Ces codes et ceux provenant des protocoles verbaux concourants furent rassemblés sous la forme d'une fiche-synthèse diagnostique pour chaque élève. Cette fiche poursuit les mêmes buts que la précédente, tout en facilitant l'analyse des données au niveau des codes. Un exemple de la première page de cette fiche se retrouve à l'Appendice F-2.

Finalement, toutes les données des fiches-synthèse diagnostiques furent rassemblées sous la forme de plusieurs fiches-synthèse pour chaque niveau, où les résultats de tous les élèves de ce niveau sont mis en parallèle pour chacune des questions à l'étude. Il s'agit, pour chaque groupe (avancé et général) de:

- trois fiches-synthèse des résultats aux tests de calcul (pré-test, application, vérification)
- trois fiches-synthèse des résultats aux tests de résolution de problèmes (pré-test, application, vérification)
- une fiche-synthèse des évaluations des productions métaphoriques
- une fiche-synthèse des degrés de certitude et des raisons qui les supportent

Ces fiches permettent des comparaisons intra-niveau et inter-niveaux de tous les résultats des élèves. La première page d'une de ces fiches-synthèse se retrouve à l'Appendice F-3.

Des couleurs furent également utilisées au niveau de toutes ces fiches afin de faciliter le repérage des diverses tendances.

L'analyse des données

L'objectif général de la présente recherche est d'explorer le potentiel d'une méthodologie métaphorique "structure mapping", accompagnée d'une spécification de degrés de certitude, comme instrument de diagnostic des erreurs épistémologiques et comme outil de changement conceptuel. Pour réaliser cet objectif, les analyses de données visaient à documenter les sujets suivants, soit la validité du test métaphorique, l'efficacité de l'intervention formative, l'utilité de la spécification de degrés de certitude et la comparaison des résultats de la méthodologie proposée selon le niveau académique.

La validité du test métaphorique comme instrument de diagnostic des erreurs et obstacles épistémologiques

Une validation est un processus où des évidences sont rassemblées dans le but de supporter les types d'inférences qui seront tirées des résultats d'un instrument de mesure afin de déterminer si cet instrument mesure bien ce qu'il doit mesurer (Cronbach, 1971). Comme il existe plusieurs types de validation, la question de la validité du test métaphorique pour diagnostiquer les erreurs épistémologiques fut abordée par le biais d'une triangulation de validations de nature quantitative aussi bien que qualitative.

Il s'agit d'abord d'une validation de contenu qui est un processus où des correspondances sont inférées entre les résultats à un test et un domaine plus large d'items similaires à ceux du test lui-même. Son but est d'établir si les items représentent adéquatement un construit et/ou un domaine de performance d'intérêt spécifique, tel que défini par les experts (Crocker & Algina, 1986).

Au niveau qualitatif, la validation du test métaphorique a été abordée par le biais d'une évaluation de la validité explicative du contenu des productions des élèves selon les critères qui déterminent une analogie scientifique efficace (Gentner, 1982; 1988). Ces critères avaient été validés et plus spécifiquement définis par des enseignants-experts, en rapport avec ce genre de productions et selon la théorie mathématique établie (Kelly-Bégin, 1990). Cette validation s'est poursuivie par l'inférence de correspondances existant entre les erreurs repérées lors de l'étape précédente et les erreurs (obstacles) épistémologiques qui sont cataloguées dans les répertoires déjà établis par les experts (Brousseau, 1989a; Glaeser, 1981; Tirosh & Graeber, 1990, 1994; Vergnaud, 1989a, 1989b; Viennot, 1989a, 1989b; etc.) dans le but de déterminer si ces erreurs représentaient un même construit. Le bien-fondé des correspondances inférées fut finalement vérifié et consolidé par le biais d'une triangulation avec les données recueillies sous forme de protocoles verbaux lors des entrevues. Il s'agit des lois mathématiques énoncées par les sujets pour justifier une métaphore ou pour expliquer la façon dont ils percevaient et effectuaient une opération.

Il s'agit ensuite d'une validation critériée, selon laquelle des inférences sont tirées à partir des correspondances existant entre les résultats au test à valider et des variables importantes du comportement. Elle est de type concourrant quand elle réfère à la relation existant entre les résultats à ce test et de mesures parallèles effectuées à l'époque où ce test fut administré. Une corrélation suffisamment élevée permet alors de justifier l'utilisation de ce test pour remplacer des tests parallèles moins efficaces ou/et plus coûteux (Crocker & Algina, 1986).

Pour établir quantitativement la validité du test métaphorique comme instrument diagnostique des erreurs (obstacles) épistémologiques, des inférences ont été tirées à partir des correspondances établies entre les résultats à ce test et ceux de tests parallèles. Il

s'agit de tests qui représentent des performances reliées à des variables importantes du comportement des élèves en situation d'erreurs épistémologiques, soit la résolution d'opérations et l'utilisation de ces opérations dans des situations de résolution de problèmes (voir chapitre 1). Pour ce faire, l'évaluation de chaque analogie (parfaite, bonne, approximative et erronée) a été comparée aux scores obtenus aux items correspondants des tests de calcul et de résolution de problèmes afin de déterminer la qualité de la relation existant entre les résultats à ces tests et ceux du test métaphorique.

L'efficacité de l'intervention formative de type métaphorique / analogique

La question de l'efficacité d'une intervention formative effectuée en conjonction avec un diagnostic du même type a été abordée par le biais d'une comparaison des résultats quantitatifs aux pré-tests et aux post-tests. Cette comparaison permet de déterminer les pourcentages de changements conceptuels réussis à court et à moyen termes au niveau des calculs et de la résolution des problèmes.

Des analyses subséquentes (Siegel & Castellan, 1988) furent utilisées afin de déterminer les caractéristiques des résultats aux pré-tests et aux post-tests. Les résultats à ces tests furent comparés à ceux du bulletin officiel afin de déterminer s'ils étaient représentatifs de la performance habituelle des élèves. De même, les résultats aux post-tests furent comparés aux pourcentages d'erreurs relevées lors des pré-tests afin de déterminer si les nouveaux résultats des élèves étaient reliés à la quantité d'erreurs (charge cognitive) que chacun avait à corriger.

L'utilité d'une spécification des degrés de certitude en rapport avec la méthodologie proposée

Les degrés de certitude et les raisons qui les sous-tendent ont d'abord été différenciés selon la justesse de leur application au niveau de chaque item métaphorique. Cette différenciation s'est effectuée en comparant les degrés de certitude aux évaluations des métaphores (parfaite, bonne, approximative et erronée), de même qu'en comparant les raisons à l'appui aux critères qui avaient justifié ces évaluations. Cette analyse avait pour but de préciser les articulations des degrés de certitude avec les conceptions qu'ils

soutiennent ainsi que de déterminer leur validité comme indice de la maîtrise des concepts correspondants.

Les degrés de certitude invalides furent ensuite comparés avec les résultats aux items parallèles aux pré-tests de calcul et de résolution de problèmes afin de déterminer leur utilité quant au diagnostic des difficultés épistémologiques. Ils ont également été comparés aux résultats aux post-tests afin de déterminer leur utilité comme indice de résistance (ou récurrence) des obstacles épistémologiques au changement conceptuel, selon la méthodologie proposée.

La comparaison des résultats de la méthodologie proposée selon le niveau académique

Cette question a été abordée par le biais d'une comparaison des résultats des diverses analyses effectuées pour répondre aux trois questions précédentes pour chacun des groupes, soit la validité du test métaphorique comme instrument de diagnostic des erreurs et obstacles épistémologiques (1), soit l'efficacité de l'intervention formative de type métaphorique / analogique (2), soit l'utilité d'une spécification de degrés de certitude en rapport avec la méthodologie proposée (3).

Les chapitres suivants seront consacrés à l'analyse des données, à la présentation et à l'interprétation des résultats obtenus pour répondre aux quatre questions de recherche. Chacune des trois premières questions de recherche sera traitée individuellement. La dernière question, concernant la comparaison des résultats selon le niveau académique des élèves, sera traitée concurremment avec chacune des trois autres et résumée lors d'un chapitre subséquent. Ces résultats seront présentés selon la perspective exploratoire de la présente recherche. Ils visent à documenter les effets de l'utilisation d'une méthodologie métaphorique d'évaluation formative autant que le phénomène auquel cette méthodologie s'adresse, soit l'erreur (obstacle) épistémologique. Un dernier chapitre présentera finalement un résumé des conclusions relatives à chacune des questions de recherche, accompagné des implications pédagogiques qui s'y rattachent.

CHAPITRE 3

PRÉSENTATION ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS: LA VALIDITÉ DU TEST MÉTAPHORIQUE

Ce chapitre présente d'abord un résumé de l'analyse et de l'interprétation des résultats aux pré-tests de calcul et de résolution de problèmes qui sont présentées à l'Appendice G-1. Les résultats au test métaphorique sont ensuite comparés aux résultats à ces pré-tests, ainsi qu'aux données provenant des protocoles verbaux, afin d'en déterminer la validité comme instrument diagnostique des erreurs et obstacles épistémologiques. Il s'agit de la validité quantitative étudiée sous forme d'une validation critériée et de la validité qualitative sous forme d'une validation de contenu. Comme la présente recherche recourt au choix pré-établi non aléatoire d'un nombre limité de sujets, les énoncés qui suivent doivent être interprétés selon une perspective exploratoire.

Les résultats aux pré-tests de calcul et de résolution de problèmes

Ces pré-tests mesuraient les performances des élèves dans le cadre du système des nombres entiers relatifs, le calcul et la résolution de problèmes représentant des variables importantes du comportement des élèves en situation d'erreurs épistémologiques. Il s'agit de mesures concordantes, le contenu des items de l'un correspondant à celui des items de l'autre. De plus, ils comportent des items semblables afin de vérifier la stabilité des réponses. Ces tests sont finalement concordants avec le test métaphorique. La validité de celui-ci, comme instrument diagnostique des erreurs épistémologiques, dépend des correspondances qui existent entre ses résultats et ceux aux deux autres pré-tests.

Les résultats à ces pré-tests se sont révélés représentatifs de la performance habituelle des élèves, telle que reflétée par les notes du bulletin officiel, sauf en ce qui a trait à ceux du pré-test de calcul pour les élèves du niveau général. Cette exception fut interprétée comme résultant d'une dépendance presque complète à l'égard de la calculatrice qui est autorisée en tout temps en salle de classe, alors qu'elle n'était pas permise ici. Le tableau 15 présente le profil des erreurs qui ont été rencontrées aux pré-tests, dont on retrouve le détail à l'Appendice G-1. On remarquera, que des items

Tableau 15: Profil des erreurs aux pré-tests de calcul et de résolution de problèmes

Catégorie	Niveau	
	Général	Avancé
PRÉ-TEST DE CALCUL		
Pourcentage d'erreurs		
Incluant tous les items	32.9%	10.9%
Excluant la division par zéro (0)	28.8%	5.5%
Excluant les opérations avec zéro (0)	19.6%	3.3%
Systématicité des erreurs	81.9%	95.7%
Localisation des erreurs à un item d'une paire de même structure	18.9%	38.6%
Erreurs différentes selon les paires d'item de même structure	15.3%	1.8%
Répartition des erreurs**	A-S : M : D* 4 : 1 : 1	A-S : M : D 2 : 1 : 1
PRÉ-TEST DE RÉOLUTION DE PROBLÈMES		
Pourcentage d'erreurs		
Incluant tous les items	59.7%	40.1%
Excluant les items discutables***	53.0%	32.5%
Systématicité des erreurs	66.3%	70.3%
Répartition des erreurs**	A-S : M : D	A-S : M : D
Excluant les items discutables***	4 : 5 : 6	3 : 2 : 4
Excluant aussi la soustraction d'un négatif	2 : 5 : 6	1 : 4 : 9

* A-S : M : D signifie addition-soustraction : multiplication : division.

** Répartition approximative des erreurs selon les catégories addition-soustraction, multiplication et division, sans les items concernant la division par zéro(0) que personne n'a réussis.

*** Il s'agit des items concernant la multiplication de deux nombres négatifs et la division d'un nombre positif par un nombre négatif.

particulièrement difficiles ont été exclus à l'intérieur de certaines catégories de ce tableau afin de donner un aperçu plus juste des résultats aux autres items.

Si on y compare d'abord les pourcentages d'erreurs aux deux pré-tests, on constate que le test de calcul a engendré moins d'erreurs que le test de résolution de problèmes. Ces résultats supportent ceux des recherches précédentes qui ont établi que les obstacles épistémologiques se manifestent davantage lors de la résolution de problèmes qui est plus complexe (Closset, 1983a; Johsua, 1989; Mandl, Gruber & Renkl, 1993; Tirosh & Graeber, 1990, 1994). Et si on exclut les items qui posent des difficultés particulières, on observe chez les deux groupes la gradation habituelle du niveau de difficulté posé par les différentes catégories d'opérations lors de la résolution de problèmes (A-S : M : D = 2 : 5 : 6 et 1 : 4 : 9), alors qu'on observe la tendance inverse lors des calculs (4 : 1 : 1 et 2 : 1 : 1). Ces résultats démontrent que, bien que les lois mathématiques qui régissent les opérations avec les nombres relatifs sont mieux maîtrisées pour la multiplication et la division que pour l'addition-soustraction linéaire, la connaissance de ces lois n'est pas un gage de réussite en situation de résolution de problèmes pratiques, même les plus simples.

On peut noter par la suite que les erreurs se sont révélées très systématiques lors des deux pré-tests (G: 81.9% et 66.3%; A: 95.7% et 70.3%). Ces résultats sont également consistants avec ceux des recherches précédentes qui affirment que les erreurs épistémologiques se manifestent systématiquement et sous forme de configurations consistantes (Glaser, 1981; Matz, 1980; Resnick & Ford, 1981; Tatsuoka, 1984). On explique la stabilité et la solidité de ces erreurs par la validité, la cohérence et l'efficacité locales des conceptions qui les supportent (Brousseau, 1983; Léonard & Sackur, 1990; Vosniadou, 1994). Cet argument définit aussi en quelque sorte la nature des différences existant entre les deux niveaux. En effet, les entrevues ont révélé un plus grand nombre d'élèves de niveau général qui affirmaient ne posséder aucun savoir pertinent à la résolution de certaines opérations ou qui énonçaient une série de lois conflictuelles pour expliquer la façon d'effectuer une même opération. En d'autres mots, ces élèves ne possédaient pas de conceptions valides, cohérentes et efficaces pour ces opérations.

Le pré-test de calcul, qui comportait des paires d'items de même structure (e.g. -3 - 6 et -6 - 3), révèle des pourcentages importants d'erreurs localisées à un seul item

de la paire, ou de patrons d'erreurs différents aux deux items. Ces résultats s'expliquent également par deux des caractéristiques précédemment citées de l'erreur épistémologique, i.e. la solidité et la localisation des conceptions utilisées (Brousseau, 1983; Léonard & Sackur, 1990). En ce qui a trait à leur robustesse, il est intéressant de constater que ces erreurs ont résisté à la contradiction logique que pose le fait d'effectuer une même opération selon des procédures différentes.

Toujours du côté du pré-test de calcul, les différents pourcentages d'erreurs, et leur répartition selon les catégories d'opérations, révèlent que la plupart des erreurs résultent des problèmes posés par les opérations avec le zéro (0) et par l'addition-soustraction des nombres relatifs. Une analyse plus fine (voir Appendice G-1) permet de constater que ce sont également ces opérations qui engendrent le plus d'erreurs localisées ou différentes à l'intérieur des paires d'items de même structure. Ces résultats sont aussi représentatifs des répertoires d'obstacles épistémologiques identifiés par les experts, où on insiste davantage sur ces deux cas lors des transitions des nombres naturels aux nombres entiers (Brousseau, 1989a), puis aux nombres relatifs (Glaeser, 1981; Vergnaud, 1989a, 1989b).

Du côté du pré-test de résolution de problèmes, l'analyse plus précise (voir Appendice G-1) révèle que les items concernant les opérations sur les nombres naturels sont réussis par la plupart des élèves. Elle révèle également que ce sont les habitudes de calcul dans ce système de nombres qui constituent l'obstacle qui est à la source de la plus grande proportion d'erreurs au pré-test de résolution de problèmes. Ces résultats rejoignent ceux des recherches précédentes sur la nature des obstacles épistémologiques qui affirment que bien qu'ils assurent des réponses efficaces dans un contexte fréquemment rencontré et permettent ainsi d'aborder une large classe de problèmes pratiques (Bachelard, 1938; Brousseau, 1989; Johsua, 1989a; Sierpiska, 1989; Vergnaud, 1989a), ils engendrent, par contre, des réponses fausses hors de ce contexte (Closset, 1983a; Johsua, 1989a; Mandl, Gruber & Renkl, 1993; Tirosh & Graeber, 1990; 1994).

La validité critériée du test métaphorique

Le but d'une validation critériée est de tirer des inférences à partir des correspondances existant entre les résultats du test à valider et ceux d'autres tests qui

définissent des variables importantes du même comportement (Crocker & Algina, 1986). Une corrélation suffisamment élevée permet alors de justifier l'utilisation de ce test pour remplacer les autres tests moins efficaces ou/et plus coûteux.

Pour ce faire, les scores obtenus aux tests parallèles de calcul et de résolution de problèmes ont été comparés à l'évaluation des métaphores correspondantes (parfaites, bonnes, approximatives et erronées) afin de déterminer le degré de relation entre les résultats à ces tests et les performances métaphoriques. Le tableau 16 présente un résumé des pourcentages des correspondances diagnostiques directes entre le test métaphorique et les tests parallèles, tels que détaillés au niveau de chaque item de ces tests dans les Appendices H-1 à H-4. Dans ce tableau, une correspondance directe indique que pour chaque item, une analogie adéquate est en relation avec les résultats exacts des séries de calculs ou de problèmes correspondants et que l'analogie erronée est en relation avec les résultats erronés des séries de calculs ou des problèmes correspondants.

Comme le révèle le tableau 16, les résultats au test métaphorique montrent des pourcentages élevés de correspondances directes avec les résultats aux deux autres tests. Ces pourcentages se maintiennent entre 96.4% et 97.7%, pour toutes les opérations aux deux niveaux, sauf en ce qui a trait à la division où le pourcentage atteint 88.3% au niveau avancé. Le test métaphorique présente donc un diagnostic précis. Cependant, si on compare les divers résultats, on réalise qu'il procure une information de qualité différente pour les deux niveaux d'habileté mathématique. Il s'agit d'une différence qu'il est important de clarifier, surtout dans un but d'évaluation formative.

Si on examine les pourcentages de correspondances directes selon les catégories d'opérations, on note d'abord que les analogies, dont le statut correspond à la fois à celui des calculs et des problèmes, présentent des pourcentages descendants selon l'ordre de difficulté des opérations pour les deux groupes: 60.7% (addition-soustraction), 42.0% (multiplication) et 36.4% (division) au niveau général et respectivement 67.5%, 61.9% et 39.4% au niveau avancé. Ces pourcentages, légèrement supérieurs du niveau avancé, représentent presque exclusivement des résultats corrects car il est très rare qu'une analogie erronée y révèle des difficultés pour les deux genres d'item. Ce n'est cependant pas le cas des élèves de niveau général, pour qui à peu près le tiers des résultats représente des

Tableau 16: Pourcentages de correspondances diagnostiques directes entre le test métaphorique et les tests de calcul et de résolution de problèmes

Catégorie	Add./Soust. G (A)	Multiplication G (A)	Division G (A)	Avec zéro (0) G (A)
Calcul et problème	60.7(67.5)	42.0(61.9)	36.4(39.4)	- - - -
Calcul seulement	12.9(2.4)	12.5(6.0)	2.3(10.8)	96.6(97.6)
Problème seulement	22.8(27.8)	43.2(28.6)	58.0(38.1)	- - - -
TOTAL	96.4(97.7)	97.7(96.5)	96.7(88.3)	96.6(97.6)

difficultés aux deux sortes d'items (voir tableau 17 pour plus de détails).

Si on exclut les items avec zéro(0), qui ne correspondent ici qu'aux calculs, on note également que les pourcentages de correspondances directes sont plus élevés avec les problèmes qu'avec les calculs simples. Afin de comparer plus exactement ces correspondances, les résultats du tableau précédent ont été regroupés différemment au tableau 17, selon qu'ils correspondent aux calculs ou aux problèmes. Ce tableau présente aussi le statut exact des analogies (parfaite, bonne, etc.) et les résultats qui y correspondent lors des pré-tests de calcul et de résolution de problèmes (B: bons; E: erronés), afin de raffiner l'analyse. Il est à noter que les données accompagnées d'astérisques concernent les items avec zéro (0) pour lesquels il n'existe pas de problèmes, sauf dans le cas de la division par zéro (0) où il n'en existe qu'un. Comme ces données s'interprètent différemment, elles seront donc discutées séparément.

Le tableau 17 présente les pourcentages précis de correspondances directes entre les résultats au test métaphorique et les résultats aux deux autres tests. Comme l'annonçait le tableau 16, ces correspondances sont plus élevées avec les problèmes qu'avec les calculs. Si on soustrait les pourcentages respectifs de ces correspondances (problèmes - calculs), on constate que la différence entre les deux est plutôt stable d'une opération à l'autre au niveau avancé: 25.4% (e.g., 95.3% - 69.9% pour l'addition-soustraction), 22.6% (multiplication) et 27.3% (division). Elle se présente cependant selon un ordre ascendant, à mesure que la difficulté de conceptualiser les opérations augmente chez les élèves de niveau général: 9.1% (addition-soustraction), 30.7% (multiplication) et 55.7% (division).

Ces différences s'expliquent d'abord par le fait que quantité d'élèves des deux niveaux effectuent les calculs en appliquant mécaniquement les lois mathématiques qui les régissent sans pour autant les comprendre: ils obtiennent les bons résultats mais sont alors incapables de les expliquer. Ils sont alors également incapables de les appliquer dans les problèmes. Ce phénomène est la cause presque exclusive des différences au niveau avancé, où on rencontre peu d'erreurs de calculs, et la cause majeure des différences au niveau général. Dans le tableau 17, ces cas se retrouvent à l'avant-dernière ligne ("Erronée B E"). Il est à noter que ces analogies, même erronées, étant généralement accompagnées d'une bonne réponse au calcul qu'ils représentent, sont quand même de

Tableau 17: Détails des pourcentages des correspondances diagnostiques directes entre les tests

Item Analogie	Cal	Prob	Add/Soust. G (A)	Multiplication G (A)	Division G (A)	Avec zéro (0) G (A)
DIRECTE			96.4(97.7)	97.7(96.5)	96.7(88.3)	96.6(97.6)
Calculs			[73.6(69.9)]	[54.5(67.9)]	[38.7(50.2)]	[96.6(97.6)]*
Parfaite	B	B	25.8(54.8)	2.3(9.5)	1.1(6.0)	3.3(4.5)*
Bonne	B	B	11.4(8.7)	17.0(28.6)	14.8(26.2)	15.6(18.2)*
Approximative	B	B	0.8(0.8)	12.5(20.2)	8.0(3.6)	4.4(6.8)*
Parfaite	B	E	6.1(0.0)	- - -	0.0(1.2)	- - -
Bonne	B	E	2.3(0.0)	2.3(2.4)	2.3(6.0)	- - -
Approximative	B	E	1.5(2.4)	10.2(3.6)	0.0(3.6)	- - -
Erronée	E	B	3.0(0.0)	- - -	- - -	0.0(1.1)*
Erronée	E	E	22.7(3.2)	10.2(3.6)	12.5(3.6)	53.3(50.0)*
Erronée	B	B*	- - -	- - -	- - -	20.0(17.0)*
Problèmes			[83.5(95.3)]	[85.2(90.5)]	[94.4(77.5)]	{100.0(95.2)}**
Parfaite	B	B	25.8(54.8)	2.3(9.5)	1.1(6.0)	- - -
Bonne	B	B	11.4(8.7)	17.0(28.6)	14.8(26.2)	- - -
Approximative	B	B	0.8(0.8)	12.5(20.2)	8.0(3.6)	- - -
Parfaite	E	B	5.3(0.0)	- - -	- - -	- - -
Bonne	E	B	0.8(0.0)	- - -	- - -	- - -
Approximative	E	B	5.3(0.0)	- - -	- - -	- - -
Erronée	B	E	11.4(27.8)	43.2(28.6)	58.0(38.1)	- - -
Erronée	E	E	22.7(3.2)	10.2(3.6)	12.5(3.6)	{100.0(95.2)}**

B: Bons

E: Erronés

* Correspondances avec le résultat de l'analogie, sauf pour l'item X + 0 qui est relié à un seul problème.

** Correspondances avec le résultat du problème unique pour l'item X + 0.

{ } Total non inclus dans le pourcentage total, ne correspondant qu'à un seul problème.

[] Total déjà inclus dans le pourcentage total.

Données précédemment incluses dans les calculs.

bons instruments diagnostiques pour les calculs.

Un autre phénomène intervient exclusivement au niveau général, et uniquement en addition-soustraction, pour expliquer les autres différences. Il s'agit du fait que les élèves de ce niveau sont très dépendants de leur calculatrice pour effectuer le moindre calcul relatif à ces opérations et qu'une analogie joue un rôle très similaire à celui d'un problème pour soutenir le sens d'une opération. Il en résulte des analogies partiellement curatives, qu'on retrouve aux lignes "Parfaite, E B", "Bonne, E B" et "Approximative, E B" et qui totalisent 10.6% des cas. Il est aussi à noter que dans ces cas, une métaphore approximative est souvent l'indice d'une difficulté, surtout pour les opérations plus simples. Une autre version, plus rare (3.0%), de ce dernier phénomène se rencontre à la ligne "Erronée, E B", où le problème soutient le sens d'une opération alors que l'analogie n'a pu corriger une erreur épistémologique profondément ancrée.

Cette différence est finalement contrebalancée par la situation inverse, où les élèves peuvent finalement produire une analogie adéquate pour expliquer leur calcul juste, alors qu'ils n'avaient pu précédemment résoudre adéquatement les problèmes correspondants. Ces cas se rencontrent aux lignes "Parfaite, B E", "Bonne, B E" et "Approximative, B E". Il s'agit encore d'analogies partiellement curatives dans le sens où la production de l'analogie les a amenés à conceptualiser une opération dont le résultat avait jusque-là dépendu d'un statut de loi.

Si on examine maintenant les résultats des items avec le zéro(0), on retrouve des pourcentages de correspondances similaires, soit de 96.6% au niveau général et 97.6% au niveau avancé pour les calculs. Il est à noter qu'il n'existe pas de problèmes correspondant aux items avec le zéro (0), sauf dans le cas de la division par zéro (0) où il n'en existe qu'un. Le résultat des analogies qui correspondent à ces items, que l'on retrouve accompagné d'un astérisque, a été comparé à celui des calculs seulement. Ainsi, on peut établir des correspondances directes où le statut de l'analogie justifie le résultat des calculs et laisse prévoir la façon dont ces opérations auraient pu être utilisées lors d'une résolution de problèmes. Si on additionne ces cas aux lignes "Parfaite, bonne, approximative, B B" et "Erronée, E E", ces correspondances sont de l'ordre de 76.6% au niveau général et de 79.5% au niveau avancé. De même, on peut établir des

correspondances partielles qui sont équivalentes à celles où une analogie erronée, accompagnée d'une bonne réponse, révèle que cette réponse est le produit de l'application d'une loi mathématique et laisse prévoir que ces opérations n'auraient pu être efficacement utilisées en résolution de problèmes. Elles sont de l'ordre de 20.0% au niveau général et de 17.0% au niveau avancé. On retrouve ces cas à la ligne "Erronée, B B" de la section calcul.

Comme un seul problème fut retenu pour correspondre à ces items, et qu'il explicitait la structure de la solution, les correspondances ont été établies seulement entre le résultat mathématique de l'analogie et celui de la solution de ce problème. Pour ces raisons, ces correspondances n'ont pas été incluses dans le total. Il est quand même intéressant de noter que ces résultats concernant la division par zéro (0), (entre accolades et accompagnés de deux astérisques), sont de l'ordre de 100% au niveau général et 95.2% au niveau avancé. Ce dernier pourcentage révèle l'unique cas, dans toutes les situations de pré-test, où un élève a réussi à produire la solution " $X + 0 = \text{indéfini}$ ".

Les cas où des correspondances diagnostiques directes n'ont pu être établies entre le test métaphorique et les tests de calcul et de résolution de problèmes, de même que les cas où les correspondances n'ont pu être établies qu'avec un seul de ces tests, ont été analysés afin de déterminer les catégories selon lesquelles ils se présentaient. Le tableau 18 présente les résultats de l'analyse des premiers cas sous les catégories "correspondance inverse" et "cure totale". Il présente les résultats des seconds cas sous les catégories "cure partielle" et "autre".

Une correspondance inverse indique que même si l'élève a résolu efficacement les calculs et problèmes d'un item, il a été incapable de produire une analogie adéquate pour en expliquer le concept. Le tableau 18 révèle que ces cas sont plutôt rares, à une exception près, exception rencontrée lors des items de division au niveau avancé. Ce résultat de 11.9% de correspondances inverses semble indiquer qu'il existe un stade où l'élève connaît la loi mathématique régissant une opération et peut reconnaître le besoin de cette opération pour résoudre un problème avant de pouvoir l'expliquer. Cette interprétation est en accord avec la taxonomie des niveaux cognitifs de Bloom (1969), selon laquelle un premier niveau de connaissance (connaissance des lois et reconnaissance

Tableau 18: Pourcentages de correspondances diagnostiques partielles et inverses entre le test métaphorique et les tests de calcul et de résolution de problèmes

Item Analogie	Cal	Prob	Add./Soust. G (A)	Multiplication G (A)	Division G (A)	Avec zéro (0) G (A)
INVERSE			0.8(2.4)	2.3(3.6)	3.4(11.9)	1.1 (1.1)*
Erronée	B	B	0.8(2.4)	2.3(3.6)	3.4(11.9)	-- --
Erronée	B	E*	-- --	-- --	-- --	1.1(1.1)*
Erronée	E	B**	-- --	-- --	-- --	{0.0(4.8)}**
CURE TOTALE			3.1(0.0)	-- --	-- --	2.2(1.1)*
Parfaite	E	E	0.8(0.0)	-- --	-- --	-- --
Bonne	E	E	1.5(0.0)	-- --	-- --	-- --
Approximative	E	E	0.8(0.0)	-- --	-- --	-- --
Bonne	E	B*	-- --	-- --	-- --	1.1(0.0)*
Approximative	E	B*	-- --	-- --	-- --	1.1(1.1)*
CURE PARTIELLE			20.5(2.4)	12.5(6.0)	2.3(10.8)	-- --
Calculs			[10.6(0.0)]	-- --	-- --	-- --
Parfaite	E	B	5.3(0.0)	-- --	-- --	-- --
Bonne	E	B	0.8(0.0)	-- --	-- --	-- --
Approximative	E	B	4.5(0.0)	-- --	-- --	-- --
Problèmes			[9.9(2.4)]	[12.5(6.0)]	[2.3(10.8)]	-- --
Parfaite	B	E	6.1(0.0)	-- --	0.0(1.2)	-- --
Bonne	B	E	2.3(0.0)	2.3(2.4)	2.3(6.0)	-- --
Approximative	B	E	1.5(2.4)	10.2(3.6)	0.0(3.6)	-- --
AUTRES						
Calculs						
Curatif / comparaison			4.5(0.8)	2.3(0.0)	5.7(0.0)	0.0(1.1)
Nouvelle erreur			0.8(0.0)	2.3(0.0)	4.5(1.2)	-- --

B: Bons

E: Erronés

* Correspondances avec le résultat de l'analogie, sauf pour l'item X + 0 qui est relié à un seul problème.

** Correspondances avec le résultat du problème unique pour l'item X + 0.

des moyens) précède le second niveau de la compréhension. Cette interprétation est également supportée par le fait que ce sont les élèves du plus haut niveau d'habileté qui ont accédé à ce stade. On notera que, même avec des pourcentages minimales, cette tendance des correspondances inverses se maintient pour les autres opérations, où quelques élèves de niveau avancé, après avoir beaucoup effacé, ont réussi à résoudre les problèmes plus difficiles (soustraction d'un nombre négatif et multiplication de deux nombres négatifs). On retrouve également une version différente de ce même phénomène pour le problème demandant une division par zéro (0), où deux élèves de niveau avancé ont émis des doutes sur le bien-fondé d'un zéro (0) au dénominateur. Au niveau général, les correspondances inverses concernent quelques élèves qui arrivaient à appliquer la multiplication des nombres naturels dans un problème, sans toutefois pouvoir l'expliquer. Il est cependant à noter que, lors des correspondances inverses, les analogies continuent de prédire les résultats des calculs qui ont été effectués par le biais des lois mathématiques, établissant en réalité les correspondances directes par rapport aux calculs à près de 100%. Les pourcentages précédents représentent plutôt la mesure de compréhension de ces lois.

Une cure totale indique qu'un élève, auparavant incapable de résoudre efficacement les calculs et les problèmes d'un item, a finalement pu en extraire le sens au niveau d'une analogie. Le tableau 18 révèle qu'il est très rare qu'un élève, dont les calculs et les problèmes sont erronés, arrive à produire une analogie adéquate. Ce phénomène se retrouve alors presque exclusivement au niveau général lors d'opérations plus faciles à conceptualiser, comme l'addition-soustraction.

Comme les catégories de cures partielles le démontrent, les analogies se révèlent surtout curatives quand l'élève possède déjà une certaine prise sur le concept, soit au niveau des calculs ou des problèmes. Soit qu'une analogie joue un rôle similaire à celui des problèmes réussis pour soutenir le sens d'une opération, comme il arrive dans 10.6% des cas de l'addition-soustraction au niveau général. Soit que la production de l'analogie amène la conceptualisation d'une opération, dont le calcul juste ayant jusque-là dépendu d'un statut de loi, n'avait pu servir à résoudre les problèmes qui y correspondent. Continuant de refléter les niveaux de difficulté des opérations et d'habileté des élèves, ces cas se rencontrent surtout au niveau général pour l'addition-soustraction (9.9%) et la

multiplication (12.5%) et pour la division (10.8%) au niveau avancé. Ces cures partielles pourraient s'expliquer selon la théorie de zone de développement proximal qui, selon Vygotsky (1978), englobe les habiletés qui ne se sont pas encore développées, mais sont dans le processus de l'être. Parmi les facteurs facilitant ce développement, cet auteur mentionne d'ailleurs le rôle du concret dans le développement de la pensée abstraite, rôle également attribué à l'analogie dans les domaines du changement conceptuel et des sciences cognitives (Brown, 1993; Gick & Holyoak, 1980, 1983; Holland, Holyoak, Nisbett & Thagard, 1989).

Les analogies curatives sont ambiguës, surtout pour le diagnostic des calculs. Ce sont les degrés de certitude, que nous aborderons plus loin, qui permettront généralement de raffiner le diagnostic. Comme il a été déjà mentionné, une analogie approximative est aussi souvent l'indice d'une difficulté, surtout pour les opérations plus simples.

Pour terminer la description des résultats au test métaphorique, il est intéressant de noter que ce test entraîne quelques nouvelles erreurs de calcul, là où elles n'existaient pas précédemment. Étant donné que les analogies qui les accompagnent sont erronées, on peut spéculer que ces calculs, auparavant justes, dépendaient de l'application d'une loi mathématique. De même, ce test entraîne quelques nouvelles réponses correctes à des calculs qui étaient précédemment erronés. Vu qu'elles sont également accompagnées d'analogies erronées, on peut déduire que ces nouvelles réponses ont été obtenues par comparaison, le test présentant toutes les opérations avec les mêmes nombres. Ces deux situations se rencontrent encore presque exclusivement au niveau général.

En résumé et en conclusion, le test métaphorique est un très bon instrument diagnostique. Il produit des pourcentages de correspondances directes avec les résultats aux autres tests qui s'élèvent au-dessus de 96% pour toutes les opérations, aux deux niveaux, sauf pour la division au niveau avancé où le pourcentage atteint 88.3%. Qu'une analogie soit erronée ou adéquate, elle révèle presque toujours un même statut au niveau des calculs et/ou des problèmes régulièrement utilisés dans les classes. Comme les élèves de niveau avancé font moins d'erreurs de calcul, il se prête surtout au diagnostic de leur aptitude à la résolution de problèmes qui est proportionnelle à leur indépendance des lois mathématiques incomprises. Il s'agit d'une information que les tests de calcul dissimulent

bien et vers laquelle les tests de résolution de problèmes ne pointent pas. Quant aux élèves de niveau général, qui font beaucoup d'erreurs de calcul, le test métaphorique trouve d'abord son utilité dans le diagnostic de ces erreurs, pour ensuite s'étendre également à la résolution de problèmes.

Il ne fait aucun doute que le test métaphorique produit des correspondances diagnostiques quantitatives suffisamment élevées pour justifier l'utilisation de ce test pour remplacer les tests de calcul et de résolution de problèmes, plus coûteux en temps et en argent. Ces tests sont dispendieux quand on doit les acheter et ils sont longs à interpréter, tout comme à administrer. De plus, leur construction demande énormément de temps quand ils n'existent pas déjà. Par contre, le test métaphorique est simple à construire et résultats peuvent être interprétés facilement. Utilisé en alternative aux deux autres tests, il permet d'économiser un temps précieux en salle de classe. La prochaine section établira que ce test produit également des informations qui le rendent plus efficace que ces autres tests pour effectuer un diagnostic et ainsi supporter une intervention formative.

La validité de contenu du test métaphorique

Le but d'une validation de contenu est d'établir si les items représentent adéquatement un construit et/ou un domaine de performance d'intérêt spécifique, tel que défini par les experts (Crocker & Algina, 1986). Pour ce faire, des correspondances ont été inférées entre les erreurs repérées au niveau des métaphores et les erreurs (obstacles) épistémologiques qui sont cataloguées dans les répertoires déjà établis par les experts. Le bien-fondé des correspondances inférées fut également vérifié et consolidé par le biais d'une triangulation avec les lois mathématiques énoncées par les sujets pour justifier une métaphore ou pour expliquer la façon dont ils percevaient et effectuaient une opération. Ces lois, accompagnées du nombre d'élèves de chaque niveau qui les ont évoquées, ainsi que d'exemples d'analogies qui correspondent à ces lois, se retrouvent à l'Appendice I.

Dans les tableaux qui suivent, les lois énoncées par les élèves sont accompagnées de la traduction mathématique de la structure de ces lois. Afin de montrer l'ampleur que prennent ces obstacles, ainsi que l'idiosyncrasie selon laquelle ils se manifestent, le nombre d'élèves qui ont évoqué les lois qui y correspondent a aussi été inclus dans ces

tableaux. Il est à noter que ces fréquences ne correspondent pas aux nombres d'analogies qui les manifestent, car plusieurs élèves ont invoqué une succession de lois différentes pour justifier leurs calculs. D'autre part, les analogies ont été entièrement ou partiellement curatives en plusieurs occasions. Il arrive aussi qu'une même analogie manifeste plus d'un obstacle épistémologique. Cependant, tous les obstacles qui sont mentionnés dans ces tableaux se sont révélés clairement dans les analogies, et chacun selon toutes les différentes versions qui y sont mentionnées. Un tableau subséquent fera la liste de ceux qui ne s'y sont pas manifestés.

Observant la relation particulière entre l'émergence des erreurs épistémologiques et la transition d'un système de nombres à une autre, l'obstacle épistémologique a été défini en termes de rupture cognitive où l'introduction d'un ensemble de nombres dans un sur-ensemble fait disparaître certaines de ses propriétés qui ne sont plus vraies pour tous les nombres, ou pour aucun (Brousseau, 1989a). Pour le système de nombres relatifs, le premier de ces obstacles est ainsi créé par la transition des nombres naturels aux nombres entiers, où le zéro(0) fait particulièrement problème en multiplication et division; de plus, les conceptions de la division liées aux nombres naturels font également obstacle, surtout pour la division dans les systèmes de nombres rencontrés subséquentement (Brousseau, 1989a). Ce premier obstacle se compose lors de la transition des nombres entiers aux nombres relatifs, où la soustraction cesse d'être nécessairement une diminution et l'addition une augmentation, où soustraire l'augmentation et ajouter la diminution devient possible (Glaeser, 1981; Vergnaud, 1989a). S'y ajoute également, la difficulté de soustraire un nombre négatif et de diviser par un nombre négatif (Vergnaud, 1989b). Le tableau 19 fournit la liste des diverses manifestations des deux obstacles précédemment mentionnés au niveau des calculs, qui sont détectables dans les analogies, telles que présentées dans les Appendices I-1 et I-2. Comme le but de cette analyse est de déterminer la quantité d'erreurs épistémologiques qui peuvent être diagnostiquées à partir des tests métaphoriques afin d'établir la validité de contenu, il ne s'agit pas ici de discuter chacune d'entre elles. Cette discussion a été faite lors de la description générale de ces tests (voir Appendice G-1). La présente section se confinera donc à donner des exemples diagnostiques et à discuter des résultats.

Tableau 19: Obstacles des nombres entiers naturels (calculs) manifestés dans les analogies

Obstacle	G(A)	Structure mathématique
Addition en entiers naturels		
Associativités erronées:	6(0)	$-6 + 3 = -(6 + 3) = -9$
	7(1)	$-3 - (-6) = -(3 + 6) = -9$
Soustraction en entiers naturels		
Impossibilité de soustraire		
- un grand nombre d'un plus petit:	0(1)	$3 - 6 = -9$
- du zéro (0):	3(1)	$0 - 6 = 0$
Nombre inférieur initial entraîne une inversion:		
	6(0)	$3 - 6 = 6 - 3 = 3$
	3(0)	$0 - 13 = 13 - 0 = 13$
Associativités erronées:	7(1)	$-6 - 3 = -(6 - 3) = -3$
- traduites en inversion quand le nombre initial est inférieur:	3(0)*	$-3 - 6 = -(6 - 3) = -3$
	1(0)*	$-3 - 6 = 6 - 3 = 3$
Signes opératifs et prédicatifs confondus en un signe opératif:		
	10(1)	$3 - (-6) = 3 - 6 = -3$
	2(0)*	$-3 - (-6) = -3 - 6 = -9$
- composé d'inversion quand le nombre initial est inférieur:	1(0)*	$3 - (-6) = 3 - 6 = 6 - 3 = 3$
- composé d'associativité erronée et d'inversion:	2(0)*	$-3 - (-6) = -(6 - 3) = -3$
Multiplication et division en entiers naturels		
Stabilité du nombre naturel initial:	4(2)	$3 \times 0 = 3$
Stabilité inconditionnelle du nombre naturel:		
	2(0)	$0 \times 14 = 14$
	2(1)	$0 + 9 = 9$
	2(3)	$3 + 0 = 3$
Stabilité du nombre naturel justifiée par une inversion, où on ne peut diviser:	1(1)	$0 + 3 = 3 + 0 = 3$
Conception "nombre de parts":		
- "Il y a un 0 dans 0"	0(1)	$0 + 0 = 1$
- "Il y a un 0 dans chaque unité":	2(1)	$3 + 0 = 3$
Ne peuvent justifier un résultat positif:		
	2(0)	$(-6) + 3 = 2$
	1(1)	$6 + (-3) = 2$
Total	59(14)	

G(A) Nombre d'élèves de chaque niveau qui ont invoqué les lois correspondant à ces obstacles.

* Sous-ensemble des élèves inclus dans le nombre sans astérisque qui précède ces items.

En examinant les items du tableau 19, il est intéressant de noter que chacune des opérations en nombres entiers naturels engendre ses obstacles particuliers. C'est la soustraction qui cause le plus d'erreurs au niveau général. Si on prend, par exemple, le cas où un nombre inférieur initial entraîne une inversion afin de permettre un calcul en nombres naturels, voici comment cette erreur se traduit en analogie pour l'item "2 - 9":

Billy là... ok, y a 9\$ dans les poches... ok, et puis y s'en va jouer au poker.
(...) Puis là, le bid là, c'était 2\$ pour rentrer. Puis là, y a perdu 2\$. Ça fait que là, y reste 7 dans les poches. (1G/AS2-3)

Relativement à ce genre d'erreur, Vergnaud (1989a) remarque que l'obstacle épistémologique est souvent renforcé par un obstacle didactique. Il cite, comme exemple, une théorisation accompagnant le travail sur les nombres naturels qui interdirait la possibilité de soustraire un plus grand nombre d'un plus petit. Il est fort possible qu'il en fut ainsi pour l'auteur de l'analogie citée auparavant, comme le montre son commentaire:

Parce que quand on est jeune, on voit toujours ça comme ça (9 - 2)... puis là, quand t'arrives à l'école secondaire... là, y te montrent que ça (le signe négatif dans 2 - 9) appartient comme au 9... ça, c'est ensemble. Mais quand t'es jeune, y t'apprennent jamais ça. (1G/AS4)

Les élèves de niveau avancé font preuve de quatre fois moins d'erreurs que ceux du niveau général en rapport à ces obstacles. C'est la multiplication et la division avec zéro (0) qui occasionnent la majorité de ces erreurs. Par exemple, la stabilité du nombre naturel initial se traduit ainsi pour une de ces élèves qui utilise l'analogie des cigarettes pour expliquer l'opération 3×0 :

Y en achète 3. Pendant la semaine, y en fume pas. Y en reste encore 3.
(15A/M6)

Les analogies permettent aussi de différencier un nouveau genre d'obstacles. Ces obstacles se retrouvent dans la catégorie des associativités erronées, e.g. $-6 - 3 = -(6 - 3)$ ou $-3 + 6 = -(3 + 6)$. Ces obstacles ont été classifiés sous l'appellation d'obstacles épistémologiques d'ordre perceptuel puisqu'ils résultent d'une habitude répondant à une perception plutôt que d'une conception. En effet, la perception d'un signe opératoire d'addition ou de soustraction y entraîne automatiquement ces opérations en nombres naturels. Une autre procédure, habituellement l'utilisation du signe prédictif du premier nombre, détermine ensuite le signe prédictif de la réponse. Il s'agit d'une erreur

presqu'exclusive au niveau général. Ainsi, pour l'élève qui connaît la règle mathématique qui régit la soustraction d'un nombre négatif, cette erreur se traduit sous la forme $-3 - (-6) = -(3 + 6) = -9$, engendrant des analogies du genre:

Billy devait 3\$ et 6\$. Ok. Y devait, y devait 9... les deux. Mais il a continué à jouer et il a perdu encore (...) Il a 9\$ dans le trou. (1G/AS10)

Je dois 3 à Denis et 6 à Jean. = -9. (4G/AS12)

Cette erreur produit la même réponse que celle où les signes opératif et prédicatif sont confondus en un seul signe prédicatif selon la forme $-3 - (-6) = -3 - 6 = -9$. Cependant, les analogies qui traduisent ce dernier genre d'erreur se présentent différemment:

-3 chats sont morts cette semaine. La semaine passée, -6 chats sont morts. Donc il y a 9 chats de morts en deux semaines. (6G/AS7)

Tu dois 3\$ et tu empruntes 6. Tu dois maintenant 9\$. (7G/8)

On remarquera que les deux nombres sont traités séparément ici (transformations), au lieu d'être associés (relations) comme dans les analogies précédentes.

Comme une grande diversité de règles peuvent sous-tendre une même réponse, les tests diagnostiques des erreurs épistémologiques en mathématiques ont souvent rencontré la critique de ne pas fournir les informations nécessaires à une intervention formative quant à l'articulation des règles utilisées (Birenbaum & Tatsuoka, 1982; Tatsuoka, 1983, 1984, 1985). Les exemples cités précédemment, et ceux qui suivront, permettent de constater qu'il est possible de nuancer l'interprétation des règles utilisées au niveau d'un test métaphorique, et ainsi pallier à certaines limites des tests existants.

Le deuxième genre d'obstacles répertoriés découle de la définition de l'obstacle épistémologique, à savoir qu'ils sont des généralisations hâtives et extrapolations excessives où l'on donne une valeur de vérité absolue à des règles particulières (D'Ambrosio & Mewborn, 1994; Matz 1980; Sierpinska, 1989). Le tableau 20 présente la liste de ces obstacles décelés par les analogies au niveau des calculs, tels que déterminés dans les Appendices I-3 et I-4. Comme on peut le constater au total, les élèves de niveau général commettent approximativement deux fois plus d'erreurs correspondant à ces obstacles que les élèves de niveau avancé. C'est la catégorie d'obstacles où ces

Tableau 20: Obstacles des lois généralisées (calculs) manifestés dans les analogies

Obstacle	G(A)	Structure mathématique
Lois de la multiplication et de la division		
2 négatifs entraînent un résultat positif	15(0)	
- traduite en addition:	3(0)*	$-3 - 6 = 3 + 6 = 9$
- traduite en soustraction:	2(0)*	$-6 - 3 = 6 - 3 = 3$
- traduite en addition, parce que le nombre supérieur hérite du signe positif:	1(0)*	$-3 - 6 = -3 + 6 = 3$
Justification des associativités erronées:		
- un négatif et un positif entraînent un résultat négatif:	2(0)	$-6 + 3 = -(6 + 3) = -9$
- 3 négatifs entraînent un résultat négatif:	5(1) 1(0)	$-3 - (-6) = -(6 - 3) = -3$ $-3 - (-6) = -(3 + 6) = -9$
Lois de l'addition et de la soustraction		
- Signe du résultat hérité du nombre supérieur:	3(1) 3(1)	$(-3) \times 6 = 18$ $6 + (-3) = 2$
- Signe négatif entraîne une soustraction:	1(0)	$(-3) \times 6 = -3 + 6 = 3$
- 2 signes négatifs entraînent un résultat négatif:	2(0) 1(0)	$(-3) \times (-6) = -18$ $(-6) + (-3) = -2$
Lois des exposants		
- La division du zéro (0) = 1:	1(1)	$0 + 3 = 1$
- La division par zéro (0) = 1:	3(3)	$3 + 0 = 1$

... à suivre

Tableau 20 (suite)

Obstacle	G(A)	Structure mathématique
Loi de la commutativité		
- Commutativité des signes prédictifs:	8(6)	$3 \times (-6) = (-3) \times 6$
- Commutativité de la division:	7(4)	$3 + 0 = 0 + 3 = 0$
Lois conflictuelles		
- L'habitude de calculer dans le système des nombres relatifs est généralisée à celui des nombres naturels:	1(0)	$6 - 3 = -3$
- Le signe positif résultant des 2 négatifs est attribué autrement:	1(0)	$-3 - (-6) = 3 - 6$
	2(0)	$-3 - (-6) = -3 + -6$
- Le signe est hérité du nombre supérieur comme justification des associativités erronées:	2(0)	$-6 + 3 = -(6 + 3) = -9$
	2(0)	$-6 - 3 = -(6 - 3) = -3$
	2(0)	$3 - (-6) = -(3 + 6) = -9$
- La multiplication est l'opération inverse de la division:	2(0)	$0 + 0 = 0$ car $0 \times 0 = 0$
	1(1)	$0 + 0 = 1$ car $1 \times 0 = 0$
- La soustraction (addition) répétée est l'opération inverse de la division:	1(0)	$3 + 0 = 0$ car $0 + 0 + 0.. = 0$
- Généralisation de la stabilité du zéro (0) initial lors de la division par zéro (0):	3(10)	$0 + 0 = 0$
Total	69(28)	

G(A) Nombre d'élèves de chaque niveau qui ont invoqué les lois correspondant à ces obstacles.

* Sous-ensemble des élèves déjà inclus dans le nombre sans astérisque qui précède ces items.

derniers en rencontrent le plus. La majorité de leurs erreurs se rattache à deux obstacles principaux. Il s'agit d'abord d'un obstacle qui a été classé dans la catégorie des lois conflictuelles, i.e. des lois justes qui sont appliquées de façon inappropriée. C'est la stabilité du zéro (0) initial, que l'on rencontre lors des opérations du genre $0 + 3$, qui a été généralisée à l'opération $0 + 0$:

Marc a aucun argent dans ses poches et il désire le séparer (...). Marc demeure encore avec aucun argent (9A/D8)

Il s'agit ensuite de la loi de la commutativité, généralisée aux signes prédictifs et à la division:

$3 \times (-6)$: Eric repaie 3\$ à 6 de ses amis pour annuler ses dettes. Eric vient alors de remettre 18\$ en tout. (2A/M1)

$3 + 0$: Julie fait du bénévolat à l'hôpital pendant 3 jours. Combien d'argent gagne-t-elle par jour? (...) 0. (6A/D5)

La généralisation de la loi de l'exposant zéro (0), aux résultats des divisions incluant ce nombre, se manifeste également chez les deux groupes. Un élève s'est permis un peu de cynisme pour manifester qu'il en avait assez d'expliquer des opérations vers la fin du test métaphorique. Sa description de l'item $0 + 3$ n'en est pas moins révélatrice:

J'ai 0 gomme et j'en dois 3 à... un (1) chien. = 1. (17G/D7)

Les autres obstacles affectent surtout les élèves de niveau général. Il s'agit plus spécialement des lois de la multiplication-division dans le système des nombres relatifs généralisées erronément à l'addition-soustraction et vice-versa. Par exemple, la loi qui veut que deux nombres négatifs entraînent un résultat positif lors de la multiplication-division se justifie sous la forme d'une soustraction inversée lors de l'opération

$$-3 - 6 = 6 - 3 = 3:$$

Je suis au 6ième étage. Je décide de descendre 3 étages. Maintenant, je suis au 3ième étage. (16G/AS4)

Et la loi qui veut que le signe du résultat soit hérité du nombre supérieur lors de l'addition-soustraction se traduit ainsi lors de l'opération $(-3) \times 6$:

J'ai emprunté 3\$ et j'ai gagné 6 fois le nombre que j'avais emprunté. 18.
(21G/M2)

En terminant, il semble opportun de mentionner que la définition de l'obstacle

épistémologique implique usuellement que ce sont les connaissances antérieures qui s'érigent en obstacles, en terme d'une rupture lors de la transition d'une catégorie de connaissances à une autre (Brousseau, 1989a; Janvier, Charbonneau & de Cotret, 1989; Vergnaud, 1989a). Or, il est intéressant de constater que lors des cas précédents, on se retrouve parfois devant le phénomène inverse. Au tableau 20, on remarque que la loi de l'exposant zéro (0) fait obstacle à la division des nombres entiers (e.g., $0 + 3 = 1$), et que les lois de la multiplication-division des nombres relatifs se sont généralisées à l'addition-soustraction (e.g, deux signes négatifs engendrent un résultat positif: $-3 - 6 = 3 + 6 = 9$). Ailleurs, une élève de niveau général présente même un cas où les nombres relatifs font obstacle lors de la soustraction en nombres naturels. Il s'agit d'une erreur qui résulte de la contamination d'une habitude de calcul dans le système des nombres relatifs, où les nombres sont souvent inversés pour obtenir le résultat: $6 - 3 = 3 - 6 = -3$. L'analogie correspondante à cette erreur commise systématiquement lors des calculs la traduit ainsi:

L'ascenseur était à 3 étages dessous la terre, alors à -6, et elle monte de 3 étages. Elle est maintenant au -3ième étage. (9G/AS4)

Il semblerait donc qu'une notion apprise a posteriori puisse également s'ingérer comme obstacle à une notion antérieure. Les élèves ont soustrait et divisé en nombres entiers naturels pendant des années avant de rencontrer les lois des exposants et des nombres relatifs (voir tableaux 20 et 23). Et ce sont ces notions postérieures qui font maintenant obstacles aux premières. Il semble important de mentionner ces faits puisqu'ils contredisent la séquence communément assumée, où ce sont les notions bien établies antérieurement qui s'érigent en obstacles aux nouveaux apprentissages.

Le troisième genre d'obstacles, rencontré au niveau des calculs, est celui qu'engendrent les diverses formes de notations pour signifier une même opération. Il se définit comme un échec à relier la représentation externe à la représentation conceptuelle sous-jacente et a aussi été nommé "mis-translation" en opposition à "misconception" (Smith, 1984).

Chez les élèves de mathématiques, trois sites d'erreurs d'interprétation des représentations ont été identifiés (Hiebert, 1984):

- 1) la connexion du symbole à son référent concret,
- 2) la connexion de la procédure utilisée pour manipuler la représentation au modèle conceptuel sous-jacent,
- 3) la connexion du résultat de la manipulation symbolique aux événements concrets, de façon à ce que la réponse soit sensée.

Les résultats que l'on retrouve à l'Appendice I-5, et qui sont résumés au tableau 21, révèlent que les erreurs attribuables à la notation se manifestent exclusivement en addition-soustraction. Presqu'absentes au niveau avancé, elles se rencontrent surtout au niveau général. Elles sont, cependant, plus rares que celles engendrées par les catégories d'obstacles décrites précédemment.

Les analogies permettent de diagnostiquer les erreurs d'interprétation de la notation pour chacun des trois sites mentionnés précédemment. Par exemple, une erreur au niveau de la connexion du symbole à son référent concret peut être constatée chez cet élève pour qui la notation $(-3) + (-6)$ qu'il utilise habituellement et la notation $-3 - 6$ ne sont pas équivalentes, dû à l'absence du signe d'addition. Il rend compte de tous les symboles de cette dernière, d'une façon logique mais erronée. Le premier nombre est négatif, le signe qui suit est celui d'une soustraction et le deuxième nombre est positif:

$-3 - 6$: Ce matin, il faisait -3°C . Et l'après-midi, il fait 6°C . La différence est de 3°C . (19G/AS2)

On remarque le même genre d'erreur, mais en sens inverse, pour l'opération $3 - (-6)$, qui est présentée selon une notation différente. L'élève rend encore compte de tous les symboles, mais cette fois, le signe opératif devient le signe prédicatif accompagnant le premier terme:

$3 - (-6)$: ...je perds $3\$$... puis, j'en devais 6 au top de ça. $= -9$. (4G/AS10)

Une erreur, en ce qui a trait à la connexion entre la procédure utilisée pour manipuler la représentation et le modèle conceptuel sous-jacent, peut être observée chez cette élève pour qui la procédure associée à une parenthèse est la multiplication:

$-3 - (-6)$: Ce matin, il faisait -3°C . La température a baissé pendant la journée. Mais elle a descendu... descendu de 6°C durant le soir. Alors, la température est à -18°C . (17A/AS4)

Par la même occasion, cette élève commet également le troisième type d'erreur, qui a trait

Tableau 21: Obstacles de la notation (calculs) manifestés dans les analogies

Obstacle	G(A)	Structure mathématique
Absence d'un signe d'addition entre les deux termes		
Cause de la fiction d'un nombre négatif initial:	1(1)	$3 - 6 = -3 - 6 = -9$
Cause de la fiction d'un nombre positif en second:	2(0)	$-3 - 6 = -3 + 6 = 3$
Parenthèses		
Cause de la répartition des signes entre les termes:	3(0)	$3 - (-6) = -3 - 6 = -9$
Cause de l'application de la loi de l'ordre des opérations où les signes sont répartis par inversion:	1(0)	$3 - (-6) = -6 - 3 = -9$
Cause de la multiplication:	2(2) 1(0)	$3 - (-6) = 18$ $-3 - (-6) = -18$
2 négatifs séparés par une parenthèse entraînent un résultat positif:	1(0)	$3 - (-6) = 3$
Un nombre négatif entre parenthèses entraîne un résultat négatif:	1(0)	$-3 - (-6) = -3$
Total	12(3)	

G(A) Nombre d'élèves de chaque niveau qui ont invoqué les lois correspondant à ces obstacles.

à la connexion du résultat de la manipulation symbolique aux événements concrets.

Dans la littérature, il a été suggéré d'examiner avec soin les représentations qui sont offertes aux élèves en ce qui a trait, entre autres, aux symboles (Minstrell, 1983 dans Smith 1984). Un examen des manuels scolaires utilisés en 9e et 10e années, aussi bien de niveau général (Baxter, Newton & Del Grande, 1977; Ebos & Robinson, 1977; Hamel & Hébert, 1981) qu'avancé (Ebos, Tuck, Schofield & Hamaguchi, 1988; Flewelling & Newton, 1987), révèle un phénomène commun. Les opérations d'addition-soustraction dans le système des nombres relatifs sont invariablement introduites en 9e année et récapitulées en 10e année selon une notation double qui différencie les signes prédicatifs des signes opératoires: $(-3) + (-6)$ ou $-3 + (-6)$ ou $-3 + -6$, $(+3) + (-6)$ ou $3 + (-6)$ ou $3 + -6$, et ainsi de suite. Cette notation double est ensuite abandonnée (traitement des polynômes, équations, etc.) pour la forme " $-3 - 6$ et $3 - 6$ ", sauf dans les cas de soustraction d'un négatif. Lors de ce dernier item, les notations alternent entre $3 - (-6)$ et la notation sans parenthèse, dans le cas de fractions, par exemple.

Bien que ce procédé ait sans doute été adopté dans le but louable de faciliter la transition des nombres naturels aux nombres relatifs, la teneur des lois mathématiques énoncées par les élèves lors des entrevues suggère qu'il soit la cause de la confusion qui préside à la plupart des erreurs de représentation rencontrées ici. Des problèmes se posent si la notation double n'est pas utilisée:

C'est que... Regarde là. $-3 - 6$? Là, là... Là, là... lui appartient à lui, puis lui appartient à lui. C'est quoi le signe dans le milieu? C'est ça que je comprends pas. (...) ...c'est dur à comprendre. Y est ti moins, où si c'est juste -6 ? Comme -6 ou le nombre est négatif? (1G/AS5)

Par contre, si les parenthèses sont utilisées pour l'opération $3 - (-6)$, deux sortes de problèmes se posent. Le premier est de savoir si les règles qui s'appliquent sont les mêmes avec ou sans parenthèses et le second est de savoir s'il s'agit d'une multiplication parce les parenthèses sont aussi un symbole de cette opération:

Ben le -6 , j'suis pas sûr à cause qu'il est entre parenthèses, là. C'est ça l'affaire. (...) D'habitude, ce serait un positif. Mais là, c'est la parenthèse qui m'a screwé, là. (4G/AS10)

Je le comprends pas.... parce que d'habitude, la parenthèse, ça veut dire fois. (8G/AS5-6)

Il semble donc qu'on soit en présence d'obstacles didactiques plus qu'épistémologiques. Il s'agit de connaissances résultant d'une transposition didactique susceptible de n'être pas renégociées (Brousseau, 1989b) ou de l'être insuffisamment par les enseignants qui utilisent ces manuels comme sources d'exercices.

A ce sujet, Vergnaud (1989b) mentionne que la distinction entre les nombres sans signe et les nombres avec signe, ainsi que les problèmes variés que posent les nombres négatifs quant à leur manipulation relèvent de notions que l'algèbre seule peut éclairer. Il considère que le fait qu'on introduise les nombres relatifs et certaines de leurs propriétés avant l'algèbre constitue donc un autre obstacle didactique. Il s'agirait alors d'un obstacle de taille puisque les programmes-cadres de mathématiques (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 1985a, 1985b) et tous les manuels mentionnés précédemment les introduisent ainsi. Viennot (1989b), qui a observé plusieurs instances où les unités naturelles de la connaissance ne coïncident pas avec celles des manuels, décrit ce genre de situations en termes de cohérences ignorées.

Quoiqu'il en soit, Brousseau (1989a) recommande de vérifier et d'améliorer la dimension représentative des instruments rendus disponibles par les mathématiques pour solutionner les problèmes. Comme le montrent les résultats, les transpositions didactiques semblent particulièrement dommageables pour les élèves d'habileté inférieure. Si elles ne peuvent être évitées, elles doivent être sérieusement contrôlées. L'administration d'un test métaphorique pourrait être un moyen approprié pour ce faire.

Quelques autres obstacles, rencontrés au niveau des calculs et manifestés dans les analogies, n'ont pu être classifiés parmi les précédents parce que leurs symptômes sont équivoques ou relèvent d'autres catégories. Ils sont détaillés à l'Appendice I-6 et le tableau 22 en présente un résumé. Comme le montre ce tableau, ce sont des obstacles qui se manifestent exclusivement au niveau général.

Il s'agit d'abord d'obstacles ontogéniques qui sont des modèles spontanés, apparaissant naturellement au cours du développement d'un sujet et qui ne sont souvent pas identifiés dans la culture (Brousseau, 1989b). Par exemple, une élève qui a essayé d'expliquer que le résultat de l'opération $3 \times (-6)$ est hérité du signe du nombre initial

Tableau 22: Autres obstacles (calculs) manifestés dans les analogies

Obstacle	G(A)	Structure mathématique
Obstacles ontogéniques		
Résultat hérité du signe initial:	1(0)	$3 \times (-6) = 18$
Impossibilité de multiplier un nombre supérieur par zéro (0):	1(0)	$0 \times 3 = 0 + 3 = 3$
Obstacle technologique		
Dépendance totale de la calculatrice pour déterminer le signe de la réponse:	1(0)	$-3 - 6 = -9$ ou $9?$
Autres		
Droite dirigée non unifiée:	2(0)	$3 - (-6) = 3 - 6 + 6 = 3$
+ calcul à l'unité de quantités hétérogènes utilisé inefficacement:	1(0)*	$-6 + 3 = 3$
Total	6(0)	

G(A) Nombre d'élèves de chaque niveau qui ont invoqué les lois correspondant à ces obstacles.

* Sous-ensemble d'élèves déjà inclus dans le nombre sans astérisque qui précède ces items.

pour donner 18, a produit l'analogie suivante:

Martin était à la 3^{ième} case du jeu de monopoly. C'était encore son tour, il avance de 6 et sur la 6^{ième} case, on lui dit de piger une carte. La carte disait: recule de 6. (14G/M1)

Il est difficile de comprendre l'articulation de ce raisonnement. L'idiosyncrasie de la conception qui sous-tend ce genre de raisonnement en est probablement la cause. Comme les deux items classifiés sous cette rubrique ont été rencontrés dans les analogies d'élèves qui éprouvent beaucoup de difficultés en mathématiques, il est également possible que ces élèves aient tout simplement bâclé la tâche.

Il s'agit ensuite de la droite dirigée non unifiée qui a été documentée par Glaeser (1981). Cet obstacle s'est manifesté sous la forme d'une droite décrite comme la juxtaposition de deux demi-droites portant des symboles hétérogènes:

-6 + 3: Julie avait manqué son tour 6 fois depuis qu'elle a commencé le jeu avec ses amis. (...) Huuum... elle a été chanceuse à son septième tour, elle a finalement pu avancer de +3. Alors, elle était rendue à la 3^{ième} case. (14G/AS3)

Il s'est également manifesté sous la forme d'un calcul organisé pour éviter le passage d'une demi-droite à l'autre.

3 - (-6): ... j'ai 3\$, j'en devais 6 à ma mère. (...) Puis, mon père me devait 6\$. (...) Alors, il m'en reste 3. = 9. (8G/5)

A cette liste d'obstacles, a été inclus un nouvel obstacle, d'ordre technologique cette fois. Il s'agit de la dépendance totale de la calculatrice. Lors des entrevues, cette dépendance n'a été mentionnée explicitement que par une seule élève de niveau général qui n'arrivait pas à déterminer le signe du résultat d'une opération: "Ah, ben, j'suis pas capable. J'ai besoin de ma calculatrice" (7G/AS3). Elle est manifestée par l'ambivalence de la réponse de l'analogie correspondante à ce commentaire:

-3 - 6: Tu avais 3\$ et ton ami te fait rappeler que tu dois 6\$. Alors, tu en dois 9\$. = +9. (7G/AS5)

On se rappelle que plusieurs sujets de niveau général avaient invoqué ce besoin de la calculatrice lors de l'administration des pré-tests. A notre avis et selon notre expérience, cette dépendance constitue un obstacle majeur pour les élèves d'un niveau d'habileté moindre et entre directement en cause dans la persistance de la plupart des obstacles

précédemment rencontrés au niveau des calculs.

Selon les normes établies par les programmes-cadres de mathématiques,

Les élèves devraient maîtriser certaines méthodes de calcul sûres et efficaces nécessitant ou non une calculatrice selon la grandeur du nombre.

L'élève doit se servir d'une calculatrice lorsque l'objectif premier d'une activité est de développer des aptitudes à la résolution de problèmes ou d'autres aptitudes où le calcul joue un rôle secondaire. (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 1985, p. 20).

Bien que l'apprentissage initial des opérations dans le système des nombres relatifs soit fait sur des petits nombres et que les enseignants insistent sur l'abstention de la calculatrice, les élèves faibles et/ou non motivés ont tôt fait d'y recourir constamment par la suite. Ces notions demeurent insuffisamment maîtrisées et sont vite oubliées.

Si les effets de la dépendance à la calculatrice ne se manifestaient qu'au niveau des calculs, la question serait vite réglée en recommandant son utilisation. Cependant, ils se manifestent également au niveau de la résolution des problèmes les plus simples, comme le démontrent les résultats aux items du pré-test qui correspondent aux analogies erronées. Un examen des solutions révèle qu'ils se traduisent, soit sous la forme d'une solution correcte suivie d'une réponse erronée, soit sous la forme d'une réponse correctement estimée qui ne correspond aucunement à l'algorithme de solution utilisé.

La transition des nombres naturels aux nombres relatifs a déjà été identifiée, à elle seule, comme étant à l'origine de problèmes épistémologiques graves rencontrés lors de la transition de l'arithmétique à l'algèbre (Vergnaud, 1989a, 1989b; Vergnaud, Cortes & Favre-Artigue, 1987). Si de plus, une dépendance à la calculatrice entrave la maîtrise de la représentation des instruments nécessaires pour ce faire, la situation laisse présager des succès mitigés. Citons particulièrement la mise en équation et le traitement d'équations, où le contrôle du sens des opérations se fait différemment et où les élèves ne peuvent plus identifier ce qu'ils sont en train de calculer (Vergnaud, 1989a).

Il faut finalement noter que quelques erreurs épistémologiques ont complètement échappé au diagnostic métaphorique. Le tableau 23 présente une liste de ces erreurs qui se retrouvent dans les Appendices I-1 à I-6. Il s'agit d'erreurs pour lesquelles l'analogie s'est révélée autodidactement curative, ainsi que d'erreurs nouvelles qui ont émergé

Tableau 23: Obstacles (calculs) non manifestés dans les analogies

Obstacle	G(A)	Structure mathématique
ANALOGIES AUTODIDACTEMENT CURATIVES:		
Nombres naturels:		
Nombre négatif initial entraîne la commutativité des signes:	1(0)	$-6 + 3 = 6 - 3 = 3$
Nombres négatifs		
Les nombres négatifs interfèrent dans les calculs avec le zéro (0):	0(1)	$0 - 6 = ?$
Loi des exposants		
Nombre pair + parenthèses entraînent un résultat positif:	0(1)	$(-3) \times 6 = 18$
Notation		
Absence d'un signe d'addition entraîne une associativité:	1(0)	$-6 - 3 = -(6 - 3) = -3$
Obstacles ontogéniques		
- Nombre négatif initial entraîne une multiplication:	1(0)	$-3 + 6 = (-3) \times 6$
- Stabilité du nombre négatif:	1(0)	$0 + (-3) = -3$
- Stabilité du nombre négatif initial seulement:	1(0)	$(-8) \times 0 = -8$
Autres		
- Calcul à l'unité erroné, entraîné par un nombre négatif initial:	1(0)	$-10 + 7 = 8, 9, 10 = 3$
- Dépendance totale de la droite numérique:	3(0)	
TOTAL	9(2)	
NOUVELLES ERREURS (obstacles ontogéniques)		
- Un négatif et un positif entraînent un résultat positif:	1(0)	$-11 + 2 = 9$
- 3 négatifs entraînent un résultat positif:	1(0)	$-8 - (-7) = 15$
- Un nombre inférieur initial entraîne un résultat positif:	1(0)	$3 \times (-6) = 18$
- Impossibilité de diviser le zéro (0) justifiée par une inversion:	0(1)	$0 + 3 = 3 + 0$
TOTAL	3(1)	

G(A) Nombre d'élèves de chaque niveau qui ont invoqué les lois correspondant à ces obstacles.

pendant l'entrevue. Les fréquences du tableau 23 révèlent que ces erreurs apparaissent chez un seul sujet, à une exception près.

La nature hautement idiosyncratique des erreurs épistémologiques a souvent été citée par les experts (Léonard & Sackur, 1990; Resnick & Ford, 1981; Tatsuoka, 1984). La diversité des manifestations de chaque obstacle au niveau des calculs, listées dans les tableaux 19 à 22, révèle que le test métaphorique est très sensible à ces différences individuelles. En effet, les analogies permettent, non seulement de diagnostiquer les difficultés mentionnées par les experts, mais de spécifier en plus les différentes articulations que présentent les erreurs selon les sujets.

Le test métaphorique fournit ainsi une information beaucoup plus précise que les tests actuellement disponibles en mathématiques pour diagnostiquer ce genre d'erreurs. Les tests de calculs à réponses ouvertes (Tatsuoka, 1983, 1984, 1985), supérieurs aux tests à choix multiples et dont le test de calculs utilisé ici est une réplique, se limitent à dégager les configurations d'erreurs. En plus d'exiger un traitement statistique onéreux, ils ne peuvent toujours pas fournir d'informations sur les règles qui sous-tendent une réponse, encore moins sur la diversité des règles et des configurations de règles qui sous-tendent une même réponse selon les sujets. Comme le démontrent les résultats précédents, le test métaphorique procure ces informations, ce qui en fait un outil privilégié pour guider une intervention formative.

Une interprétation de ces résultats, selon le cadre théorique des modèles mentaux, permet d'expliquer la systématité étonnante des erreurs d'une situation de testing à l'autre. En effet, les modèles mentaux sont partiels et parsimonieux, parce que contraints par la robustesse des connexions établies lors des expériences précédentes, par les limites de la capacité mentale (mémoire de travail), ainsi que par les éléments saillants du contexte et pertinents à l'accomplissement d'une tâche. Modèles pragmatiques, institués à travers l'expérience, ils génèrent des règles d'une grande précision pour répondre aux situations spécifiques qui les activent (Norman, 1983; Holland, Holyoak, Nisbett & Thagard, 1989). Selon cet éclairage, il devient moins surprenant de constater que des items parallèles, de quelque nature qu'ils soient, puissent activer et réactiver le même

genre de réponses.

Le fait que des élèves aient réussi à corriger d'eux-mêmes certaines des erreurs décrites précédemment pourrait être interprété, dans un différent contexte, comme une limite du potentiel diagnostique de l'instrument. Cependant, dans le contexte qui nous intéresse ici, l'utilisation d'un instrument d'évaluation qui est autodidactement formatif présente l'avantage de permettre à l'élève d'être part active de son apprentissage dès le début du processus d'évaluation.

Ce fait témoigne aussi de la nature curative de l'analogie. Il semblerait, en effet, que les élèves soient motivés à penser à des niveaux plus élevés lorsqu'on promeut l'investigation de leurs analogies (Flick, 1991). Wong (1993) explique le pouvoir génératif des analogies en disant que leur production permet de stimuler la formation de nouvelles inférences et de nouvelles intuitions. Elle ajoute que le raffinement et la synthèse des savoirs incomplets et fragmentés, qui en résultent, engendrent une meilleure compréhension. Le fait qu'autant d'erreurs ait résisté à ce pouvoir génératif témoigne de la persistance des erreurs épistémologiques, les représentations qui les soutiennent faisant preuve d'une extraordinaire capacité d'adaptation afin de les préserver (Brousseau, 1989; Johsua, 1989a; Viennot, 1979). Les analogies erronées attestent alors d'un besoin d'autant plus urgent de changement conceptuel et deviennent des outils privilégiés pour guider une intervention formative, de par la puissance de leur pouvoir diagnostique.

Aux listes précédentes d'obstacles et erreurs manifestés dans les analogies, il convient également d'ajouter ceux d'ordre général qui ont été mentionnés dans la description des résultats au test métaphorique (Appendice G-1):

- l'ambiguïté des deux zéros (0) que Glaeser (1981) a documenté à travers l'histoire des mathématiques;
- le raisonnement séquentiel et causal (Closset, 1983b; Viennot 1989a, 1989b);
- la difficulté à contrôler le sens des opérations de multiplication et de division que pose la transition des opérations linéaires aux opérations bi-dimensionnelles (Vergnaud, 1989a);
- la conception "multiplication: opération inverse", qui obstrue une conception juste de la division des nombres relatifs;

- les conceptions "la multiplication augmente" et "la division diminue" qui ont été attribuées à la transition des nombres naturels aux nombres rationnels (Brousseau, 1989a; Tirosh & Graeber, 1990, 1994; Vergnaud, 1989a), et qui se prolongent jusqu'ici;
- l'addition - soustraction d'unités différentes;
- la multiplication inappropriée d'une même unité;
- les conceptions conflictuelles.

Si ces obstacles semblent avoir peu de répercussions explicites sur les calculs, on retrouve cependant leurs effets au niveau des problèmes. Les conceptions erronées des opérations qu'ils entraînent, décelables au niveau des analogies, permettent non seulement de prédire les solutions erronées, mais également de déterminer certains des patrons qu'adopteront ces solutions. Le tableau 24 présente la liste de ces conceptions, les patrons de solutions qui y correspondent au niveau des problèmes d'addition et de soustraction, ainsi que les fréquences diagnostiques de ces correspondances, tels que déterminés dans l'Appendice J-1.

On remarquera que les correspondances sont ici plus générales qu'elles ne l'étaient pour les calculs, dans le sens que plus d'un patron de solutions peut correspondre à un même genre de conception. On notera cependant que dans ces cas, ces patrons sont très similaires puisqu'ils engendrent la même réponse, à moins qu'ils ne correspondent à une absence de conception. Et dans les cas où des solutions hétéroclites se paient à un patron de solutions lors des problèmes plus difficiles, il conviendrait mieux de parler de tendance vers ce patron de solutions que de correspondances directes, comme dans les autres cas.

On remarquera également qu'il existe peu de différence de potentiel diagnostique entre les deux niveaux, si ce n'est pour les cas d'univocité des termes ("il reste 3 billes à trouver", e.g.) qui sont plus significatifs au niveau avancé et le nombre de solutions disparates qui est légèrement supérieur au niveau général.

Ce sont les problèmes demandant la soustraction d'un négatif qui causent la grande majorité des erreurs de cette section. Les interprétations erronées de cette opération favorisent les patrons de solutions simplement soustractives et les solutions hétéroclites, ces dernières prenant autant d'importance que les premières à mesure que la difficulté augmente. Au niveau des conceptions utilisées, il est surprenant de constater que les

Tableau 24: Obstacles manifestés dans les analogies et solutions des problèmes correspondants: addition et soustraction

Item	Obstacle	G(A)	Solution/problèmes
-6 + 3	Univocité des termes (naturels)	3(4) 1(3)*	-6 + 3 = 6 - 3 = 3 et -6 + 3 = 3
6 - 3	Conceptions conflictuelles (transformation et abscisse)	1(0) 1(0)*	6 - 3 = 3 - 6 = 3
-3 - 6	Conception erronée de la soustraction	0(1) 0(1)*	-3 - 6 = -3 - (-6) = 3
" "	Relation comparative	1(0) 1(0)*	-3 - 6 = 3 - 6
" "	Aucune conception	1(0) 1(0)*	-3 - 6 = solution ou réponse en naturels
3 - (-6)	Conception littérale de la loi	0(7) 0(4)* 0(2)* 0(1)*	3 - (-6) = 3 + 6 = 9 3 - (-6) = 9 Autre
" "	Conception additive de la loi	5(0) 4(0)*	3 - (-6) = 3 - 6
" "	Interprétation erronée de la soustraction d'un négatif	16(12) 11(7)* 5(3)* 0(2)*	3 - (-6) = 3 - 6 Solutions hétéroclites Autres
" "	Aucune conception	1(1) 1(0)* 0(1)*	3 - (-6) = 3 X (-6) 3 - (-6) = 3 - 6
-3 - (-6)	Conception littérale de la loi	0(5) 0(5)*	-3 - (-6) = 3 ou -6 - (-3) ou -3 + 6 et 6 - 3 = 3
	Conception additive de la loi	6(4) 3(3)* 3(1)*	-3 - (-6) = -3 - 6 Solutions hétéroclites
" "	Interprétation erronée de la soustraction d'un négatif	13(10) 6(4)* 6(3)* 1(3)*	Solutions hétéroclites -3 - (-6) = -3 - 6 Autres
" "	Interprétation erronée de la conception en abscisse	1(0) 1(0)*	-3 - (-6) = -3
" "	Aucune conception	2(2) 1(1)* 1(1)*	-3 - (-6) = -3 - 6 Solutions hétéroclites

* Sous-ensemble d'élèves, déjà compris dans les nombres sans astérisque qui, ayant produit ce genre d'analogies, ont produit systématiquement le genre de solutions correspondantes

conceptions littérales (e.g., "je perds ma dette de 6\$") et additives (e.g., "j'ai gagné 6\$") de la loi qui régit cette opération ne correspondent pas au même genre de solutions de problèmes. Alors que la première correspond à des solutions justes ou des solutions conduisant à des réponses sensées, la deuxième correspond au même genre de solutions qu'une interprétation erronée de ce genre de soustraction. Il est à noter que la conception littérale se rencontre exclusivement au niveau avancé.

Il est finalement intéressant de remarquer l'idiosyncrasie de certaines conceptions et la façon tout à fait unique dont elles se traduisent, cette fois, en solutions de problèmes.

Le tableau 25, qui est un résumé de l'Appendice J-2, présente une liste similaire des conceptions qui se traduisent en solutions de problèmes erronées pour la multiplication et la division, ainsi que les fréquences diagnostiques qui s'y rapportent. Les données concernant la multiplication de deux négatifs y ont été exclues, leur intérêt et utilité se rapportant davantage aux calculs.

On y remarquera une différence de potentiel diagnostique entre les deux niveaux. Qualitativement, elle se note d'abord sous l'aspect de solutions absentes et hétéroclites qui correspondent aux analogies erronées. Le niveau général détient le monopole d'absence de solution et compte maintenant trois(3) fois plus de solutions hétéroclites que le niveau avancé. Alors que ces solutions hétéroclites se limitent aux nombres naturels (à une exception près) au niveau avancé, elles se transforment en solutions complètement hétéroclites au niveau général à mesure que la difficulté augmente.

Comme il a déjà été mentionné lors de la section sur la validité critériée, cette différence de potentiel diagnostique se note ensuite sous l'aspect quantitatif des analogies erronées correspondant à des solutions justes au niveau avancé, réduisant ainsi leur potentiel diagnostique d'environ 10% (correspondances inverses) par rapport au niveau général. Il semble en effet que pour quelques élèves du niveau d'habileté supérieure, une conception "comparaison" soit suffisante pour résoudre les problèmes impliquant la multiplication d'un négatif, et que des conceptions "valeur d'une part" invalides leur permettent de solutionner adéquatement les deux derniers items de la division. Ces cas ont été interprétés précédemment en termes taxonomiques d'un premier niveau de

Tableau 25: Obstacles manifestés dans les analogies et solutions des problèmes correspondants: multiplication et division

Item	Obstacle	G(A)	Solution/problèmes
3 X (-6) et/ou (-3) X 6	Comparaison aux 2 items	8(6) 4(2)* 2(0)* 2(1)*	3 X (-6) et/ou (-3) X 6 = 3 X 6 6 + 3 Solutions en naturels
" "	Combinaison invalide aux 2 items	2(0) 2(0)*	3 X (-6) et (-3) X 6 = 3 X 6
" "	Combinaison incomplète	1(1) 1(1)*	3 X (-6) et/ou (-3) X 6 = Solutions en naturels
" "	Combinaison valide insuffisante aux 2 items	2(0) 2(0)*	3 X (-6) et (-3) X 6 = Solutions en naturels
" "	Soustraction répétée	0(2) 0(2)*	3 X (-6) ou (-3) X 6 = 3 X 6
" "	Transformation linéaire aux 2 items	4(1) 3(1)* 1(0)*	3 X (-6) et (-3) X 6 = 3 X 6 3 - 6 et aucune solution
" "	La division en naturels est l'inverse de la multiplication	2(0) 2(0)*	6 X (-3) = 6 + 3
3 X (-6) et Division	Le signe prédicatif négatif devient un signe opératoire dans les opérations bi-dimensionnelles	1(0) 1(0)*	3 X (-6) = 3 - 6 (-6) + 3 = 3 - 6 6 + (-3) = 6 - 3 (-6) + (-3) = 6 - 3
(-6) + 3	"Valeur d'une part" invalide	2(1) 2(1)*	(-6) + 3 = 6 + 3
" "	Nombre de parts	3(1) 3(0)*	Patrons différents
" "	Opération inverse	2(1) 2(1)*	Patrons différents
" "	Transformation linéaire	3(1) 2(0)* 1(1)*	(-6) + 3 = 6 + 3 Div. ou rép. en naturels
" "	Conception mixte invalide	2(1) 1(1)* 1(0)*	(-6) + 3 = 6 + 3 Aucune solution
" "	Conception indéterminée	1(2) 1(1)* 0(1)*	Solutions en naturels (-6) + 3 = 6 + 3
" "	Aucune conception	5(1) 3(0)* 1(1)* 1(0)*	(-6) + 3 = 6 + 3 Sol. ou rép. en naturels Aucune solution

...à suivre

Tableau 25 (suite)

Item	Obstacle	G(A)	Solution/problèmes
6 + (-3)	"Valeur d'une part" invalide	7(8) 5(4)* 2(1)*	6 + (-3) = 6 + 3 Solutions en naturels
" "	Nombre de parts	3(1) 3(1)*	Patrons différents
" "	Opération inverse	2(4) 2(2)* 0(2)*	6 + (-3) = 6 + 3 Solutions en naturels
" "	Soustraction répétée	1(0) 1(0)*	6 + (-3) = 6 + 3
" "	Transformation linéaire	2(3) 0(2)* 1(1)* 1(0)*	6 + (-3) = 6 + 3 Solutions hétéroclites 6 + (-3) = 6 - 3
" "	Conceptions mixtes	2(2) 2(1)*	6 + (-3) = 6 + 3
" "	Conception indéterminée	1(0) 1(0)*	6 + (-3) = 6 + 3
" "	Aucune conception	4(1) 2(1)* 1(0)* 1(0)*	6 + (-3) = 6 + 3 Solutions en naturels Aucune solution
(-6) + (-3)	Valeur d'une part	3(11) 1(5)* 2(1)*	(-6) + (-3) = (-6) + 3 Autres
" "	"Nombre de parts" invalide	4(0) 2(0)* 2(0)*	(-6) + (-3) = 6 + 3 Autres
" "	Opération inverse	1(1) 1(0)*	(-6) + (-3) = (-6) + 3
" "	Transformation linéaire	2(2) 1(2)* 1(0)*	(-6) + (-3) = (-6) + 3 Aucune solution
" "	Conception mixte	4(2) 3(1)* 1(1)*	Solutions hétéroclites Autres
" "	Conception indéterminée	0(2) 0(2)*	(-6) + (-3) = (-6) + 3 ou 6 + 3
" "	Aucune conception	8(0) 4(0)* 3(0)*	(-6) + (-3) = 6 + 3 Autres

* nombres d'élèves, déjà compris dans les nombres sans astérisque qui, ayant produit ce genre d'analogies, ont produit systématiquement le genre de solutions correspondantes

connaissance (connaissance des lois et reconnaissance des moyens) qui précède le second niveau qu'est la compréhension (Bloom, 1969).

Pour les problèmes demandant la multiplication d'un négatif, il est cependant intéressant de noter que l'utilisation systématique de la division en naturels ($6 + 3$) soit strictement reliée aux conceptions "comparaison" de la multiplication et "opération inverse" de la division. De même, la multiplication en naturels (6×3) est favorisée par les conceptions "comparaison", "soustraction répétée", "transformation linéaire" ainsi que par les "combinaisons" invalides. Correspondant à une diversité de solutions en naturels, les "combinaisons" incomplètes et insuffisantes semblent être les moins efficaces.

Pour les problèmes demandant la division d'un négatif, les conceptions mixtes et "valeur d'une part" invalides favorisent l'utilisation de la division en naturels ($6 + 3$). Correspondant à différents patrons de solutions peu orthodoxes, les conceptions "nombre de parts" et "opération inverse" se révèlent même moins efficaces qu'une absence de conception.

Pour les problèmes demandant la division par un négatif, où les solutions " $(-6) + 3$ " ont également été acceptées comme justes, les conceptions "valeur d'une part" invalides, "soustractions répétées" "opération inverse", les conceptions mixtes, et même l'absence de conception ainsi qu'une conception indéterminée favorisent l'utilisation de la division en naturels ($6 + 3$). Correspondant encore à différents patrons de solutions, la conception "nombre de parts" demeure la moins efficace.

En ce qui a trait aux deux opérations précédentes [$6 + 3$ et $(-6) + 3$], il n'est pas surprenant que les conceptions "valeur d'une part", même invalides, s'avèrent supérieures pour engendrer des solutions approximatives (et même justes pour la division par un négatif) puisqu'il s'agit de la conception la mieux appropriée pour répondre aux deux items, si l'on ne s'en tient qu'à une seule. Il en est de même des conceptions mixtes qui contiennent quantité d'éléments justes, mais souvent organisés de façon discutable. Il est également logique que la conception "nombre de parts", qui est absolument intraitable dans les deux cas, soit celle qui corresponde aux solutions les moins pertinentes. Que la conception "opération inverse" produise différents résultats selon l'item, s'explique par le fait qu'il est beaucoup plus approprié d'y recourir pour essayer de contourner la

difficulté de la deuxième opération $[(-6) + 3]$ que pour répondre à la facilité de la première $(6 + 3)$. Pour supporter cette explication, ajoutons finalement que l'utilisation systématique de la soustraction simple dans les problèmes demandant ces deux opérations est liée aux conceptions "opération inverse" dans le premier cas, et "transformation linéaire" dans le second.

Pour les problèmes demandant la division de deux négatifs, où un négatif au numérateur avait été inclus dans la formulation de chaque problème afin d'en forcer l'utilisation, les conceptions "valeur d'une part", "transformation linéaire" et l'absence de conception favorisent la division d'un négatif $[(-6) + 3]$, souvent accompagnée d'une réponse positive comme l'exige le problème. La conception "nombre de parts" est celle qui est appropriée ici. Invalide, elle favorise légèrement la division en naturels $(6 + 3)$ qui, à notre avis, est supérieure à la précédente, étant donné la formulation des problèmes. Favorisant des solutions hétéroclites, les conceptions mixtes s'avèrent finalement les moins efficaces. Le changement de statut des conceptions mixtes et "transformations linéaires" s'explique par la difficulté accrue que représente cet item, autant au niveau des problèmes qu'à celui de la conceptualisation de l'opération.

En conclusion, il ressort que ce sont les "transformations linéaires" qui laissent prédire les résultats les plus divers; et qu'une absence de conception correspond souvent à des solutions plus appropriées que certaines autres, puisqu'elle peut indiquer la reconnaissance d'une limite au niveau de la conceptualisation d'une opération. Il semble également que si un élève ne devait acquérir qu'une seule conception de la division, c'est la conception "valeur d'une part", qu'il faudrait encourager puisqu'elle engendre généralement de meilleures solutions.

La multiplicité des conceptions utilisées dans la division rend l'établissement des patrons de solutions correspondants plus ténu parce qu'elle limite le nombre de sujets qui se rapportent à chacune. En comparaison avec les opérations précédentes, et à mesure que la difficulté augmente, on y remarque aussi une tendance plus accentuée des conceptions erronées à pointer vers plusieurs patrons de solutions, surtout au niveau général. On notera cependant que dans ces cas, les patrons de solutions sont encore très similaires puisqu'ils résultent tous des deux mêmes obstacles épistémologiques prédominants que

mentionnent les experts à ce niveau. Il s'agit principalement des opérations en nombres naturels et secondairement des opérations linéaires, dont les conceptions erronées qui correspondent à ces solutions sont le reflet.

Malgré cette diminution de précision, ces analogies continuent de prédire indéniablement, et de façon économique, des solutions erronées au niveau des problèmes correspondants. De plus, l'information procurée par les conceptions utilisées pour expliquer les opérations jettent une lumière tout à fait nouvelle, et peu disponible autrement, sur le rôle de ces représentations sur la résolution des problèmes correspondants. Elle indique un besoin d'intervention au niveau même des conceptions. Si, comme semblent le suggérer les résultats précédents, ces conceptions jouent un grand rôle dans la résolution de problèmes, on doit s'y adresser directement.

Quoiqu'il en soit, ces résultats révèlent un fait plus important. Ils démontrent qu'une résolution de problèmes efficace dépend d'une représentation juste des opérations qu'ils exigent. Si l'élève ne possède pas cette représentation adéquate de l'opération nécessaire, il en utilisera une autre qui, toujours selon la représentation qu'il s'en fait, lui semblera appropriée, et qui pour la plupart du temps répondra partiellement aux besoins du problème. Cette interprétation est appuyée par Connel & Peck (1993) qui ont observé que l'incapacité des élèves à résoudre les problèmes écrits les plus simples est reliée directement à leur incompréhension du sens des opérations. A ce sujet, ils déplorent le peu d'opportunités fournies aux élèves pour leur permettre de réfléchir sur la façon dont les règles mathématiques, qui leur sont démontrées, se rattachent à leur expérience et peuvent les aider à quantifier et résoudre des problèmes. Il s'agit d'une lacune à laquelle des interventions de nature métaphorique / analogique permettraient de suppléer.

Résumé et conclusion

La présente question de recherche concerne la validité du test métaphorique comme instrument de diagnostic des erreurs épistémologiques. La section précédente, consacrée à la validation qualitative, visait à déterminer, sous la forme d'une validité de contenu, si les items du test métaphorique représentent adéquatement le construit et/ou domaine de performance d'intérêt spécifique qu'est l'obstacle (erreur) épistémologique,

tel que défini par les experts.

Il a été déterminé que le test métaphorique permet, non seulement de diagnostiquer les difficultés mentionnées par les experts, mais de spécifier les différentes articulations que présentent les erreurs de calcul selon les sujets. Le même test s'est également révélé un bon indicateur des patrons erronés de solutions aux problèmes, que supportent les diverses conceptions utilisées dans les analogies. Dans un contexte d'évaluation formative, ces caractéristiques lui permettent ainsi de fournir une information beaucoup plus précise que le font les tests actuellement disponibles en mathématiques pour diagnostiquer ce genre d'erreurs.

Il s'agit d'une information non négligeable puisque l'élaboration d'inventaires d'erreurs communes que permettent les autres tests serait peu utile. En effet, comme la spécificité d'une conception dépend de l'organisation idiosyncratique de ses éléments, il apparaît qu'une intervention efficace de changement conceptuel doive tenir compte du contexte de fonctionnement des erreurs (West & Pines, 1985; West, Fensham & Garrard, 1985; Giordan, 1989b). Le test métaphorique permet les procédures de "mapping" cognitif qui rendent explicites, au niveau d'un modèle diagnostique détaillé, les relations complexes des structures cognitives implicites supportant une erreur, comme l'exigent les experts (Bednarz & Garnier, 1989; Brown & Burton, 1978; Shuel, 1985).

Lors de la section concernant la validité critériée, les résultats quantitatifs du test métaphorique ont été comparés à ceux de tests parallèles de calculs et de résolution de problèmes, qui mesurent des variables importantes du comportement des élèves en situation d'erreur épistémologique. Il a été déterminé que le test métaphorique présentait des pourcentages de correspondances diagnostiques supérieurs à 96.0% pour toutes les opérations aux deux niveaux, à l'exception de la division où le pourcentage atteint 88.3% au niveau avancé. Ces résultats ont été jugés suffisamment élevés pour justifier l'utilisation de ce test pour remplacer ces mesures parallèles quantitatives plus coûteuses. Ces résultats permettent également de confirmer que les critères d'évaluation, utilisés ici et proposés par Gentner (1982; 1988), sont un excellent guide d'application des méthodologies métaphoriques, comme l'avaient d'ailleurs suggéré Champagne, Gunstone & Klopfer (1985).

Non seulement le seul test métaphorique peut-il remplacer ces deux tests en diagnostiquant à la fois les difficultés au niveau des calculs et des problèmes, mais il est également plus efficace quant à la qualité de l'information qu'il procure. De plus, sa versatilité et la simplicité de sa composition sont des aspects qui l'avantagent par rapport à ce genre de tests. En effet, le développement des tests qui ont été utilisés comme modèles pour construire ces tests est tellement complexe (Birenbaum & Tatsuoka, 1982; Tatsuoka, 1983, 1984, 1985) qu'il faudrait encore bien longtemps avant qu'ils ne soient disponibles pour tous les sujets d'intérêt, nonobstant leur coût d'acquisition. Le test métaphorique pourrait, en effet, être facilement adapté pour répondre aux besoins d'évaluation concernant d'autres concepts (fractions, radicaux, ordre des opérations, etc.).

L'approche métaphorique offre également une alternative attrayante et viable aux méthodes qualitatives efficaces déjà existantes pour diagnostiquer les erreurs épistémologiques, mais jugées inappropriées pour une utilisation en salle de classe (Fensham, Garrard & West, 1981; Moreira, 1987; Shuell, 1985; White, 1985). En plus d'exiger trop de temps, ces méthodes présentent les mêmes désavantages que les méthodes quantitatives, soit de demander des traitements de données compliqués ou une expertise dont les enseignants ne disposent pas pour les interpréter.

Le test métaphorique est facile à composer, équivalent à un autre test en ce qui a trait à son administration; et qui plus est, les enseignants utilisent spontanément les critères qui ont été utilisés ici pour les évaluer et les interpréter (Kelly-Bégin, 1990). Comme les résultats précédents en témoignent, il répond également aux besoins exprimés de réduction et de systématisation des données (Shuell, 1985).

Un besoin d'instruments de type-qualitatif qui tiennent compte des critères de réplicabilité, fidélité et validité est manifeste dans le domaine général de l'erreur épistémologique (Gilbert, Watts & Osborne, 1985; Hashweh, 1988; Shuell, 1985). Un test de type métaphorique, comme celui dont les résultats ont été analysés ici, est probablement celui qui remplit le mieux les conditions nécessaires pour y répondre. Le critère de validité a été largement rencontré dans le contexte de la présente recherche exploratoire et l'efficacité du diagnostic qu'il établit ici pour les deux groupes de niveaux différents est prometteuse au niveau de la réplicabilité et de la fidélité.

Il est finalement à noter que l'efficacité du diagnostic du test métaphorique, tel que rapportée jusqu'à maintenant, peut être augmentée de plusieurs façons qui sont plus difficilement quantifiables. Comme il a été précédemment mentionné, une analogie approximative est souvent l'indice d'une difficulté. Les degrés de certitude, que nous aborderons plus loin (chapitre 5), permettent également de raffiner le diagnostic. Finalement, l'atteinte du critère de richesse-densité des importations, qui concerne la quantité d'importations provenant d'un même modèle, procure également une information diagnostique (voir Appendice G-1).

Les élèves ont utilisé plusieurs modèles pour expliquer les opérations du système des nombres entiers relatifs (voir tableau 9, chapitre 2). Ce sont les modèles de l'argent, de la température, de petits objets de toutes sortes, puis de l'ascenseur qui se sont avérés les plus populaires. Certains élèves se sont confinés à un seul modèle, alors que d'autres (élèves très faibles) ont changé souvent de modèles. Les productions du reste des élèves, dont les plus compétents, se caractérisent par des changements occasionnels de modèle, suivis de retours au modèle dominant. L'analyse de ces changements (voir Appendice G-1) a permis de déterminer qu'un changement de modèle procure généralement l'indice diagnostique de la perception consciente d'une difficulté épistémologique, alors qu'un retour au modèle dominant indique la perception d'un item plus facile.

Finalement, la combinaison des données de la spécification des degrés de certitude, à celles du critère richesse-densité, permet aussi de faire d'autres distinctions intéressantes. Ainsi, les changements de modèle représentent une perception qui est seulement partielle des difficultés rencontrées si l'analogie erronée, produite en utilisant un modèle alternatif, est accompagnée d'un haut degré de certitude. De même, un retour à un modèle dominant qui engendre une analogie erronée pourrait s'avérer un indice d'une difficulté inconsciente, surtout si elle est accompagnée d'un haut degré de certitude. Ces distinctions, qui sont fournies par la méthodologie proposée, sont importantes au niveau d'un diagnostic et d'une remédiation, si on se rappelle la nature implicite/inconsciente des erreurs épistémologiques qui les rend particulièrement insidieuses et résistantes (Brousseau, 1989b; Désautels, 1989; Resnick, 1989a; Sierpiska, 1989).

CHAPITRE 4

PRÉSENTATION ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS: L'EFFICACITÉ DE L'INTERVENTION FORMATIVE MÉTAPHORIQUE / ANALOGIQUE

Cette section présente d'abord les résultats quantitatifs aux post-tests individuels de calcul et de résolution de problèmes qui ont été administrés, à la suite de l'intervention formative de type métaphorique / analogique, pour déterminer l'efficacité de cette intervention. Il s'agit de post-tests d'application, administrés à court terme, dont le but est de déterminer les changements conceptuels qui ont été effectués avec succès lors de l'intervention. Ceux-ci furent administrés individuellement, suite à chacune de ces interventions. Il s'agit aussi de post-tests de vérification, administrés à moyen terme, dont le but est de déterminer la stabilité de ces changements. Ceux-là furent administrée collectivement, deux semaines après la dernière intervention, ce qui représente un laps de deux à cinq semaines selon le moment où chaque élève avait été rencontré individuellement. Les résultats de ces post-tests sont ensuite analysés afin de spécifier les divers effets de l'intervention formative. Les énoncés qui suivent doivent être interprétés selon la perspective exploratoire de la thèse, dû au choix pré-établi non aléatoire d'un nombre limité de sujets.

Les résultats aux post-tests de calcul

Les post-tests de calcul étaient composés seulement des items correspondants à ceux où des erreurs systématiques avaient été identifiées lors du pré-test. Ainsi, le nombre d'items de ces post-tests varie d'un élève à l'autre selon le nombre d'erreurs de chacun. Les réponses à ces items furent évaluées en termes de succès du changement conceptuel de la façon suivante:

- succès total: les deux items présentent des réponses correctes;
- succès partiel: l'un des deux items présente une réponse correcte;
- aucun succès: les deux items présentent des réponses erronées.

Les Appendices K-1 à K-4 présentent ces résultats pour chacune des opérations.

Le tableau 26 résume et complète ces résultats. Dans ce tableau, les résultats sont présentés selon chacune des catégories d'opérations. Afin de raffiner l'analyse, certains items ont été différenciés à l'intérieur de ces catégories parce qu'ils présentent des difficultés différentes. Ainsi, les items de la catégorie addition-soustraction sont répartis sous les titres d'opérations séquentielles et d'opérations en abscisse. De même, les items qui concernent le zéro (0) ont été différenciés des autres items selon chacune des catégories. Enfin, les résultats au post-test d'application, qui fut administré à court terme, et ceux du post-test d'application, qui fut administré à moyen terme, sont placés en parallèle afin de faciliter les comparaisons. Il est à noter que les fréquences ne comptent que les participants qui présentaient des erreurs aux items correspondants lors du pré-test de calcul. Les fréquences ont été conservées parce que les pourcentages sont parfois trompeurs à cause de la disparité des nombres de sujets concernés selon les niveaux.

Si on consulte les pourcentages au bas du tableau 26, on constate qu'en ce qui a trait aux succès complets, ce sont les multiplications qui présentent les meilleurs résultats à court terme pour les deux groupes (G: 90.0% et A: 100.0%), de même que les opérations séquentielles au niveau avancé (100.0%). Ce sont les opérations séquentielles qui démontrent la meilleure rétention à moyen terme au niveau général (79.1%), alors que ce sont les opérations en abscisse au niveau avancé (85.7%). Il s'avère que les divisions sont les opérations dont les conceptions sont les plus difficiles à acquérir pour les deux groupes (G: 65.6% et A: 81.6%). Une fois acquises, elles se révèlent les plus ardues à conserver (G: 39.1% et A: 49.0%), à l'exception de la soustraction d'un négatif pour le niveau général (36.8%).

En consultant les pourcentages de succès complets à la droite du tableau, on constate que si les opérations avec et sans le zéro (0) présentent peu de différences à l'application, c'est à moyen terme qu'elles se montrent plus difficiles à circonvenir. C'est la multiplication du zéro (0) et surtout la division par zéro (0) qui sont responsables de ces résultats. Il est à noter ici que les résultats des items " $X + 0$ " et " $(-X) + 0$ ", qui présentent la même difficulté, ont été combinés au niveau de cette analyse.

On remarque finalement que les pourcentages de succès complets sont, à une exception près, partout plus élevés au niveau avancé qu'au niveau général, et ceci à

Tableau 26: Fréquences et pourcentages des changements conceptuels aux post-tests de calcul

Niveau	Opération séquentielle		Opération en abscisse		Multiplication		Division		Total (%)	
	Applic.* G(A)	Vérific.** G(A)	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applic. G (A)	Vérific. G (A)
ITEM SANS 0	63(4)	63(4)	56(10)	56(10)	17(6)	17(6)	15(4)	15(4)	% (%)	% (%)
Succès complet	50(4)	51(3)	44(8)	21(9)	14(6)	10(4)	10(3)	8(3)	78.1(87.5)	59.6(79.2)
Succès partiel	13(0)	5(1)	11(2)	9(1)	3(0)	1(1)	5(0)	1(1)	21.2(8.3)	10.6(16.7)
Aucun succès	- -	7(0)	1(0)	26(0)	- -	6(1)	0(1)	6(0)	0.6(4.2)	29.8(4.2)
ITEM AVEC 0	23(5)	23(5)	12(4)	12(4)	13(2)	13(2)	49(45)	49(45)	% (%)	% (%)
Succès complet	20(5)	17(4)	9(4)	4(3)	13(2)	6(1)	32(37)	17(21)	76.3(85.7)	45.4(51.8)
Succès partiel	2(0)	6(0)	3(0)	1(1)	- -	1(0)	15(8)	9(0)	20.6(14.3)	17.5(1.8)
Aucun succès	1(0)	0(1)	- -	7(0)	- -	6(1)	2(0)	23(24)	3.1(0.0)	37.1(46.4)
TOTAL (%)										
Succès complet	81.4(100.0)	79.1(77.8)	77.9(85.7)	36.8(85.7)	90.0(100.0)	53.3(62.5)	65.6(81.6)	39.1(49.0)	77.4(86.3)	54.0(60.0)
Succès partiel	17.4(0.0)	12.8(11.1)	20.6(14.3)	14.7(14.3)	10.0(0.0)	6.7(12.5)	31.3(16.3)	15.6(2.0)	21.0(12.5)	13.3(6.3)
Aucun succès	1.2(0.0)	8.1(11.1)	1.5(0.0)	48.5(0.0)	- - - -	40.0(25.0)	3.1(2.0)	45.3(49.0)	1.6(1.3)	32.7(33.8)

* Application: changements conceptuels effectués à court terme

** Vérification: rétention des changements conceptuels à moyen terme

L'application comme à la vérification. Il faut cependant considérer que la charge cognitive était beaucoup plus légère au niveau avancé puisqu'au départ, ce niveau présentait trois fois moins d'erreurs que l'autre. Si on additionne les fréquences, l'image est renversée: les élèves du niveau général ont presque trois fois plus de succès complets à l'application, comme à la vérification.

En ce qui a trait aux pourcentages de succès partiels, les élèves de niveau général en ont presque le double que ceux de l'autre niveau. De façon générale, ce sont les opérations ayant rencontré le moins de succès complets qui ont engendré le plus de succès partiels aux deux post-tests. Il s'agit des divisions et des soustractions d'un négatif, sauf à une exception. Cette exception concerne les divisions, pour lesquelles le niveau général a connu comparativement moins de succès nuls que le niveau avancé à la vérification.

Si on veut comparer l'efficacité de l'intervention métaphorique / analogique entre les deux niveaux, on remarque au tableau 26 que ce sont les succès nuls qui sont les plus semblables: 1.6% (G) en comparaison à 1.3% (A) à l'application et respectivement 32.7% et 33.8% à la vérification. Aux deux niveaux, les mêmes pourcentages d'erreurs n'ont pas été touchés par l'intervention formative, et les mêmes pourcentages de changements conceptuels n'ont pas été conservés. La différence d'efficacité s'identifierait donc à l'échelon des succès partiels, où les pourcentages du niveau général sont environ le double de ceux du niveau avancé aux deux post-tests: 21.0% (G) et 13.3% (A) à l'application, 12.5% (G) et 6.3% (A) à la vérification. Il semblerait qu'à la suite de l'intervention formative, la nouvelle acquisition ait eu plus de difficulté à se stabiliser chez les élèves d'habileté inférieure, comme le montrent également les différences de pourcentages de succès complets au grand total.

Considérant la nature résistante des erreurs épistémologiques et seulement les succès complets, on peut conclure qu'avec des taux de réussite de 77.4% et 86.3% à court terme et une rétention de 54.0% et 60.0% à moyen terme, l'efficacité de la méthodologie de type métaphorique / analogique qui est étudiée, est non équivoque en ce qui a trait aux changements conceptuels effectués au niveau des calculs. Des comparaisons avec les résultats de recherches parallèles seront effectuées plus loin lorsque tous les résultats auront été présentés.

Dans le but de déterminer la nature des erreurs commises suite à l'intervention formative, les erreurs aux post-tests de calcul furent comparées à celles du pré-test. Les résultats sont présentés selon les catégories suivantes:

- régression stable: même erreur dominante que précédemment;
- évolution stable: nouvelle erreur dominante;
- incidence stable: erreur dominante correspondant à une erreur précédemment incidente;
- régression instable: mêmes erreurs différentes;
- évolution instable: au moins une des erreurs différentes est nouvelle;
- régression partielle: une erreur qui correspond à l'erreur dominante précédente;
- évolution partielle: une erreur qui est nouvelle;
- incidence partielle: une erreur qui correspond à une erreur précédemment incidente.

Les Appendices K-5 à K-8 présentent le détail de ces patrons d'erreurs. Le tableau 27 résume et complète ces résultats. On y remarque d'abord que du côté de l'application, les résultats sont semblables pour les deux niveaux. Si on additionne les pourcentages d'échecs complets (aucun succès), ils se chiffrent comparativement aux alentours de 10% à l'application. Toujours à l'application, les pourcentages de succès partiels (environ 90%), qui témoignent de la difficulté à stabiliser une nouvelle conception, se répartissent aussi presque également chez les deux groupes, malgré la disproportion des nombres absolus. Cette difficulté se manifeste selon deux modes: soit que les élèves régressent temporairement vers l'erreur initiale dans environ la moitié des occasions (G: 50.0% et A: 54.5%); soit que, dans une tentative de dépasser une conception qu'ils savent erronée, ils en commettent une nouvelle dans un peu plus du tiers des cas (G: 35.7% et A: 36.4%). On peut donc conclure qu'en ce qui a trait aux résidus des erreurs, l'effet de l'intervention formative de type métaphorique / analogique est similaire pour les deux niveaux à court terme. La seule différence se manifeste à la catégorie "aucun succès", où la totalité des erreurs sont des régressions au niveau avancé (9.1%), alors qu'elles se caractérisent davantage par des évolutions instables vers d'autres erreurs au niveau général (5.4%).

Du côté de la vérification, en additionnant les pourcentages correspondant aux catégories stables des items qui n'ont rencontré aucun succès, on remarque d'abord que

Tableau 27: Fréquences et pourcentages des patrons d'erreurs aux post-tests de calculs en comparaison avec les pré-tests

Niveau	Opérat. séquentielle		Opérat. en abscisse		Multiplication		Division		Total (%)	
	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applicat. G (A)	Vérificat. G (A)
N(N)*	16(0)	18(2)	15(2)	43(2)	3(0)	14(3)	22(9)	39(25)	% (%)	% (%)
Aucun Succès										
Régression stable	-	5(1)	-	14(0)	-	5(1)	2(1)	20(19)	3.6(9.1)	38.6(65.6)
Évolution stable	-	1(0)	-	6(0)	-	5(1)	-	5(5)	- - -	14.9(18.8)
Incidence stable	-	-	1(0)	3(0)	-	-	-	4(0)	1.8(0.0)	6.1(0.0)
Régression instable	-	-	-	1(0)	-	1(0)	-	-	- - -	1.8(0.0)
Évolution instable	1(0)	1(0)	-	9(0)	2(0)	2(1)	-	0(1)	5.4(0.0)	10.5(6.3)
Succès partiel										
Régression partielle	7(0)	4(1)	5(0)	2(0)	1(0)	-	15(6)	2(0)	50.0(54.5)	7.0(3.1)
Évolution partielle	8(0)	6(0)	7(2)	7(2)	-	1(0)	5(2)	8(0)	35.7(36.4)	19.3(6.3)
Incidence partielle	-	1(0)	2(0)	1(0)	-	-	-	-	3.6(0.0)	1.8(0.0)

* Nombres d'items erronés lors des post-tests selon chaque niveau

les erreurs se sont stabilisées davantage (G: 59.6% et A: 84.4%). Alors qu'on assiste plus souvent à une restabilisation des anciennes erreurs au niveau avancé (65.6%), on observe toutes sortes de changements au niveau général. Cette tendance vers les régressions stables, déjà observable à l'application, peut s'expliquer par la plus haute systématité des erreurs, observée chez les élèves de niveau avancé lors du pré-test. Cependant, l'importance des pourcentages semble également indiquer que les élèves d'habileté supérieure renoncent moins facilement à leurs propres conceptions que ceux d'habileté inférieure où on rencontre plus d'évolutions.

Toujours à l'échelon des succès nuls, on constate l'apparition de deux nouvelles catégories. Alors que celle des régressions instables est négligeable, celle des nouvelles réponses stables devient une alternative plus courante aux deux niveaux. Il est à noter que pour les calculs avec le zéro (0), la majeure partie des évolutions sont attribuables à une contamination de la notion "indéfini". Chez les élèves de niveau général qui éprouvent davantage de difficulté avec ces items, cette seule contamination est responsable du tiers de toutes les évolutions stables ou partielles. Il est donc possible que ce genre de phénomène entre également en cause dans le cas de certaines autres opérations où il est moins facilement identifiable avec certitude.

A l'échelon des succès partiels et comparativement à l'application, les régressions sont presque disparues (G: de 50.0% à 7.0% et A: de 54.5% à 3.1%) en faveur des évolutions qui comptent les plus hauts pourcentages de cette catégorie (G: 19.3% et A: 6.3%). Ce fait indique qu'à moyen terme, une fois que la conception juste a été acquise mais n'est pas stabilisée, l'élève tend vers une autre réponse plutôt que vers l'ancienne, sachant qu'elle est erronée. On a déjà mentionné des résultats contaminés comme alternative. L'examen des autres erreurs semble indiquer que certaines d'entre elles représentent une amélioration sur les erreurs initiales, e.g. des additions affublées de signes erronés lors des soustractions d'un négatif. Considérant les limites connues de ce genre de test quant à l'information qu'il procure, on ne peut établir la certitude de ces améliorations. Cependant, la présence des hiérarchies de lois qui régissaient plusieurs des erreurs initiales semble supporter cette interprétation.

On remarque aussi au tableau 27, que les réapparitions stables ou partielles d'une

erreur précédemment incidente se rencontrent exclusivement au niveau général, lors des deux post-tests. Dans 1.8% des cas à l'application, et 6.1% à la vérification, une erreur non systématique est devenue la réponse dominante. Dans 3.6% des cas à l'application et 1.8% à la vérification, ce genre d'erreur s'est de nouveau présenté de façon isolée. On ne rencontre aucun de ces cas au niveau avancé. L'explication se retrouve au niveau des pré-tests, où les élèves de ce niveau produisaient peu d'erreurs non systématiques. On note finalement que, même dans le cas d'erreurs instables, il y a eu évolution dans la plus grande partie des occasions.

On peut donc conclure que, même dans le cas des erreurs de calcul commises à moyen terme, l'intervention formative métaphorique / analogique a engendré des conséquences bénéfiques, particulièrement au niveau général. Elle aura causé l'acquisition, même instable, des conceptions justes et elle aura surtout réussi à ébranler de nombreuses conceptions initiales, ce qui n'est pas un effet négligeable dans le cas des erreurs épistémologiques si on se rappelle la stabilité et la solidité qui leur sont reconnues (Brousseau, 1983; Léonard & Sackur, 1990; Vosniadou, 1994), les représentations qui les soutiennent faisant preuve d'une extraordinaire capacité d'adaptation afin de les préserver (Brousseau, 1989; Johsua, 1989a; Viennot, 1979).

Il faut également considérer que le moment de l'expérimentation avait été choisi de façon à ce que les résultats soient indépendants du contenu enseigné en salle de classe, ce qui n'est pas représentatif de la conjoncture habituelle d'une situation d'évaluation formative. Si les succès partiels et les évolutions relevés dans les deux post-tests avaient pu être soutenus, il n'est nul doute que plusieurs auraient pu être menés à bien.

Les résultats aux post-tests de résolution de problèmes

Les réponses aux items des post-tests de résolution de problèmes, dont le nombre varie aussi d'un élève à l'autre selon le nombre d'erreurs identifiées au niveau du pré-test, furent évaluées. Alors qu'il avait été alloué un point à chaque item de calcul, il en fut alloué deux à chaque problème de la façon suivante:

- deux (2) points furent accordés à une solution où la notation correspondait à la situation décrite par le problème et dont la structure permettait de répondre

- correctement à la question posée par ce problème;
- un (1) point fut accordé à une solution où la notation révélait que le concept visé avait été acquis, mais dont la structure présentait une inversion lors des problèmes. Ces cas concernent surtout les problèmes demandant la soustraction d'un négatif [e.g. $-6 - (-3)$ au lieu de $-3 - (-6)$]. Ce genre d'inversion témoigne d'un résidu de l'obstacle que posent les nombres naturels: la tendance à confondre le plus petit nombre avec plus grand quand ceux-ci sont négatifs. Ils concernent aussi des problèmes demandant la division [e.g. $3 + (-6) = 2$ au lieu de $(-6) + 3 = -2$]. Ce genre d'inversion provient d'une habitude d'utiliser les nombres selon l'ordre où ils apparaissent dans le problème.
 - un (1) point fut accordé quand une solution adéquate était suivie d'une réponse erronée à un calcul autrement correct. Ces erreurs inhabituelles et soudaines, ont été attribuées à une difficulté inhérente au problème. Elles attestent d'un résidu de l'obstacle posé par les nombres naturels, en ce qu'elles révèlent toutes une habitude de calculer dans ce système de nombres [e.g. $-6 + 3 = 3$]

Dans le cas où quatre problèmes correspondaient à l'item " $-x - y$ ", au lieu des deux habituels, un point a été alloué à chaque problème correctement résolu afin de rendre les résultats comparables entre items.

Les Appendices K-1 à K-4 présentent ces résultats pour chacune des opérations. Le tableau 28 résume et complète ces résultats. Les fréquences ont été conservées pour les mêmes raisons que précédemment. Le concept visé lors des post-tests de résolution de problèmes était que l'élève utilise une structure de solution qui représente le problème. En conséquence, les items ayant obtenu 3 et 4 points (sur 4) ont été additionnés pour créer la catégorie "succès complet" puisqu'un item auquel a été octroyé 1 point, selon le barème précédent, indique que le concept visé a été compris. De même, les items ayant obtenu 1 et 2 points ont été additionnés pour créer la catégorie "succès partiel".

Donc, si on considère les items ayant obtenu 3 et 4 points comme des succès complets, on constate, en se référant aux pourcentages au bas du tableau 28, que ce sont les opérations linéaires séquentielles qui présentent les meilleurs résultats aux deux post-tests à la fois au niveau général (App.: 50.0%, Vér.: 66.7%). Comparativement, ce sont

Tableau 28: Fréquences et pourcentages des changements conceptuels aux post-tests de résolution de problèmes

Niveau	Opération séquentielle		Opération en abscisse		Multiplication		Division		Total (%)	
	Applic.* G(A)	Vérific.** G(A)	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applicat. G (A)	Vérificat. G (A)
ITEM SANS 0	18(4)	18(4)	42(38)	42(38)	58(31)	58(31)	62(43)	62(43)	% (%)	% (%)
Succès complet	9(2)	12(3)	22(28)	8(24)	34(14)	12(7)	24(23)	5(9)	49.4(57.8)	20.6(37.1)
Succès partiel	7(2)	3(1)	15(9)	13(8)	19(13)	27(9)	28(17)	18(10)	38.4(35.3)	33.9(24.2)
Aucun succès	2(0)	3(0)	5(1)	21(6)	5(4)	19(15)	10(3)	39(24)	12.2(6.9)	45.6(38.8)
TOTAL (%)									Total sans (-x)X(-y)	
Succès complet	50.0(50.0)	66.7(75.0)	52.3(73.7)	19.0(63.2)	58.6(45.2)	20.7(22.6)	38.7(53.5)	8.1(20.9)	52.6(62.6)	22.1(41.7)
Succès partiel	38.9(50.0)	16.7(25.0)	35.7(23.7)	30.9(21.1)	32.8(41.9)	46.6(29.0)	45.2(39.5)	29.0(23.3)	36.1(32.3)	31.0(21.9)
Aucun succès	11.1(0.0)	16.7(0.0)	11.9(2.6)	50.0(15.8)	8.6(12.9)	32.8(48.4)	16.1(7.0)	62.9(55.8)	11.4(5.2)	46.8(36.5)
X + 0 A										
ITEM AVEC 0										
Succès complet							22(20)	22(20)	% (%)	% (%)
Succès partiel							19(20)	3(13)	86.4(100.0)	13.6(65.0)
Aucun succès							3(0)	16(7)	13.6(0.0)	72.7(35.0)
							- -	3(0)	- - - -	13.6(0.0)

* Application: changements conceptuels effectués à court terme

** Vérification: rétention des changements conceptuels à moyen terme

les opérations en abscisse qui obtiennent les meilleurs résultats au niveau avancé (App.: 73.7%, Vér.:63.2%). Les élèves de niveau général commettaient précédemment beaucoup d'erreurs de calcul pour les items concernant les opérations en abscisse. Pourtant, dans la résolution de problèmes, ils y obtiennent maintenant des résultats comparables à ceux de la multiplication (App.: 52.3% et 58.6%, Vér.: 19.0% et 20.7%) et supérieurs à ceux de la division (App. 52.3% et 38.7%, Vér.: 19.0% et 8.1%). Les calculs de ces deux dernières catégories d'opérations entraînaient peu d'erreurs de calcul au départ, en réponses à des lois mathématiques bien apprises. Cependant, la résolution de problèmes continue de témoigner de la difficulté graduelle déjà observée dans l'acquisition de conceptions justes des opérations bi-dimensionnelles. Les résultats au post-test de vérification indiquent que plus cette difficulté augmente, plus les acquisitions sont difficiles à conserver; ce sont les divisions qui posent alors le plus de difficultés pour les deux groupes (G: 8.1% et A: 20.9%).

Si on continue de considérer les items ayant obtenu 3 et 4 points comme des succès complets, les pourcentages qui y correspondent à la droite du tableau 28, totalisent 49.4% de changements conceptuels au niveau général et 57.8% au niveau avancé, lors de l'application à court terme. La rétention de ces changements totalise 20.6% de réussites au niveau général et 37.1% au niveau avancé lors de la vérification à moyen terme. Comme on peut le constater, les pourcentages de réussites continuent d'être plus élevés au niveau avancé qu'au niveau général. Comparativement aux post-tests de calcul, l'écart entre les deux niveaux reste stable à court terme ($57.8\% - 49.4\% = 8.4\%$ ici par rapport à 8.9% pour les calculs), mais il s'accroît à moyen terme (16.5% ici par rapport à 6.0% pour les calculs). La charge cognitive (nombre d'erreurs à corriger), qui était alors trois fois plus élevée au niveau général, est plus comparable ici. En additionnant le nombre d'items administrés à chacun des groupes, elle se présente selon un ratio 3 : 2. En nombres absolus, ce ratio est presque conservé en réussites à l'application (89 : 67), et presque renversé à la vérification (37: 43). Ces résultats suggèrent que l'intervention formative métaphorique / analogique ait eu des répercussions similaires aux deux niveaux à court terme, quant aux réussites stables dans la résolution de problèmes. Cependant, la rétention de ces réussites se révèle supérieure au niveau avancé, effet d'une charge

cognitive inférieure et/ou de l'habileté des élèves. Il est à noter, en terminant, que si on exclut les problèmes contestables concernant la multiplication de deux négatifs $[(-x) \times (-y)]$, les pourcentages de succès complets augmentent selon des pourcentages allant de 1.5% (22.1% - 20.6%, e.g.) à 4.6%.

Si on considère les items ayant obtenus 1 et 2 points comme des réussites partielles, ces dernières totalisent des pourcentages de 38.4% au niveau général et 35.3% au niveau avancé à l'application. Lors de la vérification à moyen terme, elles comptent 33.9% des cas au niveau général et 24.2% au niveau avancé. On constate que ces résultats sont plus comparables entre les deux niveaux que lors des post-tests de calculs, où les résultats des élèves de niveau général doubleraient presque ceux du niveau avancé à court et à moyen terme. La seule différence se situe lors de la vérification, où elles sont moindres au niveau avancé, la rétention des réussites complètes y ayant été supérieure. Comme dans le cas des calculs, les problèmes qui ont rencontré le moins de succès complets ont toujours tendance à se prêter le plus à ces réussites partielles à court terme aux deux niveaux. A moyen terme cependant, si cette tendance se poursuit pour la plupart des opérations, elle disparaît pour la division au profit des réussites nulles aux deux niveaux. Il est finalement intéressant de constater que l'exclusion de l'item " $(-x) \times (-y)$ " diminue les résultats des réussites partielles d'environ 3% à chacune des situations de testing, sauf lors de l'application à court terme au niveau général. Il s'agit d'un item difficile qui a occasionné beaucoup plus de réussites partielles que complètes.

Si on considère les pourcentages précédents de réussites complètes et partielles, on peut conclure en disant que les retombées de l'intervention formative sur la résolution de problèmes sont loin d'être négligeables à court terme pour les deux groupes. Avec le temps, elles s'amenuisent selon un patron similaire à celui des résultats des calculs, quoiqu'à une échelle sensiblement supérieure.

Les résultats au problème, qui demandait une division par zéro (0), n'ont pas été inclus avec les autres parce que ce problème est unique. De plus, il a été traité différemment afin de permettre l'observation d'un phénomène intéressant. Si on compare ses résultats à ceux des calculs, on observe qu'à court terme, le pourcentage de réponses erronées qu'il entraîne est comparable pour les deux groupes: un élève n'ayant pas acquis

la notion "indéfini" lors des calculs, ne la produira pas lors du problème qui l'exige. Cependant, si cela continue d'être vrai pour les élèves de niveau avancé à moyen terme, il en est tout autrement pour ceux du niveau général. Des 11 élèves qui avaient rencontrés des succès complets et partiels à cet item de calcul, 7 avaient stabilisé cette acquisition. Un succès partiel avait été attribué à 3 des élèves restants parce qu'ils avaient stabilisé une réponse jugée connexe, soit "infini" ou "0 indéfini". De ces élèves, seulement 30% produisirent la même réponse au problème correspondant à la suite d'une solution adéquate. Ces résultats, et peut-être certains des autres, pourraient s'expliquer par le fait que l'intervention formative a été conçue et exécutée pour expliquer les opérations et rectifier les erreurs de calculs. Peu ou pas de références aux problèmes y furent faites, surtout au niveau général où les erreurs de calcul abondaient. Il est possible que certains élèves en aient restreint les notions acquises à l'exécution des calculs, surtout après une période de temps où ces nouvelles acquisitions n'ont pas été soutenues. Cette interprétation est supportée par les résultats des recherches, où il a été observé que l'induction d'un schéma explicite facilite le transfert des acquis dus aux analogies (Gick & Holyoak, 1983; Mandler & Orlich, 1993). Il aurait été intéressant de réadministrer le test métaphorique en post-test afin de pouvoir vérifier cette possibilité, à savoir si les résultats de ce post-test métaphorique correspondraient alors plus explicitement aux résultats des post-tests de calcul qu'à ceux de résolution de problèmes.

Si on voulait comparer les retombées de l'intervention métaphorique / analogique sur la résolution de problèmes entre les deux niveaux, ce sont encore les réussites nulles qui sont probablement les plus révélatrices. Si on se réfère aux pourcentages des items qui n'ont obtenu aucun point à la droite du tableau 28, on constate qu'un écart comparable d'environ 6% entre les deux niveaux se maintient d'un post-test à l'autre, en faveur du niveau avancé. La différence entre les deux niveaux se situe encore à l'échelon de la stabilité des acquisitions, l'écart de succès complets passant de 8.4% (application) à 16.5% (vérification) en faveur du niveau avancé, pour être contrebalancé par un écart de succès partiels qui passe de 3.1% à 9.7% en faveur du niveau général.

Les erreurs aux post-tests de résolution de problèmes furent comparées à celles du pré-test selon les mêmes catégories que précédemment, afin de déterminer leur nature,

suite à l'intervention formative. Les Appendices K-5 à K-8 présentent le détail de ces patrons d'erreurs. Le tableau 29 résume et complète ces résultats.

Comme pour les calculs, on remarque d'abord que du côté de l'application, les résultats sont similaires aux deux niveaux. Si on additionne les pourcentages de problèmes ne présentant pas exactement la solution visée à aucun des deux items, ceux-ci se totalisent à environ 20% pour les deux groupes alors qu'ils se situaient comparativement à 10% pour les calculs. De même, il n'existe pas de différence majeure entre les pourcentages de solutions stables et instables entre les deux niveaux. Les appendices révèlent que plus de 70% de ces items, où aucune solution exacte n'a été fournie, sont des problèmes concernant des opérations à deux négatifs pour les deux groupes.

Du côté des catégories, où seulement une des solutions est inexacte, les pourcentages se répartissent différemment chez les deux groupes, ce qui est nouveau par rapport au post-test correspondant de calcul. Si on additionne les fréquences, les nombres absolus révèlent que la difficulté à stabiliser une nouvelle conception, dont ils témoignent, se manifeste davantage en évolutions au niveau général. Leur nombre double presque celui des régressions partielles vers l'erreur initiale et triple celui des incidences. Au niveau avancé, on constate un déclin graduel des régressions jusqu'aux incidences.

Lors de la vérification, on remarque la même tendance qu'aux post-tests de calculs, en ce que les erreurs se sont généralisées davantage. Si on additionne les pourcentages des problèmes qui ne présentent aucune solution exacte (5 premières lignes), les sommes passent d'environ 20% (application) à environ 60% (vérification), aux deux niveaux. Les élèves de niveau avancé continuent de manifester une tendance vers les erreurs stables (total de 37.8% aux 3 premières lignes). Mais cette fois, la restabilisation des anciennes erreurs (22.0%) est contrebalancée d'autant d'évolutions instables chez eux (19.5%), alors que la tendance vers toutes sortes de changements continue de se manifester au niveau général.

En ce qui a trait aux catégories, où seulement une des solutions est inexacte, les pourcentages de régressions partielles sont réduits pour les deux groupes, comparativement à l'application (G: de 22.5% à 14.7%, A: de 34.5% à 17.1%). Cette réduction reflète la tendance observée au niveau des calculs, qui est le choix d'une autre

Tableau 29: Fréquences et pourcentages des patrons d'erreurs aux post-tests de résolution de problèmes en comparaison avec les pré-tests

Niveau	Opérat. séquentielles		Opérat. en abscisse		Multiplication		Division		Total (%)	
	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applic. G(A)	Vérific. G(A)	Applicat. G (A)	Vérificat. G (A)
N(N)*	13(2)	9(2)	28(13)	41(20)	25(17)	47(24)	45(23)	59(36)	% (%)	% (%)
Aucun solution exacte										
Régression stable	- -	- -	4(1)	6(3)	0(1)	4(4)	3(2)	10(11)	6.3(7.3)	12.8(22.0)
Évolution stable	2(0)	2(0)	- -	3(2)	0(1)	2(2)	5(0)	7(2)	6.3(1.8)	9.0(7.3)
Incidence stable	- -	- -	- -	4(3)	- -	2(0)	1(0)	2(4)	0.9(0.0)	5.1(8.5)
Régression instable										
Régression instable	- -	- -	1(0)	4(1)	3(0)	4(0)	- -	2(4)	3.6(0.0)	6.4(6.1)
Évolution instable	1(0)	- -	- -	12(3)	2(2)	7(9)	3(4)	20(4)	5.4(10.9)	25.0(19.5)
Une solution inexacte										
Régression partielle	2(1)	2(2)	10(6)	5(3)	4(3)	7(3)	9(9)	9(6)	22.5(34.5)	14.7(17.1)
Évolution partielle	7(1)	4(0)	7(2)	6(3)	12(8)	13(5)	20(4)	4(4)	41.4(27.3)	17.3(14.6)
Incidence partielle	1(0)	1(0)	6(4)	1(2)	4(2)	8(1)	4(4)	5(1)	13.5(18.2)	9.6(4.9)
Pourcentage										
X + 0										
Évolution de la solution										
Régression de la réponse							G(A) 3(0)	G(A) 19(7)	G (A) % (%)	G (A) % (%)
Évolution de la réponse							- -	3(0)	- -	15.8(0.0)
							2(0)	11(5)	66.7(0.0)	57.9(71.4)
							1(0)	5(2)	33.3(0.0)	26.3(28.6)

* Nombres d'items erronés lors des post-tests selon chaque niveau

- solution plutôt que la reproduction de l'ancienne erreur, une fois que la conception juste a été acquise mais non stabilisée.

Il est intéressant de noter que les réapparitions stables ou partielles d'une solution erronée précédemment incidente se rencontraient exclusivement au niveau général lors des calculs. Elles se rencontrent maintenant chez les deux groupes à court et à moyen termes lors des problèmes. L'explication de ce fait se retrouve au niveau des pré-tests, où les élèves de niveau avancé produisaient plus d'erreurs de ce genre pour les problèmes que pour les calculs, les patrons de solutions se révélant moins stables que ceux des calculs. On notera cependant que ces retours à une solution incidente erronée, comme les régressions, sont de beaucoup inférieurs aux évolutions de toutes sortes. On peut en conclure que, même dans les cas des erreurs qui subsistent, les interventions formatives ont eu certains effets. La prochaine analyse tentera de préciser la teneur de ces effets.

Les cas d'évolution et d'incidence ont été analysés afin de déterminer la nature des erreurs qui s'y manifestent, en termes d'amélioration, de contamination et autres. Les améliorations ont été déterminées, en comparaison avec les solutions du pré-test, selon les critères suivants:

- nouvelle utilisation du signe opératoire correct,
- nouvelle utilisation adéquate de signes prédicatifs dans la solution de problèmes bi-dimensionnels,
- nouvelle utilisation d'une solution conduisant à la réponse correcte du problème, dans les cas où on élimine les signes prédicatifs de ces solutions, démontrant ainsi une compréhension accrue des moyens nécessaires pour les résoudre.

Il va sans dire que, par rapport au premier critère, les solutions des élèves de niveau général laissaient davantage de place à ces améliorations à cause des confusions existant entre les opérations linéaires et bi-dimensionnelles, ainsi que celles entre la multiplication et division qui sont rares au niveau avancé. Il en est de même du troisième critère car les élèves avancés ont recouru plus fréquemment à ce genre de solution au pré-test.

Lors des cas d'incidence, la meilleure solution du pré-test qui a été réutilisée lors d'un post-test a été déterminée selon les mêmes critères. L'identification des contaminations s'est limitée au recours à la soustraction d'un nombre négatif et à la

multiplication de deux nombres négatifs quand les situations de problèmes ne les exigent pas et que ce genre de solution n'a pas été utilisé lors des pré-tests. Il s'agit de cas évidents; il est possible qu'il y en ait eu d'autres, mais on ne peut les discerner avec autant de certitude que pour ces deux cas.

Le tableau 30 présente les résultats de ces analyses. On y remarque d'abord que les contaminations sont des évolutions qui se rencontrent plus souvent au niveau général, lors des deux post-tests (G: 23.7% et 7.5%, A: 9.1% et 2.9%). C'est à l'application et lors des évolutions partielles, quand les élèves ont répondu correctement à l'un des items, qu'on en retrouve le plus grand nombre (11 cas sur 14). En plus de révéler une difficulté à discriminer quant à la pertinence de l'utilisation des nouvelles acquisitions chez les élèves d'habileté inférieure, il semble que les contaminations puissent aussi s'interpréter en termes de difficultés à généraliser, puisqu'elles accompagnent une solution correcte. Plus présentes à court terme, elles diminuent considérablement à moyen terme. Il semble que la fraîcheur des acquisitions soit également en cause dans ce phénomène.

Du côté des améliorations, le total révèle un pourcentage d'améliorations plus élevé au niveau général lors de l'application à court terme; il double presque celui du niveau avancé (G: 47.5%, A: 27.3%). En examinant les fréquences, on peut constater que les améliorations se répartissent de façon assez similaire entre les sortes d'évolutions aux deux niveaux. Elles se présentent selon des rapports de 4 : 2 : 22 au niveau général et de 1 : 1 : 4 au niveau avancé selon les catégories d'évolutions "stable : instable : partielle".

Lors de la vérification à moyen terme, les améliorations se rencontrent selon des pourcentages semblables, représentant environ la moitié des évolutions aux deux niveaux (G: 46.3%, A: 50.0%). Toutefois, un examen des fréquences révèle que leur répartition entre les catégories "stable : instable : partielle" varie d'un niveau à l'autre, selon des rapports de 5 : 18 : 14 au niveau général et de 6 : 6 : 5 au niveau avancé. Ainsi, les améliorations se font plus nombreuses lors des évolutions instables et partielles au niveau général, alors qu'elles se répartissent également au niveau avancé. Par contre, si on compare les catégories d'évolutions stables "contamination : amélioration : autre erreur", elles se présentent selon des rapports de 2 : 5 : 7 au niveau général et de 0 : 6 : 0 au niveau avancé. Le fait que les évolutions stables représentent toutes des améliorations au

Tableau 30: Nature des erreurs aux post-tests de résolution de problèmes en comparaison avec celles des pré-tests

Niveau	Évolution stable		Évolution instable		Évolution partielle		Total (%)	
	App. G(A)	Vér. G(A)	App. G(A)	Vér. G(A)	App. G(A)	Vér. G(A)	Application G (A)	Vérification G (A)
Nombre	7(1)	14(6)	6(6)	39(16)	46(15)	27(12)	% (%)	% (%)
Contamination	1(0)	2(0)	2(0)	2(0)	11(2)	2(1)	23.7(9.1)	7.5(2.9)
Amélioration	4(1)	5(6)	2(1)	18(6)	22(4)	14(5)	47.5(27.3)	46.3(50.0)
Autre erreur	2(0)	7(0)	2(5)	19(10)	13(9)	11(6)	28.8(63.6)	46.3(47.1)

	Incidence stable		Incidence partielle		Total (%)	
	App. G(A)	Vér. G(A)	App. G(A)	Vér. G(A)	Application G (A)	Vérification G (A)
Nombre	1(0)	8(7)	15(10)	15(4)	% (%)	% (%)
Meilleure solution	0(0)	3(3)	8(4)	2(3)	50.0(40.0)	21.7(54.5)
Autre solution	1(0)	5(4)	7(6)	13(1)	50.0(60.0)	78.3(45.5)

niveau avancé et que les évolutions instables et partielles dominant au niveau général semble indiquer, qu'à moyen terme, une amélioration tend à se manifester de façon plus stable au niveau avancé qu'au niveau général. Cette interprétation serait en accord avec la tendance supérieure vers des réussites complètes stables, déjà observée à ce niveau.

Du côté des incidences, on observe finalement que les élèves de niveau général sont retournés davantage à la meilleure de leurs solutions erronées lors du pré-test à court terme (50.0%) qu'à moyen terme (21.7%). A l'inverse, ceux du niveau avancé y ont recouru davantage à moyen terme (54.5%) qu'à court terme (40.0%). Ces résultats reflètent les tendances déjà observées à moyen terme, selon lesquelles les élèves de niveau avancé obtiennent des résultats sensiblement meilleurs en résolution de problèmes, tout en régressant davantage vers les anciennes solutions, que ceux du niveau général.

En terminant cette section, on peut conclure, qu'en ce qui a trait aux résidus des erreurs de la résolution de problèmes, l'effet de l'intervention formative de type métaphorique / analogique aura engendré certaines conséquences bénéfiques sur la résolution de problèmes à court et à moyen termes. Comme il est maintenant possible d'évaluer les améliorations reflétées à travers les erreurs restantes, on peut constater qu'elles sont appréciables.

En résumé, les effets de l'intervention sont encore une fois assez similaires pour les deux niveaux, les différences étant plus qualitatives que quantitatives. A court terme, elles se manifestent par une tendance accrue vers les évolutions partielles et les contaminations des nouveaux acquis au niveau général. Les contaminations qui ont pu être identifiées sûrement proviennent toutes des opérations à double négatif. Il est intéressant de noter que lors des calculs, ces contaminations n'apparaissaient qu'à moyen terme. Toujours à court terme, elles se révèlent également à travers la qualité des solutions erronées; les élèves de niveau général y manifestant davantage d'améliorations.

Lors de la vérification à moyen terme, la seule différence quantitative notable se situe à l'échelon des régressions stables qui se manifestent davantage au niveau avancé (22.0% par rapport à 7.3%, au tableau 29). Il semble que ce soit la tendance vers les régressions partielles à court terme qui se soit traduit ici en régressions stables. L'effet de contamination, plus spécifique au niveau général, a diminué aux deux niveaux.

Toujours à moyen terme, les différences qualitatives se présentent en termes d'améliorations plus stables au niveau avancé, alors que ce sont les évolutions instables qui sont de qualité supérieure au niveau général. Ces différences, qui reflètent une difficulté à généraliser une nouvelle acquisition au niveau général, se manifestent dans tous les résultats des post-tests. Bien que la charge cognitive supérieure soit probablement en cause ici, il semble également que ce soit une caractéristique typique des élèves d'habileté inférieure, dont on doit tenir compte lors de toute intervention.

L'intervention formative aura ici encore causé l'acquisition, même instable, de conceptions justes et réussi à ébranler de nombreuses conceptions initiales. Comme pour les calculs, ce dernier effet continue de s'observer davantage au niveau général où les pourcentages de régressions stables sont moindres. Cependant, on observe qu'à moyen terme, il s'étend au niveau avancé où ces pourcentages, comme au niveau général, sont trois fois moins élevés que lors des calculs. Des patrons de solutions erronées qui se présentaient au pré-test avec 66.3% de stabilité au niveau général et 70.3% au niveau avancé (voir tableau 15 au chapitre 3), il n'en reste que 12.8% au niveau général et 22.0% au niveau avancé (tableau 29). Ici, encore plus qu'au niveau des calculs, il aurait été très intéressant de réadministrer le test métaphorique afin d'observer comment tous ces changements s'y manifestaient.

Considérant que le moment de l'expérimentation avait été choisi de façon à éviter tout support provenant de la salle de classe, et que l'intervention formative était orientée vers la compréhension des opérations, les retombées de l'intervention formative métaphorique / analogique sur la résolution de problèmes ne sont pas négligeables bien qu'elles soient moins éloquentes que pour les calculs.

Les caractéristiques des résultats aux post-tests

Les résultats quantitatifs aux post-tests furent compilés et traduits en pourcentages pour chaque élève. Ces résultats furent comparés aux nombres d'items contenus dans chacun, par le biais du coefficient de rang Spearman ($\alpha = 0.05$), afin de déterminer s'ils étaient reliés à la quantité d'erreurs que chaque élève avait à corriger (1). Les résultats aux post-tests furent également comparés à ceux des bulletins que les élèves reçurent au

moment de la présente expérimentation afin de savoir si les nouveaux résultats des élèves étaient représentatifs de leur performance habituelle (2). Il est important de mentionner que les résultats de ces comparaisons ne peuvent être considérés comme des validations formelles parce que les post-tests personnalisés ne comportent pas les mêmes nombres d'items, dû à des restrictions de temps. Il faut donc les interpréter avec prudence. Il serait utile de considérer ces comparaisons comme des vérifications additionnelles qui fournissent des indications supplémentaires sur les caractéristiques possibles des effets de l'intervention formative métaphorique / analogique.

Les premières analyses ne montrèrent aucune corrélation positive entre les résultats aux divers post-tests et leurs nombres respectifs d'items pour les deux groupes. Ces résultats suggèrent, qu'à l'intérieur d'un même niveau, la quantité d'erreurs à corriger n'aient pas eu d'effet sur la performance des élèves aux post-tests. Bien qu'il ne soit pas possible d'étudier la différence de charge cognitive qui existe entre les deux niveaux, et qui a été fréquemment relevée dans la discussion précédente, ces comparaisons permettent au moins d'estimer ses effets. Ceux-ci sembleraient, tout au moins, être diminués par le type de méthodologie utilisée ici.

Les secondes analyses ne montrèrent aucune corrélation positive entre les résultats aux divers post-tests et ceux du bulletin officiel, à une exception près, soit le post-test de résolution de problèmes administré à court terme au niveau avancé ($r_s = 0.467$, $p < 0.05$). Ces résultats suggèrent que la performance des élèves aux post-tests soit généralement peu représentative de leur performance habituelle, telle que reflétée par les notes du bulletin officiel. Il est possible que l'intervention métaphorique / analogique produise un effet différent de celui produit par l'enseignement formel habituel en mathématiques, autant sur l'apprentissage que sur sa rétention. Le fait que l'analogie ait été définie comme une habileté de raisonnement inductif (Holland, Holyoak, Nisbett & Thagard, 1989; Sternberg, 1985) en opposition au raisonnement déductif, utilisé communément en mathématiques, semble supporter cette possibilité.

Selon Harris, Lahey & Marsalek (1980), la rétention supérieure d'un matériel métaphorique / analogique, par rapport à un matériel non métaphorique, s'expliquerait d'abord par la nature plus saillante et vivide de ce genre de matériel, ce qui attirerait

davantage l'attention. Elle s'expliquerait ensuite par le plus grand nombre de possibilités de codage qu'il procure en fournissant deux domaines sémantiques à partir desquels les associations et interprétations peuvent se construire pour storage en mémoire. Cette matrice plus riche de savoir pourrait procurer une assistance supérieure au rappel des connaissances, que celle fournie par le matériel non métaphorique, en augmentant le nombre d'indices qui permettent leur récupération. C'est ce que semblent suggérer les résultats aux post-tests de calculs vers lesquels l'intervention formative était plus spécifiquement dirigée, vu que les erreurs qui y apparaissent avaient précédemment résisté à plusieurs mois d'enseignement formel. De plus, le fait que ces résultats ne soient pas reliés à la quantité d'erreurs à corriger semble aussi supporter cette interprétation d'un effet différent de l'intervention métaphorique / analogique sur la mémoire à plus long terme, que Perkins & Unger (1994) explique en terme de réduction des effets de la charge cognitive. Il est effectivement surprenant de constater que ces résultats tendent même vers une corrélation inverse à moyen terme par rapport aux nombres de ces erreurs, tant au niveau avancé ($r_s = -0.081$, $p > 0.05$) qu'au niveau général ($r_s = -0.380$, $p > 0.05$).

Bien que les résultats précédemment cités et les interprétations qui les accompagnent ne se présentent pas avec la même validité que les autres résultats de la présente recherche, ils suggèrent toutefois des possibilités intéressantes qui pourraient servir de pistes d'investigation lors de recherches subséquentes.

Résumé et conclusion

La présente question de recherche concerne l'efficacité de l'intervention de type métaphorique / analogique comme méthode de changement conceptuel dans les cas d'erreurs épistémologiques. Dans la première section, concernant les calculs, il a été déterminé que l'efficacité de l'intervention formative était certaine dans le contexte de la présente recherche exploratoire, engendrant des taux de succès stables de 77.4% et 86.3% à court terme et une rétention de 54.0% et 60.0% à moyen terme (voir tableau 26), révélant une différence d'environ 25% entre les post-tests pour les deux groupes.

Lors de la deuxième section, concernant la résolution de problèmes, il a été déterminé que les retombées de l'intervention formative étaient loin d'être négligeables,

considérant le fait que l'intervention était orientée vers la compréhension des opérations et que les items de résolution de problèmes peuvent être ainsi considérés comme des problèmes de transfert. A court terme, les réussites stables se totalisent à 49.4% et 57.8%. A moyen terme, ces retombées se sont amenuisées à 20.6% et 37.1% de réussites stables, révélant une différence entre les post-tests d'environ 30% au niveau général et de 20% au niveau avancé.

C'est au niveau de la division que les interventions ont rencontré le moins de succès. Il semble que la métaphore n'ait plus autant de puissance évocatrice à ce niveau d'abstraction que dans le cas des autres opérations, moins abstraites. De plus, les représentations analogiques de la division sont plus difficiles à saisir et elles peuvent parfois être interprétées différemment. Il est, en effet, difficile d'obtenir une adéquation structurelle parfaite entre ces opérations et leurs représentations, dû aux limites déjà mentionnées de tout modèle métaphorique.

Quoiqu'il en soit, il a également été déterminé que, même dans les cas des erreurs subséquentes, l'intervention avait engendré des conséquences bénéfiques à court terme comme à moyen terme. Elle a causé l'acquisition, même instable, de conceptions justes et a réussi à ébranler de nombreuses conceptions initiales. Elle a également procuré des améliorations appréciables au niveau de la résolution de problèmes, où elles peuvent être classifiées. Ces résultats rejoignent ceux des chercheurs qui ont observé qu'un changement conceptuel systémique est un processus lent et graduel, échelonné d'erreurs épistémologiques intermédiaires, à mesure que les différentes présuppositions sont réinterprétées (Caravita & Halldén, 1994; Hynd, Alvermann & Qian, 1993; Vosniadou, 1994; Vosniadou & Brewer, 1992).

Bien qu'on ait beaucoup parlé de la résistance des erreurs épistémologiques au changement conceptuel (Brousseau, 1983, 1989a; Johsua, 1989a; Léonard & Sackur, 1990; Viennot, 1979; Vosniadou, 1994), le sujet de leur récurrence est peu mentionné. Les différences entre les deux post-tests permettent de préciser son ampleur, et ces taux de récurrence totale ou partielle sont assez importants (20% à 30%). Ils révèlent que des changements conceptuels apparemment réussis peuvent aussi être suivis de retours en arrière. Il s'agit d'une information appréciable au point de vue pédagogique, car on ne

s'aurait assez insister sur le besoin de soutenir les changements conceptuels si on veut maximiser l'efficacité des interventions formatives.

Les recherches, avec lesquelles on peut comparer ces résultats, n'abondent pas. Celles, qui concernent les méthodes de changement conceptuel de nature métaphorique ou analogique ont été réalisées en sciences. Parmi ces recherches, celles qui ont été effectuées au niveau secondaire, l'ont été plus spécifiquement en physique.

Utilisant la méthode de substitution métaphorique en conjonction avec d'autres méthodes, lors d'une unité sur l'électricité au niveau du lycée, Johsua & Dupin (1989) ont comparé les résultats des classes expérimentales (4e et 6e du système français) à des classes-témoins ayant été exposées à une méthode traditionnelle. Ils rapportent que les performances des classes expérimentales sont supérieures à celles des classes-témoins, en ce qui concerne les questions déclaratives et opérationnelles. Cependant, les réponses correctes aux questions opérationnelles, qui peuvent être considérées comme des questions de transfert, demeurent souvent minoritaires dans les classes expérimentales.

La méthode de modification analogique progressive a aussi été utilisée en conjonction avec d'autres méthodes, lors de 5 leçons de physique concernant les forces et le mouvement dans des classes du niveau secondaire (Clement, 1987b, 1993). Les effets ont été contrôlés par le biais d'un test de 15 questions concernant les erreurs épistémologiques communes relatives à ce domaine ainsi qu'à leur transfert proche et lointain. Ce test fut administré aux classes expérimentales et à des classes-témoins exposées à la méthode traditionnelle comme pré-test et comme post-test à moyen terme. On rapporte que les sujets exposés à la méthode expérimentale ont obtenu des gains de l'ordre de 40.6%, 44.3% et 54.6% d'un test à l'autre, par rapport à 13.9%, 14.5% et 28.2% de gains chez les sujets des classes-témoins. Cependant, le chercheur recommande d'être prudent en interprétant ces résultats puisqu'ils furent obtenus par le biais de questions à choix multiples et qu'une évaluation juste de la compréhension des élèves exige des méthodes plus cliniques. Les derniers résultats sont consistants avec ceux d'un autre chercheur, obtenus également à partir de questions à choix multiples (Ridgeway, 1988). Ce chercheur rapporte qu'à la suite d'une unité sur le mouvement en physique, enseignée selon la méthode traditionnelle, une classe d'élèves de 12e année en physique

n'ont corrigé que 15.8% de leurs erreurs épistémologiques relatives au domaine étudié.

Les résultats de la présente recherche sont suffisamment consistants avec ceux obtenus lors des deux premières recherches pour inférer que l'intervention formative de nature métaphorique / analogique utilisée ici présente le même genre d'efficacité en mathématiques. Cependant, il existe trop de différences entre ces recherches et celle rapportée ici pour pouvoir en comparer davantage les résultats. Premièrement, ces recherches ont été effectuées dans des domaines différents. Deuxièmement, elles ont utilisé une conjugaison de méthodes (+ découverte & remise en question), alors que la présente recherche se confinait à une méthode essentiellement analogique. Troisièmement, les interventions formatives ont été effectuées en situation de salle de classe lors de ces recherches, alors que celles de la présente recherche ont été individuelles, en raison du besoin de documenter les autres questions relatives à la méthodologie proposée. Les interventions individuelles de la présente recherche ont dû entraîner de meilleurs résultats que si elles avaient été effectuées collectivement en salle de classe. Cependant, ces interventions ont été suffisamment homogènes pour croire qu'elles pourraient facilement être intégrées à la salle de classe, comme il sera proposé plus tard. Intégrées à une approche coopérative (Basili & Sanford, 1991; Johnson & Johnson, 1989; Lonning, 1993), où les élèves interviennent les uns auprès des autres pour assurer la compréhension de tous, elles devraient engendrer de bons résultats. Il s'agirait d'une piste d'investigation intéressante pour des recherches subséquentes en mathématiques.

La présente recherche est finalement différente de celle qui utilise la méthode de modification analogique progressive (Clement, 1987b, 1993). quant à l'obtention et l'interprétation des résultats. Tout d'abord, les résultats ont été obtenus par des moyens différents. Comme le mentionne ce chercheur, ses résultats sont sujets à caution puisqu'ils ont été obtenus par le biais d'items à choix multiples. Lors de la présente recherche, les résultats ont été obtenus par le biais de questions ouvertes à réponses courtes, qui sont plus aptes que les items à choix multiples à assurer une évaluation juste de la compréhension des élèves et de la présence d'erreurs épistémologiques (Birenbaum & Tatsuoka, 1987; Tatsuoka, 1983). Ensuite, les résultats obtenus lors de précédente recherche sont interprétés en termes de gains. A ce moment, pour pouvoir comparer les

résultats présents, il faudrait ajouter aux pourcentages de réussites stables précédemment mentionnés, une proportion des pourcentages de réussites partielles, ainsi qu'une mesure des améliorations et autres effets sur la systématique des erreurs qui ont été constatés. Finalement, cette recherche (Clement, 1987b, 1993) ne fait pas de distinction entre les résultats aux items concernant les erreurs épistémologiques et ceux qui se rapportent à leur transfert comme il a été fait ici, ni mention de leurs proportions respectives.

Clement (1987b, 1993) rapporte, cependant, que les classes expérimentales n'obtinrent pas des résultats élevés pour tous les problèmes de transfert. Comme on l'a précédemment mentionné, Johsua & Dupin (1989) rapportent la même tendance. Il s'agit de résultats qui sont semblables à ceux de la présente recherche, où on observe également ce même phénomène de déclin entre les résultats des calculs et ceux de leur transfert à la résolution de problèmes aux deux post-tests.

Retournant au résumé du chapitre en cours, mentionnons finalement que la section précédente a présenté les résultats de comparaisons à partir des résultats aux post-tests qui doivent être interprétés avec prudence, vu que ces post-tests individualisés ne contenaient pas les mêmes nombres d'items. Ces résultats suggèrent, qu'à l'intérieur d'un même niveau, la rétention des acquis ait été indépendante du nombre d'erreurs à corriger. Ils suggèrent également que les résultats aux post-tests n'aient pas été représentatifs de la performance habituelle des élèves, à l'exception de la résolution de problèmes à court terme au niveau avancé. Les résultats de ces comparaisons pourraient indiquer que l'intervention métaphorique / analogique produise un effet différent de celui produit par le raisonnement déductif, utilisé communément dans l'enseignement formel des mathématiques, en réduisant les effets de la charge cognitive. Il se pourrait également que les analogies fournissent une assistance supérieure au rappel des connaissances, les erreurs ayant résisté précédemment à plusieurs mois d'enseignement formel.

Pour conclure, il est utile de se rappeler que le moment de l'expérimentation avait été choisi de façon à éviter tout support provenant de la salle de classe, ce qui n'est pas représentatif de la conjoncture habituelle d'une situation d'évaluation formative. Si les succès partiels et les évolutions relevés dans les deux post-tests avaient pu être soutenus, il n'est nul doute que plusieurs auraient pu être menés à bien.

Si cette évaluation formative avait été conduite au moment propice, i.e. entre l'apprentissage des opérations et celui des problèmes, au début de la 9e année au lieu de la mi-semester de 10e année, il est fort possible que les élèves aient abordé les problèmes de façon différente et que les erreurs observées au pré-test en aient été diminuées. Non seulement les erreurs n'auraient pas eu le temps de s'ancrer aussi profondément, mais les réussites partielles et les évolutions relevées dans les deux post-test auraient pu être soutenues par la suite. En 9e année, les nombres entiers relatifs sont enseignés en trois sections correspondant aux catégories d'opérations. Si cette évaluation était ainsi divisée et administrée entre chaque groupe d'opérations, la lourde charge cognitive qui a été engendrée lors de cette expérimentation en serait réduite d'autant, favorisant une meilleure rétention.

CHAPITRE 5

PRÉSENTATION ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS: L'UTILITÉ D'UNE SPÉCIFICATION DE DEGRÉS DE CERTITUDE

Chacun des 18 items du test métaphorique était accompagné d'une spécification de degré de certitude, inspirée de la matrice des états cognitifs de Margolis (1987) et distribuée selon une échelle de 0 à 4:

- 0 : certitude contraire
- 1 : méfiance
- 2 : incertitude
- 3 : confiance
- 4 : certitude.

Lors des entrevues, les élèves avaient été invités à justifier les degrés de certitude qu'ils avaient attribués à leurs analogies. Comme ils ne possédaient aucune expérience relative à ce genre de spécification, ils avaient également été invités à changer ces degrés s'ils le jugeaient nécessaire.

Une spécification des degrés de certitude a été précédemment utilisée afin de déceler la stabilité des conceptions justes qui pouvaient servir d'ancres à une intervention de changement conceptuel (Clement, Brown & Sietsman, 1989). Cependant, il ne semble exister aucune recherche qui ait documenté leur utilisation lors d'une situation d'évaluation métaphorique, à savoir comment les élèves établissent ces degrés de certitude et quels sont les indices qui peuvent en être dégagés. Cette section présente d'abord les fondements et articulations des degrés de certitude (1); elle détermine ensuite la validité de ces degrés de certitude comme indice de la maîtrise des concepts et leur utilité en ce qui a trait au diagnostic des erreurs épistémologiques (2); elle délimite finalement l'utilité d'une telle spécification quant à une prévision de leur résistance à une intervention de changement conceptuel de type métaphorique / analogique (3). Les énoncés qui suivent sont à titre exploratoire, dû au choix pré-établi non aléatoire d'un nombre limité de sujets.

Les fondements et articulations des degrés de certitude

Les justifications fournies par chaque élève furent analysées selon la grille de codage (Appendice D-4) qui a été présentée précédemment. Bien que cette analyse fut effectuée à partir de critères similaires à ceux qui furent utilisés pour l'évaluation des productions métaphoriques, on remarquera qu'elle s'avère beaucoup moins élaborée puisque la plupart des élèves ne fournirent qu'une seule raison pour justifier leur degré de certitude. Aussi, quand plusieurs critères furent invoqués, seulement le critère dominant fut retenu afin de standardiser l'analyse.

Les critères invoqués par les élèves, à chaque analogie, ont ensuite été comparés à l'évaluation qui en avait été faite précédemment lors de l'étude de validité du test métaphorique (Chapitre 3). Cette comparaison permet de déterminer si les raisons utilisées pour justifier les degrés de certitude étaient appropriées ou non. L'Appendice L-1 présente le détail de ces analyses. Le tableau 31 résume les raisons énoncées pour justifier les degrés de certitude. Si on compare les pourcentages d'utilisation des critères, on peut discerner certaines tendances caractéristiques des élèves des deux niveaux.

On note d'abord que la validité de l'importation est le critère le plus souvent défendu pour supporter un degré de certitude, autant au niveau général (36.9%) qu'au niveau avancé (52.9%). Il s'agit du critère le plus englobant et il s'interprète en terme d'une utilisation plus ou moins efficace de l'item de calcul correspondant lors de situations pratiques. On retrouve les références à ce critère sous des formes plus ou moins élaborées au niveau des protocoles:

... ça fait du sens... ben, avec la... l'exemple, là... ok, le $-6 + 3$. (5G/AS2)

Parce que ça, ça marche pas... parce que... eh... c'est pas lui qui faut qui paie les 3 autres dettes, c'est la compagnie. Mais je savais pas comment écrire ça. [pour $(-6) + (-3)$] (21A/D2-3)

Ce critère est invoqué plus souvent au niveau avancé et y est également appliqué davantage de façon correcte selon des pourcentages de 89.5% en comparaison à 80.8% au niveau général. Il est intéressant de noter que ces instances se rencontrent approximativement selon le même rapport ($179 : 118 = 3 : 2$) que les réussites en résolution de problèmes lors des pré-tests.

Tableau 31: Raisons justifiant les degrés de certitude, en comparaison avec le statut des analogies correspondantes

Critère	Raison appropriée	Raison inappropriée	Total	Pourcentage
N(N)	G(A)	G(A)	G(A)	G (A)
Précision %(%)	5(19) 71.4(100.0)	2(0) 28.6(0.0)	7(19)	1.8(5.0)
Validité de l'importation %(%)	118(179) 80.8(89.5)	28(21) 19.2(10.5)	146(200)	36.9(52.9)
Validité conceptuelle %(%)	7(9) 100.0(90.0)	0(1) 0.0(10.0)	7(10)	1.8(2.6)
Validité mathématique %(%)	27(37) 52.9(90.2)	24(4) 47.1(9.8)	51(41)	12.9(10.8)
Formulation %(%)	11(23) 78.6(100.0)	3(0) 16.6(0.0)	14(23)	3.5(6.1)
Indéterminé %(%)	57(42) 82.6(84.0)	12(8) 17.4(16.0)	69(50)	17.4(13.2)
Autres	53(23) 94.6(92.0)	3(2) 5.4(8.0)	55(25)	14.1(6.6)
Aucune analogie	- -	- -	33(6)	8.3(1.6)
Sans degré	- -	- -	13(4)	3.3(1.1)
TOTAL %(%)	278(332) 70.2(87.8)	72(36) 29.8(12.2)	396(378)	100.0(99.9)

Les cas d'absence d'analogie que l'on retrouve au bas du tableau 31, et par lesquels l'élève reconnaît son incapacité de relier un item de calcul à une situation concrète, représentent une autre version de la catégorie précédente. Ils se rencontrent aussi plus souvent au niveau général (8.3%) qu'au niveau avancé (1.6%), ce qui est représentatif autant de la capacité de résolution de problèmes que du niveau de persévérance, caractéristiques aux deux niveaux.

Le second critère le plus fréquemment invoqué chez les deux groupes est la validité mathématique de la conclusion de l'énoncé analogique:

Parce que j'étais certain que c'était ça. (...) Parce que $-3 - 6$, ça fait -9 .
(3A/AS2)

D'habitude, je fais... ben ici, j'ai fait $3 - 6$. Ça fait 3 . Ben j'ai mis -3 . Je le sais pas pourquoi. [pour $3 - (-6)$] (10G/AS/6)

Il se rencontre selon des pourcentages de 12.9% au niveau général et de 10.8% au niveau avancé. Comme le laissait prévoir le pré-test de calcul, il est appliqué de façon erronée beaucoup plus souvent au niveau général (47.1%) qu'au niveau avancé (9.8%). Il s'agit également d'un critère qui, bien qu'il soit appliqué justement, sert parfois de raison pour surévaluer une analogie autrement erronée. Dans ces cas, peu importe si les autres critères sont défectueux, il suffit que la réponse soit jugée correcte pour que l'élève lui associe un haut degré de certitude.

Le critère dont les élèves semblent le moins conscients est la validité conceptuelle de l'énoncé, à savoir si la réponse découle logiquement de l'énoncé. Bien que les occasions de critiquer les analogies selon ce critère abondaient, les élèves ne s'y sont montrés sensibles que selon des pourcentages de 1.8% au niveau général et 2.6% au niveau avancé. A une exception près, au niveau avancé, ce critère a cependant toujours été appliqué correctement aux deux niveaux, comme les exemples suivants le démontrent:

Un thermomètre est à 3° ... eh, pendant la journée, elle descend à 6° . (...) Ça me donne... ça me donnera pas -18 , ça. [pour $3 \times (-6)$] (15G/M2)

Mais, c'est pas ça. Tu vois, c'est... (...) Parce que tu perds 3 billes et tu n'en devais 6. J'ai eu la bonne réponse, mais le problème... c'est pas la bonne réponse. [pour $3 - (-6)$] (8A/AS4)

Comme il a déjà été mentionné lors de la description générale des analogies, les

élèves du niveau avancé se préoccupent davantage de ce critère lors de la production de leurs énoncés, préférant souvent les conclure par des réponses qu'ils savent fausses pour ensuite déclarer l'analogie erronée. Il semble que, particulièrement au niveau général, plusieurs élèves compartimentent les deux sections de l'analogie, la première correspondant à la conception qu'ils se font de l'item et la deuxième correspondant à la réponse mathématique qui résulte de la loi qu'ils ont mémorisée. Ils concluent par la suite que l'une entraîne nécessairement l'autre.

Vient ensuite la précision, critère auquel les élèves de niveau avancé (5.0%) sont plus sensibles que ceux de niveau général (1.8%). Les élèves l'invoquent ainsi:

Qu'il ait perdu 3 fois. (...) So... non. Ça devrait être -6... comme si tu te bases que le problème que j'ai écrit, ça devrait donner $3 \times (-6)$. (6A/M2)

Il y a 3 fois moins de familles. (...) Non... ce serait 1 (comme degré de certitude). (...) C'est comme une division, ça, hein? Je veux dire une multiplication. [pour $6 \div 3$] (17G/D1)

Ce critère a aussi été appliqué correctement, à deux exceptions près au niveau général. La description des signes prédicatifs et opératoires présentaient de fréquentes occasions (ambiguïtés, absences et erreurs) de s'arrêter à ce critère. Peu d'élèves relèvent les ambiguïtés, et quand il s'agit d'absences ou d'erreurs, ils préfèrent se référer au critère plus général de validité de l'importation.

Il est à noter que les erreurs relevant de ces deux derniers critères sont souvent interdépendantes, en ce sens qu'une lacune au niveau de la précision est souvent la cause d'un manque de validité conceptuelle. L'application de ces critères semble exiger un raffinement supérieur de la pensée logique auquel de nombreux élèves, particulièrement au niveau général, n'ont pas encore accédé. Cependant, quand une insuffisance dans ces domaines leur fut indiquée par l'expérimentateur, la plupart d'entre eux se montrèrent capables de la reconnaître.

En fait, les élèves se montrèrent plus préoccupés par la formulation de leurs énoncés, à savoir si ceux-ci sont exprimés dans un français correct:

Ben... parce que... je sais pas... mon raisonnement est pas mal.. y est mal dit, j'cré ben. [pour 3×6] (15G/M1)

Ben, j'sais pas si (...) ... si je t'expliquais ça, si tu comprendrais. [pour -6 + 3] (15A/AS2)

Ce souci peut être interprété comme un reflet de l'insistance des enseignants sur la langue dans le milieu franco-ontarien. Ces cas, qui se présentent selon des pourcentages de 3.5% au niveau général et de 6.1% au niveau avancé, sont justifiés à trois exceptions près au niveau général. Ils ont automatiquement entraîné une hausse des degrés de certitude, puisque ce critère n'était pas relié à la maîtrise du concept mathématique.

Finalement, la plupart des instances de la catégorie "Autres", du tableau 31, se rapportent à une réaffirmation forte et indiscutable(!) du degré de certitude du genre "Ça, c'est bon." (4A/AS2) ou "Moi, je suis certaine à propos de ça." (7G/AS2) qui, à la lumière des résultats précédents, pourraient être interprétés comme se rattachant à la validité de l'importation. S'y ajoutent ensuite quelques cas d'incertitude dont l'élève n'arrive pas à préciser la raison. On rencontre également quelques instances où la suffisance et l'univocité de l'importation ont été invoquées, ainsi que les rares raisons qui n'ont pu être classifiées parmi les critères précédents. Ces cas, qui se rapportent surtout à une lacune ou à un refus d'explications, se rencontrent davantage au niveau général (14.1%) qu'au niveau avancé (6.6%). Justifiés à peu d'exceptions près, ils représentent une caractéristique typique des élèves de niveau général, chez qui la considération de détails théoriques est peu populaire.

On peut donc conclure que si les élèves ne font pas preuve des mêmes raffinements que leurs enseignants pour évaluer leurs analogies, comme les quelques exemples précédemment cités le laissent soupçonner, ils utilisent les mêmes critères que ceux-ci, sauf en ce qui a trait à la formulation des énoncés et quelques rares autres instances. En fait, bien que les enseignants relèvent automatiquement les erreurs de syntaxe, ils ne se basent pas sur ce critère pour contester la justesse d'une analogie (Kelly-Bégin, 1990). Il va sans dire que cette compréhension et utilisation de critères communs sont d'une importance majeure lors d'une entreprise de changement conceptuel qui utilise le même médium (l'analogie) pour effectuer le diagnostic et axer l'intervention formative. Ces critères établissent la base d'un langage commun entre les interlocuteurs et favorisent ainsi l'avènement d'une des conditions nécessaires au changement

conceptuel, soit l'intelligibilité d'une nouvelle conception offerte comme alternative à celle qui est inadéquate (Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982).

Un seul des critères utilisés par les enseignants ne fut jamais mentionné par les élèves. Il s'agit de la systématité-abstraction, i.e. la contrainte des correspondances analogiques d'une opération par celles des autres. Cependant, comme un manquement à ce critère correspond toujours à une insuffisance de précision, les deux critères peuvent être confondus sans conséquences graves. Etant donnée la complexité du concept en question, son abord par le biais de la précision permet d'ailleurs de rendre plus accessibles les interventions qui le concernent.

La validité des degrés de certitude

Le tableau 31 révèle, qu'au total, les degrés de certitude sont supportés de façon appropriée dans la majorité des cas pour les deux groupes: 70.2% au niveau général et 87.8% au niveau avancé. En ces occasions, les élèves sont conscients des forces ou des limites de leur explication analogique et l'accompagnent d'un degré de certitude qui reflète cette perception. Ces résultats s'expliqueraient selon la théorie des modèles mentaux qui, selon Norman (1983), contiennent souvent une information sur leurs propres limitations ainsi que les sortes d'erreurs qu'ils peuvent engendrer lorsqu'ils sont activés pour accomplir une tâche. Ils incluraient aussi les degrés de certitude ressentis en relation avec les différents aspects du savoir représenté, telle la validité douteuse des règles qui semblent fonctionner même si leur possesseur ne peut fournir d'explications justifiant leur fonctionnement, comme c'est souvent ici le cas en rapport avec les lois mathématiques.

L'absence d'analogie, que l'on retrouve au même tableau, peut être considérée comme équivalente à la catégorie précédente, car même si elle ne fournit pas d'indices sur les difficultés rencontrées, elle signifie aussi que l'élève est conscient des limites de sa compréhension. Ces cas s'élèvent à 8.3% au niveau général et 1.6% au niveau avancé, amenant respectivement les pourcentages de la catégorie précédente à 78.5% et 89.4%.

Cette catégorie comprend les élèves dont les degrés élevés de certitude, accompagnant des analogies adéquates, sont des indices de leur maîtrise des concepts testés. Elle comprend également les élèves dont les analogies révèlent la présence

d'obstacles épistémologiques, mais pour qui la production de celles-ci a permis de mettre en doute le bien-fondé de leurs conceptions sous la forme de degrés faibles de certitude. Ces degrés procurent alors un indice de la présence de la première condition nécessaire au changement conceptuel, soit l'insatisfaction de la conception existante (Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982).

Toujours au tableau 31, sous la rubrique des degrés de certitude supportés par des raisons inappropriées, les pourcentages s'élèvent à 18.2% au niveau général et 9.5% au niveau avancé. En ces occasions, les élèves attribuent à leur analogie des qualités ou des défauts qu'elle ne possède pas et lui allouent un degré de certitude en conséquence de leur jugement. Ces cas se caractérisent généralement par l'attribution d'un degré élevé à une analogie erronée ou celle d'un degré faible à une analogie adéquate.

Ces instances ont été comparées avec les résultats des items correspondants aux pré-tests de calcul et de résolution de problèmes afin de déterminer si elles étaient représentatives de difficultés épistémologiques. Le tableau 32 présente un résumé de cette analyse, dont le détail se retrouve à l'Appendice L-2.

Si on additionne les pourcentages des trois premières lignes du tableau 32, les résultats s'élèvent à 88.9% au niveau général et à 91.7% au niveau avancé. Il s'agit des cas, où les degrés de certitude qui ont été alloués et supportés avec des raisons inappropriées, correspondent à des erreurs systématiques. Ces degrés de certitude sont donc des indices de la présence d'obstacles épistémologiques dans la plupart des cas. Il s'agit d'obstacles qui se manifestent davantage au niveau des calculs seulement pour les deux groupes (G: 41.6% et A: 52.8%). Ils peuvent également se manifester seulement dans les problèmes, particulièrement au niveau avancé (25.0%), où ces cas se rencontrent plus souvent qu'au niveau général (16.7%). Il arrive finalement qu'ils aient des répercussions sur les problèmes et les calculs à la fois, surtout au niveau général (30.6%), alors que c'est le cas qui se rencontre le moins souvent au niveau avancé (13.9%).

Si on compare cette catégorie d'instances à celle où les élèves étaient insatisfaits de leurs conceptions erronées, ou satisfaits de leurs conceptions justes, on peut interpréter l'incohérence entre les degrés de certitude et le statut des analogies correspondantes de deux façons. Une analogie adéquate, accompagnée d'un faible degré de certitude, indique

Tableau 32: Correspondances entre les analogies dont les degrés de certitude sont supportés par des raisons inappropriées et les résultats aux pré-tests

	Fréquence des correspondances	Pourcentage des correspondances
	G(A)	G (A)
Calculs erronés seulement	30(19)	41.6(52.8)
Problèmes erronés seulement	12(9)	16.7(25.0)
Calculs et problèmes erronés	22(5)	30.6(13.9)
Aucune erreur	8(3)	11.1(8.3)
TOTAL	72(36)	100.0(100.0)

l'avènement d'un changement conceptuel occasionné par la production de l'analogie, changement dont le bien-fondé demeure sujet à caution. Une analogie erronée, accompagnée d'un degré élevé de certitude, indique la présence d'obstacles épistémologiques plus résistants que la production de l'analogie n'a pas réussi à ébranler.

Si on additionne finalement les cas où les degrés et raisons inappropriées ne correspondent à aucune erreur aux pré-tests au tableau 32, et ceux des analogies auxquelles les élèves n'ont pas attribué de degré de certitude au tableau 31, on obtient des pourcentages de 5.3% (8 + 13 instances) au niveau général et 1.9% (3 + 4 instances) au niveau avancé. Ils représentent les occasions où les degrés de certitude n'ont révélé aucune information valide.

On peut donc conclure que la façon dont les élèves attribuent leur degré de certitude est représentative de leur maîtrise des concepts testés et qu'il existe peu de différences entre les deux groupes, sauf en ce qui a trait à leur répartition à l'intérieur des diverses catégories de maîtrise. Non seulement ces degrés de certitude procurent-ils une information valide sur le degré de maîtrise, ils procurent également une information importante sur l'émotion cognitive qui y est reliée, information particulièrement utile dans une perspective d'évaluation formative de type métaphorique / analogique. En effet, ils permettent d'observer une certaine gradation du pouvoir curatif des analogies ainsi que la disponibilité de l'élève en égard à un changement conceptuel éventuel. Les degrés de certitude se révélant valides, l'information accumulée au cours des dernières analyses, pourrait être interprétée de façon générale selon la conjoncture suivante:

- Maîtrise ou changement conceptuel décisif: analogie adéquate + évaluation juste
- Possibilité de changement conceptuel mitigé: analogie adéquate + sous- ou surévaluation (Récurrence possible des obstacles)
- Insatisfaction de la conception erronée: analogie erronée + évaluation juste
 (Disponibilité au changement conceptuel)
- Satisfaction de la conception erronée: analogie erronée + surévaluation
 (Résistance possible des obstacles)

Ainsi, l'utilisation d'une spécification de degrés de certitude permettrait donc d'augmenter la puissance diagnostique du test métaphorique, telle que déterminée lors de

l'étude de la première question de recherche. Elle procurerait des renseignements pertinents à une entreprise de changement conceptuel, tel le besoin de renforcement positif lors de changements mitigés. Bien que l'insatisfaction d'une conception erronée ne soit pas garante du succès d'un changement conceptuel ultérieur, elle représente un état cognitif plus réceptif à une intervention formative que la satisfaction d'une conception inadéquate. Cette dernière laisse prévoir un besoin de déstabiliser les conceptions erronées satisfaisantes avant de proposer une meilleure alternative.

La prochaine section, qui examine la relation entre la conjonction "statut de l'analogie - émotion cognitive" et les résultats aux post-tests qui furent administrés à la suite de l'intervention formative, aura pour but de déterminer un guide plus précis d'interprétation des degrés de certitude. Elle visera aussi en quelque sorte à valider la conjoncture présentée précédemment, en rapport avec les possibilités de résistance ou de récurrence des obstacles épistémologiques.

L'utilité des degrés de certitude

Les instances, où les analogies étaient erronées ou absentes, ont été comparées avec les résultats des items correspondants aux post-tests afin de déterminer si les surévaluations (certitude et confiance) pouvaient être représentatives d'une résistance ou d'une récurrence des obstacles épistémologiques. Il est à noter qu'un degré de confiance (3) a été jugé comme approprié pour les analogies représentant une application de la loi mathématique pour la soustraction d'un négatif, ainsi que des soustractions répétées pour la multiplication d'un négatif. Au post-test d'application, la présence de toute erreur au test de calcul, ainsi que toutes les réussites nulles et partielles (total de 0, 1 ou 2 points) aux items correspondants de problèmes ont été considérées comme des indices de la résistance d'un obstacle. Au post-test de vérification, seulement la présence d'erreurs systématiques au niveau des calculs et/ou des problèmes a été considérée comme un indice de la récurrence d'un obstacle. Finalement, l'absence d'erreurs systématiques aux pré-tests a été considérée comme une absence d'erreurs aux post-tests. Le tableau 33, qui est un résumé des Appendices L-3 et L-4, présente les résultats de cette analyse.

Tableau 33: Pourcentages de correspondances entre l'évaluation des analogies erronées et les erreurs aux post-tests

	N. d'items	Post-test			
		Calculs	Problèmes	Calculs & Problèmes	Aucune erreur
	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)
APPLICATION					
Surévaluation	73(45)	23.3(11.1)	32.0(33.3)	4.0(4.2)	57.5(75.6)
Évaluation juste	122(131)	11.5(3.8)	45.2(28.2)	3.8(0.9)	55.3(71.0)
Aucune évaluation	8(3)	25.0(0.0)	75.0(100.0)	12.5(0.0)	12.5(66.7)
Aucune analogie	33(6)	9.1(0.0)	50.0(16.7)	3.3(0.0)	48.5(83.3)
VÉRIFICATION					
Surévaluation	73(45)	31.5(35.6)	62.0(37.5)	30.0(12.5)	46.6(51.1)
Évaluation juste	122(131)	13.9(5.3)	47.1(30.8)	8.7(4.3)	53.3(71.0)
Aucun degré	8(3)	50.0(33.3)	87.5(0.0)	57.2(0.0)	12.5(66.7)
Aucune analogie	33(6)	9.1(0.0)	62.1(50.0)	6.9(0.0)	45.5(66.7)

N.B.: Les pourcentages des erreurs n'ont pas été établis sur le même nombre d'items car certains items de calcul avec zéro (0) ne correspondaient à aucun problème, ce qui explique que les totaux ne s'élèvent pas à 100%.

En ce qui a trait au post-test d'application, on constate d'abord, au côté droit du tableau 33, qu'il y a peu de différences entre les élèves qui ne commettent plus aucune erreur, quel qu'ait été le statut de l'évaluation de leurs analogies erronées. Les résultats correspondant aux surévaluations sont même légèrement meilleurs (G: 57.5% et A: 75.6%) que ceux qui correspondent aux évaluations justes pour les deux groupes (G: 53.3% et A: 71.0%). On remarque également que les élèves de niveau général, qui étaient insatisfaits de leurs analogies erronées (évaluation juste), continuent de commettre plus d'erreurs dans les problèmes (45.2%) que ceux qui en étaient satisfaits (surévaluation: 32.0%), alors que les évaluations justes ne correspondent qu'à légèrement moins d'erreurs (28.2%) que les surévaluations (33.3%) au niveau avancé. Ce n'est que pour les calculs, où une surévaluation correspond à plus du double d'erreurs qu'une évaluation juste pour les deux groupes (A: 11.1% vs 3.8% et G: 23.3% vs 11.5%), que les degrés de certitude peuvent être considérés comme un indice de résistance possible des obstacles épistémologiques.

Bien que ces résultats soient mitigés, à cause de la disparité des nombres qui supportent les pourcentages, les différences existant entre ce post-test et celui de vérification suggèrent qu'ils sont toutefois représentatifs d'une tendance réelle. Si on se rappelle que l'évaluation formative était plus spécifiquement axée sur l'explication des calculs que sur la résolution de problèmes, on peut comprendre que les évaluations justes y aient remporté plus de succès au niveau des calculs que les surévaluations, les élèves étant déjà insatisfaits de leurs réponses à ces calculs. Dans les autres cas, l'insatisfaction était le plus souvent déclenchée par la réalisation qu'on n'arrivait pas à fournir des explications adéquates à des calculs qu'on savait corrects, occasions où l'expérimentateur agréa avec l'évaluation. Il semble alors que les élèves dont les analogies ont été rejetées comme inadéquates par l'expérimentateur, alors qu'ils les trouvaient eux-mêmes satisfaisantes, aient été davantage conscientisés du besoin d'effectuer un changement conceptuel au niveau de la résolution de problèmes. Par contre, ces changements qui ont été observés à court terme ne seront pas nécessairement retenus. Il semble, en effet, qu'une insatisfaction des conceptions produisent de meilleurs résultats à moyen terme, comme on le verra par la suite.

Au post-test de vérification, on constate que les élèves qui étaient satisfaits de leurs analogies erronées, commettent davantage d'erreurs systématiques sous toutes les formes que ceux qui en étaient insatisfaits. Confirmant et amplifiant la tendance observée à l'application, les surévaluations correspondent à une récurrence des obstacles dans les calculs dans à peu près le tiers des cas pour les deux groupes: soit presque trois fois plus d'erreurs de calcul au niveau général (31.5% vs 13.9%) et sept fois plus au niveau avancé (35.6% vs 5.3%) que les évaluations justes. Elles correspondent aussi à plus d'erreurs au niveau des problèmes pour les deux groupes (A: 37.5% vs 30.8% et G: 62.0% vs 47.1%). Elle se manifestent finalement sous la forme d'une généralisation aux deux sortes d'items de trois à quatre fois plus souvent que les évaluations justes (A: 12.5% vs 4.3% et G: 30.0% vs 8.7%). Cette généralisation s'observe davantage au niveau général qu'au niveau avancé, où elle affecte plus rarement les calculs et les problèmes à la fois.

Il semble donc que les changements conceptuels effectués à court terme par les élèves qui étaient satisfaits de leurs conceptions erronées n'aient pas toujours atteint la profondeur nécessaire pour s'installer définitivement au niveau de la résolution de problèmes et que l'insatisfaction initiale demeure plus rentable à moyen terme. Le fait qu'il y ait presque toujours plus d'erreurs qui correspondent aux analogies erronées jugées satisfaisantes au niveau général (voir les catégories "surévaluation" au tableau 33) semble également indiquer que les élèves de niveau avancé aient plus de facilité à remettre en question leur conception devant une alternative meilleure. Il se pourrait qu'il s'agisse d'un des facteurs qui expliquent pourquoi ces élèves réussissent mieux et soient, en conséquence, inscrits à un niveau supérieur de difficulté.

On peut donc conclure, qu'en ce qui a trait aux analogies erronées et en relation avec le type d'intervention formative utilisée ici, les degrés de certitude sont de meilleurs indices de résistance et de récurrence des obstacles épistémologiques en ce qui a trait aux calculs. Ils sont également des indices de récurrence au niveau des problèmes, aussi bien qu'en ce qui a trait aux deux genres d'items à la fois.

Si on considère enfin l'absence d'analogies, on remarque qu'elle présente le même profil que l'évaluation juste aux deux niveaux, lors de l'application. A la vérification, l'absence d'analogies correspond à légèrement moins d'erreurs que l'évaluation juste aux

deux niveaux (surtout au niveau avancé), à l'exception des problèmes. Ces résultats confirment l'hypothèse avancée au niveau de la validité des degrés de certitude, selon laquelle le statut d'une analogie absente est équivalent à celui d'une analogie erronée accompagnée d'un faible degré de certitude, particulièrement au niveau avancé. Ce phénomène correspondrait donc davantage à une insatisfaction de la conception existante. Les exceptions observées pourraient être attribuables à une tendance à démissionner plus facilement au niveau général ainsi qu'au fait que l'intervention formative avait été orientée plus spécifiquement en fonction des calculs que des problèmes.

Bien que les nombres d'absence d'évaluation d'une analogie erronée soient très restreints, ils semblent indiquer la présence de difficultés accrues au niveau général.

Les instances, où les analogies étaient adéquates (parfaites, bonnes et approximatives), ont été comparées avec les résultats des items correspondants aux post-tests, de la même façon que précédemment, afin de déterminer si les degrés de certitude qui les accompagnent pouvaient être représentatifs d'une récurrence des obstacles épistémologiques pour lesquelles ces analogies se seraient avérées curatives. Le tableau 34, qui est un résumé de l'Appendice L-5, présente les résultats de cette analyse. On remarquera que les degrés faibles de certitude (2 et moins) y ont été regroupés comme dans l'analyse précédente afin d'être considérés, cette fois, comme des sous-évaluations puisqu'ils accompagnent des analogies adéquates. Par contre, les degrés 3 et 2, accompagnant des analogies parfaites, ont également été regroupés, puisqu'ils représentent également des sous-évaluations d'analogies qui ne présentent aucune violation. Finalement, les hauts degrés de certitude (4 et 3) ont été différenciés en relation avec les bonnes analogies (une ou plusieurs violations mineures) et les analogies approximatives (une violation majeure et possibilité d'une ou plusieurs violations mineures), puisque le premier (certitude) pourrait être interprété comme une surévaluation et le second (confiance) comme une évaluation plus juste d'analogies qui sont partiellement défectueuses. L'utilisation de l'un ou l'autre pourrait, en effet, révéler des informations supplémentaires sur la conjoncture "maîtrise-émotion cognitive" des sujets.

Avant de commenter les résultats ainsi obtenus, il est important de se rappeler

Tableau 34: Pourcentages de correspondances entre l'évaluation des analogies adéquates et les erreurs aux post-tests

Statut de l'analogie	Degré de certitude	N. d'items	Post-test			
			Calculs	Problèmes	Calculs & Problèmes	
			G(A)	G(A)	G(A)	G(A)
APPLICATION						
Parfaite	4	46(81)	4.3(0.0)	8.9(0.0)	2.2(0.0)	
Parfaite	3 & 2	6(0)	33.3(0.0)	16.7(0.0)	-- --	
Bonne	4	48(57)	2.1(0.0)	2.3(0.0)	-- --	
Bonne	3	4(10)	-- --	-- --	-- --	
Bonne	2 & moins	6(4)	-- --	25.0(50.0)	-- --	
Approximative	4	29(29)	6.9(0.0)	3.7(8.7)	-- --	
Approximative	3	10(6)	20.0(0.0)	12.5(0.0)	-- --	
Approximative	2 & moins	6(5)	33.3(0.0)	0.0(50.0)	-- --	
Adéquate	Sans degré	5(1)	-- --	-- --	-- --	
VÉRIFICATION						
Parfaite	4	46(81)	-- --	2.2(0.0)	-- --	
Parfaite	3 & 2	6(0)	-- --	-- --	-- --	
Bonne	4	48(57)	4.2(0.0)	2.3(4.2)	-- --	
Bonne	3	4(10)	-- --	-- --	-- --	
Bonne	2 & moins	6(4)	-- --	0.0(50.0)	-- --	
Approximative	4	29(29)	0.0(3.4)	3.7(13.0)	-- --	
Approximative	3	10(6)	10.0(0.0)	12.5(0.0)	-- --	
Approximative	2 & moins	6(5)	16.7(0.0)	0.0(50.0)	-- --	
Adéquate	Sans degré	5(1)	-- --	-- --	-- --	

N.B.: Les pourcentages des erreurs n'ont pas été établis sur le même nombre d'items car certains items de calcul avec zéro (0) ne correspondaient à aucun problème.

qu'il est rare que les analogies adéquates se soient révélées curatives pour les calculs et les problèmes à la fois. Les élèves de niveau avancé commettaient peu d'erreurs de calculs. Quand leurs analogies adéquates ne représentaient pas la maîtrise d'un concept, elles se révélèrent surtout curatives en ce qui a trait aux problèmes. Par contre, les erreurs de calculs étaient plus communes au niveau général. Leurs analogies adéquates, si elles ne représentaient pas la maîtrise, s'avérèrent surtout curatives au niveau des calculs, alors qu'ils possédaient souvent déjà une prise sur le concept au niveau des problèmes. C'est ce qui explique les différences qu'on peut observer entre les deux niveaux par rapport aux deux sortes d'items au tableau 34. Les pourcentages d'erreurs aux post-tests, qui correspondent aux analogies curatives, concernent donc en majorité les problèmes au niveau avancé et les calculs au niveau général. C'est pourquoi il sera fait peu de différences entre les deux sortes d'items dans l'analyse qui suivra.

Si on se réfère maintenant aux analogies parfaites au tableau 34, on constate d'abord que les analogies parfaites produites par les élèves de niveau avancé ne correspondent à aucune erreur, à l'application comme à la vérification. On constate également que ces élèves n'ont sous-évalué aucune de ces analogies. Au niveau général, les sous-évaluations (3 et 2) correspondent à un pourcentage plus élevé d'erreurs que les évaluations justes (4) pour les calculs (33.3% vs 4.3%) ainsi que pour les problèmes (16.7% vs 8.9%) lors de l'application. Cependant, les analogies parfaites ne correspondent plus à aucune erreur lors de la vérification, comme au niveau avancé, à une exception près sous la rubrique des problèmes. Une vérification des données primaires révèle que cette exception se rapporte au seul élève qui produisait encore des erreurs combinées aux calculs et aux problèmes, lors de l'application. Son analogie parfaite qu'il avait évaluée justement (4) se sera donc révélée curative au niveau des calculs à moyen terme.

On peut donc conclure que les analogies parfaites, accompagnées d'un degré 4 (certitude) représentent la maîtrise d'un concept ou un changement conceptuel décisif à moyen terme, et ceci aux deux niveaux. Il en est de même pour les analogies parfaites qui ont été sous-évaluées au niveau général, bien qu'elles puissent correspondre à plus de changements conceptuels mitigés (résistance des obstacles épistémologiques) à court terme que les précédentes.

Du côté des bonnes analogies, où une ou plusieurs violations mineures pourraient permettre de justifier un degré de certitude plus bas, le tableau 34 révèle qu'un degré de 3 (confiance) ne correspond à aucune erreur aux deux post-tests. Par contre, un degré 4 (certitude), qui représente ici une légère sur-évaluation, correspond à un faible pourcentage d'erreurs pour les calculs (2.1% et 4.2%) et les problèmes (2.3% et 2.3%) aux deux post-tests au niveau général. Au niveau avancé, il correspond également à des problèmes erronées (4.2%) à moyen terme. Finalement, en rapport avec les degrés de certitude de "2 et moins" qui représentent des sous-évaluations de bonnes analogies, les pourcentages d'erreurs aux problèmes correspondants grimpent à 25.0% au niveau général lors de l'application et à 50.0% au niveau avancé lors des deux post-tests.

Comme un degré de confiance (3) correspond à des résultats légèrement meilleurs qu'un degré de certitude (4) quand l'analogie est bonne, on peut donc conclure qu'il représente un indice plus sûr de la maîtrise d'un concept ou d'un changement conceptuel décisif. La surévaluation d'une bonne analogie pourrait indiquer la présence d'un changement conceptuel mitigé, quoique c'est sa sous-évaluation (incertitude, méfiance) qui représente le meilleur indice de récurrence des obstacles épistémologiques à moyen terme, surtout en ce qui a trait aux problèmes.

Toujours au tableau 34 et en rapport avec les analogies approximatives, qu'une violation majeure additionnelle différencie des précédentes, on constate encore une fois que ce sont les degrés "2 et moins" qui correspondent aux plus grands pourcentages d'erreurs aux deux post-tests, pour les calculs au niveau général et les problèmes au niveau avancé. Il est intéressant d'observer que les analogies qui font preuve de la moindre violation (bonne ou approximative), engendrent le même genre de résultats (50.0% d'erreurs) quand elles sont accompagnées d'un faible degré de certitude au niveau avancé. On constate également qu'au niveau avancé, une surévaluation (4) continue de correspondre à des erreurs aux deux post-tests, alors qu'une évaluation plus juste (confiance: 3) ne correspond à aucune erreur. Il semblerait que les élèves de ce niveau d'habileté soient plus perceptifs dans l'évaluation de leur état cognitif face à la maîtrise d'un concept puisqu'on n'observe pas cette différenciation au niveau général. On assiste plutôt à une gradation des erreurs de calcul à mesure que le degré de certitude diminue.

A première vue, les résultats correspondant aux degrés de certitude (4) et confiance (3) semblent échapper à la tendance précédemment observée, où une surévaluation s'accompagnait d'une hausse d'erreurs. Cependant, si on compare cette catégorie d'analogie à la précédente, on observe que les analogies approximatives, auxquelles on a associé ces degrés, correspondent généralement à plus d'erreurs que les bonnes analogies auxquelles on a attribué les mêmes degrés. Il s'agit d'une conséquence logique, puisque les analogies approximatives sont représentatives de difficultés supplémentaires. En fait, les résultats correspondant à ces analogies presque erronées révèlent aussi une tendance similaire à celle qui a été précédemment observée au niveau des analogies erronées. Ainsi, la conjonction "haut degré de certitude" (3 et 4) vs "faible degré de certitude" (2 et moins) apparaît également significative lors des calculs au niveau général.

On peut donc conclure que les analogies approximatives sont généralement moins représentatives de la maîtrise d'un concept ou d'un changement conceptuel décisif que les bonnes analogies, ayant les mêmes degrés de certitude au niveau général. De même, plus leur degré de certitude est faible, plus les changements conceptuels sont mitigés. Au niveau avancé, la surévaluation (4) d'une analogie approximative continue d'indiquer la possibilité d'un changement conceptuel mitigé, quoique c'est toujours sa sous-évaluation (2 et moins) qui est le meilleur indice de la récurrence des obstacles épistémologiques.

Pour terminer cette analyse, mentionnons que les absences d'évaluation des analogies adéquates (sans degré) concernent toute la difficulté de la multiplication par zéro (0), à une exception près. Elles semblent indiquer une hésitation devant la difficulté rencontrée. Il pourrait aussi bien s'agir d'analogies dont on n'arrive pas à déterminer le degré de certitude, comme il pourrait s'agir d'analogies dont on aurait remise l'évaluation à plus tard et sur lesquelles on aurait oublié de revenir.

Les analyses qui ont été poursuivies dans la présente section visaient à préciser l'interprétation des degrés de certitude, quant aux possibilités de résistance et de récurrence des obstacles épistémologiques, suite à une intervention de changement conceptuel de type métaphorique / analogique. L'information recueillie pourrait se présenter selon la conjoncture suivante à moyen terme:

- **Maîtrise ou changement conceptuel décisif:**
 - analogie parfaite, quelle que soit l'évaluation
 - bonne analogie + évaluation juste
 - analogie approximative + évaluation juste, au niveau avancé
- **Possibilité de changement conceptuel mitigé (récurrence des obstacles):**
 - bonne analogie + surévaluation ou sous-évaluation
 - analogie approximative + surévaluation ou sous-évaluation, au niveau avancé
 - analogie approximative: augmentation des récurrences selon la diminution du degré de certitude, au niveau général
- **Insatisfaction de la conception erronée (réceptivité accrue au changement conceptuel):**
 - analogie erronée + évaluation juste
- **Satisfaction de la conception erronée (résistance accrue des obstacles):**
 - analogie erronée + surévaluation

Cette information est aussi valable à court terme, sauf en ce qui concerne les problèmes, où une surévaluation a produit de meilleurs résultats qu'une évaluation juste au niveau général. Cette nouvelle conjoncture valide en quelque sorte celle qui a été présentée à la fin de la section précédente, quant à l'utilité des degrés de certitude lors du diagnostic des erreurs épistémologiques, à deux exceptions près au niveau général. Il s'agit des analogies approximatives, où une surévaluation correspond à moins de récurrences qu'une évaluation juste. Il s'agit également des analogies parfaites, où les sous-évaluations correspondent autant à des changements conceptuels décisifs que les évaluations justes, quoique ces sous-évaluations correspondent à davantage de récurrences des obstacles à court terme. Les exceptions précédemment mentionnées concordent avec les résultats de l'étude de validité des degrés de certitude, où le pourcentage de degrés non-valides était supérieur au niveau général (5.3% vs 1.9%).

Résumé et conclusion

La présente question de recherche concerne l'utilité d'une spécification de degrés de certitude en rapport avec la méthodologie proposée. Dans la première section, concernant les fondements des degrés de certitude, il fut déterminé que les critères les plus souvent défendus pour supporter un degré de certitude sont la validité de

l'importation analogique pour expliquer le sens d'une opération, suivi de loin par la validité mathématique de la réponse à cette opération. Il fut également déterminé que les critères, dont les élèves semblent le moins conscients, sont la validité conceptuelle de l'énoncé, puis la précision de l'importation, quoiqu'ils se révèlent capables de reconnaître les insuffisances de ce type lorsqu'elles leur sont indiquées. Finalement, le seul critère à n'être jamais mentionné par les élèves est la systématité-abstraction, concept complexe qui gagne à être abordé par le biais de la précision qu'ils comprennent bien.

Il a été conclu que le fait que les élèves comprennent et utilisent les mêmes critères que les enseignants pour évaluer leurs analogies établissait la base d'un langage commun entre les interlocuteurs, favorisant ainsi l'avènement d'une des conditions nécessaires au changement conceptuel, soit l'intelligibilité d'une nouvelle conception offerte comme alternative à celle qui est inadéquate (Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982; Strike & Posner, 1985).

La deuxième section concernait la validité des degrés de certitude comme indice de la maîtrise des concepts et leur utilité quant au diagnostic des erreurs épistémologiques. Il y fut déterminé que les degrés de certitude et les raisons qui les supportent correspondent au statut des connaissances correspondantes aux pré-tests selon des pourcentages de 94.7% au niveau général et 98.1% au niveau avancé. Il a été conclu que les degrés de certitude étaient représentatifs de la maîtrise des concepts testés dans le contexte de la présente recherche exploratoire. Il a donc été proposé que la spécification des degrés de certitude pouvait ainsi procurer une information importante sur l'état cognitif des élèves dans une perspective d'évaluation formative de type métaphorique / analogique, en permettant de déterminer la maîtrise d'un concept, une certaine gradation du pouvoir curatif des analogies ainsi que de la disponibilité de l'élève à l'égard d'un changement conceptuel éventuel selon la conjoncture suivante:

- Maîtrise ou changement conceptuel décisif: analogie adéquate + évaluation juste
- Possibilité de changement conceptuel mitigé: analogie adéquate + sous- ou surévaluation (Récurrence possible des obstacles)
- Insatisfaction de la conception erronée: analogie erronée + évaluation juste (Disponibilité au changement conceptuel)

- Satisfaction de la conception erronée: analogie erronée + surévaluation
(Résistance possible des obstacles)

La spécification des degrés de certitude permet ainsi d'augmenter la puissance diagnostique du test métaphorique, telle que déterminée lors de la première question de recherche, et d'orienter les interventions formatives en conséquence.

La troisième section concernait l'utilité des degrés de certitude quant à la prévision de la résistance (ou récurrence) des obstacles épistémologiques au changement conceptuel, tout en visant à valider la conjoncture précédente. Il y fut déterminé que, pour les deux groupes, les surévaluations d'analogies erronées correspondaient à sensiblement plus d'erreurs systématiques sous toutes ses formes lors des post-tests, à une exception près aux deux niveaux, soit le post-test de résolution de problèmes administré à court terme. Il a été conclu, qu'en ce qui a trait aux analogies erronées, et en relation avec le type d'intervention formative utilisée ici, les degrés de certitude sont de meilleurs indices de récurrence des obstacles épistémologiques en ce qui a trait aux calculs, puis à la généralisation aux calculs et problèmes à la fois.

Il fut ensuite déterminé, que pour les deux groupes, les surévaluations et les sous-évaluations d'analogies adéquates (parfaites, bonnes et approximatives) correspondaient à plus d'erreurs systématiques sous toutes ses formes que les évaluations justes lors des post-tests, à deux exceptions près au niveau général. Il s'agit des surévaluations d'analogies approximatives et des sous-évaluations d'analogies parfaites, quoique ces dernières continuent de correspondre à plus d'erreurs à court terme. Il a été conclu, qu'en ce qui a trait aux analogies adéquates, les degrés de certitude sont de bons indices de récurrence des obstacles épistémologiques. Au niveau avancé, où on fait peu d'erreurs de calcul, cette conclusion s'applique surtout aux problèmes. Au niveau général, elle s'applique surtout aux calculs chez les élèves qui ont déjà une prise sur le concept (problèmes réussis) puisqu'il est rare qu'une analogie s'avère curative pour les deux sortes d'items à la fois.

L'information recueillie lors de la présente section précise la conjoncture "statut de l'analogie - émotion cognitive" proposée à la section précédente, quant à l'utilisation des degrés de certitude lors du diagnostic des erreurs épistémologiques. Cette conjoncture,

qui s'est révélée un peu plus valable à moyen terme qu'à court terme, est également un peu plus exacte pour représenter la réalité du niveau avancé que celle du niveau général. Les quelques exceptions rencontrées à ce niveau, qui concordent avec les résultats de l'étude de validité des degrés de certitude, semblent indiquer que les élèves de niveau avancé sont plus perceptifs dans l'évaluation de leur état cognitif.

Les résultats de la présente question de recherche attestent du rôle que les chercheurs avaient attribué intuitivement aux émotions cognitives, lors d'un processus de changement conceptuel (Désautels, 1989; Gowin, 1983; Resnick, 1989b; Sierpiska, 1989; West & Pines, 1983). Ils permettent de poser les assises d'une technique appropriée pour en tenir compte, autant au niveau du diagnostic des erreurs épistémologiques que lors du changement conceptuel.

Bien que les degrés de certitude ne soient pas des indices infaillibles, ils procurent une information qu'il serait stérile de négliger lors d'une entreprise qui est reconnue comme étant aussi difficile qu'est celle de susciter un changement conceptuel. Quoiqu'il ait été suggéré qu'une méthodologie de type métaphorique / analogique a le potentiel de réduire les résistances affectives (Margolis, 1987), les résultats précédents démontrent qu'elle ne les annulent pas. Lors de la présente expérimentation, les analogies erronées furent traitées de façon similaire, qu'elles soient accompagnées d'un degré faible ou élevé de certitude. Restreint par le temps et préjugant probablement des pouvoirs curatifs de l'analogie correcte, l'expérimentateur se limita à appuyer ou contester le degré de certitude tout en signalant les limites de l'analogie avant de proposer une alternative. Une attention supplémentaire, apportée à la déstabilisation des conceptions erronées jugées satisfaisantes et au support des conceptions justes jugées insatisfaisantes, aurait pu créer une différence.

CHAPITRE 6

PRÉSENTATION ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS: L'EFFICACITÉ SELON LE NIVEAU ACADÉMIQUE

La question concernant la comparaison de l'efficacité d'une méthodologie métaphorique entre les deux niveaux a été traitée concurremment à chacune des autres questions de recherche. Cependant, un résumé s'impose ici afin de discerner plus clairement les différences et les ressemblances précédemment constatées. Ce résumé reprendra donc chacune des sections précédentes. Les énoncés inclus dans le chapitre sont à titre exploratoire, dû aux limites de l'échantillon des sujets provenant de classes intactes.

Les résultats aux pré-tests de calcul et de résolution de problèmes

Les pré-tests se sont révélés représentatifs de la performance habituelle des élèves, telle que reflétée dans les notes du bulletin officiel, sauf en ce qui a trait au pré-test de calcul pour ceux du niveau général. Cette exception fut interprétée comme une résultante d'une dépendance presque complète de la calculatrice dont l'utilisation est autorisée en tout temps dans leur salle de classe. Pour un rappel des caractéristiques de ces pré-tests, on peut se référer au tableau 15 (chapitre 3, p. 100). En résumé, les pourcentages d'erreurs étaient significativement plus élevés au niveau général, pour les deux pré-tests. Par contre, les erreurs se sont révélées plus systématiques au niveau avancé. Pour les calculs, les erreurs étaient plus souvent localisées à un seul item d'une paire de même structure au niveau avancé, alors que les paires d'items de même structure présentaient plus souvent des patrons différents d'erreurs au niveau général.

L'efficacité du test métaphorique: potentiel diagnostique

Comme les résultats aux pré-tests le laissaient prévoir, les élèves de niveau général ont plus de difficultés à conceptualiser les diverses opérations et commettent sensiblement plus d'erreurs que ceux du niveau avancé. Le tableau 35 présente une comparaison des résultats obtenus par les deux groupes, lors de la validation critériée du test métaphorique. Comme on peut le constater, le potentiel diagnostique quantitatif de ce test est un peu

Tableau 35: Comparaison de la validité critériée du test métaphorique selon les niveaux

DIFFÉRENCES	
Niveau général	Niveau avancé
Correspondances diagnostiques avec le pré-test de calcul et/ou celui de problèmes Légèrement supérieur à ce niveau: entre 96.4% et 97.7% de correspondances, selon les catégories d'opérations.	Entre 96.5% et 97.7%, sauf pour la division, où le pourcentage est de 88.3%
Correspondances d'erreurs avec les deux pré-tests, à la fois A peu près le tiers dans chaque catégorie d'opérations.	Au maximum, 3.6% selon les catégories d'opérations.
Correspondances plus élevées avec problèmes* Selon l'ordre ascendant des difficultés.	Plutôt stables d'une opération à l'autre.
Pouvoir autodidacte de l'analogie Supérieur à ce niveau.	
Analogie autodidacte pour les calculs et les problèmes, à la fois Rarement et surtout à ce niveau.	
Analogie autodidacte pour les calculs, alors que les problèmes étaient réussis au pré-test** Exclusivement à ce niveau, et seulement dans les situations les plus simples (10.6%: add.-soust.).	
Autres tendances typiques, très légères Production d'un calcul correct par comparaison des items, sans conception juste de l'opération.	
Production d'une nouvelle erreur de calcul, alors que les calculs étaient réussis lors du pré-test.	
RESSEMBLANCES	
Les analogies, dont le statut correspond à la fois à celui des calculs et des problèmes, se présentent avec des pourcentages descendants selon l'ordre de difficulté des opérations pour les deux groupes.	
*	Aux deux niveaux, les pourcentages de correspondances sont plus élevés avec les problèmes qu'avec les calculs si on considère toute l'analogie, et non seulement la réponse. L'application mécanique de la loi mathématique est la source majeure de cette différence pour les deux groupes.
**	Les analogies se révèlent autodidactes pour les problèmes, à peu près également aux deux niveaux, lorsque les calculs sont réussis au pré-test, reflétant le niveau de difficulté et celui d'habileté.

plus précis au niveau général. Cette différence d'efficacité (division) révèle l'existence d'un niveau taxonomique rarement rencontré au niveau général: celui où l'élève connaît la loi mathématique régissant une opération et peut reconnaître le besoin de cette opération pour résoudre un problème avant de pouvoir l'expliquer (Bloom, 1969).

Relativement au pouvoir autodidacte des analogies, on observe qu'il se révèle supérieur au niveau général, dû à la plus grande quantité d'erreurs commises à ce niveau. On remarque également que les analogies se révèlent "partiellement" autodidactes de façons différentes selon les groupes. Au niveau général, les analogies jouent le même rôle que les problèmes réussis pour soutenir le sens d'une opération effectuée sans calculatrice. Cependant, aux deux niveaux, la production de l'analogie amène la conceptualisation d'une opération dont le résultat avait jusque-là dépendu d'un statut de loi et n'était pas utilisée dans les problèmes. Pour les deux groupes, les analogies se révèlent donc autodidactement curatives quand l'élève possède déjà une certaine prise sur le concept, soit au niveau des calculs ou des problèmes. Ainsi, de même qu'en ce qui a trait à la répartition des erreurs diagnostiquées, le test métaphorique procure cependant une information de qualité à la fois semblable et différente selon le niveau d'habileté.

Si le potentiel quantitatif du test métaphorique n'est que légèrement supérieur au niveau général, comme le révèlent les pourcentages cités au tableau 35, ce test présente des résultats qualitativement différents selon les niveaux, quant à la validité de contenu. Le tableau 36 présente une comparaison des résultats obtenus par les deux groupes lors de cette validation. Comme on peut le constater, le test métaphorique permet de diagnostiquer la plupart des obstacles épistémologiques rencontrés par les élèves des deux niveaux, mais ce diagnostic se spécialise selon les erreurs typiques de chaque groupe.

Les réponses des élèves au test métaphorique présentent également d'autres caractéristiques d'ordre qualitatif qui sont propres à chaque niveau. Le tableau 37 produit la liste de ces caractéristiques. On y retrouve d'abord les différences typiques qui s'observent entre les niveaux. Viennent ensuite les ressemblances. On notera que, même dans ces cas, il existe des différences quant aux occasions où elles se manifestent.

Tableau 36: Comparaison de la validité de contenu du test métaphorique selon les niveaux

DIFFÉRENCES	
Niveau général	Niveau avancé
Spécialisation du diagnostic Meilleur instrument diagnostique des obstacles rencontrés lors des calculs à ce niveau, où on commet sensiblement plus de ce genre d'erreurs. Il continue également de diagnostiquer l'aptitude à résoudre des problèmes. Précision du diagnostic, par rapport aux obstacles rencontrés en résolution de problèmes Moins précis, car les analogies erronées correspondent à plus de solutions absentes ou disparates à ce niveau, tendance qui augmente au gré des difficultés.	Se prête davantage au diagnostic des obstacles épistémologiques en situation de résolution de problèmes. Plus précis, car les conceptions utilisées lors de la production des analogies correspondent plus souvent à des patrons définis de solutions aux problèmes.
RESSEMBLANCES	
Pour les deux groupes, le test métaphorique permet de diagnostiquer la plupart des obstacles épistémologiques répertoriés par les experts au niveau des calculs des nombres entiers relatifs. Il permet également de diagnostiquer de nouveaux obstacles aux deux niveaux, tels les obstacles de nature perceptuelle.	

Tableau 37: Caractéristiques des productions métaphoriques selon les niveaux

DIFFÉRENCES QUALITATIVES	
Niveau général	Niveau avancé
Carence à conceptualiser les opérations maîtrisées dans des situations pratiques qui se rencontrent sous la forme d'inversions, d'insuffisances d'importation et d'identifications déficientes d'éléments. Tendance vers un recours à des conceptions plus primitives pour expliquer les opérations, telles la transformation linéaire pour toutes les catégories d'opérations, la comparaison pour la multiplication et la conception "nombre de parts" pour la division. Tendance à démissionner plus facilement à mesure que la difficulté augmente, qui se traduit par l'absence de réponse pour l'un ou l'autre des items ainsi que par une abstention plus systématique au niveau d'une opération.	Souci de précision qui retient les élèves de recourir directement aux lois mathématiques. Souci de la cohérence interne des analogies, les élèves préférant les conclure par l'énoncé logique d'une réponse fausse et les déclarer erronées par la suite au niveau de la rectification du calcul et/ou des degrés de certitude. Souci de la richesse du détail, les élèves ressentant le besoin d'expliquer spécifiquement comment les résultats découlent des situations. Raffinement mathématique, tel que manifesté par une utilisation adéquate de la distributivité et l'utilisation d'un point de départ pour contourner la difficulté posée par le zéro-origine.
RESSEMBLANCES QUALITATIVES	
Insensibilité aux distinctions apportées par l'utilisation de termes tels que "chaque" et "parts égales" pour déterminer un recours à la multiplication ou à la division.	
* Propension à dépendre de la loi mathématique;	
* Augmentation des violations mineures et majeures simples, qui révèlent que les concepts ne sont pas parfaitement maîtrisés lors de la production d'analogies curatives (parfois accompagnées de calculs rectifiés suite à la rédaction de l'analogie au niveau général);	
* Rencontre des mêmes difficultés (obstacles), à deux exceptions près: l'addition-soustraction d'unités différentes et l'associativité des nombres sous un même signe [ex.: $x \times (-Y) = -(x \times Y)$] lors de la multiplication d'un négatif, exceptions qui se rencontrent uniquement au niveau général.	
* Tendances manifestées chez les deux groupes à des moments différents, i.e. selon la difficulté des opérations.	

L'efficacité de l'intervention formative de type métaphorique / analogique

Diverses comparaisons furent effectuées à partir des résultats aux post-tests afin de déterminer les effets caractéristiques de l'intervention formative aux deux niveaux. On se rappellera qu'il faut interpréter leurs résultats avec prudence, puisque les post-tests ne renfermaient que les items correspondants à ceux qui étaient systématiquement erronés lors des pré-tests. Les résultats de ces comparaisons suggèrent:

- qu'à une exception près, soit la résolution de problèmes à court terme au niveau avancé, les nouveaux résultats des élèves n'aient pas été représentatifs de leur performance habituelle, telle que représentée par le bulletin officiel;
- qu'à l'intérieur d'un même niveau, la quantité d'erreurs à corriger n'ait pas eu d'effet sur la performance des élèves à aucun des post-tests, les résultats tendant même vers une corrélation inverse en ce qui a trait aux calculs, aux deux niveaux.

Il serait donc possible que l'intervention métaphorique / analogique (raisonnement inductif) produise un effet différent de celui produit par l'enseignement formel habituel (raisonnement plus communément déductif) au niveau de l'apprentissage en mathématiques, et cela, pour les deux groupes. Bien qu'il soit impossible de déterminer les effets de la différence de charge cognitive qui existe entre les deux niveaux, ces comparaisons permettent de penser que ses effets ne soient pas aussi marqués qu'on ait pu le croire, en relation avec un type d'intervention métaphorique / analogique.

Une description plus précise des caractéristiques des résultats aux post-tests de calcul, selon les niveaux, se retrouve au tableau 38. Si on y compare l'efficacité de l'intervention métaphorique / analogique entre les deux niveaux, les résultats sont assez similaires, quoique légèrement meilleurs au niveau avancé. La différence se situerait plutôt à l'échelon des réussites partielles; il semblerait que, si les mêmes proportions d'erreurs ont été touchées par l'intervention formative aux deux niveaux, la nouvelle acquisition ait plus de difficultés à se stabiliser chez les élèves d'habileté inférieure. Comme au niveau du pré-test, les erreurs de ces élèves continuent d'être un peu moins systématiques que les élèves de niveau avancé.

L'analyse des résidus d'erreurs révèle aussi des résultats semblables aux deux niveaux lors de l'application. Lors de la vérification, les résidus d'erreurs sont encore assez similaires, les différences n'apparaissant vraiment qu'au niveau des réussites nulles,

Tableau 38: Comparaison des résultats aux post-tests de calcul selon les niveaux

DIFFÉRENCES	
Niveau général	Niveau avancé
Réussites complètes En nombres absolus, presque 3 fois plus de réussites complètes qu'au niveau avancé, aux deux post-tests, pour une charge cognitive 3 fois plus lourde.	Pourcentages plus élevés de réussites complètes aux deux post-tests: - application: 86.3% par rapport à 77.4%, - vérification: 60.0% par rapport à 54.0%.
Meilleure rétention des opérations linéaires séquentielles.	Meilleure rétention des opérations en abscisse.
Réussites partielles Presque 2 fois plus de réussites partielles qu'au niveau avancé: - application: 21.0% par rapport à 12.5%, - vérification: 13.3% par rapport à 6.3%.	
En nombres absolus, au-delà de 5 fois plus à l'application et de 6 fois plus à la vérification, qu'au niveau avancé.	
Réussites nulles (vérification) Tendance vers des évolutions variées, qui se caractérisent par plus d'instabilité, de stabilisation d'erreurs incidentes et de contamination des nouveaux acquis.	Tendance vers la restabilisation des anciennes erreurs.
RESSEMBLANCES	
Pourcentages de réussites nulles comparables, malgré la différence de charge cognitive: 1.6% et 1.3% à l'application; 32.7% et 33.8% à la vérification.	
Meilleurs en résultats en multiplication à court terme. Difficultés en division à court et à moyen termes.	
Résidus d'erreurs comparables à court terme: - environ 10% des erreurs sont des échecs complets, - pourcentages de réussites partielles répartis presque également entre la régression temporaire vers l'erreur initiale et l'évolution vers une nouvelle erreur.	
Résidus d'erreurs comparables à moyen terme, en ce qui a trait: - aux régressions qui sont presque disparues en faveur des évolutions. - à une augmentation notifiable des nouvelles réponses stables.	

où les évolutions dominent au niveau général. Dans les cas des erreurs de calcul qui restent à moyen terme, les effets de l'intervention se manifestent surtout à ce niveau.

Le tableau 39 présente les caractéristiques des résultats aux post-tests de résolution de problèmes. Si on tient compte de la charge cognitive, ces résultats suggèrent que l'intervention formative ait eu des répercussions assez similaires aux deux niveaux à court terme, quant aux réussites complètes. Cependant, la rétention de ces réussites se révèle supérieure au niveau avancé, lors de la vérification. La plus grande différence se situe à l'échelon de la stabilité des acquisitions d'une évaluation à l'autre: l'écart des réussites complètes entre les deux groupes y augmente de 8.4% à 16.5% en faveur du niveau avancé. Par contre, il est contré par un écart de réussites partielles qui augmente de 3.1% à 9.7% en faveur du niveau général. Ce sont les problèmes plus difficiles, concernant les opérations en abscisse et les divisions qui sont à l'origine de la différence entre les deux niveaux aux deux post-tests. Comme la charge cognitive était beaucoup plus similaire ici que lors des calculs, ces résultats suggèrent que ce n'est pas tant la charge cognitive qui entre en jeu pour expliquer ces différences, que le niveau d'habileté des élèves.

L'analyse des résidus d'erreur révèle des résultats quantitatifs semblables pour les deux niveaux à court terme, quoique des différences qualitatives se révèlent du côté des réussites partielles en termes d'évolutions et de régressions. A moyen terme, les résidus d'erreurs sont encore une fois assez similaires aux deux niveaux. Les différences qualitatives, qui y reflètent une difficulté à généraliser une nouvelle acquisition au niveau général, se manifestent dans tous les résultats aux post-tests. Même dans le cas des erreurs qui restent, l'intervention formative métaphorique / analogique a engendré des conséquences bénéfiques aux deux niveaux: acquisition, même instable, de conceptions justes; améliorations appréciables sur les erreurs restantes; ébranlement de nombreuses conceptions initiales. Comme pour les calculs, ce dernier effet s'observe davantage pour les problèmes au niveau général où les pourcentages de régressions stables sont moindres. Cependant, il s'étend maintenant au niveau avancé où les pourcentages de ces régressions sont trois fois moins élevés que lors des calculs, comme au niveau général. Des patrons de solutions erronées qui se présentaient au pré-test avec environ 60% de stabilité aux deux niveaux, il ne reste que 12.8% au niveau général et 22.0% au niveau avancé.

Tableau 39: Comparaison des résultats aux post-tests de résolution de problèmes selon les niveaux

DIFFÉRENCES	
Niveau général	Niveau avancé
Réussites complètes	Pourcentages plus élevés aux deux post-tests: - application: 57.8% par rapport à 49.4%, - vérification: 37.1% par rapport à 20.6%.
Meilleurs résultats avec les opérations linéaires séquentielles à court et moyen termes.	Meilleurs résultats avec les opérations en abscisse à court et à moyen termes.
Réussites partielles Pourcentages plus élevés à la vérification: 33.9% par rapport à 24.2%.	
Tendances vers les évolutions, les améliorations et la contamination des nouveaux acquis au niveau de la solution erronée, à court terme.	Tendance vers les régressions au niveau de la solution erronée, à court terme.
Résidus d'erreurs (vérification) Tendance vers la contamination des nouveaux acquis qui perdure, mais diminue.	Tendance vers la restabilisation des anciennes erreurs, à moyen terme.
Tendance des évolutions instables à être de qualité supérieure.	Tendance vers des améliorations plus stables.
RESSEMBLANCES	
En nombre absolus, les réussites complètes conservent presque le ratio 2:3 de la charge cognitive à l'application et l'inverse à la vérification.	
Pourcentages de réussites partielles comparables à l'application: 38.4% (G) et 35.3% (A).	
Pourcentages de réussites nulles comparables d'un post-test à l'autre: environ 6% de plus seulement au niveau général.	
Les opérations linéaires séquentielles et la multiplication présentent des résultats comparables et les divisions posent le plus de difficultés, à court et moyen termes.	
Résidus d'erreurs des réussites nulles comparables à court terme: - environ 20% des erreurs sont des échecs complets, - répartition similaire des échecs complets, selon les catégories stable et instable, - plus de 70% de ces items concernent des opérations à deux négatifs.	
Résidus d'erreurs des réussites nulles comparables à moyen terme: - environ 60% des erreurs sont des échecs complets.	

L'ordre de difficulté des opérations et des problèmes

Un indice de difficulté des opérations dans le système des nombres relatifs, et des problèmes qui y correspondent, est une information qui peut s'avérer utile pour l'enseignement autant que pour les évaluations formatives subséquentes. Même si cet élément ne fait pas partie intégrante des questions de recherche, il semble pertinent de s'y arrêter. Les divers résultats des tests ont donc été utilisés afin de déterminer tentativement l'ordre de difficulté selon lequel ils s'y présentaient.

Les pourcentages des réponses erronées aux trois tests ont été établis pour chaque item de calcul. La moyenne de ces pourcentages a ensuite été calculée afin de déterminer un ordre de difficulté. Le tableau 40 présente le résumé de ces résultats dont le détail se trouve à l'Appendice K-9. Les pourcentages, supportant des rangs différents, sont souvent très rapprochés ou peuvent apparaître négligeables dans la mesure où ils ont été doublement amoindris par les post-tests qui firent suite à l'intervention formative. Il a cependant été jugé utile de préserver ces différences parce qu'elles sont interprétables à la lumière des patrons de solutions ainsi que des lois qui les supportent, qui ont été recueillies lors des entrevues. Quant à l'association des moyennes des post-tests à celle du pré-test, bien que diminuant les pourcentages, elle procure un indice supérieur de la résistance des difficultés épistémologiques face à l'enseignement traditionnel aussi bien qu'à l'intervention formative de type métaphorique / analogique.

Comme le montre le tableau 40, les opérations en nombres naturels sont maîtrisées par tous les élèves, à une exception près. Un examen des moyennes d'erreurs d'une catégorie d'opérations à l'autre révèle aussi une même tendance chez les deux groupes. En comparaison avec l'addition-soustraction, les difficultés diminuent lors de la multiplication pour s'accroître de nouveau avec la division. Les items, où la difficulté est la plus comparable entre les deux niveaux, concernent des obstacles plus purement épistémologiques. Il s'agit d'opérations dont les élèves ne saisissent pas la signification, même quand ils les réduisent avec efficacité, e.g. la soustraction d'un négatif, la multiplication et la division de deux négatifs, la division par zéro (0) et par un (1). Vient ensuite la multiplication d'un nombre naturel par un nombre négatif, où le nombre initial détermine le signe, les possibilités d'erreur augmentant selon la supériorité de ce nombre

Tableau 40: Ordre ascendant de difficulté selon la moyenne d'erreurs aux tests de calcul

par rapport à l'autre. Cette dernière particularité, plus typique des élèves de niveau avancé, est la source de la différence de rangs entre les deux niveaux à l'item " $(-x) \times Y$ ".

D'autres opérations ne présentent pas le même ordre de difficulté selon les deux niveaux. Les multiplications avec le zéro (0) représentent un autre cas où le statut et l'emplacement du nombre jouent un rôle, plus particulièrement au niveau général. En effet, s'il s'agit d'une multiplication par zéro (0), le nombre naturel initial sera facilement conservé. Et ce nombre initial recevra encore davantage de respect s'il est négatif. Lors de la division du zéro (0), on remarque le même respect du nombre négatif au niveau général, alors que c'est la division par un naturel qui est plus difficile au niveau avancé. Si les difficultés avec le zéro en addition-soustraction semblent refléter celles des autres items de même structure, un examen des résultats aux tests révèle qu'elles n'affectent pas nécessairement les mêmes élèves et sont consistantes d'un item (avec 0) à l'autre. Le fait que ces difficultés persistent jusqu'au niveau avancé et que ce soit celles qui aient le mieux résisté à l'intervention formative indique un besoin particulier d'attention.

En addition-soustraction, plusieurs des différences entre les deux niveaux relèvent des associativités erronées relatives aux opérations débutant par un nombre négatif [$-x + Y = -(x + Y)$, e.g.] qui se manifestent exclusivement au niveau général. De même, la confusion due aux diverses notations utilisées dans les manuels affecte davantage les élèves de ce niveau. Comme les élèves de niveau avancé n'éprouvent pas ces difficultés, c'est la soustraction où l'on doit soustraire un grand nombre d'un plus petit, qui entraîne le plus de problèmes. En division, l'autre différence entre les deux groupes se situe au niveau des divisions concernant un seul négatif. Alors que la division par un nombre négatif est plus difficile à conceptualiser et entraîne des erreurs au niveau avancé, celle d'un nombre négatif par un nombre naturel est plus susceptible d'entraîner des opérations linéaires au niveau général.

Les pourcentages d'erreurs des trois tests de résolution de problèmes, évalués selon la méthode utilisée précédemment, ont été établis pour chaque item erroné. La moyenne des pourcentages d'erreurs a ensuite été calculée afin de déterminer tentativement l'ordre de difficulté selon lequel se présentait la traduction de ces problèmes en solutions

adéquates. Le tableau 41 résume et complète ces résultats dont le détail se trouve à l'Appendice K-10.

Comme pour les calculs, les problèmes en nombres naturels sont les plus aisément maîtrisés. Il n'est donc pas surprenant que ces solutions en nombres naturels, parce qu'elles assurent des réponses efficaces dans un contexte plus fréquemment rencontré, constituent l'obstacle épistémologique majeur qui entre en cause dans la résolution des autres problèmes (Brousseau, 1989a; Sierpinska, 1989; Vergnaud, 1989a; etc.).

Si on examine les pourcentages d'erreurs à l'intérieur des groupes d'opérations, on constate qu'ils sont sensiblement les mêmes pour les deux niveaux, sauf dans deux cas. En effet, la présence de deux signes négatifs dans les problèmes de type " $-x - y$ " produit sensiblement plus de difficultés au niveau général que la présence d'un seul de ces signes dans ceux de type " $-x + y$ ". Alors que la difficulté du premier item se manifeste de diverses façons chez ces élèves, celle du second se manifeste presque exclusivement sous forme d'une résolution de problèmes en nombres naturels chez les deux groupes. L'autre cas concerne la multiplication d'un négatif. Les termes "descentes, baisses, etc.", utilisés pour les items " $(-x) \times y$ ", sont moins facilement traduits en négatifs au niveau général que les verbes correspondants "descendre, diminuer, etc.", utilisés pour les items " $x \times (-y)$ ", alors que le contraire se produit au niveau avancé.

Toujours à l'intérieur des groupes d'opérations, on remarque aussi que l'ordre de difficulté suit sensiblement celui qui a été établi pour les calculs aux deux niveaux (voir tableau 40), preuve supplémentaire de la dépendance de la résolution de problèmes sur la maîtrise des moyens disponibles pour les résoudre (Connel & Peck, 1993). La première exception concerne les problèmes de type " $-x - (-y)$ " où, surtout au niveau général, la présence de deux négatifs semble susciter plus facilement l'utilisation de la solution adéquate que la présence d'un seul de ces signes. La seconde concerne la division d'un négatif qui adopte maintenant, pour les deux groupes, l'ordre de difficulté observé lors des calculs au niveau avancé. La tendance à soustraire lors des calculs de type " $(-X) + y$ " causait alors la différence de difficulté au niveau général. Elle se manifeste toujours dans les problèmes, mais y est maintenant supplantée par la résolution en naturels comme au niveau avancé. La dernière différence, qui concerne l'item " $X + 0$ ", n'en est pas

Tableau 41: Ordre ascendant de difficulté selon la moyenne d'erreurs aux tests de résolution de problèmes

Item*	Moyenne d'erreurs	Rang par opération	Rang total
	G (A)	G(A)	G(A)
ADDITION / SOUSTRACTION			
X - y	[4.5(1.1)]	1(1)	2(3)
x + y	6.1(3.7)	2(2)	3(5)
-x + y	16.4(7.6)	3(4)	5(7)
-x - y	25.9(4.0)	4(3)	7(6)
-x - (-y)	58.3(40.9)	5(5)	11(11)
x - (-y)	65.9(41.3)	6(6)	12(12)
MULTIPLICATION			
x X y	1.0(0.0)	1(1)	1(1)
x X (-y)	41.0(20.6)	2(3)	8(9)
(-x) X y	44.2(12.4)	3(2)	9(8)
(-x) X (-y)	69.1(61.6)	4(4)	13(15)
DIVISION			
X + y	7.8(0.3)	1(1)	4(2)
X + 0	18.2(3.0)	2(2)	6(4)
(-X) + y	51.2(31.1)	3(3)	10(10)
X + (-y)	69.8(47.6)	4(4)	14(13)
(-X) + (-y)	76.3(54.5)	5(5)	15(14)

* x: premier nombre
 y: deuxième nombre

minuscule: plus petit nombre
 majuscule: plus grand nombre

[] Données disponibles pour le pré-test seulement

vraiment une puisque la formulation de ce problème était purement mathématique alors que les autres demandaient toutes la traduction d'une situation d'ordre pratique. Lors de l'entrevue, tous les élèves savaient ce que signifiaient les termes utilisés dans cette formulation. Les difficultés rencontrées au niveau de la solution sont donc aussi attribuables à l'opération qu'aucun de ces élèves n'avaient réussi à maîtriser lors du pré-test de calcul correspondant.

Si on examine maintenant l'ordre total de difficulté des problèmes demandant l'utilisation de négatifs, on constate qu'il est généralement ascendant de l'addition-soustraction à la division, à l'exclusion des problèmes demandant la soustraction d'un négatif dont la difficulté se situe approximativement entre les rangs de la multiplication et de la division. Ces sont ces problèmes et ceux demandant l'utilisation de deux négatifs qui entraînent le plus de difficulté à l'intérieur de chaque groupe. La persistance de ces difficultés et leur résistance à l'intervention formative aux deux niveaux indiquent un besoin particulier d'attention. Les résultats aux problèmes demandant la division de deux négatifs attestent de la difficulté particulière que pose l'utilisation d'un négatif au dénominateur. En fait, ces problèmes se sont révélés plus ou presque aussi difficiles que les problèmes, nouveaux et plus discutables, qui en demandent la multiplication. Cette difficulté dont témoignent également les problèmes de type " $X + (-y)$ ", moins discutables que les précédents, semble être celle qui demande l'attention la plus pressante.

L'utilité d'une spécification de degrés de certitude

Parmi les raisons invoquées pour justifier leurs degrés de certitude, les élèves des deux niveaux utilisent les mêmes critères que leurs enseignants (Kelly-Bégin, 1990) pour évaluer leurs analogies, sauf en ce qui a trait à la systématique-abstraction, concept qui gagne en intelligibilité à être abordé par le biais de la précision. Leur utilisation de ces critères présente plus de ressemblances que de différences entre les deux niveaux.

Le tableau 42 présente un résumé de l'utilisation de ces critères par les deux groupes. On y notera que l'ordre d'importance qu'on leur accorde est sensiblement le même aux deux niveaux, bien que les pourcentages d'utilisation varient d'un groupe à l'autre. Les différences entre les deux niveaux s'observent surtout en termes de

Tableau 42: Critères d'évaluation des productions métaphoriques selon les niveaux

DIFFÉRENCES	
Niveau général	Niveau avancé
Validité de l'importation L'absence d'analogie, autre version de cette catégorie, se rencontre plus souvent à ce niveau: 8.3% par rapport à 1.6%.	Critère appliqué plus correctement à ce niveau: 89.5% par rapport à 80.8%.
Validité mathématique de la réponse Critère appliqué de façon erronée beaucoup plus souvent à ce niveau: 47.1% par rapport à 9.8%.	Précision de l'énoncé Critère utilisé davantage à ce niveau: 5.0% par rapport à 1.8%.
Validité conceptuelle de l'énoncé On compartimente les deux sections de l'analogie pour conclure que l'une entraîne nécessairement l'autre, à ce niveau.	Critère dont on se préoccupe davantage à ce niveau, lors de la production des énoncés, préférant les conclure avec une réponse incorrecte pour déclarer les analogies erronées par la suite.
"Autres" Critère qui correspond surtout à une lacune ou un refus d'explication et qui est plus souvent utilisé à ce niveau, où la considération de détails théoriques est moins populaire: 14.1% par rapport à 6.6%.	Formulation syntaxique de l'énoncé Critère utilisé davantage au niveau avancé (6.1%) qu'au niveau général (3.5%).
RESSEMBLANCES	
La validité de l'importation est le critère le plus souvent utilisé par les deux groupes: 52.9% (A) et 36.9% (G).	
La validité mathématique de la réponse est le second critère le plus fréquemment utilisé chez les deux groupes: 12.9% (G) et 10.8% (A).	
La validité conceptuelle de l'énoncé est le critère dont les deux groupes semblent le moins conscients: 1.8% (G) et 2.6% (A).	
Les critères de précision, validité conceptuelle et formulation syntaxique de l'énoncé, ainsi que le critère "autres" ont été appliqués correctement aux deux niveaux, à peu d'exceptions près.	

pourcentages supérieurs d'applications incorrectes de ces critères au niveau général, pourcentages qui indiquent une présence accrue des obstacles épistémologiques qu'ils sont chargés de diagnostiquer.

Les degrés de certitude, justifiés par ces critères, ont été comparés aux résultats des items correspondants des pré-tests afin de déterminer leur validité comme indice de la maîtrise des concepts. De même, les instances, où les analogies erronées avaient été surévaluées, ont été comparées avec les résultats des items correspondants aux post-tests afin de déterminer si elles étaient représentatives d'une résistance ou d'une récurrence des obstacles épistémologiques. Finalement, les instances, où les analogies étaient adéquates (parfaites, bonnes et approximatives), ont aussi été comparées de la même façon, afin de déterminer si les degrés de certitude qui les accompagnent pouvaient être représentatifs d'une récurrence des obstacles épistémologiques pour lesquels ces analogies se seraient avérées curatives. Le tableau 43 présente un résumé des résultats de ces comparaisons.

On y observe que la validité des degrés de certitude atteint des taux de 94.7% au niveau général et de 98.1% au niveau avancé. On peut donc conclure que la façon dont les élèves attribuent leur degré de certitude est représentative de leur maîtrise des concepts testés et qu'il existe peu de différences entre les deux groupes, sauf en ce qui a trait à leur répartition à l'intérieur des diverses catégories de maîtrise. L'utilisation d'une spécification de degrés de certitude permet donc d'augmenter la puissance diagnostique du test métaphorique pour les deux groupes, telle que déterminée précédemment.

Les résultats de la comparaison des surévaluations d'analogies erronées avec les résultats aux post-tests montrent également peu de différences entre les deux niveaux. Ils révèlent que les surévaluations sont de meilleurs indices de résistance et de récurrence des obstacles épistémologiques en ce qui a trait aux calculs pour les deux groupes, à court et à moyen termes. Les surévaluations sont pareillement, aux deux niveaux, des indices de récurrence (moyen terme) au niveau des problèmes, aussi bien qu'en ce qui a trait aux deux genres d'items à la fois. Le fait qu'elles correspondent à quelques pourcentages légèrement supérieurs à court terme semble indiquer que le rejet des analogies surévaluées ait sensibilisé davantage les élèves au besoin d'un changement conceptuel lors de l'intervention, surtout au niveau général. Ces changements conceptuels effectués à court

Tableau 43: Comparaison de la validité et de l'efficacité des degrés de certitude selon les niveaux

DIFFÉRENCES	
Niveau général	Niveau avancé
Degrés de certitude appropriés Davantage de degrés inappropriés à ce niveau: 18.2% par rapport à 9.5%.	Davantage de degrés appropriés à ce niveau: 89.4% par rapport à 78.5%.
Correspondances avec les pré-tests * Les degrés inappropriés indiquent plus d'erreurs concernant les problèmes et les calculs à la fois, à ce niveau: 30.6% par rapport à 13.9%.	Indiquent plus d'erreurs concernant les problèmes seulement à ce niveau: 25.0% par rapport à 16.7%.
Correspondances avec les posts-tests La surévaluation d'analogies erronnées indique de meilleurs résultats dans les problèmes qu'une évaluation juste à court terme.	Les résultats des élèves de ce niveau se présentent selon les catégories de la conjoncture "statut de l'analogie - émotion cognitive", à court et à moyen termes.
** La surévaluation d'analogies approximatives indique moins de récurrences d'erreurs qu'une évaluation juste à moyen terme.	
** La sous-évaluation d'analogies parfaites indique autant de changements conceptuels décisifs qu'une évaluation juste à moyen terme.	
RESSEMBLANCES	
Hauts taux de validité des degrés de certitude aux deux niveaux: 94.7% (G) et 98.1% (A).	
* Les degrés inappropriés sont des indices d'erreurs systématiques aux pré-tests pour les deux groupes: 88.9% (G) et 91.7% (A), - davantage lors des calculs seulement aux deux niveaux: 41.6% (G) et 52.8% (A).	
Comparées aux évaluations justes, les surévaluations correspondent pour les deux groupes: - à plus du double d'erreurs de calcul, à court terme, - à des pourcentages légèrement supérieurs de disparition complète des erreurs, à court terme, - à environ 10% de plus d'erreurs au niveau des problèmes à moyen terme, - à 3 (G) et 7 (A) fois plus d'erreurs de calcul à moyen terme, - à 3 (A) et 4 (G) fois plus de généralisation des erreurs aux deux sortes d'items, à moyen terme,	
Comparées aux évaluations justes, les surévaluations et les sous-évaluations d'analogies adéquates indiquent la possibilité d'un changement conceptuel mitigé, soit la récurrence possible des obstacles pour les deux groupes à moyen terme, à deux exceptions près **, au niveau général.	
Les analogies adéquates accompagnées d'une évaluation juste indiquent la maîtrise du concept ou un changement conceptuel décisif aux deux niveaux, à court et à moyen termes.	

terme n'ont pas toujours atteint la profondeur nécessaire pour s'installer définitivement et l'insatisfaction initiale demeure plus rentable à moyen terme aux deux niveaux.

Les résultats de la comparaison des évaluations des analogies adéquates avec les résultats aux post-tests se sont aussi révélés très similaires à court et à moyen termes pour les deux groupes, à peu d'exceptions près au niveau général.

Les quelques différences observées entre les deux niveaux, lors des deux dernières analyses, concordent avec les résultats de l'étude de validité des degrés de certitude, où le pourcentage de degrés non-valides était supérieur au niveau général (5.3% vs 1.9%), les élèves de niveau avancé se montrant un peu plus perceptifs dans l'évaluation de leur état cognitif à la suite de la production de leurs analogies. Ces différences étant minimales, on peut donc conclure que les degrés de certitude peuvent être interprétés de façon générale selon la conjoncture "statut de l'analogie - émotion cognitive" suivante:

- Maîtrise ou changement conceptuel décisif: analogie adéquate + évaluation juste
- Possibilité de changement conceptuel mitigé: analogie adéquate + sous- ou surévaluation (Récurrence possible des obstacles)
- Insatisfaction de la conception erronée: analogie erronée + évaluation juste
(Disponibilité au changement conceptuel)
- Satisfaction de la conception erronée: analogie erronée + surévaluation,
(Résistance possible des obstacles)

où l'absence d'analogie présente le même profil que l'évaluation juste d'analogies erronées au deux niveaux, correspondant même parfois à des résultats légèrement supérieurs à celle-ci, à court et à moyen termes.

Disons finalement que le nombre supérieur d'erreurs aux post-tests, qui correspond aux surévaluations au niveau général, semble indiquer que les élèves de ce niveau aient plus de difficulté à remettre en question leur conception que ceux du niveau avancé. Il serait donc important de profiter de l'information que ces degrés de certitude procurent lors d'une entreprise qui est reconnue comme étant aussi difficile, qu'est celle de susciter un changement conceptuel, particulièrement au niveau général.

Résumé et conclusion

La présente question de recherche concerne la comparaison de l'efficacité de la méthodologie proposée selon le niveau académique. La première section a rappelé que les pourcentages d'erreurs étaient significativement plus élevés lors des pré-tests de calcul et de résolution de problèmes au niveau général, et que ces erreurs avaient tendance à être moins systématiques qu'au niveau avancé.

Malgré ces différences, il a été déterminé dans la deuxième section que le potentiel diagnostique quantitatif, tel qu'établi lors de la validation critériée du test métaphorique, est similaire aux deux niveaux, sauf pour la division pour laquelle il est un peu moins précis au niveau avancé (88.3%), où certains élèves peuvent reconnaître le besoin d'une opération pour résoudre un problème avant de pouvoir l'expliquer.

En ce qui a trait à la validité de contenu, il a été déterminé que le test métaphorique peut diagnostiquer précisément la plupart des obstacles épistémologiques répertoriés par les experts au niveau des nombres entiers relatifs et même permettre d'en découvrir d'autres, et ceci pour les deux groupes. Les différences entre les deux niveaux sont plutôt d'ordre qualitatif. Ainsi, le test métaphorique est un meilleur instrument diagnostique des obstacles rencontrés dans les calculs au niveau général, où il se commet plus d'erreurs de ce genre. Bien qu'il diagnostique également l'aptitude à la résolution de problèmes au niveau général, il se prête davantage à ce genre de diagnostic au niveau avancé, où il se commet surtout des erreurs lors des problèmes. Cet aspect du diagnostic se révèle plus précis au niveau avancé, où certaines conceptions correspondent plus souvent à des patrons définis de solutions aux problèmes alors qu'elles correspondent à plus de solutions absentes ou disparates au niveau général, tendance qui augmente au gré du degré des difficultés rencontrées.

Les réponses des élèves au test métaphorique présentent aussi d'autres traits d'ordre qualitatif qui sont propres à chaque niveau. Celles du niveau avancé se caractérisent par un souci de précision, de cohérence et de richesse du détail ainsi qu'un raffinement mathématique supérieur. En retour, celles du niveau général révèlent une carence à conceptualiser les opérations maîtrisées dans des situations pratiques, une tendance vers un recours à des conceptions plus primitives pour expliquer les opérations

et une tendance à démissionner plus facilement à mesure que la difficulté augmente.

Lors de la troisième section, concernant l'efficacité de l'intervention métaphorique / analogique, il fut aussi déterminé qu'il existait peu de différences entre les deux niveaux par rapport aux pourcentages de réussites complètes lors des post-tests de calcul à court et à moyen termes. Les résultats ne sont que légèrement meilleurs au niveau avancé, malgré le fait que la quantité d'erreurs à corriger ait été trois fois plus élevée au niveau général. La seule différence se situerait à l'échelon des réussites partielles, la nouvelle acquisition ayant un peu plus difficulté à se stabiliser au niveau général.

En ce qui a trait à la résolution de problèmes, les résultats sont meilleurs au niveau avancé aux deux post-tests, surtout à moyen terme. La différence majeure se situe encore à l'échelon de la stabilité des acquisitions, d'un post-test à l'autre, qui est inférieure au niveau général. Cette difficulté à généraliser, reflet des erreurs moins systématiques des pré-tests, se manifeste dans tous les résultats aux post-tests. Ce sont les problèmes plus difficiles qui sont à l'origine des différences entre les deux niveaux, aux deux post-tests. La charge cognitive étant ici beaucoup plus similaire entre les deux groupes, il semblerait que ce soit le niveau d'habileté des élèves qui entre en jeu pour expliquer ces différences.

L'analyse des résidus d'erreurs révèle également des différences entre les deux groupes, quant à la nature des erreurs commises à la suite de l'intervention formative. Au niveau général, la tendance est vers les évolutions de toutes sortes. Bien que les solutions erronées y font preuve de contamination à court terme, elles révèlent davantage d'améliorations à court et à moyen termes que celles du niveau avancé. Ces améliorations souvent instables, sont aussi de qualité supérieure. Au niveau avancé, la tendance est à régresser aux anciennes erreurs ou à effectuer un changement conceptuel d'un bond lors de tous les post-tests.

Finalement, diverses comparaisons effectuées à partir des résultats aux post-tests suggèrent qu'une méthodologie de type métaphorique / analogique possède des caractéristiques qui s'appliquent aux deux niveaux d'habileté. Elles suggèrent que ce genre de méthodologie produise des résultats qui sont différents de la performance habituelle des élèves, exposés à l'enseignement formel. Elles suggèrent également que ce genre de méthodologie réduise les différences de charge cognitive et fournisse ainsi une

assistance supérieure au rappel des connaissances.

Lors de la dernière section, concernant l'utilité d'une spécification de degrés de certitude en rapport avec la méthodologie proposée, il a été déterminé que les élèves des deux niveaux comprennent et utilisent les mêmes critères que les enseignants pour évaluer leurs analogies, à une exception près. Une entreprise de changement conceptuel, qui utilise le médium de l'analogie, pour effectuer le diagnostic et axer l'intervention formative, est donc aussi intelligible pour un groupe que pour l'autre. De plus, l'ordre d'importance accordé à ces critères est similaire aux deux niveaux. Leur utilisation est moins correcte au niveau général, dû à la présence accrue des difficultés épistémologiques qu'ils sont chargés de diagnostiquer.

La validité des degrés de certitude comme indice de la maîtrise des concepts se situe au niveau du décile supérieur pour les deux groupes, permettant ainsi d'augmenter la puissance diagnostique du test métaphorique et d'orienter l'intervention formative selon la disponibilité de l'élève envers un changement conceptuel éventuel aux deux niveaux.

Finalement, l'utilité des degrés de certitude comme prédicteurs de résistance et de récurrence des obstacles épistémologiques est très similaire aux deux niveaux. Les surévaluations d'analogies erronées se sont révélées de bons prédicteurs de récurrence des obstacles sous toutes ses formes aux deux niveaux, à moyen terme. De même les sous-évaluations et surévaluations d'analogies adéquates (parfaites, bonnes et approximatives) se sont révélées de très bons prédicteurs de changement conceptuel mitigé et de récurrence possible des obstacles aux deux niveaux, à court et à moyen termes.

En bref, on peut conclure, que dans le contexte de la présente recherche exploratoire, une technique d'évaluation formative utilisant une approche métaphorique / analogique est aussi valable pour les élèves d'un niveau d'habileté que de l'autre, les différences entre les deux niveaux étant beaucoup plus d'ordre qualitatif que quantitatif. La plus grande différence quantitative se présente au niveau de la retombée de l'intervention sur la résolution des problèmes plus difficiles, où elle produit de meilleurs résultats au niveau avancé. Par contre, cette différence est compensée par une supériorité du diagnostic au niveau général.

CHAPITRE 7

CONCLUSIONS ET IMPLICATIONS PÉDAGOGIQUES

Lors de la revue de la littérature (chapitre 1), on a pu constater que les connaissances accumulées sur l'obstacle et l'erreur épistémologiques, le changement conceptuel et les émotions cognitives qui l'accompagnent, sont lourdes d'implications au niveau des pratiques pédagogiques. On a également vu que, bien que ces connaissances soient maintenant au stade d'être transférées en salle de classe, il existait un besoin de méthodologies appropriées pour le faire. S'inspirant des résultats et recommandations des recherches antécédentes, la présente recherche se proposait de tenter de répondre à ce besoin.

L'objectif de cette recherche était d'explorer le potentiel d'une méthodologie métaphorique de type "structure mapping", accompagnée d'une spécification de degrés de certitude, comme instrument de diagnostic et de changement conceptuel des erreurs épistémologiques, selon une perspective d'évaluation formative. Elle visait plus précisément à établir la validité d'un instrument métaphorique pour diagnostiquer les erreurs épistémologiques (1); à déterminer l'efficacité d'une intervention formative de type métaphorique / analogique effectuée en conjonction avec un diagnostic du même type (2); à évaluer l'utilité d'une spécification de degré de certitude comme indicateurs des émotions cognitives lors de ce processus (3); et à déterminer l'efficacité de la méthode proposée selon le niveau de rendement académique des élèves (4).

Comme il y a déjà eu résumé et conclusion lors de chacun des chapitres concernant ces questions de recherche, ce dernier chapitre se bornera à faire un rappel des conclusions générales relatives à chacune de ces questions, en rapport avec celles qui ont été fournies par les recherches précédentes. Ce rappel sera suivi par une section sur les limites de la présente recherche et les recommandations quant à des pistes d'investigation subséquente. La dernière section présentera les implications et retombées pédagogiques relatives à cette recherche.

La validité de l'instrument de diagnostic métaphorique "structure mapping"

Bien que plusieurs chercheurs (Driver & Erickson, 1983; Head & Sutton, 1985; Flick, 1991; Hewson, 1985; Thagard, 1992; etc.) l'aient recommandé, il semble que personne n'ait étudié systématiquement l'utilisation de la métaphore comme instrument de diagnostic des erreurs et obstacles épistémologiques. Les résultats de la première question de recherche pallient à cette lacune et supportent le bien-fondé de leurs recommandations.

Lors de la validation de contenu, il a été observé que le test métaphorique permet de diagnostiquer la plupart des difficultés épistémologiques mentionnées par les experts (Brousseau 1989a, 1989b; Closset, 1983b; Glaeser, 1981; Tirosh & Graeber, 1990, 1994; Vergnaud, 1989a, 1989b; Viennot, 1989a, 1989b; etc.) et d'en dépister de nouvelles. Il permet également de spécifier les différentes articulations que présentent les erreurs selon les sujets, ainsi que les différentes conceptions qui supportent ces erreurs. Selon les experts en ce domaine (Giordan, 1989a; Thagard, 1991; West, Fensham & Garrard, 1985; West & Pines, 1985), il procurerait ainsi le genre de diagnostic détaillé, dont dépend l'efficacité des interventions en vue d'un changement conceptuel.

Lors de la validation critériée, le test métaphorique présentait un pourcentage élevé de correspondances avec des mesures quantitatives de calcul et de résolution de problèmes, qui avaient été construites selon le modèle habituellement utilisé en mathématiques pour diagnostiquer les erreurs épistémologiques au niveau des mêmes concepts (Birenbaum & Tatsuoka, 1982; Tatsuoka, 1983, 1984, 1985). Ces résultats permettent de croire que ce test peut ainsi remplacer avantageusement ce genre de mesures qui se sont révélées moins efficaces quant à la qualité de l'information qu'elles procurent, tout en étant plus coûteuses en temps, argent et expertise. Ils permettent aussi de confirmer que les critères d'évaluation proposés par Gentner (1982; 1988), qui ont été utilisés pour faire cette validation, sont un excellent guide d'application des méthodologies métaphoriques, comme l'avaient suggéré Champagne, Gunstone & Klopfer (1985).

Le test métaphorique offre également une alternative viable aux instruments qualitatifs existants qui se sont révélés efficaces, mais inappropriées pour la salle de classe (Fensham, Garrard & West, 1981; Moreira, 1987; Shuell, 1985; White, 1985). Le

fait qu'il soit simple et court de construction, d'administration et d'évaluation lui permet de suppléer à plusieurs limites des méthodologies qualitatives. Il répond aussi aux besoins exprimés de réduction et de systématisation des données (Shuell, 1985).

L'efficacité de l'intervention métaphorique / analogique

Les méthodes de type métaphorique / analogique sont celles qui se sont révélées les plus prometteuses lors de la difficile entreprise qu'est le changement conceptuel. Bien que les résultats qu'elles engendrent semblent de beaucoup supérieurs à ceux qui ont été obtenus avec les autres méthodes, il existe encore peu de recherches qui en aient documenté l'efficacité. Celles qui l'on fait ont été conduites exclusivement dans le domaine des sciences et celles qui relèvent de l'enseignement secondaire ayant été effectuées plus spécifiquement en physique (Clement 1987b, 1993; Johsua & Dupin, 1988, 1989). De plus, les méthodes métaphorique et analogique furent utilisées en conjonction avec d'autres méthodes et il est difficile de délimiter les mérites d'une méthode en particulier (Guzetti, Snyder, Glass & Gamas, 1993). La deuxième question de recherche visait à élargir ce champ de connaissances en documentant l'utilisation de ce genre de méthodes en mathématiques, tout en étudiant son efficacité exclusive sans recours à d'autres stratégies.

Compte tenu des différences entre les recherches précédemment citées et la présente recherche (domaine, conjonction de méthodes, situation d'intervention, méthodes de contrôle, interprétation des résultats), les résultats aux post-tests suggèrent que l'intervention formative de nature métaphorique / analogique utilisée ici présente le même genre d'efficacité en mathématiques qu'en physique. En effet, les pourcentages de changements conceptuels effectués lors des calculs, sont équivalents à ceux qui ont été obtenus par Clements (1987b, 1993) au même moment (moyen terme). De même, les résultats obtenus en résolution de problèmes, qui sont de beaucoup inférieurs à ceux des calculs, présentent une tendance similaire à celle qui a été observée par les autres chercheurs qui rapportent des résultats très inférieurs aux questions opérationnelles, par rapport aux questions à réponses déclaratives (Clements, 1987b, 1993; Johsua & Dupin, 1989).

Les chercheurs précédents ont pu conclure qu'une méthodologie de type métaphorique / analogique était beaucoup plus efficace pour effectuer des changements conceptuels en physique que la méthode traditionnelle, à laquelle étaient exposés leurs groupes-témoins. On ne peut en affirmer autant en mathématiques, mais le fait qu'une telle méthodologie ait engendré ici des résultats qui sont consistants avec les leurs et qu'elle ait réussi à remédier à un important pourcentage d'erreurs épistémologiques qui avaient résisté à des mois d'enseignement traditionnel, suggère qu'il en est ainsi.

Il faut toutefois convenir que le processus métaphorique a aussi des limites. On ne peut éluder le fait que les mathématiques ont un caractère essentiellement abstrait. La transition des nombres naturels aux nombres relatifs, qui est étudiée ici, représente d'ailleurs un changement de niveau d'abstraction. Si la métaphore est alors un outil efficace pour saisir certaines subtilités de la loi des signes, il n'en demeure pas moins que d'autres lui échappent. Il est entendu que, sur le plan pédagogique, il faut continuer à développer la capacité des élèves à passer aux niveaux plus abstraits selon des démarches formelles. En mathématiques, les métaphores serviraient surtout de transitions au long des stades qui conduisent à cette formalisation (Pirie & Kieren, 1994).

La littérature abonde au sujet de la stabilité et de la solidité qui caractérisent les erreurs épistémologiques (Brousseau, 1983, 1989a; Johsua, 1989a; Léonard & Sackur, 1990; Viennot, 1979; Vosniadou, 1994). Cependant, quoiqu'on parle beaucoup de la résistance de ces erreurs au changement conceptuel, le sujet de leur récurrence est peu mentionné. Il s'agit d'une lacune relevée par Dagher (1995), en rapport avec un besoin d'informations sur les effets longitudinaux des méthodologies de type métaphorique / analogique. L'utilisation de méthodes de contrôle à court et à moyen termes, lors de la présente recherche, a permis de préciser cet aspect de l'erreur épistémologique. Le taux de récurrence des erreurs qui a été observé entre les deux post-tests (environ 25%) est assez important pour considérer qu'un changement conceptuel n'est pas une affaire qui se règle une fois pour toutes. La présente question de recherche a cependant aussi permis de déterminer que, même dans les cas des erreurs subséquentes, l'intervention formative type métaphorique / analogique avait amené des conséquences bénéfiques à court terme, comme à moyen terme. Elle a causé l'acquisition, même instable, de conceptions justes

et réussi à ébranler de nombreuses conceptions initiales. Elle a également procuré des améliorations appréciables au niveau de la résolution de problèmes, où on peut plus facilement juger des améliorations que lors des calculs.

Il s'agit d'une information appréciable au point de vue pédagogique, car on ne saurait assez insister sur le besoin de soutenir les changements conceptuels si on veut maximiser l'efficacité des interventions formatives. Elle laisse prévoir qu'un soutien, même minimal, pourrait suffire pour stabiliser les nouvelles acquisitions dans plusieurs cas.

L'utilité des degrés de certitude, comme indicateurs des émotions cognitives

Bien que les chercheurs s'entendent de plus en plus pour dire que le changement conceptuel est une démarche à la fois rationnelle et affective (Désautels, 1989; Gowin, 1983; Pintrich, Marx & Boyle, 1993; Resnick, 1989b; Sierpiska, 1989; West & Pines, 1983), le phénomène des émotions cognitives est peu documenté en rapport avec le changement conceptuel. Le fait d'en tenir compte ici, au niveau d'une spécification de degrés de certitude, avait pour but d'éclairer davantage cet aspect en rapport avec la méthodologie proposée.

La troisième question de recherche a d'abord permis de spécifier les critères sur lesquels les élèves se basent pour évaluer leurs analogies et justifier leurs degrés de certitude. Il a été observé que les élèves utilisaient les mêmes critères que leurs enseignants, quoiqu'ils le fassent de façon moins détaillée que ceux-ci (Kelly-Bégin, 1990). Ce facteur établit donc la base d'un langage commun entre les interlocuteurs, favorisant ainsi l'avènement d'une des conditions nécessaires au changement conceptuel, soit l'intelligibilité d'une nouvelle conception offerte comme alternative à celle qui est inadéquate (Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982).

Il a ensuite été établi que les degrés de certitude étaient des indices valides de la maîtrise des concepts et qu'ils procuraient une information importante sur l'état cognitif des élèves dans une perspective d'évaluation formative de type métaphorique / analogique. Ainsi, une comparaison du statut des analogies et des degrés de certitude qui les accompagnent permet d'observer différents niveaux de maîtrise des concepts quand les

analogies sont adéquates, ainsi que la disponibilité de l'élève en égard à un changement conceptuel éventuel quand elles sont erronées. La spécification des degrés de certitude permet ainsi d'augmenter la puissance diagnostique du test métaphorique, et d'orienter les interventions formatives en conséquence.

Il a finalement été établi que les degrés de certitude étaient de bons prédicteurs de la résistance des erreurs épistémologiques au niveau des calculs à court terme, mais qu'ils étaient de meilleurs prédicteurs de la récurrence de ces erreurs sous toutes ses formes à moyen terme. Les surévaluations d'analogies erronées et les sous-évaluations d'analogies adéquates correspondent à sensiblement plus d'erreurs systématiques que les évaluations justes en ces occasions. Bien qu'il ne s'agisse pas d'indices infaillibles, ils procurent une information qu'il serait stérile de négliger lors d'une entreprise de changement conceptuel, surtout si l'on considère que le phénomène de récurrence des erreurs épistémologiques n'est pas négligeable, comme on l'a vu précédemment.

La présente conjugaison d'une méthodologie métaphorique et d'une spécification de degrés de certitude semble particulièrement bien adaptée pour satisfaire aux recommandations de Head & Sutton (1985), qui préconisent l'utilisation de techniques qui rendent justice à la signification personnelle de l'apprenant ainsi qu'à son importance émotionnelle. Bien qu'il ait été dit qu'une méthodologie de changement conceptuel de type métaphorique / analogique a le potentiel de réduire les résistances affectives (Margolis, 1987), les résultats démontrent qu'elle ne les annulent pas.

Ces résultats confirment expérimentalement le rôle que les chercheurs avaient attribué intuitivement aux émotions cognitives, à la suite d'observations lors d'entreprises de changement conceptuel (Désautels, 1989; Gowin, 1983; Resnick, 1989b; Sierpiska, 1989; West & Pines, 1983). Ils permettent d'établir les bases d'une technique appropriée pour en tenir compte, autant au niveau du diagnostic des erreurs épistémologiques que lors du changement conceptuel. Ils précisent finalement l'utilisation que l'on peut en faire.

La généralisabilité des résultats selon les différents niveaux de rendement

La quatrième question de recherche a révélé que le potentiel diagnostique quantitatif du test métaphorique est légèrement meilleur au niveau général qu'au niveau

avancé, où certains élèves peuvent reconnaître le besoin d'une opération pour résoudre un problème avant de pouvoir l'expliquer analogiquement. De même, le pouvoir autodidacte des analogies, qui se manifeste surtout lors des opérations les plus simples, est un peu meilleur au niveau général qu'au niveau avancé, où on a déjà maîtrisé ces difficultés. Les différences entre les deux groupes se révèlent surtout par des caractéristiques d'ordre qualitatif au plan des productions métaphoriques, où le niveau avancé fait davantage preuve de précision, de cohérence et de raffinement mathématique. En ce qui a trait à la validité de contenu, le test métaphorique se révèle un meilleur instrument diagnostique des obstacles rencontrés, selon les difficultés respectives de chaque niveau. Ainsi, il produit de meilleurs résultats pour les calculs au niveau général et les problèmes de transfert au niveau avancé, quoiqu'il continue également de diagnostiquer cet aspect au niveau général.

Relativement à l'efficacité de l'intervention métaphorique / analogique, les pourcentages de réussites stables sont meilleurs au niveau avancé lors des calculs, selon un taux de moins de 10% à court et à moyen termes. Il en est de même en ce qui a trait à la résolution des problèmes de transfert à court terme; cette différence augmente à près du double à moyen terme. Compte tenu des taux de réussites partielles et de la différence de charge cognitive, on a conclu qu'il existe plus de ressemblances que de différences entre les deux niveaux. L'analyse des résidus d'erreurs révèle également des répartitions similaires aux deux niveaux, à court et à moyen termes. La seule différence notable est qu'on rencontre davantage de régressions vers les anciennes erreurs au niveau avancé, alors qu'on rencontre plus d'évolutions de toutes sortes, de même que de contaminations des nouveaux acquis, au niveau général. De plus, les solutions erronées révèlent davantage d'améliorations au niveau général. Cette différence semble indiquer qu'un changement conceptuel s'effectue plus graduellement au niveau général. Au niveau d'habileté supérieure, il s'agirait davantage d'une affaire de "tout ou rien", qui pourrait être expliquée par la plus grande confiance que ces élèves accordent à leurs propres conceptions qui se sont déjà souvent révélées efficaces.

Concernant l'utilité d'une spécification de degrés de certitude, on a observé que les élèves des deux niveaux comprennent et utilisent les mêmes critères pour établir ces

degrés à partir de leurs analogies. De même, les fréquences d'utilisation de ces critères indiquent que l'ordre d'importance qui leur est accordé est similaire aux deux niveaux. La validité des degrés de certitude, comme indice de la maîtrise des concepts, s'est révélée légèrement meilleure au niveau avancé qu'au niveau général, où 5.3% des degrés de certitude inappropriés (ou absents) ne révélaient aucune information valide sur le statut des connaissances, tel que déterminé par les pré-tests.

Finalement, l'utilité des degrés de certitude, comme prédicteurs des résistances et des récurrences des obstacles épistémologiques, s'est révélé comparable pour les deux groupes. Les surévaluations d'analogies erronées et les sous-évaluations d'analogies adéquates correspondent à sensiblement plus d'erreurs systématiques aux post-tests, sauf en ce qui a trait aux problèmes à court-terme, aux deux niveaux. La prédiction d'erreurs est cependant un peu plus précise au niveau avancé, où les élèves semblent plus perceptifs dans l'évaluation de leur état cognitif, comme l'annonçait déjà la légère différence de validité des degrés de certitude. De même, les insatisfactions d'une conception erronée (évaluations justes) correspondent à sensiblement moins d'erreurs au niveau avancé, où les élèves semblent avoir plus de facilité à adopter d'emblée les meilleures conceptions proposées en alternative à celles dont ils sont insatisfaits, ce qui fut interprété comme un facteur de leur réussite.

On a donc conclu, qu'une technique d'évaluation formative utilisant une approche métaphorique / analogique est aussi valable pour les élèves d'un niveau d'habileté que l'autre, les différences entre les deux groupes s'annulant d'un domaine à l'autre. Il apparaît, en effet, que les différences entre les deux niveaux soient beaucoup plus d'ordre qualitatif que quantitatif.

Il a été rapporté dans la littérature, que comme stratégie d'instruction, l'approche analogique était plus efficace auprès des élèves d'habileté inférieure, que ce soit au niveau académique ou celui du raisonnement formel (Burns & Okey, 1985; Bean, Singer & Cowan, 1985; Gabel & Sherwood; 1983). Dans un cadre de changement conceptuel, ces résultats sont consistants avec les observations de Johsua & Dupin (1989) et les résultats de Clement (1987b, 1993) qui utilisaient des méthodes dont la présente recherche s'est inspirée.

Cette différence d'efficacité entre les niveaux d'habileté n'a pas été observée ici. En fait, les résultats aux post-tests suggèrent que l'approche métaphorique / analogique favorise les élèves du niveau d'habileté supérieure qui y ont obtenu de meilleurs résultats. Si on considère seulement les résultats bruts, il est certain que les élèves d'habileté inférieure en profitent plus, puisqu'ils ont plus d'erreurs à corriger. Mais, il n'est rien qui permette d'affirmer que les élèves de niveau avancé n'auraient pu corriger autant d'erreurs, si la charge cognitive avait été égale. Le fait est que les résultats sont interprétés ici en terme de réussites, alors que ceux de plusieurs des recherches précédentes sont interprétées en terme de gains. Il en résulte un malentendu sur l'efficacité de l'approche analogique dans la littérature, parce ces interprétations incitent à réserver ce genre d'approche aux élèves qui éprouvent des difficultés. Il semble important de rectifier cette perception afin que les élèves d'habileté supérieure ne soient pas privés de ses bénéfices. Le fait que l'approche analogique leur ait permis de rectifier, avec autant de succès, des erreurs qui avaient résisté à plusieurs mois d'enseignement formel démontre que ce genre d'approche leur est aussi nécessaire. D'autant plus, qu'ailleurs en mathématiques, des recherches ont démontré que les habiletés métaphorique et analogique étaient significativement reliées à la réussite en ce domaine (Novick & Holyoak, 1991; Presmeg, 1992; Sfard, 1994).

Les limites de la recherche et les pistes de recherches subséquentes

La présente recherche offre plusieurs résultats intéressants. Cependant, à cause de ses limites et des contraintes de l'expérimentation, elle laisse en suspens plusieurs questions qui pourraient faire l'objet de recherches futures.

Le premier objectif de recherche visait à répondre à un besoin d'instruments de type qualitatif qui tiennent compte des critères de répliquabilité, fidélité et validité dans le domaine du diagnostic de l'erreur épistémologique (Gilbert, Watts & Osborne, 1985; Hashweh, 1988; Shuell, 1985). Le test métaphorique, dont les résultats ont été analysés ici, a largement rencontré le critère de validité. Ces résultats semblent également garants des critères de répliquabilité et de fidélité, puisque le diagnostic ainsi obtenu s'est déjà révélé hautement efficace pour deux groupes d'élèves de niveaux d'habileté différents.

Des recherches subséquentes sont cependant nécessaires pour s'en assurer. Comme il s'agit d'un nouvel instrument, il serait aussi utile de vérifier son efficacité dans d'autres domaines des mathématiques, autant que dans les domaines extérieurs aux mathématiques.

Le second objectif de recherche visait à déterminer l'efficacité d'une méthodologie de changement conceptuel métaphorique / analogique en mathématiques, en conjonction avec un diagnostic du même type. A cause de la nature des informations nécessitées par d'autres objectifs de recherche et des limites de temps alloué en salle de classe, les interventions formatives ont dû être menées de façon individuelle. Il s'agit d'une des limites de la présente recherche, quand on veut effectuer des comparaisons exactes avec les recherches précédentes, puisque les résultats de celles-ci dépendaient d'interventions collectives. Des expérimentations, utilisant la méthodologie proposée en salle de classe, seraient nécessaires si on voulait pouvoir établir ces comparaisons.

Toujours à cause des contraintes de temps, les items des post-tests ne correspondaient qu'aux items systématiquement erronés lors des pré-tests. Il s'agit d'une autre limite de cette recherche. Cependant, les comparaisons effectuées à partir des données des post-tests, dont les résultats ont dû être interprétés avec prudence, offrent des pistes de recherche intéressantes. L'absence de corrélation significative, entre les résultats aux post-tests et ceux du bulletin officiel, suggère qu'une méthodologie de type métaphorique / analogique produise des résultats qui sont différents de la performance habituelle des élèves, exposés à l'enseignement formel. De même, l'absence de corrélation significative entre les résultats aux post-tests et le nombre d'erreurs à corriger suggère que ce genre de méthodologie diminue les différences de charge cognitive et fournit ainsi une assistance supérieure au rappel des connaissances. Il serait utile d'explorer ces possibilités afin de déterminer plus précisément ce que ce genre d'approche, utilisant un raisonnement inductif informel, pourrait apporter à l'enseignement formel pour compléter le raisonnement déductif qui y est plus communément utilisé, surtout en mathématiques.

Relativement au troisième objectif de recherche qui visait à documenter le phénomène des émotions cognitives lors d'une entreprise de changement conceptuel, les résultats obtenus ne font qu'ouvrir une brèche dans un domaine peu connu. Les sujets d'investigation abondent. Cependant, il semblerait particulièrement utile qu'une recherche

s'applique à documenter les conditions d'évolution des degrés de certitude pendant un processus de changement conceptuel, afin de pouvoir déterminer des moyens de maximiser l'efficacité des interventions. Lors de l'utilisation du test métaphorique, il serait également intéressant d'explorer une combinaison de la présente échelle de degrés de certitude avec celle des degrés de familiarité de la tâche, étudiée par Jonnaert & Laveault (1994). Le degré de familiarité est un jugement métacognitif effectué par l'élève avant de s'engager dans une tâche. Il représente la perception qu'a l'élève de sa capacité d'effectuer celle-ci. Cette relation, entre la tâche et les éléments activés dans son répertoire cognitif, aurait un effet sur la motivation et la performance de l'élève. Puisque l'existence ou non d'un problème dépend des connaissances dont le sujet dispose ou croit disposer pour effectuer une tâche, le degré de familiarité procure également une information importante dans le contexte d'une évaluation formative. La comparaison entre la perception que l'élève a de sa compétence (avant) et celle de sa réussite (après) pourrait éclairer et compléter les résultats obtenus ici avec les seuls degrés de certitude établis après la tâche.

Le quatrième objectif de recherche visait à déterminer la généralisabilité de la méthodologie proposée selon les différents niveaux de rendement. Ses résultats, ou leur interprétation, semblent contredire ceux des recherches précédentes qui utilisent une approche du même genre. Il est probable qu'une approche analogique profite différemment aux élèves, selon leurs différents niveaux d'habileté. Des recherches, qui apporteraient des précisions à ce sujet, seraient utiles afin de dissiper les malentendus et éclairer les controverses.

Finalement, comme cette recherche exploratoire a été effectuée avec un échantillon limité de sujets provenant de classes intactes, il serait opportun de vérifier ses résultats à partir d'un échantillon non aléatoire d'un plus grand nombre de sujets.

Les retombées et implications pédagogiques

L'objectif général de la présente recherche était d'explorer les bénéfices d'une méthodologie qui aurait le potentiel de répondre à des besoins docimologiques et didactiques entraînés par l'erreur épistémologique. Étant donné les sérieuses répercussions

de ce genre d'erreurs, nous espérons pouvoir proposer aux enseignants un moyen simple et efficace de les diagnostiquer et d'y remédier afin de limiter leur prolifération.

Nous croyons être maintenant en mesure de le faire, du moins en ce qui a trait à la transition au système des nombres entiers relatifs, qui est fondamentale à l'apprentissage des mathématiques au secondaire et qui est reconnue comme un moment important d'obstacles (Brousseau, 1989a, 1989b; Glaeser, 1981; Vergnaud, 1989a, 1989b). En effet, la méthodologie proposée s'est montrée efficace pour diagnostiquer les erreurs reliées aux calculs, ainsi qu'aux problèmes de transfert. Bien que les interventions de la présente recherche aient été individuelles lors du processus de changement conceptuel, elles s'avèrent suffisamment homogènes pour croire qu'elles pourraient être transférées à la salle de classe, avec le même genre d'efficacité que celle qui a été obtenue lors des recherches utilisant une approche similaire (Clement, 1987b, 1993; Johsua & Dupin, 1988, 1989). Les informations fournies par la spécification des degrés de certitude, en plus d'affiner le diagnostic, peuvent servir d'indicateurs sur les besoins d'appui lors du processus de changement conceptuel, de même que d'un suivi postérieur afin de minimiser les récurrences.

En 9e année, les nombres entiers relatifs sont enseignés en trois sections correspondant aux catégories d'opérations. Si le test métaphorique était ainsi divisé et administré entre chaque catégorie d'opérations, la lourde charge cognitive qui a été engendrée lors de cette expérimentation en serait réduite d'autant, favorisant une meilleure rétention et limitant les effets de propagation aux concepts subséquents. Des items de ce test pourraient être administrés sous forme de courts devoirs, que l'enseignant évaluerait afin d'axer ses interventions en conséquence. Il ne suffirait alors que de quelques minutes, en chaque occasion. L'intégration d'une telle méthodologie à une approche coopérative (Basili & Sanford, 1991; Johnson & Johnson, 1989; Lonning, 1993), où les élèves interviennent les uns auprès des autres pour assurer la compréhension de tous, pourraient être un moyen de maximiser les résultats en procurant une assistance individuelle quand elle est nécessaire.

Le moment de la présente expérimentation, soit la mi-semester de 10e année, avait été choisi de façon à éviter tout support provenant de la salle de classe, ce qui n'est pas

représentatif de la conjoncture habituelle d'une situation d'évaluation formative. Si ce genre d'évaluation avait été conduite au moment propice, soit au début de la 9^e année, les erreurs n'auraient pas eu le temps de s'ancrer aussi profondément, et les réussites partielles autant que les évolutions relevées dans les post-tests auraient pu être soutenues par la suite afin de stabiliser les changements conceptuels mitigés. Il est aussi à noter que les points obtenus lors des tests de la présente expérimentation n'affectaient pas les résultats scolaires des sujets. Il est possible que s'il en avait été autrement, comme c'est le cas dans une situation normale de salle de classe, cette mesure aurait pu être une source de motivation accrue.

En mathématiques, on insiste beaucoup sur l'importance d'intégrer les raisonnements formels et informels afin de pouvoir attacher un sens aux concepts (Perkins & Unger, 1994; Schoenfeld, 1991; Vergnaud 1989b). La méthodologie métaphorique / analogique, telle que proposée ici, pourrait être facilement adaptée aux besoins d'autres notions auxquelles les élèves éprouvent de la difficulté à accorder un sens tout au long de l'apprentissage, e.g. les opérations avec les fractions et les radicaux, l'ordre des opérations, etc. Elle pourrait également être adaptée avantageusement à d'autres domaines, tels les sciences, l'histoire, la géographie, etc.

Cependant, il serait vain de recommander une telle méthodologie, si on ne l'accompagne pas d'autres recommandations. Bien que les manifestations des obstacles épistémologiques soient bien connues des enseignants, les notions qui s'y rapportent ne sont pas répandues dans les écoles. Il va sans dire que les notions qui concernent les besoins de changement conceptuel que ces erreurs nécessitent, et les émotions cognitives qui l'accompagnent, ne le sont pas non plus. Les recherches relatives à ces domaines suggèrent un besoin de changements aux niveaux de la conception de l'erreur, des pratiques didactiques et docimologiques qui s'y adressent, aussi bien qu'aux niveaux de l'élaboration des curriculum, de l'organisation des contenus de cours et des manuels scolaires (D'Ambrosio & Mewborn, 1994; Tirosh & Graeber, 1994; Vosniadou, 1994; etc.). Etant donné les sérieuses répercussions des erreurs épistémologiques sur l'apprentissage, il semble qu'un effort de diffusion des connaissances accumulées lors de ces recherches s'impose, que ce soit auprès des enseignants en poste et en formation,

autant qu'auprès des concepteurs de manuels et de curriculum.

A ce sujet, l'inclusion d'objectifs-obstacles (Martinand, 1983, 1989), basés sur les répertoires d'obstacles élaborés par les chercheurs, pourrait être un bon moyen de fournir aux enseignants une information jusque-là absente de la programmation pédagogique. C'est en relation aux nouveaux modes d'activités didactiques nécessités par ce genre d'objectifs, que la présente méthodologie avait été proposée. Elle pourrait donc trouver son utilité parmi les stratégies à mettre en oeuvre pour les rencontrer.

Cependant, il ne s'agit que d'un élément de solution. On a observé que l'emploi de stratégies de changement conceptuel et la réussite des élèves qui en profitent subséquemment étaient associés avec la disponibilité du matériel qui supportent ces stratégies, plutôt qu'avec la formation qui avait appris aux enseignants à se servir de ces stratégies (Smith, Blakeslee & Anderson, 1993). Par contre, on a aussi observé que des enseignants, qui n'avaient pas reçu de formation et n'avaient pas changé leur conception de l'apprentissage, avaient tendance à utiliser ce genre de matériel de façon traditionnelle et à rencontrer peu de succès dans leur entreprise (Demastes, Settlage & Good, 1995). On a finalement observé que les stratégies de changement conceptuel avaient plus de chances d'être incorporées dans le répertoire des enseignants, si le contenu des cours de méthodologie offerts à la formation des maîtres était enseigné en utilisant une pédagogie de changement conceptuel (Stofflett & Stoddart, 1994). Un travail substantiel est donc nécessaire auprès des enseignants afin de leur aider à reconceptualiser leur rôle selon une perspective de changement conceptuel.

La présente recherche poursuivait aussi comme objectif, de promouvoir l'évaluation formative qui éprouve des difficultés à s'imposer dans les écoles. La carence d'instruments en ce domaine (Scallon, 1988a) et l'absence de cadre théorique suffisamment élaboré et unifié pour supporter une telle pratique (Abrecht, 1991) ont été identifiées parmi les causes de ces difficultés. En rapport à ces difficultés, cette recherche a d'abord proposé un instrument supplémentaire d'évaluation formative, sous la forme d'une méthodologie métaphorique / analogique. De plus, nous croyons que la revue de la littérature sur l'erreur épistémologique et le changement conceptuel, que l'on retrouve ici, pourrait fournir des éléments importants pour suppléer au cadre théorique relatif à ce

genre d'évaluation, ou du moins des arguments convaincants pour en supporter la pratique.

Cette recherche s'inscrivait finalement dans un effort de redressement du statut de la pensée symbolique dans les institutions scolaires, car il semblerait que les demandes de spécificité et de logique, communes à ces milieux, frustrant les élèves de cet important instrument de pensée (Pollio & Pollio, 1974; Rummel & Dykstra, 1983).

Dans la littérature sur l'erreur épistémologique, on parle constamment de généralisations hâtives, d'extrapolations excessives et d'interprétations de nouvelles expériences effectuées à partir d'expériences précédentes. Ces descriptions représentent toutes des manifestations de raisonnement analogique. Quoiqu'on ait cité la métaphore au domaine même des obstacles épistémologiques (Bachelard, 1938; Glaeser, 1981) et qu'Anderson (1989) ait observé qu'un processus analogique était à l'origine de la plupart des erreurs (comme des solutions efficaces) dans la résolution de problèmes, il est surprenant que personne n'ait pensé à établir un lien direct entre l'erreur épistémologique et une pensée analogique débridée. Débridée, parce qu'elle serait le mode naturel et automatique de compréhension, et que les apprenants ne sont pas entraînés à l'utiliser efficacement.

Il a été observé que les apprenants, laissés à eux-mêmes, se réfèrent automatiquement à un apprentissage analogique (Anderson, Greeno, Kline & Neves, 1981; Anderson, Pirolli & Farrell, 1988; Pohl & Nutter, 1985) et il a déjà été proposé que ce genre de raisonnement soit à la base de toute cognition (Carmelli, 1993; Jaynes, 1976; Lakoff, 1994; Lakoff & Johnson, 1980; Langer, 1951; Vosnadiou, 1987).

Cette thèse semble supportée par les théories du traitement de l'information qui servent de cadre d'interprétation à la présente recherche. Selon ces théories, les gens raisonnent naturellement à partir de schémas / modèles mentaux, qui sont définis comme des concepts génériques extraits à partir d'un ensemble d'expériences similaires, ou comme des modèles homomorphiques de la réalité; ces structures cognitives sont activées en fonction des indices qui sont repérés dans l'environnement et qui correspondent à leurs éléments (Bartlett, 1932; Collins & Gentner, 1983; Holland, Holyoak, Nisbett & Thagard, 1989; Mandler, 1985; Rumelhart, 1977, 1980). Cette définition pourrait également

s'appliquer au raisonnement analogique, et il est bien possible que, comme l'affirme Halford (1987, 1990, 1992), le raisonnement humain soit fondamentalement analogique.

L'efficacité des schémas pragmatiques de raisonnement, qui obéissent à des analogies sous-jacentes, semble encore confirmer davantage la possibilité que le raisonnement analogique soit un mode naturel de penser, ainsi que la nécessité d'un entraînement à l'utiliser efficacement dans les écoles. Ils ont, en effet, permis à des adultes d'accomplir automatiquement des raisonnements que des cours de logique n'avaient pas réussi à établir (Cheng & Holyoak, 1985; Cheng, Holyoak, Nisbett & Oliver, 1986); et ils ont révélé une même efficacité auprès des jeunes enfants (Giroto, 1989). Le succès supérieur des méthodes métaphorique et analogique pour effectuer un changement conceptuel (Lawson, Baker, DiDonato & Verdi, 1993; Clement, 1987b, 1993; Johsua & Dupin, 1988, 1989; Mason, 1994a, 1994b; Stavy, 1991) semble mener vers les mêmes conclusions.

Cette thèse est finalement supportée par une théorie du jugement qui repose sur une autre version du raisonnement analogique, soit la reconnaissance de configurations. Cette théorie fut élaborée par Margolis (1987), afin d'expliquer les faiblesses des adultes à produire un raisonnement logique, fiable et efficace (Tversky & Kahneman; 1973; Wason & Johnson-Laird, 1972; etc.). Cet auteur (Margolis, 1987), de même que Schoenfeld (1991), affirment que la logique formelle est un modèle idéal de raisonnement conçu et appris par l'homme afin d'assurer la rigueur de ses raisonnements, mode de raisonnement dont la qualité dépend de celle du raisonnement informel qui le soutient. Piaget n'a-t-il pas dit, lui-même, que les esprits les plus capables de contrôler les abstractions sont ceux qui réussissent à les incarner dans des exemples (ou schèmes) concrets, lesquels leur servent de tremplins symboliques sans introduire aucune limitation (Piaget & Inhelder, 1966)?

Il semble que tous ces arguments sont suffisamment lourds pour qu'on songe sérieusement à reconnaître l'importance de la pensée symbolique (métaphorique et analogique) dans les institutions scolaires, et pour qu'on lui accorde une utilité plus vaste, que celle d'ornement du langage dans les cours de langues et de littérature. Vu qu'il s'agit d'un mode de raisonnement auquel les apprenants se réfèrent naturellement, il semble

également qu'il soit nécessaire qu'on les entraîne à l'utiliser à bon escient et à en éviter les pièges. Les inférences incorrectes (Mason, 1994a; Rumelhart & Norman, 1981; Spiro, Feltovitch, Coulson & Anderson, 1979; Zook & Maier, 1994) et les fausses impressions de causalité (Eckstein, 1983), que le raisonnement analogique peut engendrer, ressemblent trop à des erreurs épistémologiques pour qu'on puisse se permettre de les ignorer. La méthodologie métaphorique, proposée ici, se présente comme un excellent moyen d'éduquer ce genre de raisonnement parce qu'elle est simple et facilement adaptable à tous les sujets d'intérêt.

On a dit qu'une approche analogique profitait aux élèves de niveau d'habileté inférieure (Bean, Singer & Cowan, 1985; Burns & Okey, 1985; Clement, 1987b, 1993; Gabel & Sherwood, 1983; Johsua & Dupin, 1989). On a également dit qu'elle était la marque du génie (Einstein, 1955; Hesse, 1966; Hoffman, 1980; Koestler, 1964; Kuhn, 1979; Poincaré, 1955; Pribram, 1990; etc.). Il ne fait nul doute que tous les apprenants pourraient profiter de ce genre d'entraînement.

BIBLIOGRAPHIE

Abrecht, R. (1991). L'évaluation formative, une analyse critique. Montréal, QC: Renouveau pédagogique.

Anderson, J.R. (1983). The architecture of cognition. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Anderson, J.R. (1989). The analogical origins of errors in problem solving. Dans D. Klahr & K. Kotovsky (Eds.), Complex information processing: The impact of Herbert A. Simon (pp. 343-371). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Anderson, J.R. (1990). Cognitive psychology and its implication. New York, NY: Freeman.

Anderson, J.R., Greeno, J.G., Kline, P.J. & Neves, D.M. (1981). Acquisition of problem solving skill. Dans J.R. Anderson (Ed.), Cognitive skills and their acquisition (pp. 191-230). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Anderson, J.R., Pirolli, P. & Farrell, R. (1988). Learning to program recursive functions. Dans M.T.H. Chi, R. Glaser & M.J. Farr (Eds.), The nature of expertise (pp. 152-183). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Artaud, G. (1991). Communication en classe. Psychopédagogie de l'adulte (EDU 6604).

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(23), 241-286.

Ault, C.R. (1984). Intelligently wrong: Some comments on children's misconceptions. Science and Children, 21(8), 22-24.

Ausubel, D.P. (1960). The use of advance organizers in the learning and retention of meaningful verbal material. Journal of Educational Psychology, 51(5), 267-272.

Ausubel, D.P., Novak, J.D. & Hanesian, N. (1978). Educational psychology: A cognitive view (2e éd.). New York, NY: Holt, Rinehart and Winston.

Bachelard, G. (1938). La formation de l'esprit scientifique. Paris: Vrin.

Bachelard, G. (1949). La philosophie du non. Paris: PUF.

Bar, V. (1989). Children views about the water cycle. Science Education, 73(4), 481-500.

Barras, R. (1984). Some misconceptions and misunderstandings perpetuated by teachers and textbooks in biology. Journal of Biological Education, 18, 201-206.

Barry, D. (1994). Making the invisible visible: Using analogically-based methods to surface unconscious organizational processes. Organization Development Journal, 12(4), 37-48.

Bartlett, F.C. (1932). Remembering: A study in experimental and social psychology. New York, NY: MacMillan.

Bartoli, J.S. (1985). Metaphor, mind and meaning: The narrative mind in action, Language Arts, 62(4), 332-342.

Baruk, S. (1973). Echec et maths. Paris: Seuil.

Basili, P.A. & Sanford, J.P. (1991). Conceptual change strategies and cooperative group work in chemistry. Journal of Research in Science Teaching, 28(4), 293-304.

Baxter, W.H., Newton, K.E. & Del Grande, J.J. (1977). Mathématiques pour un monde moderne (Tome 1). (J.-G. Bellefeuille & F.X. Dupont, Trad.). Toronto, ON: Gage.

Bean, T.W., Searles, D., Singer, H. & Cowen, S. (1990). Learning concepts from biology text through pictorial analogies and an analogical study guide. Journal of Educational Research, 83(4) 233-237.

Bean, T.W., Singer, H. & Cowen, S. (1985). Analogical study guides: Improving comprehension in science. Journal of Reading, 29(3), 246-250.

Bednarz, N. & Garnier, C. (1989). Introduction. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 13-29). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Bendall, S., Goldberg, F. & Galili, I. (1993). Prospective elementary teachers' prior knowledge about light. Journal of Research in Science Teaching, 30(9), 1169-1187.

Birenbaum, M. & Shaw, D.J. (1985). Task specification chart: A key to a better understanding of test results. Journal of Educational Measurement, 22(3), 219-230.

Birenbaum, M. & Tatsuoka, K.K. (1982). On the dimensionality of achievement test data. Journal of Educational Measurement, 19(4), 259-266.

Birenbaum, M. & Tatsuoka, K.K. (1987). Open-ended versus multiple-choice response formats: It does make a difference for diagnostic purposes. Applied Psychological Measurement, 11(4), 385-395.

- Black, M. (1966). Models and metaphors, Ithaca, NY: Cornell University Press.
- Black, M. (1979). More about metaphor. Dans A. Ortony (Ed.), Metaphor and thought (pp. 19-43). New York, NY: Cambridge University Press.
- Bloom, B.S. (1969), Taxonomie des objectifs pédagogiques (Tome I). Montréal, QC: Éducation nouvelle.
- Bober, W.C., Lee, R., Martin, J.D., O'Shea, T., Sharp, J.N.C., Beattie, R.H., Bilous, F., Bright, B.D., Connelly, R.D., Drost, D.R., Hope, J.A., Lesage, J.W. & Tossell, S. (1989). Actimath 9. (F.-M. Gérin, Trad.). Canada: Ginn.
- Boden, M.A. (1994). What is creativity?. Dans M.A. Boden (Ed.), Dimensions of creativity (pp. 75-117). Cambridge, MA: MIT Press.
- Bourbeau-Tessier, H., Saumier, J. & Renaud, P.-P. (1985). Mathématique au secondaire BMS 2, Cahier d'exercices. Montréal, QC: HRW.
- Bowers, J. & Osborn, M. (1966). Attitudinal effects of selected types of concluding metaphors in persuasive speeches. Speech Monographs, 33, 147-155.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2), 165-198.
- Brousseau, G. (1987). Représentations et didactique du sens de la division. Dans G. Vergnaud, G. Brousseau & M. Hulin (Eds.), Didactique et acquisition des connaissances scientifiques: Actes du colloque de Sèvres (pp. 47-64). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (1989a). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 41-63). Ottawa, ON: Agence d'ARC.
- Brousseau, G. (1989b). Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 277-285). Ottawa, ON: Agence d'ARC.
- Brown, D.E. (1993). Refocusing core intuitions: A concretizing role for analogy in conceptual change. Journal of Research in Science Teaching, 30(10), 1273-90.
- Brown, D.E. & Clement, J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: Abstract transfer versus explanatory model construction. Instructional Science, 18, 237-261.

Brown, J.S. & Burton, R.R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. Cognitive Science, 2, 155-192.

Browning, M.E. & Lehman, J.D. (1988). Identification of student misconception in genetics problem solving via computer program. Journal of Research in Science Teaching, 25(9), 747-761.

Burnham, C.C. (1992). Crumbling metaphors: Integrating heart and brain through structured journals. College Composition and Communication, 43(4), 508-515.

Burns, J.C. & Okey, J.R. (1985). Effects of teacher use of analogies on achievement of high school biology students with varying levels of cognitive ability and prior knowledge. Paper presented at the Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching, French Lick Springs, IN.

Caravita, S. & Halldén, O. (1994). Re-framing the problem of conceptual change. Learning & Instruction, 4(1) 89-111.

Carmelli, N. (1993). Is metaphor language dependent?. Archives de Psychologie, 61, 281-295.

Champagne, A.B., Gunstone, R.F. & Klopfer, L.E. (1985). Instructional consequences of students' knowledge about physical phenomena. Dans L.H.T. West & A.L. Pines (Eds.), Cognitive structure and conceptual change (pp. 61-88). New York, NY: Academic Press.

Champagne, A.B., Klopfer, L.E., Solomon, C.A. & Cahn, A.D. (1980). Interaction of students' knowledge with their comprehension and design of science experiments. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Boston, MA.

Cheng, P.W. & Holyoak, K.J. (1985). Pragmatic reasoning schemas. Cognitive Psychology, 17, 391-416.

Cheng, P.W., Holyoak, K.J., Nisbett, R.E. & Oliver, L.M. (1986). Pragmatic versus syntactic approaches to training deductive reasoning. Cognitive Psychology, 18, 293-328.

Churchland, P.M. (1989). A neurocomputational perspective: The nature of mind and the structure of science. Cambridge, MA: The MIT Press.

Churchland, P.S. (1986). Neurophilosophy: Toward a unified science of the mind-brain. Cambridge, MA: MIT Press.

Clement, C.A. (1994). Effect of structural embedding on analogical transfer: Manifest versus latent analogs. American Journal of Psychology, 107(1), 1-38.

Clement, C.A. & Gentner, D. (1991). Systematicity as a selection constraint in analogical mapping. Cognitive Science, 15(1) 89-132.

Clement, J. (1983a). A conceptual model discussed by Galileo and used intuitively by physics students. Dans D. Gentner & A.L. Stevens (Eds.), Mental models (pp. 325-339). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Clement, J. (1983b). Students' alternative conceptions in mechanics: A coherent system of preconceptions?. Dans H. Helm & J.D. Novak (Eds.), Proceedings of the International Seminar, Misconceptions in Science and Mathematics (pp. 310-315). Ithaca, NY: Cornell University Press.

Clement, J. (1987a). Generation of spontaneous analogies by students solving science problems. Paper presented at the International Conference on Thinking, Honolulu.

Clement, J. (1987b). Overcoming students' misconceptions in physics: The role of anchoring intuitions and analogical validity. Dans J.D. Novak (Eds.), Proceedings of the Second International Seminar: Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics (Vol. III, pp. 84-97). Ithaca, NY: Cornell University Press.

Clement, J. (1988). Observed methods for generating analogies in scientific problem solving. Cognitive Science, 12, 563-586.

Clement, J. (1989). Learning via model construction and criticism. Dans J.A. Glover, R.R. Ronning & C.R. Reynolds (Eds.), Handbook of creativity (pp.341-382). New York, NY: Plenum Press.

Clement, J. (1993). Using bridging analogies and anchoring intuitions to deal with students' preconceptions in physics. Journal of Research in Science Teaching, 30(10), 1241-1257.

Clement, J., Brown, D.E. & Zietsman, A. (1989). Not all preconceptions are misconceptions: Finding "anchoring conceptions" for grounding instruction on students' intuitions. International Journal of Science Education, 11, 554-565.

Clermont, J.-C. (1986a). Objectif: Mathématique 1re secondaire, Cahier d'exercices. Montréal, QC: HRW.

Clermont, J.-C. (1986b). Objectif: Mathématique 2e secondaire, Cahier d'exercices. Montréal, QC: HRW.

Closset, J.-L. (1983a). D'où proviennent certaines "erreurs" rencontrées chez les élèves et les étudiants en électrocinétique?. Bulletin de l'Union des Physiciens, 657, 81-102.

Closset, J.-L. (1983b). Sequential reasoning in electricity. Dans Recherche en didactique de la physique: Les actes du premier atelier international (pp. 313-319). Paris: CNRS.

Collins, A. & Gentner, D. (1982). Constructing runnable mental models. Proceedings of the Fourth Annual Convention of the Cognitive Science Society (pp. 86-89). Ann Arbor, Michigan.

Connel, M.L. & Peck, D.M. (1993). Report of a conceptual change intervention in elementary mathematics. Journal of Mathematical Behavior, 12(4), 329-350.

Crocker, L. & Algina, J. (1986). Introduction to classical & modern test theory. New York, NY: Holt, Rinehart & Wiston.

Cronbach, L.J. (1971). Test validation. Dans R.L. Thorndike (Ed.). Educational Measurement (2e éd.). Washington, DC: American Council on Education.

Dagher, Z.R. (1995). Review of studies on the effectiveness of instructional analogies in science education. Science Education, 79(3), 295-312.

D'Ambrosio, B.S. & Mewborn, D.S. (1994). Children's constructions of fractions and their implications for classroom instruction. Journal of Research in Childhood Education, 8(2), 150-161.

de Kleer, J. & Brown, J.S. (1981). Mental models of physical mechanisms and their acquisition. Dans J.R. Anderson, J.R. (Ed.), Cognitive skills and their acquisition (pp. 286-310). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

De Landtsheer, C. (1994). The language of prosperity and crisis: A case study in political semantics. Politics & the Individual, 4(2) 63-85.

Demastes, S.S., Settlage, J.Jr. & Good, R. (1995). Students' conceptions of natural selection and its role in evolution: Cases of replication and comparison. Journal of Research in Science Teaching, 32(5), 535-50.

Désautels, J. (1989). Développement conceptuel et obstacle épistémologique. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 258-267). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

di Sessa, A. (1982). Unlearning aristotelian physics: A study of knowledge-based learning. Cognitive Science, 6, 37-75.

Donaldson, M. (1978). Children's minds. New York, NY: Norton.

Donnelly, C.M. & McDaniel, M.A. (1993). Use of analogy in learning scientific concepts. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition, 19(4), 975-987.

Doran, R.L. (1972). Misconceptions of selected science concepts held by elementary school students. Journal of Research in Science Teaching, 9(2), 127-137.

Dreyfus, A. & Jungwirth, E. (1988). The cell concept of 10th graders: Curricular expectations and reality. International Journal of Science Education, 10(2), 221-229.

Dreyfus, A., Jungwirth, E. & Elivitch, R. (1990). Applying the "cognitive conflict" strategy for conceptual change: Some implications, difficulties, and problems. Science Education, 74(5), 555-569.

Driver, R. (1981). Pupils' alternative frameworks in science. European Journal of Science Education, 3(1), 93-101.

Driver, R. & Erickson, G. (1983). Theories in action: Some theoretical and empirical issues in the study of students' conceptual frameworks in science. Studies in Science Education, 10, 37-60.

Drolet, M. & Rochette, H. (1984). Mathématique soleil (Vol. 1) (éd. rev.). Montréal, QC: Guérin.

Duit, R. (1983). Some methods for evaluating the meaning of concept names. Dans H. Helm & J.D. Novak (Eds.), Proceedings of the International Seminar, Misconceptions in Science and Mathematics (pp. 141-149). Ithaca, NY: Cornell University Press.

Duit, R. (1991). On the role of analogies and metaphors in learning science. Science Education, 75(6), 649-72.

Dunbar, K. (1995). How scientists really reason: Scientific reasoning in real-world laboratory. Dans R.J. Sternberg & J.E. Davidson (Eds.), The nature of insight (pp. 365-395). Cambridge, MA: MIT Press.

Dykstra, D.I., Boyle, C.F. & Monarch, I.A. (1992). Studying conceptual change in learning physics. Science Education, 76(6), 615-52.

Earle, R.S. (1995). Teacher imagery and metaphors: Windows to teaching and learning. Educational Technology, 35(4), 52-59.

Ebenezer, J.V. & Gaskell, P.J. (1995). Relational conceptual change in solution chemistry. Science Education, 79(1), 1-17.

Ebos, F. & Robinson, B. (1977). Horizons mathématiques/2. (S. Hanna, B. Gagnon & H. Charlebois, Trad.). Saint-Laurent, QC: Beauchemin.

Ebos, F., Tuck, B., Schofield, W. & Hamaguchi, D. (1988). Mathématiques, 10. (M. Boileau, Trad.). Saint-Laurent, QC: Beauchemin.

Eckstein, M.A. (1983). The comparative mind. Comparative Education Review, 27(3), 311-322.

Edelman, G.M. (1989). The remembered present: A biological theory of consciousness. New York, NY: Basic Books.

Einstein, A. (1955). Letter to Jacques Hadamard. Dans B. Ghiselin, (Ed.), The creative process: A symposium (pp. 43-44). New York, NY: Mentor.

Engel Clough, E. & Driver, R. (1985). What do children understand about pressure in fluids? Research in Science & Technological Education, 3(2), 133-144.

Erickson, G. & Thibergien A. (1985). Heat and temperature. Dans R. Driver, E. Guesne & A. Thibergien (Eds.), Children's ideas in science (pp. 52-84). Milton Keynes, Philadelphia: Open University Press.

Ericsson, K.A. & Simon, H.A. (1993). Protocol analysis: Verbal reports as data (éd. rév.) Cambridge, MA: MIT Press.

Evans, J.St.B.T. (1982). The psychology of deductive reasoning. London: Routledge and Kegan Paul.

Faucher, G. (1983). Advanced physics courses do not provide students with conceptual change. Dans H. Helm & J.D. Novak (Eds.), Proceedings of the International Seminar, Misconceptions in Science and Mathematics (pp. 322-327). Ithaca, NY: Cornell University Press.

Fensham, P.J., Garrard, J. & West, L. (1981). The use of cognitive mapping in teaching and learning strategies. Research in Science Education, 11, 121-129.

Fischbein, E. (1994). Tacit models. Dans D. Tirosh (Ed.), Implicit and explicit knowledge. An educational approach: Vol. 6. Human development (pp. 96-110). Norwood, NJ: Ablex.

Flanagan, O.J. (1991). The science of mind (éd. rév.). Cambridge, MA: MIT Press.

Flewelling, G. & Newton, K.E. (1987). Visa 9, Mathématique (M.-C. Vianna, Trad.). Saint-Laurent, QC: Trécaré.

Flick, L. (1991). Where concepts meet percepts: Stimulating analogical thought in children. Science Education, 75(2), 215-230.

Franks, J.J. (1974). Toward understanding understanding. Dans W. B. Weimer & D.S. Palermo (Eds.), Cognition and the symbolic process (Vol. 1, pp. 231-261). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Friedel, A.W., Gabel, D.L. & Samuel, J. (1990). Using analogs for chemistry problem solving: Does it increase understanding?. School Science and Mathematics, 90(8), 674-682.

Gabel, D.L. & Samuel, K.V. (1986). High school students' ability to solve molarity problems and their analog counterparts. Journal of Research in Science Teaching, 23(3), 165-176.

Gabel, D.L. & Sherwood, R.D. (1980). Effect of using analogies on chemistry achievement according to Piagetian Level. Science Education, 64(5), 709-716.

Gabel, D.L. & Sherwood, R.D. (1983). Facilitating problem solving in high school chemistry. Journal of Research in Science, 20(2), 163-177.

Gentner, D. (1982). Are scientific analogies metaphors?. Dans D.S. Miall (Ed.), Metaphor: Problems and perspectives (pp. 106-132). New Jersey: Humanities Press.

Gentner, D. (1988). Metaphor as structure mapping: The relational shift. Child Development, 59(1), 47-59.

Gentner, D. & Gentner, D.R. (1983). Flowing waters or teeming crowds: Mental models of electricity. Dans D. Gentner & A.L. Stevens (Eds.), Mental models (pp. 99-129). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gentner, D. & Rattermann, M.J. (1991). Language and the career of similarity. Dans S.A. Gelman & J.P. Byrnes (Eds.), Perspectives on language and thought: Interrelations in development (pp. 225-277). New York, NY: Cambridge University Press.

- Gentner, D. & Stevens A.L. (Eds.). (1983). Mental models. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Gick, M.L. & Holyoak, K.J. (1980). Analogical problem solving. Cognitive Psychology, 12, 306-355.
- Gick, M.L. & Holyoak, K.J. (1983). Schema induction and analogical transfer. Cognitive Psychology, 15, 1-38.
- Gilbert, J.K., Watts, D.M. & Osborne, R.J. (1985). Eliciting student views using an interview-about-instances technique. Dans L.H.T. West & A.L. Pines (Eds.), Cognitive structure and conceptual change (pp. 11-28). New York, NY: Academic Press.
- Gildea, P. & Glucksberg, S. (1983). On understanding metaphor: The role of context. Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 22(5), 577-590.
- Ginsburg, H.P., Kossan, N.E., Schwartz, R. & Swanson, D. (1983). Protocol methods in research on mathematical thinking. Dans H.P. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking (pp. 7-47). New York, NY: Academic Press.
- Giordan, A. (1989a). Vers un modèle didactique d'apprentissage allostérique. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 240-257). Ottawa, ON: Agence d'ARC.
- Giordan, A. (1989b). Quelques obstacles à l'utilisation didactique du concept d'obstacle épistémologique. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 372-381). Ottawa, ON: Agence d'ARC.
- Giroto, V. (1989). Logique mentale, obstacles dans le raisonnement naturel et schémas pragmatiques. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 195-205). Ottawa, ON: Agence d'ARC.
- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. Recherches en Didactique des Mathématiques, 2(3), 303-346.
- Glaser, R. (1981). The future of testing, a research agenda for cognitive psychology and psychometrics. American Psychologist, 36(9) 923-936.
- Glass, A.L., Holyoak, K.J. & Santa, J.L. (1979). Cognition. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Glucksberg, S., Gildea, P. & Bookin, H.A. (1982). On understanding nonliteral speech: Can people ignore metaphors?. Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 21(1), 85-98.

Glynn, S.M. (1991). Explaining science concepts: A teaching-with-analogies model. Dans S.M. Glynn, R.H. Yeany & B.K. Britton (Eds.), The psychology of learning science (pp. 219-240). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Glynn, S.M., Yeany, R.H. & Britton, B.K. (1991). A constructive view of learning science. Dans S.M. Glynn, R.H. Yeany & B.K. Britton (Eds.), The psychology of learning science (pp. 3-19). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gorsky, P. & Finegold, M. (1992). Using computer simulation to restructure students' conceptions of force. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 11(2), 163-178.

Goswami, U. (1992). Analogical reasoning in children. Hove, England: Erlbaum.

Goulden, N.R. & Griffin, C.J.G. (1995). The meaning of grades based on faculty and student metaphors. Communication Education, 44(2), 110-25.

Gowin, D.B. (1983). Misconceptions, metaphors and conceptual change: Once more with feeling. Dans H. Helm & J.D. Novak (Eds.), Proceedings of the International Seminar, Misconceptions in Science and Mathematics (pp. 39-41). Ithaca, NY: Cornell University Press.

Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. Journal for Research in Mathematics Education, 22(3) 170-218,

Gussarsky, E. & Gorodetsky, M. (1988). On the chemical equilibrium concept: Constrained word associations and conception. Journal of Research in Science Teaching, 25(5), 319-333.

Gussarsky, E. & Gorodetsky, M. (1990). On the concept of "chemical equilibrium": The associative framework. Journal of Research in Science Teaching, 27(3) 197-204.

Guzzetti, B.J., Snyder, T.E, Glass, G.V. & Gamas, W.S. (1993). Promoting conceptual change in science: A comparative meta-analysis of instructional interventions from reading education and science education. Reading Research Quarterly, 28(2), 116-159.

Halford, G.S. (1987). A structure-mapping approach to cognitive development. International Journal of Psychology, 22, 609-642.

Halford, G.S. (1990). Is children's reasoning logical or analogical? Further comments on Piagetian cognitive developmental psychology. Human Development, 33(6) 356-361.

Halford, G.S. (1992). Analogical reasoning and conceptual complexity in cognitive development. Human Development, 35(4), 193-217.

Halldén, O. (1988). The evolution of the species: Pupil perspectives and school perspectives. International Journal of Science Education, 10(5), 541-552.

Halloun, I.A. & Hestenes, D. (1985). The initial knowledge state of college physics students. American Journal of Physics, 53(11), 1043-1055.

Hamel, O. & Hébert, M. (1981). La mathématique par objectifs, Option 310. La Prairie, QC: Les Entreprises Culturelles.

Hardiman, P.T., Well, A.D. & Pollatsek, A. (1984). Usefulness of a balance model in understanding the mean. Journal of Educational Psychology, 76(5), 792-801.

Harris, R.J., Lahey M.A. & Marsalek, F. (1980). Metaphors and images: Rating, reporting and remembering. Dans R.P. Honeck & R.R. Hoffman (Eds.), Cognition and figurative language (pp. 163-181). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Harrison, A.G. & Treagust, D.F. (1993). Teaching with analogies: A case study in Grade-10 optics. Journal of Research in Science Teaching, 30(10), 1291-1307.

Hashweh, M. (1988). Descriptive studies of students' conceptions in science. Journal of Research in Science Teaching, 25(2), 121-134.

Hayes, D.A. & Tierney, R.J. (1982). Developing readers' knowledge through analogy. Reading Research Quarterly, 17(2), 256-280.

Head, J.O. & Sutton, C.R. (1985). Language, understanding, and commitment. Dans L.H.T. West & A.L. Pines (Eds.), Cognitive structure and conceptual change (pp. 91-100). New York, NY: Academic Press.

Helm, H. & Novak, J.D. (Eds.). (1983). Proceedings of the International Seminar, Misconceptions in Science and Mathematics. Ithaca, NY: Cornell University Press.

Hesse, M.B. (1966). Models and analogies in science. Notre Dame, IN: University of Notre Dame Press.

Hewson, M.G. A'B. (1985). The role of intellectual environment in the origin of conceptions: An exploratory study. Dans L.H.T. West & A.L. Pines (Eds.), Cognitive structure and conceptual change (pp. 153-162). New York, NY: Academic Press.

Hiebert, J. (1984). Children's mathematic learning: The struggle to link, form and understanding. The Elementary School Journal, 84(5), 1-25.

Hills, G.L. (1989). Students' "untutored" beliefs about natural phenomena: Primitive science or commonsense?. Science Education, 73(2), 155-186.

Hoffman, R.R. (1980). Metaphor in science. Dans R.P. Honeck & R.R. Hoffman (Eds.), Cognition and figurative language (pp. 391-423). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Holland, J.H., Holyoak, K.J., Nisbett, R.E. & Thagard, P.R. (1989). Induction: Processes of inference, learning and discovery. Cambridge, MA: MIT Press.

Holyoak, K.J. & Thagard, P. (1995). Mental leaps: Analogy in creative thought. Cambridge, MA: MIT Press.

Huberman, A.M. & Miles, M.B. (1991). Analyse des données qualitatives, Recueil de nouvelles méthodes. (C. de Backer & V. Lamongie, Trad.). Bruxelles: De Boeck-Wesmael.

Hynd, C.R., Alvermann, D.E. & Qian, G. (1993). Prospective teachers' comprehension and teaching of a complex science concept (Tech. Rep. No. 4). Athens, GA.: University of Georgia, National Reading Research Center.

Hynd, C.R., McWhorter, J.Y., Phares, V. & Suttles, C.W. (1994). The role of instructional variables in conceptual change in high school physics topics. Journal of Research in Science Teaching, 31(9), 933-946.

Janvier, C., Charbonneau, L. & de Cotret, S.R. (1989). Obstacles épistémologiques à la notion de variable: Perspectives historiques. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 64-75). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Jaynes, J. (1976). The origin of consciousness in the breakdown of the bicameral mind. Boston, MA: Houghton Mifflin.

Johnson, M. (1980). A philosophical perspective on the problems of metaphor. Dans R.P. Honeck & R.R. Hoffman (Eds.), Cognition and figurative language (pp. 47-67). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Johnson, D.W. & Johnson, R.T. (1989). Cooperation and competition: Theory and research. Edina, Minn.: Interaction Book.

Johnson-Laird, P.N. (1983). Mental models. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Johsua, S. (1983). La "métaphore du fluide" et le "raisonnement en courant". Dans Recherche en didactique de la physique: Les actes du premier atelier international (pp. 321-330). Paris: CNRS.

Johsua, S. (1989a). La perdurance des obstacles épistémologiques: Un révélateur de leur nature. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 110-116). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Johsua, S. (1989b). Les conditions d'évolution des conceptions d'élèves. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 306-314). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Johsua, S. & Dupin, J.J. (1987). Taking into account student conceptions in instructional strategy: An example in physics. Cognition and Instruction, 4(2), 117-135.

Johsua, S. & Dupin, J.J. (1988). La gestion des contradictions dans des processus de modélisation en physique, en situation de classe. Dans G. Vergnaud, G. Brousseau & M. Hulin (Eds.), Didactique et acquisition des connaissances scientifiques: Actes du colloque de Sèvres (pp. 185-199). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Johsua, S. & Dupin, J.J. (1989). Représentations et modélisations: Le "débat scientifique" dans la classe et l'apprentissage de la physique. Berne, Suisse: Lang.

Jonnaert, P. & Laveault, D. (1994). Évaluation de la familiarité de la tâche: quelle confiance accorder à la perception de l'élève? Revue des sciences de l'éducation, 20(2), 271-291.

Kearsley, G.W. (1985). Methodological change and the elicitation of images in human geography. Journal of Mental Imagery, 9(2), 71-82.

Keil, F.C. (1985). Conceptual domains and the acquisition of cognitive development. Cognitive Development, 1, 73-96.

Kelly-Bégin, G. (1990). Etude exploratoire d'une méthodologie d'évaluation basée sur l'utilisation de la métaphore en mathématiques. Rapport intérimaire, Université d'Ottawa.

Klatzky, R.L. (1984). Memory and awareness, An information-processing perspective. New York, NY: Freeman.

Koestler, A. (1964). The act of creation. London: Hutchison.

Kopp, R.R. (1995). Metaphor therapy: Using client-generated metaphors in psychotherapy. New York, NY: Brunner/Mazel.

Kuhn, T.S. (1970). La structure des révolutions scientifiques. Paris: Flammarion.

Kuhn, T.S. (1979). Metaphor in science. Dans A. Ortony (Ed.), Metaphor and thought (pp. 409-419). New York, NY: Cambridge University Press.

Laborde, C. & Vergnaud, G. (1994). L'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Dans G. Vergnaud (Ed.), Apprentissages et didactiques, où en est-on? (pp. 63-91). Paris: Hachette.

Lacasse, R. (1997). Communication personnelle. Recherche et thèse de doctorat (EDU 9999).

Lakoff, G. (1994). What is a conceptual system?. Dans W.F. Overton & D.S. Palermo (Eds.), The nature and ontogenesis of meaning (pp. 41-90). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). Metaphors we live by. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Langer, S.K. (1951). Philosophy in a new key, A study in the symbolism of reason, rite and art (2e éd.). New York, NY: The New American Library.

Lawson, A.E. (1983). Predicting science achievement: The role of developmental level, disembedding ability, mental capacity, prior knowledge and beliefs. Journal of Recherche in Science Teaching, 19(3), 233-248.

Lawson, A.E., Baker, W.P. DiDonato, L. & Verdi, M.P. (1993). The role of hypothetico-deductive reasoning and physical analogues of molecular interactions in conceptual change. Journal of Research in Science Teaching, 30(9), 1073-1085.

Lawson, A.E. & Thompson, L.D. (1988). Formal reasoning ability and misconceptions concerning genetics and natural selection. Journal of Research in Science Teaching, 25(9), 733-746.

Legendre-Bergeron, M.F. (1986). Lexique de la psychologie du développement de Jean Piaget (3e éd.). Chicoutimi, QC: Morin.

Lemoyne G. & Legault, B. (1989). Des relations additives aux relations multiplicatives: Construction socio-cognitive de représentations de ces relations. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 286-305). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Léonard, F. & Sackur, C. (1990). Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(23), 205-240.

Levin, I. & Druyan, S. (1993). When sociocognitive transaction among peers fails: The case of misconception in science. Child development, 64(5), 1571-1591.

Linder, C.J. (1993). A challenge to conceptual change. Science Education, 77(3), 292-300.

Lonning, R.A. (1993). Effect of cooperative learning strategies on student verbal interactions and achievement during conceptual change instruction in 10th grade general science. Journal of Research in Science Teaching, 30(9), 1087-1101.

McCloskey, M. (1983). Naive theories of motion. Dans D. Gentner & A.L. Stevens (Eds.), Mental models (pp. 299-324). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

McCutcheon, L.E. (1991). A new test of misconceptions about psychology. Psychological Reports, 68(2) 647-653.

Mac Cormac, E.R. (1985). A Cognitive Theory of Metaphor. Cambridge, MA: MIT Press.

Mandl, H., Gruber, H. & Renkl, A. (1993). Misconceptions and knowledge compartmentalization. Dans G. Strube & K.F. Wender (Eds.), The cognitive psychology of knowledge: Vol. 101. Advances in psychology (pp. 161-176). Amsterdam, Netherlands: North-Holland/Elsevier Science Publishers.

Mandler, G. (1985). Cognitive psychology: An essay in cognitive science. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Mandler, G. (1989a). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. Dans D.B. McLeod & V.M. Adams (Eds.), Affect and mathematical problem solving (pp. 3-19). New York, NY: Springer Verlag.

Mandler, G. (1989b). Affect and learning: Reflections and prospects. Dans D.B. McLeod & V.M. Adams (Eds.) Affect and mathematical problem solving (pp. 237-244). New York, NY: Springer Verlag.

Mandler, J.M. & Orlich, F. (1993). Analogical transfer: The roles of schema abstraction and awareness. Bulletin of the Psychonomic Society. 31(5), 485-487.

Marek, E.A. (1986). They misunderstand but they'll pass. The Science Teacher, 53(9), 32-35.

Margolis, H. (1987). Patterns, thinking, and cognition: A theory of judgment. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Markham, K.M., Mintzes, J.J. & Jones, M.G. (1994). The concept map as a research and evaluation tool: Further evidence of validity. Journal of Research in Science Teaching, 31(1), 91-101.

Marková, I. (1982). Paradigms, thought, and language. New York, NY: Wiley.

Martinand, J.L. (1983). Questions pour la recherche: La référence et le possible dans les activités scientifiques scolaires. Dans Recherche en didactique de la physique: les actes du premier atelier international (pp. 227-249). Paris: CNRS.

Martinand, J.L. (1989). Des objectifs-capacités aux objectifs-obstacles; Deux études de cas. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 217-227). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Mason, L. (1994a). Analogy, metaconceptual awareness and conceptual change: A classroom study. Educational Studies, 20(2) 267-291.

Mason, L. (1994b). Cognitive and metacognitive aspects in conceptual change by analogy. Instructional Science, 22(3), 157-187.

Matz, M. (1980). Toward a computational theory of algebraic competence. Journal of Mathematical Behavior, 3, 93-166.

Mayer, R.E. (1980). Elaboration techniques that increase the meaningfulness of technical text: An experimental test of the learning strategy hypothesis. Journal of Educational Psychology, 72(6), 770-784.

Mayer, R.E. & Bromage, B.K. (1980). Different recall protocols for technical texts due to advance organizers. Journal of Educational Psychology, 72(2), 209-225.

Mestre, J. & Touger, J. (1989). Cognitive research: What's in it for physics teacher?. The Physics Teacher, 27(6), 447-456.

Miller, G.A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. Psychological Review, 63, 81-97.

Moreira, M.A. (1987). Concept mapping as a possible strategy to detect and to deal with misconceptions in physics. Dans J.D. Novak (Eds.), Proceedings of the Second International Seminar: Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics (Vol. III, pp. 352-360). Ithaca, NY: Cornell University Press.

Müller, M. (1864). Lectures on the science of language (Vol. II). London: Longman, Green, Longman, Roberts & Green.

Murray, F. & Markessini, J. (1982). A semantic basis of nonconservation of Weight. The Psychological Record, 32, 375-379.

Newby, T.J., Ertmer, P.A. & Stepich, D.A. (1995). Instructional analogies and the learning of concepts. Educational Technology Research and Development, 43(1), p5-18.

Newell, A. (1990). Unified theories of cognition. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Newell, A. & Simon, H.A. (1972). Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Nietzsche, F. (1972). On truth and falsity in their extramoral sense (A. Mugge, Trad.). Dans W. Shibbes (Ed.), Essays on metaphor (pp. 1-13). University of Wisconsin, Whitewater: Language Press.

Norman, D.A. (1980). Discussion: Teaching, learning, and the representation of knowledge. Dans R.E. Snow, P.A. Federico & W.E. Montague (Eds.), Aptitude, learning and instruction: Vol. 1. Cognitive process analyses of aptitude (pp. 237-244). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Norman, D.A. (1983). Some observations on mental models. Dans D. Gentner & A.L. Stevens (Eds.), Mental models (pp. 7-14). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Novak, J.D. (1985). Metalearning and metaknowledge strategies to help students learn how to learn. Dans L.H.T. West & A.L. Pines (Eds.), Cognitive structure and conceptual change (pp. 189-209). New York, NY: Academic Press.

Novak, J.D. (Ed.). (1987). Proceedings of the Second International Seminar. Misconceptions in Science and Mathematics (Vols. I-III). Ithaca, NY: Cornell University Press.

Novak, J.D. & Musonda, D. (1991). A twelve-year longitudinal study of science concept learning. American Educational Research Journal, 28(1) 117-153.

Novick, L.R. & Holyoak, K.J. (1991). Mathematical problem solving by analogy. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition, 17(3) 398-415.

Nussbaum, J. & Novak, J.D. (1976). An assessment of children's concepts of the earth utilizing structured interviews. Science Education, 60(4), 535-550.

Nussbaum, J. & Novick, S. (1982). A study of conceptual change in the classroom. Paper presented at the meeting of the National Association for Research in Science Teaching, Lake Geneva, WI.

Odom, A. L. & Barrow, L.H. (1995). Development and application of a two-tier diagnostic test measuring college biology students' understanding of diffusion and osmosis after a course of instruction. Journal of Research in Science Teaching, 32(1), 45-61.

Oppenheim, J.R. (1987). Patterns of mathematical misconceptions as revealed on test of algebra readiness. Dans J.D. Novak (Eds.), Proceedings of the Second International Seminar: Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics (Vol. III, pp. 361-369). Ithaca, NY: Cornell University Press.

Ortony, A. (1975). Why metaphors are necessary and not just nice. Educational Theory, 25(1), 45-53

Osborne, R.J. & Cosgrove, M.M. (1983). Children's conceptions of the changes of state of water. Journal of Research in Science Teaching, 20(9), 825-838.

Palmer, S.E. & Kimchi, R. (1986). The information processing approach to cognition. Dans T.J. Knapp & L.C. Robertson (Eds.), Approach to cognition: Contrasts and controversies (pp. 37-77). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Pepper, S. (1942). World Hypotheses: A study in evidence. Berkeley: University of California Press.

Perkins, D.N. & Unger, C. (1994). A new look in representations for mathematics and science learning. Instructional Science, 22(1), 1-37.

Peterson, R.F., Treagust, D.F. & Garnett, P. (1989). Development and application of a diagnostic instrument to evaluate grade 11 and 12 students' concepts of covalent bonding and structure following a course of instruction. Journal of Research in Science Teaching, 26(4), 311-314.

Petrie, H.G. (1979). Metaphor and learning. Dans A. Ortony (Ed.), Metaphor and thought (pp. 438-461). New York, NY: Cambridge University Press.

Pfundt, H. & Duit, R. (1991). Bibliography: Students' alternative frameworks and science education (3e éd.). Kiel, W. Germany: University of Kiel.

Piaget J. & Inhelder, B. (1966). L'image mentale chez l'enfant. Paris: PUF.

Pines, A.L. (1985). Toward a taxonomy of conceptual relations and the implications for the evaluation of cognitive structures. Dans L.H.T. West & A.L. Pines (Eds.), Cognitive structure and conceptual change (pp. 101-116). New York, NY: Academic Press.

Pintrich, P.R., Marx, R.W. & Boyle, R.A. (1993). Beyond cold conceptual change: The role of motivational beliefs and classroom contextual factors in the process of conceptual change. Review of Educational Research, 63(2) 167-199.

Pirie, S.E.B. & Kieren, T.E. (1994). Beyond metaphor: Formalising in mathematical understanding within constructivist environments. For the Learning of Mathematics, 14(1), 39-43.

Pohl, H.L. & Nutter, J.T. (1985). Use of analogy in computer language acquisition. AEDS Journal, 18(4), 254-66.

Poincaré, H. (1955). Mathématique creation. Dans B. Ghiselin, (Ed.), The creative process: A symposium (pp. 33-42). New York, NY: Mentor.

Polanyi, M. (1958). Personal knowledge, Towards a post-critical philosophy. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Polanyi, M. (1967). The tacit dimension. Garden City, NY: Doubleday.

Polland, R.J. (1982). Can students learn by analogy?. Paper presented at the meeting of the National Association for Research in Science Teaching, Lake Geneva, WI.

Pollio, H.R., Barlow, J.M., Fine, H.J. & Pollio, M.R. (1977). Psychology and the poetics of growth: Figurative language in psychology, psychotherapy, and education. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Pollio, M.R. & Pollio, H.R. (1974). The development of figurative language in children. Journal of Psycholinguistic Research, 3(3), 185-201.

Popper, K. (1973). La logique de la découverte scientifique. Paris: Payot.

Posner, G.J., Strike, K.A., Hewson, P.W. & Gertzog, W.A. (1982). Accommodation of scientific conception: Toward a theory of conceptual change. Science Education, 66, 211-227.

Posner, M.I., Rothbart, M.K. & Harman, C. (1994). Cognitive science's contributions to culture and emotion. Dans S. Kitayama & H.R. Markus (Eds.), Emotion and culture: Empirical studies of mutual influence (pp. 197-216). Washington, DC: American Psychological Association.

Pourtois, J.P. & Desmet, H. (1988). Epistémologie et instrumentation des sciences humaines. Liège: Mardaga.

Presmeg, N.C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. Educational Studies in Mathematics, 23(6), 595-610.

Pribram, K.H. (1990). From metaphors to models: The use of analogy in neuropsychology. Dans D.E. Leary (Ed.), Metaphors in the history of psychology (pp. 79-103). New York, NY: Cambridge University Press.

Ranney, M. & Thagard, P. (1988). Explanatory coherence and belief revision in naive physics. (Tech. Rep. No. UPITT/LRDC/ONR/APS 17). University of Pittsburg, Learning Research and Development Center.

Raudsepp, E. (1972). Synectics. Dans W. Shibbes (Ed.), Essays on metaphor (pp. 141-153). University of Wisconsin, Whitewater: Language Press.

Reeves L. & Weisberg, R.W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. Psychological Bulletin, 115(3), 381-400.

Reinsch, N.L. (1971). An investigation of the effects of metaphor and simile in persuasive discourse. Speech Monographs, 38, 142-145.

Reinsch, N.L. (1974). Figurative language and source credibility: A preliminary investigation and reconceptualization. Human Communication Research, 1, 75-80.

Renner, J.W., Brumby, M. & Shepherd, D.L. (1981). Why are there no dinosaurs in Oklahoma?. The Science Teacher, 48, 22-24.

Resnick, L.B. (1989a). Convictions ontologiques dans l'apprentissage de la physique. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 103-109). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Resnick, L.B. (1989b). Les approches pédagogiques et les conceptions conflictuelles. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 268-276). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Resnick, L.B. & Ford, W.W. (1981). The psychology of mathematics for instruction. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Richard, M. (1985). Communication en classe. Introduction à la recherche en éducation (EDU 5590).

Richards, I.A. (1976). The philosophy of rhetoric. New York, NY: Oxford University Press.

Ricoeur, P. (1975). La métaphore vive. Paris: Seuil.

Ricoeur, P. (1979). The metaphorical process as cognition, imagination and feeling. Dans S. Sacks (Ed.), On metaphor (pp.141-157). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Ridgeway, D. (1988). Misconceptions and the qualitative method. The Science Teacher, 55(6), 68-71.

Rogoff, B. (1984). Introduction: Thinking and learning in social context. Dans B. Rogoff & J. Lave (Eds.), Everyday cognition: Its development in social context (pp. 1-8). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Rose, A.M. (1980). Information-processing abilities. Dans R.E. Snow, P.A. Federico & W.E. Montague (Eds.), Aptitude, learning and instruction: Vol. 1. Cognitive process analyses of aptitude (pp. 65-104). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rosenthal, D.C. (1982). Metaphors, models, and analogies in social science and public policy. Political Behavior, 4(3), 281-301.

Rowe, H.A.H. (1985). Problem solving and intelligence. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rumelhart, D.E. (1977). Introduction to human information processing. New York, NY: Wiley.

Rumelhart, D.E. (1980). Schemata: The building blocks of cognition. Dans R.J. Spiro, B.C. Bruce & W.F. Brewer (Eds.), Theoretical issues in reading comprehension (pp. 33-50). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rumelhart, D.E. & Norman, D.A. (1981). Analogical processes in learning. Dans J.A. Anderson (Ed.), Cognitive skills and their acquisition (pp. 335-359). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rumelhart, D.E. & Ortony, A. (1977). The representation of knowledge in memory. Dans R.C. Anderson, R.J. Spiro & W.F. Montague (Eds.), Schooling and the acquisition of knowledge (pp. 99-135). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rummel, M.K. & Dykstra, R. (1983). Analogies produced by children in relation to grade level and linguistic maturity. Research in the Teaching of English, 17 (1), 51-60.

Sapienza, A.M. (1987). Imagery and strategy. Journal of Management, 13(3), 543-555.

Scallon, G. (1988a). L'Evaluation formative des apprentissages: Vol.1. La réflexion (Vol. 1). Québec, QC: Presses de l'Université Laval.

Scallon, G. (1988b). L'Evaluation formative des apprentissages: Vol.2. L'instrumentation. Québec, QC: Presses de l'Université Laval.

Scheffler, I. (1977). In praise of cognitive emotions. Teacher's College Record, 79(2), 171-186.

Schoenfeld, A.H. (1985), Mathematical problem solving. London: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. Dans J.F. Voss, D.N. Perkins & J.W. Segal (Eds.), Informal reasoning and education (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schultz K., Murray, T., Clement, J. & Brown, D. (1987). Overcoming misconceptions with a computer-based tutor. Dans J.D. Novak (Eds.), Proceedings of the Second International Seminar: Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics (Vol. III, pp. 434-447). Ithaca, NY: Cornell University Press.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. For the Learning of Mathematics, 14(1), 44-55.

Shepardson, D.P. & Moje, E.B. (1994). The nature of fourth graders' understanding of electric circuits. Science Education, 78(5), 489-514.

Shibles, W. (1971). Metaphor: An annotated bibliography. Whitewater, WI: The Language Press.

Shuell, T.J. (1985). Knowledge representation, cognitive structure, and school learning: A historical perspective. Dans L.H.T. West & A.L. Pines (Eds.), Cognitive structure and conceptual change (pp. 117-132). New York, NY: Academic Press.

Shuell, T.J. (1987). Cognitive psychology and conceptual change: Implications for teaching science. Science Education, 71(2), 239-250.

Siegel, S. & Castellan Jr., N.J. (1988). Nonparametric statistics for the behavioral sciences (2e éd.). New York, NY: McGraw-Hill.

Sierpinska, A. (1989). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 130-147). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Simons, P.R.J. (1984). Instructing with analogies. Journal of Educational Psychology, 76(3), 513-527.

Simpson, W.D. & Marek, E.A. (1988). Understandings and misconceptions of biology concepts held by students attending small high schools and students attending large high schools. Journal of Research in Science Teaching, 25(5), 319-333.

Smith, D.C. (1984). Cognitive processes and students' misconceptions in science. Paper presented at the Annual Meeting of the Northeastern Education Research Association, Ellenville, NY.

Smith, E.L., Blakeslee, T.D. & Anderson, C.W. (1993). Teaching strategies associated with conceptual change learning in science. Journal of Research in Science Teaching, 30(2), 111-126.

Songer, C.J. & Mintzes, J.J. (1994). Understanding cellular respiration: An analysis of conceptual change in college biology. Journal of Research in Science Teaching, 31(6), 621-637.

Spada, H.(1994). Conceptual change or multiple representations?. Learning & Instruction, 4(1) 113-116.

Spiro, R.J., Feltovich, P.J., Coulson, R.L. & Anderson, D.K. (1988). Multiple analogies for complex concepts: Antidotes for analogy-induced misconception in advanced knowledge acquisition (Tech. Rep. No. 439). University of Illinois at Urbana-Champaign, Center for the Study of Reading.

Stavy, R. (1991). Using analogy to overcome misconceptions about conservation of matter. Journal of Research in Science Teaching, 28(4), 305-313.

Stepich D.A., & Newby, T.J. (1988). Analogical instruction within the information processing paradigm: Effective means to facilitate learning. Instructional Science, 17, 129-144.

Stepans, J. (1991). Developmental patterns in students' understanding of physics concepts. Dans S.M. Glynn, R.H. Yeany, & B.K. Britton (Eds.), The psychology of learning science (pp. 89-115). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sternberg, R.J. (1985). Beyond IQ: A triarchic theory of human intelligence. New York, NY: Cambridge University Press.

Stevens, A.L. & Collins, A. (1980). Multiple conceptual models of a complex system. Dans R.E. Snow, P.A. Federico & W.E. Montague (Eds.), Aptitude, learning and instruction: Vol. 1. Cognitive process analyses of aptitude (pp. 177-197). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sticht, T.G. (1979). Educational uses of metaphor. Dans A. Ortony (Ed.), Metaphor and thought (pp. 621-632). New York, NY: Cambridge University Press.

Stofflett, R.T. & Stoddart, T. (1994). The ability to understand and use conceptual change pedagogy as a function of prior content learning experience. Journal of Research in Science Teaching, 31(1), 31-51.

Strauss, S. & Stavy, R. (1983). Educational-developmental psychology and curriculum development: The case of heat and temperature. Dans H. Helm & J.D. Novak (Eds.), Proceedings of the International Seminar, Misconceptions in Science and Mathematics (pp. 292-303). Ithaca, NY: Cornell University Press.

Strike, K.A. & Posner, G.J. (1985). A conceptual change view of learning and understanding. Dans L.H.T. West & A.L. Pines (Eds.), Cognitive structure and conceptual change (pp. 211-231). New York, NY: Academic Press.

Sutton, C.R. (1981). Metaphorical imagery: A means of coping with complex and unfamiliar information in science. Durham & Newcastle Research Review, 9, 216-222.

Suzuki, H. (1994). The centrality of analogy in knowledge acquisition in instructional contexts. Human Development, 37(4), 207-219.

Tasker, C.R. (1981). Children's views and classroom experiences. Australian Science Teachers Journal, 27(3), 33-37.

Tatsuoka, K.K. (1983). Rule space: An approach for dealing with misconceptions based on item response theory. Journal of Educational Measurement, 20(4), 345-354.

Tatsuoka, K.K. (1984). Changes in error types over learning stages. Journal of Educational Psychology, 76(1), 120-129.

Tatsuoka, K.K. (1985). A probabilistic model for diagnosing misconceptions by the pattern classification approach. Journal of Educational Statistics, 10(1), 55-73.

Thagard, P. (1991). Concepts and conceptual change. Dans J.H. Fetzer (Ed.), Epistemology and cognition: Vol. 6. Studies in cognitive systems (pp. 101-120). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Thagard, P. (1992). Analogy, explanation, and education. Journal of Research in Science Teaching, 29(6), 537-544.

Thibergien, A. (1989). Difficulté dans l'apprentissage de la physique: La structuration du monde matériel en physique et dans la vie quotidienne. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 228-239). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Tiberius, R.G. (1986). Metaphors underlying the improvement of teaching and learning. British Journal of Educational Technology, 17(2), 144-156.

Tirosh, D. & Graeber, A.O. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teacher's thinking about division. Journal for Research in Mathematics Education, 21(2) 98-108.

Tirosh D. & Graeber, A.O. (1994). Implicit and explicit knowledge: The case of multiplication and division. Dans D. Tirosh (Ed.), Implicit and explicit knowledge, An educational approach: Vol. 6. Human development (pp. 111-130). Norwood, NJ: Ablex.

Toulmin, S. (1972). Human understanding. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Treagust, D.F. (1988). Development and use of diagnostic tests to evaluate students' misconceptions in science. International Journal of Science Education, 10(2), 159-169.

Treagust, D.F. & Smith, C.L. (1989). Secondary students' understanding of gravity and the motion of planets. School Science and Mathematics, 89(5), 380-391.

Tudge, J.R.H. (1989). When collaboration leads to regression: Some negative consequences of socio-cognitive conflict. European Journal of Social Psychology, 19, 123-138.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. Dans D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.), Judgment under uncertainty: Heuristics and biases (pp. 84-98). New York, NY: Cambridge University Press.

van Noppen, J.P., de Knop, S. & Jongen, R. (1985). Metaphor: A bibliography of post-1970 publications. Amsterdam: John Benjamins.

Verbrugge, R. & McCarrell, N. (1977). Metaphoric comprehension: Studies in reminding and resembling. Cognitive Psychology, 9, 494-533.

Vergnaud, G. (1987). Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant. Dans J. Piaget, P. Mounod & J.P. Bronckart (Eds.), Psychologie (pp. 821-844). Bourges: Gallimard.

Vergnaud, G. (1989a). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 33-40). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Vergnaud, G. (1989b). L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction de l'algèbre. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 76-83). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(23), 133-170.

Vergnaud, G., Cortes, A. & Favre-Artigue, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles, problèmes épistémologiques et didactiques. Dans G. Vergnaud, g. Brousseau, & M. Hulin (Eds.), Didactique et acquisition des connaissances scientifiques: Actes du colloque de Sèvres (pp.259-279). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Viennot, L. (1979). Spontaneous reasoning in elementary dynamics. European Journal of Science Education, 1(2), 205-221.

Viennot, L. (1989a). Tendance à la réduction fonctionnelle: Obstacle au savoir scientifique et objet de consensus. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 84-92). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Viennot, L. (1989b). Obstacle épistémologique et raisonnements en physique: Tendance au contournement des conflits chez les enseignants. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 117-129). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Von Glaserfeld, E. (1989). Commentaires subjectifs par un observateur. Dans N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles & conflits (pp. 367-371). Ottawa, ON: Agence d'ARC.

Vosniadou, S. (1987). Children and metaphors. Child Development, 58(3), 870-875.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modeling the process of conceptual change. Learning & Instruction, 4(1), 45-69.

Vosniadou, S. & Brewer, W.F. (1992). Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. Cognitive Psychology, 24(4), 535-585.

Vismuller-Zocco, J. (1992). Metaphoric images from abstract concepts. International Journal of Early Childhood, 24(2), 23-25.

Vygotsky, L.S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wagner, P.A. (1990). Will education contain fewer surprises for students in the future?. Dans V.A. Howard (Ed.), Varieties of thinking. Essays from Harvard's philosophy of education research center (pp. 142-173). New York, NY: Routledge, Chapman & Hall.

Wallace, J.D. & Mintzes, J.M. (1990). The concept map as a research tool: exploring conceptual change in biology. Journal of Research in Science Teaching, 27(10), 1033-1052.

Wandersee, J.H. (1985). Can the history of science help science educators anticipate students' misconceptions?. Journal of Research in Science Teaching, 23(7), 581-597.

Wason, P.C. & Johnson-Laird, P.N. (1972). Psychology of reasoning: Structure and content. London: Batsford.

West, L.H.T., Fensham, P.J. & Garrard, J.E. (1985). Describing the cognitive structures of learners following instruction in chemistry. Dans L.H.T. West & A.L. Pines (Eds.), Cognitive structure and conceptual change (pp. 29-50). New York, NY: Academic Press.

West, L.H.T. & Pines, A.L. (1983). How "rational" is rationality?. Science Education, 67(1), 37-42.

West, L.H.T. & Pines, A.L. (1985). Introduction. Dans L.H.T. West & A.L. Pines (Eds.), Cognitive structure and conceptual change (pp. 1-6). New York, NY: Academic Press.

Wheelwright, P. (1962). Metaphor and reality. Bloomington: Indiana University Press.

White, R.T. (1985). Interview protocols and dimensions of cognitive structure. Dans L.H.T. West & A.L. Pines (Eds.), Cognitive structure and conceptual change (pp. 51-60). New York, NY: Academic Press.

Wong, D.E. (1993). Understanding the generative capacity of analogies as a tool for explanation. Journal of Research in Science Teaching, 30(10), 1259-1272.

Zook, K.B. & Maier, J.M. (1994). Systematic analysis of variables that contribute to the formation of analogical misconceptions. Journal of Educational Psychology, 86(4), 589-600.

_____ (1985a). Programme-cadre, Mathématiques, Cycles intermédiaires et supérieur (2e partie). Toronto, ON: Ministère de l'Éducation de l'Ontario.

_____ (1985b). Programme-cadre, Mathématiques, Cycles intermédiaire et supérieur (3e partie). Toronto, ON: Ministère de l'Éducation de l'Ontario.

Appendice A-1: Lettre au conseil scolaire

Gloucester, 23 juillet 1992

Monsieur Gilles Pinard
Surintendant des écoles
Conseil des écoles publiques d'Ottawa-Carleton
1420, Place Blair
Gloucester (Ontario)
K1J 9L8

Cher monsieur Pinard,

Je poursuis actuellement une recherche en mathématiques, sous la direction du professeur Jean-Paul Dionne de la faculté d'éducation de l'Université d'Ottawa, en vue de satisfaire aux exigences du doctorat en éducation.

L'objectif de ce projet de recherche est d'identifier et de comprendre les difficultés que les élèves éprouvent en mathématiques à l'école secondaire, suite à la transition de l'arithmétique à l'algèbre. Il a également pour but de trouver des façons de leur aider à surmonter ces difficultés. Les résultats de cette recherche serviront à élaborer une méthodologie d'évaluation formative.

Je demande donc la permission de visiter deux(2) classes de l'école secondaire Louis-Riel afin de recueillir les données nécessaires à la poursuite de cette recherche, selon les modalités décrites dans la description du projet que vous trouverez ci-jointe.

Suite à notre rencontre de la fin-juin, j'ai rencontré monsieur Jean-Guy Hurtubise et madame Claire Labrosse qui ont accepté que je poursuive cette recherche à Louis-Riel. Dès que les cours seront définitivement assignés, je me propose de rencontrer les enseignant(e)s concerné(e)s afin de leur demander de m'accueillir dans leurs classes. Vous trouverez également, ci-joints, les formulaires de consentement qui s'adressent aux enseignants, parents et élèves qui accepteront de participer à la recherche.

Je me propose finalement, au terme de cette recherche, de transmettre les résultats obtenus à ceux qui auront bien voulu y participer ainsi qu'à ceux qui y seraient intéressés. J'espère ainsi pouvoir fournir aux enseignant(e)s un outil intéressant et utile dans l'exécution de leurs tâches.

Je vous remercie de l'attention que vous apporterez à cette demande. Veuillez agréer, monsieur Pinard, l'expression de mes sentiments les meilleurs.

cc/ M. Jean-Guy Hurtubise
Mme Claire Labrosse

Ghislaine Kelly-Bégin

2447, chemin Innes
Gloucester (Ont)
K1B 3K3
Tél: 824-2396

Appendice A-2: Formulaire de consentement des enseignants

Cher collègue,

Je poursuis actuellement une recherche en mathématiques, sous la direction du professeur Jean-Paul Dionne de la faculté d'éducation à l'Université d'Ottawa. Cette recherche a reçu l'approbation du Conseil, de la direction de l'école et du secteur de mathématiques.

L'objectif de ce projet de recherche est d'identifier et de comprendre les difficultés que les élèves éprouvent en mathématiques à l'école secondaire, suite à la transition de l'arithmétique à l'algèbre. Il a également pour but de trouver des façons de leur aider à surmonter ces difficultés. Les résultats de cette recherche serviront à élaborer une méthodologie d'évaluation formative.

La classe qui participe au projet accomplit les tâches suivantes:

- 1) Lors de deux périodes en salle de classe, les élèves répondront à trois exercices qui ont pour but de cerner les difficultés qu'ils éprouvent. Ces exercices ont été conçus pour s'insérer directement dans le programme régulier de révision sur les nombres relatifs et les éléments d'algèbre. Un élève, qui ne participerait pas à cette recherche, pourrait donc effectuer un travail équivalent pendant ce temps.
- 2) Lors d'une entrevue individuelle, qui durera de 15 à 45 minutes, le chercheur agira comme tuteur auprès de l'élève et vérifiera les connaissances qu'il aura pu y acquérir. Cette entrevue aura lieu à un moment où l'élève pourra, après vérification avec son enseignant, s'absenter d'une classe sans inconvénient. Cette entrevue sera enregistrée sur bande sonore dont la transcription servira aux analyses nécessitées par le projet de recherche.

Afin de préserver l'anonymat des participants, toutes références aux données de cette recherche contiendront des noms fictifs ou des numéros. L'information sera utilisée uniquement par le chercheur impliqué dans l'étude. Comme cette information concerne directement vos élèves et la matière à votre programme d'enseignement, elle vous sera également disponible, si vous le désirez.

Votre collaboration à cette recherche serait grandement appréciée. Vous pouvez vous en retirer au moment où vous le désirerez. Si vous avez des questions, n'hésitez pas à communiquer avec moi, au numéro 824-2396. Veuillez, s'il vous plaît, remplir le formulaire au bas de cette page.

Je vous remercie de l'attention que vous apporterez à cette demande.

Ghislaine Kelly-Bégin

J'ai discuté avec ma classe et
(identification de la classe)

- j'accepte qu'elle participe

☐

- je n'accepte pas qu'elle participe

☐

à la recherche sur l'évaluation formative en mathématiques.

.....
date

.....
signature de l'enseignant/e

Appendice A-3: Formulaire de consentement des parents

Monsieur et/ou Madame,

J'ai enseigné les mathématiques pendant plus de vingt ans, dont plusieurs de ces années (1981-1988) à l'école secondaire Louis-Riel. Je poursuis actuellement une recherche sous la direction du professeur Jean-Paul Dionne de la faculté d'éducation à l'Université d'Ottawa. Cette recherche a reçu l'approbation du Conseil, de la direction de l'école et du secteur de mathématiques.

L'objectif de ce projet de recherche est d'identifier et de comprendre les difficultés que les élèves éprouvent en mathématiques à l'école secondaire, suite à la transition de l'arithmétique à l'algèbre. Il a également pour but de trouver des façons de leur aider à surmonter ces difficultés. Les résultats de cette recherche serviront à élaborer une méthodologie d'évaluation formative.

L'élève qui participe à ce projet accomplit les tâches suivantes:

- 1) Lors de deux périodes en salle de classe, il répondra à trois exercices qui permettront d'identifier les difficultés qu'il éprouve. Comme les exercices ont été conçus pour s'insérer directement dans le programme régulier, un élève, qui ne participerait pas à cette recherche, effectuerait un travail équivalent pendant ce temps.
- 2) Lors d'une entrevue individuelle, qui durera de 15 à 45 minutes, le chercheur agira comme tuteur auprès de l'élève et vérifiera les connaissances qu'il aura pu y acquérir. Cette entrevue aura lieu à un moment où l'élève pourra, après vérification avec son enseignant, s'absenter d'une classe sans inconvénient. Cette entrevue sera enregistrée sur bande sonore dont la transcription servira aux analyses nécessitées par le projet de recherche.

Afin de préserver l'anonymat des participants, toutes références aux données de cette recherche contiendront des noms fictifs ou des numéros. L'information sera utilisée uniquement par le chercheur impliqué dans l'étude et l'enseignant de votre enfant.

La participation de votre enfant à cette recherche serait grandement appréciée. Il peut refuser d'y participer ou cesser sa participation en tout temps, sans que cela soit retenu contre lui. Si vous avez des questions, n'hésitez pas à communiquer avec moi (824-2396), avec la direction de l'école ou du secteur de mathématiques (837-2216). Veuillez, s'il vous plaît, remplir le formulaire au bas de cette page et le retourner à l'école le plus tôt possible.

Je vous remercie de l'attention que vous apporterez à cette demande.

Ghislaine Kelly-Bégin

J'ai discuté avec mon enfant et
(nom de l'élève)

- je lui donne la permission

☐

- je ne lui donne pas la permission

☐

de participer à la recherche sur l'évaluation formative en mathématiques.

.....
date

.....
signature du parent ou tuteur/e

Appendice A-4: Formulaire de consentement de l'élève**FORMULAIRE DE CONSENTEMENT DES ÉLÈVES**

J'ai reçu des informations de madame Ghislaine Kelly-Bégin sur la recherche qu'elle poursuit concernant l'évaluation formative en mathématiques.

J'ai également pris connaissance des renseignements communiqués à mes parents (tuteurs) et mon professeur de mathématiques à propos de cette recherche. Je comprends que je peux refuser de participer à cette recherche ou cesser ma participation en tout temps, sans que cela soit retenu contre moi.

- J'accepte de participer à cette recherche

☐

- Je n'accepte pas de participer à cette recherche

☐

.....
date

.....
signature de l'élève

Appendice B-1: Pré-test de calcul

EXERCICE DE CALCUL

Nom.....

Effectue les calculs suivants.

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $(-4) \times 5 =$ | 28. $6 \times (-3) =$ | 55. $3 \times 7 =$ |
| 2. $(-18) + (-6) =$ | 29. $4 + 0 =$ | 56. $-5 - 4 =$ |
| 3. $2 - 9 =$ | 30. $-5 - 0 =$ | 57. $(-7) + 1 =$ |
| 4. $(-2) \times 7 =$ | 31. $(-27) + 9 =$ | 58. $0 - (-17) =$ |
| 5. $9 + (-1) =$ | 32. $-2 - (-15) =$ | 59. $4 - 14 =$ |
| 6. $-18 - 1 =$ | 33. $(-8) \times (-2) =$ | 60. $(-6) \times (-4) =$ |
| 7. $0 + 9 =$ | 34. $5 - (-3) =$ | 61. $0 + (-15) =$ |
| 8. $3 \times (-5) =$ | 35. $36 + (-4) =$ | 62. $-7 - (-3) =$ |
| 9. $-7 + 11 =$ | 36. $4 \times (-7) =$ | 63. $45 + 9 =$ |
| 10. $15 - (-2) =$ | 37. $-8 - (-7) =$ | 64. $(-5) \times 8 =$ |
| 11. $24 + 4 =$ | 38. $28 + 7 =$ | 65. $-4 + 6 =$ |
| 12. $-2 + 16 =$ | 39. $(-8) \times 3 =$ | 66. $12 + 1 =$ |
| 13. $(-8) \times 0 =$ | 40. $(-11) + 0 =$ | 67. $9 \times (-2) =$ |
| 14. $3 - (-14) =$ | 41. $-5 + 1 =$ | 68. $10 - (-1) =$ |
| 15. $(-7) \times (-5) =$ | 42. $6 - (-8) =$ | 69. $16 + (-2) =$ |
| 16. $-1 - 4 =$ | 43. $0 \times 14 =$ | 70. $0 \times (-5) =$ |
| 17. $(-6) + 3 =$ | 44. $(-1) + 0 =$ | 71. $-10 + 7 =$ |
| 18. $0 - 13 =$ | 45. $2 \times (-8) =$ | 72. $1 - 12 =$ |
| 19. $(-9) \times 1 =$ | 46. $-4 - (-5) =$ | 73. $8 \times (-4) =$ |
| 20. $-17 + 2 =$ | 47. $14 + 4 =$ | 74. $-3 - 16 =$ |
| 21. $-8 - (-9) =$ | 48. $6 \times 5 =$ | 75. $(-8) + -1 =$ |
| 22. $(-40) + (-5) =$ | 49. $0 + 0 =$ | 76. $12 - 4 =$ |
| 23. $(-2) \times (-6) =$ | 50. $-5 - 11 =$ | 77. $(-3) \times (-4) =$ |
| 24. $0 \times 0 =$ | 51. $(-5) \times (-9) =$ | 78. $5 - (-10) =$ |
| 25. $-12 - 2 =$ | 52. $-17 - (-1) =$ | 79. $13 - 2 =$ |
| 26. $0 + (-1) =$ | 53. $(-3) \times 2 =$ | 80. $3 + 8 =$ |
| 27. $4 \times 2 =$ | 54. $15 - 6 =$ | |

Appendice B-2: Pré-test de résolution de problèmes**EXERCICE DE RÉOLUTION DE PROBLÈMES**
(opérations sur les nombres relatifs)

Nom:.....

ÉCRIS L'ÉNONCÉ MATHÉMATIQUE**-qui représente le mieux la situation décrite dans chacun des problèmes****-et qui permet de répondre le mieux à la question posée à la fin du problème.****EFFECTUE ENSUITE LE CALCUL NÉCESSAIRE POUR OBTENIR LA RÉPONSE EXACTE À CETTE QUESTION.****Exemples:**

Pendant une sécheresse, le niveau d'un lac descend jusqu'à 30 centimètres sous la normale. Les pluies d'automne le font remonter de 10 centimètres. Quel est alors le niveau de ce lac par rapport à la normale?

.....=.....

Un groupe de 5 personnes a gagné un gros lot de 100 000\$ à la lotterie. Combien chacune de ces personnes recevra-t-elle si elles ont toutes participé également à l'achat du billet gagnant?

.....=.....

Un alpiniste descend une montagne à un rythme de 40 mètres à chaque heure. A quelle altitude se trouve-t-il par rapport à son point de départ au bout de 5 heures?

.....=.....

La somme de deux nombres est 15. Si l'un de ces nombres est - 5, quel est l'autre nombre?

.....=.....

.....=.....

.....=.....

1. Un travailleur a gagné 400\$ la semaine dernière. Si de ce montant, il a dépensé 200\$, combien a-t-il économisé?
.....=.....
2. Odette planifie de se rendre à Vancouver qui est à une distance de 2 000 kilomètres de chez elle. Combien doit-elle prévoir de jours pour s'y rendre, si elle compte parcourir 500 kilomètres par jour?
.....=.....
3. Lors d'une partie de poker, Louisette a perdu 20 jetons. Lors de la partie suivante, elle a gagné 10 jetons. Quel est le résultat total de Louisette au poker?
.....=.....
4. Afin d'attirer la clientèle, la gérante d'un magasin décide de vendre 30 manteaux de cuir en faisant une perte de 10\$ sur chacun de ces manteaux. Quel sera le résultat financier de cette vente?
.....=.....
5. La cousine de Cléopâtre est décédée en l'année - 20 par rapport à notre ère. Elle était née en l'année - 40. A quel âge est-elle décédée?
.....=.....
6. Tu obtiens une fraction comme réponse à une équation. Si le numérateur est 15 et que le dénominateur est 0, quelle est la réponse finale?
.....=.....
7. A la suite d'un accident, des sauveteurs descendent dans une mine à raison de 10 mètres à chaque heure. Si les mineurs se trouvent emprisonnés à une profondeur de - 700 mètres par rapport à la surface, dans combien d'heures les mineurs les atteindront-ils?
.....=.....
8. Sylvie a perdu 10\$ aux courses la semaine dernière. Cette semaine, elle y a perdu 20\$. Quel est le résultat total de ses deux semaines de jeu aux courses?
.....=.....
9. En jouant à un jeu, tu dois 9 jetons à un de tes partenaires. Tu piges une carte qui te dit: "Si vous devez des jetons à quelqu'un, la banque vous enlèvera 3 fois cette dette." Représente mathématiquement ce que te propose cette carte.
.....=.....
10. Monsieur Gagnon a payé 100 000\$ pour sa maison. A quel prix doit-il revendre cette maison s'il veut faire un profit de 10 000\$?
.....=.....

11. Un hélicoptère vole à 500 mètres d'altitude. Il communique avec un sous-marin, placé directement sous lui, qui navigue à une profondeur de - 1 000 mètres par rapport au niveau de la mer. A quelle distance sont-ils l'un de l'autre?
.....=.....
12. Pierrot a 5 amis. Il confectionne 30 biscuits qu'il veut leur distribuer en parts égales. Combien de biscuits donnera-t-il à chacun de ses amis?
.....=.....
13. En additionnant deux nombres, on obtient 0. Si l'un de ces nombres est 35, quel est l'autre nombre?
.....=.....
.....=.....
.....=.....
14. Christiane doit 15\$ à un ami. Elle reçoit 5\$ qu'elle s'empresse de remettre à cet ami pour rembourser une partie de sa dette. Quel est maintenant la situation financière de Christiane?
.....=.....
15. Un homme-grenouille nage à une profondeur de - 200 mètres par rapport au niveau de la mer. Un sous-marin, situé directement sous lui, navigue à une profondeur de - 800 mètres par rapport au niveau de la mer. Quelle est la distance entre l'homme-grenouille et le sous-marin?
.....=.....
16. En jouant un jeu, ton pion est rendu à la 30^{ème} case. Par la suite, tu dois effectuer 6 reculs de même valeur, ce qui te ramène complètement au début du jeu. Représente mathématiquement le trajet effectué par ton pion lors de chacun de ces mouvements, par rapport à son point de départ.
.....=.....
17. Si on multiplie deux nombres, on obtient 0. Si l'un de ces nombres est -42, quel est l'autre nombre?
.....=.....
.....=.....
.....=.....
18. Dans une classe, il y a 10 filles et 20 garçons. Combien y a-t-il d'élèves en tout dans cette classe?
.....=.....
19. Madame Pellerin a vendu 20 chandails avec un profit de 5\$ sur chaque chandail. Combien a-t-elle fait de profit en tout?
.....=.....

20. Pendant une période de 10 semaines, l'été dernier, le niveau d'une rivière a baissé de 20 centimètres. Par rapport à son point de départ, quel a été le changement moyen du niveau de cette rivière pour chaque semaine?
.....=.....
21. Pendant un jeu, ton pointage est de - 6. Tes amis te proposent d'annuler 3 fois ton pointage si tu gagnes le prochain tour. Représente mathématiquement ce que te proposent tes amis si tu gagnes ce tour.
.....=.....
22. A partir du haut d'un gratte-ciel, un ascenseur a effectué 4 descentes successives d'une valeur de 8 étages chacune. A quel étage se trouve-t-il maintenant par rapport à son point de départ?
.....=.....
23. En haut d'une pente de ski, la température est à -10°C . En bas de cette même pente de ski, la température est de 2°C . Quel est l'écart de température entre le haut et le bas de cette pente de ski?
.....=.....
24. Quand vient son tour de jouer au Monopoly, Martin doit d'abord reculer son pion de 9 cases, puis l'avancer ensuite de 3 cases. A quelle distance son pion se trouve-t-il alors par rapport à son point de départ au début de ce tour?
.....=.....
25. Pendant une période de 6 jours, le prix d'une action de la compagnie Fer Bossé a diminué de 2\$ à chaque jour. Représente mathématiquement le changement du prix d'une action pendant cette période?
.....=.....
26. Un ascenseur descend de 7 étages. Il redescend ensuite de 14 étages. A quel étage se trouve-t-il alors par rapport à son point de départ?
.....=.....
27. Quel est le poids de 4 caisses de liqueur douce, si chacune de ces caisses pèse 8 kilogrammes?
.....=.....
28. Un avion vole à 6 000 mètres d'altitude. Pour atterrir en douceur, il doit effectuer 3 descentes de même valeur. Représente mathématiquement le changement d'altitude effectué par l'avion, par rapport à son point de départ, lors de chacune de ces étapes.
.....=.....
29. Pendant une nuit d'hiver, la température a baissé jusqu'à -30°C . Pendant l'après-midi de cette même journée, la température a monté jusqu'à -15°C . Quel a été l'écart de température pendant cette journée d'hiver?
.....=.....

30. Si on additionne deux nombres, on obtient 0. Si l'un de ces nombres est - 36, quel est l'autre nombre?
.....=
.....=
.....=
31. Pendant le mois de février, une entreprise a réalisé une perte de 20 000\$. Cette entreprise appartient à parts égales aux 10 employés qui y travaillent. Quelle est la situation financière de chacun des employés pour le mois de février?
.....=
32. Dans une classe, il y a 4 rangées de pupitres. Dans chaque rangée, il y a 8 pupitres. Combien y a-t-il de pupitres en tout dans cette classe?
.....=
33. Sonia a acheté un cadeau de 20\$. S'il lui reste 5\$ après avoir fait cet achat, combien avait-elle d'argent au départ?
.....=
34. Pierre-Louis a effectué 5 retraits de son compte de banque, chacun ayant une valeur de 100\$. Si Pierre-Louis n'a pas rajouté d'argent dans son compte, à combien s'élève maintenant ce compte par rapport au montant de départ?
.....=
35. A partir de la surface de l'océan, un sous-marin est descendu à une profondeur de - 200 mètres. Combien de minutes lui a-t-il fallu pour atteindre cette profondeur, s'il descendait à raison de 20 mètres à chaque minute?
.....=
36. Le neveu de Napoléon Bonaparte est décédé en l'année 1800. Il était alors âgé de 18 ans. En quelle année est-il né?
.....=
37. Si on divise un nombre par - 46, on obtient 0. Quel est ce nombre?
.....=
.....=
.....=
38. Lors d'une expérience, la température d'une substance est à 60°C. Elle doit être amenée à 0°C en plusieurs étapes. Pour ce faire, on effectue 3 diminutions égales de température. Représente mathématiquement le changement de la température, par rapport à son point de départ, lors de chacune de ces étapes.
.....=

39. La population d'un village a diminué de 40 habitants l'an dernier et elle a diminué encore de 20 habitants cette année. Représente mathématiquement la variation totale de population de ce village.
.....=.....
40. Un thermomètre a enregistré 3 baisses successives de température d'une valeur de 6°C chacune. A quelle température se trouve-t-il maintenant par rapport à son point de départ?
.....=.....
41. Le neveu de Pythagore est né en l'an - 500 par rapport à notre ère. En l'an 2000, combien d'années se seront écoulées depuis sa naissance?
.....=.....
42. Pendant une période de refroidissement, la température est passée de 0°C à -20°C . Si la température a baissé régulièrement de 4°C à chaque heure, combien d'heures a duré cette période de refroidissement?
.....=.....
43. Si on additionne deux nombres, on obtient - 49. Si l'un de ces nombres est 0, quel est l'autre nombre?
.....=.....
.....=.....
.....=.....
44. Un producteur de sirop d'érable veut vider un baril contenant 160 litres de sirop dans des cruches contenant 4 litres chacune afin de les vendre au marché. Combien lui faut-il de cruches?
.....=.....
45. Dans un film western, un joueur de poker malchanceux doit 50\$ à chacun de ses partenaires de jeu. Billy the Kid entre soudainement, sort son revolver et tue 3 de ces partenaires. Représente mathématiquement l'effet de la mort de ces partenaires sur le résultat final de ce joueur de poker.
.....=.....
46. Pendant une période de 5 heures, la température est descendue de 15°C . Représente mathématiquement le changement moyen de température à chaque heure, par rapport à son point de départ.
.....=.....
47. Stéphanie s'est achetée une casquette. Elle a donné 20\$ au vendeur qui lui a remis 4\$ de monnaie. Combien coûtait la casquette?
.....=.....
48. A partir de la surface de l'océan, un sous-marin est descendu de 300 mètres par minute pendant 3 minutes. Quelle est alors sa position par rapport à la surface de l'océan?
.....=.....

Appendice B-3: Pré-test métaphorique

EXERCICE MÉTAPHORIQUE

(Modèle de compréhension des opérations sur les nombres entiers relatifs)

Nom:.....

LES NOMBRES ENTIERS RELATIFS, C'EST COMME:

1-.....

2- (si besoin).....

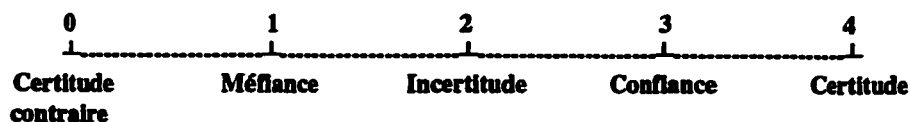
3- (si besoin).....

TÂCHES:

- Explique chacune des opérations suivantes selon le(s) modèle(s) que tu as choisi(s).
- Détermine ton degré de certitude pour chacune de tes explications, en encerclant le chiffre correspondant sur l'échelle prévue à cet effet.

Voici une description des degrés de certitude mentionnés sur cette échelle. Tu peux t'y référer au besoin.

- 0- **Certitude contraire:** Je suis certain(e) que mon explication est erronée.
- 1- **Méfiance** (doute sérieux): Je crois que mon explication est erronée.
- 2- **Incertitude:** Je suis incertain(e) que mon explication soit correcte.
- 3- **Confiance:** Je crois que mon explication est correcte.
- 4- **Certitude:** Je suis certain(e) que mon explication est correcte.



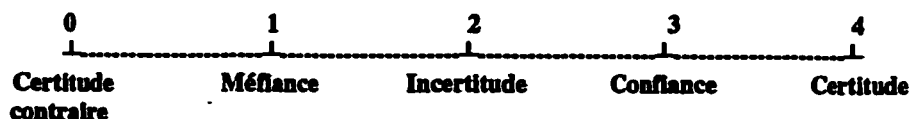
ADDITION:

- de deux nombres positifs (ex.: $3 + 6$):

.....

.....

.....



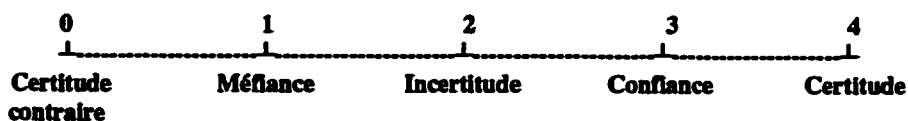
ADDITION (suite):

- d'un nombre négatif et d'un nombre positif (ex.: $-6 + 3$):

.....

.....

.....

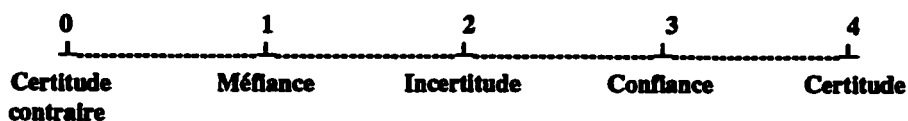
**SOUSTRACTION:**

- de deux nombres positifs (ex.: $6 - 3$):

.....

.....

.....

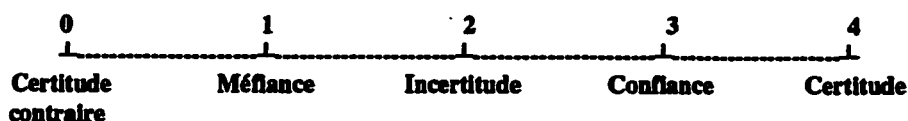


- d'un nombre positif et d'un nombre négatif [ex.: $3 - (-6)$]:

.....

.....

.....

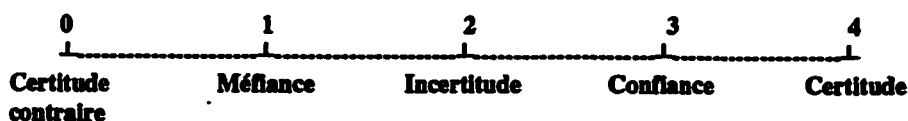


- d'un nombre négatif et d'un nombre positif (ex.: $-3 - 6$):

.....

.....

.....



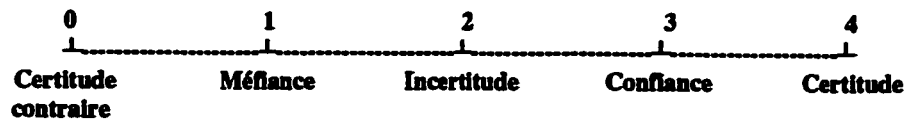
SOUSTRACTION (suite):

- de deux nombres négatifs [ex.: $-3 - (-6)$]:

.....

.....

.....

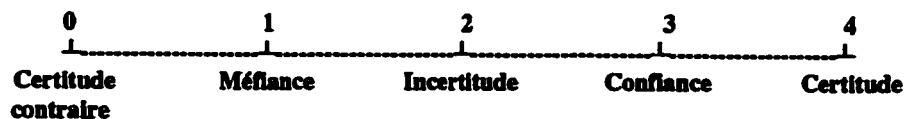
**MULTIPLICATION:**

- de deux nombres positifs (ex.: 3×6):

.....

.....

.....

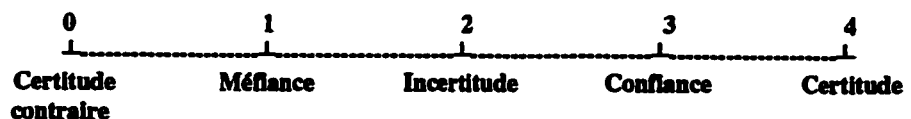


- d'un nombre positif et d'un nombre négatif [ex.: $3 \times (-6)$]:

.....

.....

.....

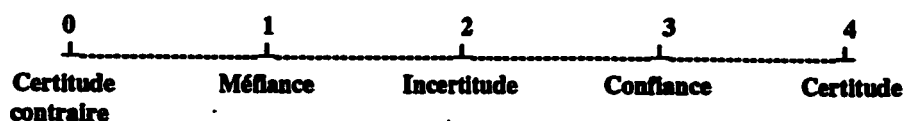


- d'un nombre négatif et d'un nombre positif [ex.: $(-3) \times 6$]:

.....

.....

.....



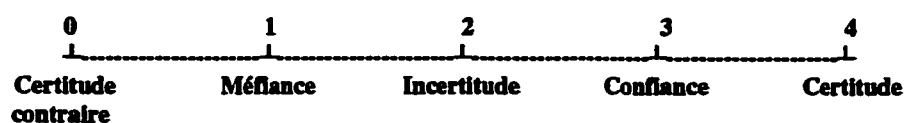
MULTIPLICATION (suite):

- de deux nombres négatifs [ex.: $(-3) \times (-6)$]:

.....

.....

.....



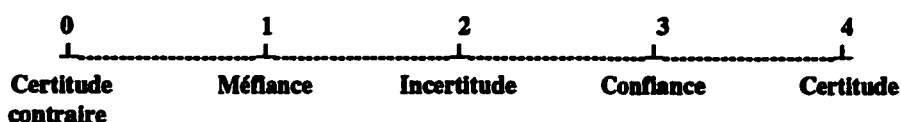
- du zéro et d'un nombre positif ou négatif

[Écris l'exemple que tu choisis:]

.....

.....

.....

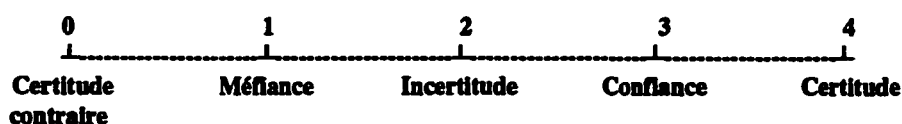
**DIVISION:**

- de deux nombres positifs (ex.: $6 \div 3$)

.....

.....

.....

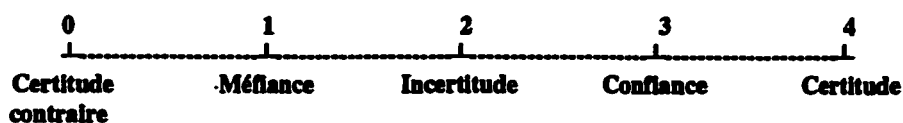


- d'un nombre négatif par un nombre positif [ex.: $(-6) \div 3$]

.....

.....

.....



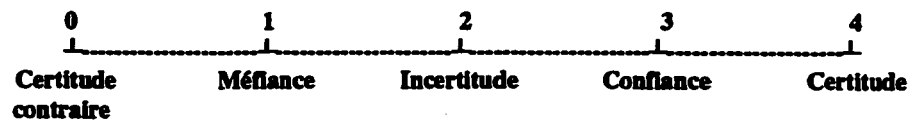
DIVISION (suite):

- d'un nombre positif par un nombre négatif [ex.: $6 \div (-3)$]

.....

.....

.....

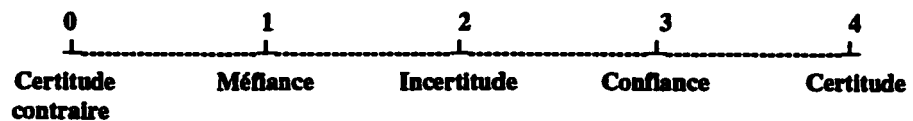


- de deux nombres négatifs [ex.: $(-6) \div (-3)$]

.....

.....

.....



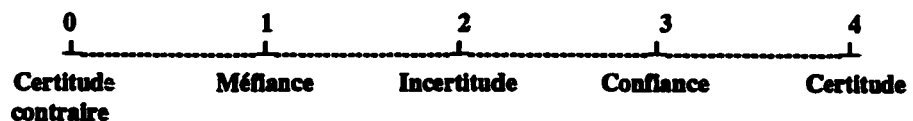
- d'un nombre positif ou négatif par zéro

[Encerle l'exemple que tu choisis: $3 \div 0$ ou $(-3) \div 0$]

.....

.....

.....



DIVISION (suite):

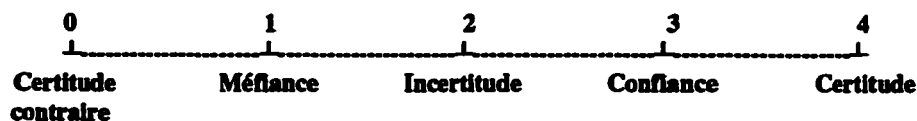
- du zéro par un nombre positif ou négatif

[Encerle l'exemple que tu choisis: $0 + 3$ ou $0 + (-3)$]

.....

.....

.....

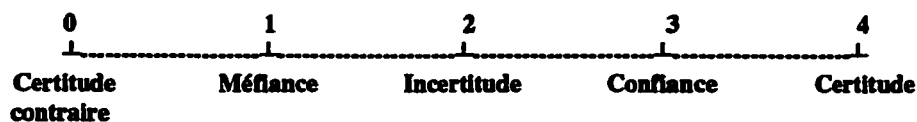


- de zéro par zéro (ex.: $0 + 0$)

.....

.....

.....



Appendice B-4: Liste d'items pour la construction des post-tests d'application (calcul)

ITEMS POUR LA CONSTRUCTION DE L'EXERCICE DE VÉRIFICATION (Calcul)
(Opérations sur les nombres entiers relatifs)

ADDITION			
Numéro	Type	Contrainte	Item
47, 66, 80	$x + y$	$x > 0$ $y > 0$	$10 + 8 =$ $1 + 5 =$ $6 + 2 =$
20, 41, 71	$-x + y$	$x > y$	$-6 + 3 =$ $-8 + 4 =$ $-11 + 5 =$
9, 12, 65	$-x + y$	$x < y$	$-2 + 3 =$ $-6 + 13 =$ $-1 + 18 =$

SOUSTRACTION			
Numéro	Type	Contrainte	Item
54, 76, 79	$x - y$	$x > y$	$16 - 3 =$ $14 - 5 =$ $9 - 7 =$
3, 59, 72	$x - y$	$x < y$	$2 - 8 =$ $1 - 9 =$ $8 - 11 =$
18	$x - y$	$x = 0$	$0 - 2 =$ $0 - 15 =$ $0 - 6 =$
6, 25, 46	$-x - y$	$x > y$	$-2 - 1 =$ $-16 - 3 =$ $-10 - 6 =$
16, 50, 74	$-x - y$	$x < y$	$-4 - 11 =$ $-3 - 5 =$ $-6 - 10 =$
30	$-x - y$	$x = 0$	$-1 - 0 =$ $-7 - 0 =$ $-18 - 0 =$
10, 34, 68	$x - (-y)$	$x > y$	$9 - (-5) =$ $12 - (-7) =$ $16 - (-2) =$
14, 42, 78	$x - (-y)$	$x < y$	$7 - (-10) =$ $5 - (-12) =$ $1 - (-3) =$
58	$x - (-y)$	$x = 0$	$0 - (-3) =$ $0 - (-2) =$ $0 - (-13) =$
37, 52, 62	$-x - (-y)$	$x > y$	$-8 - (-3) =$ $-14 - (-1) =$ $-7 - (-4) =$
21, 32, 46	$-x - (-y)$	$x < y$	$-3 - (-12) =$ $-8 - (-11) =$ $-5 - (-9) =$

MULTIPLICATION			
Numéro	Types	Contrainte	Item
27, 48, 55	$x \times y$	$x > 0$ $y > 0$	$6 \times 2 =$ $5 \times 9 =$ $4 \times 7 =$
43	$x \times y$	$x = 0$	$0 \times 1 =$ $0 \times 5 =$ $0 \times 13 =$
24	$x \times y$	$x = 0$ $y = 0$	$0 \times 0 =$
28, 67, 73	$x \times (-y)$	$x > y$	$8 \times (-6) =$ $9 \times (-3) =$ $7 \times (-2) =$
8, 36, 45	$x \times (-y)$	$x < y$	$3 \times (-6) =$ $5 \times (-7) =$ $2 \times (-9) =$
70	$x \times (-y)$	$x = 0$	$0 \times (-12) =$ $0 \times (-7) =$ $0 \times (-6) =$
19, 39, 53	$(-x) \times y$	$x > y$	$(-7) \times 6 =$ $(-5) \times 2 =$ $(-9) \times 4 =$
1, 4, 64	$(-x) \times y$	$x < y$	$(-1) \times 9 =$ $(-3) \times 7 =$ $(-4) \times 8 =$
13	$(-x) \times y$	$y = 0$	$(-15) \times 0 =$ $(-2) \times 0 =$ $(-4) \times 0 =$
15, 33, 60	$(-x) \times (-y)$	$x > y$	$(-4) \times (-3) =$ $(-8) \times (-1) =$ $(-6) \times (-5) =$
23, 51, 77	$(-x) \times (-y)$	$x < y$	$(-4) \times (-6) =$ $(-2) \times (-3) =$ $(-3) \times (-8) =$

DIVISION			
Numéro	Type	Contrainte	Item
11, 38, 63	$x + y$	$x > y$	$28 + 4 =$ $24 + 3 =$ $8 + 2 =$
7	$x + y$	$x = 0$	$0 + 1 =$ $0 + 8 =$ $0 + 10 =$
29	$x + y$	$y = 0$	$7 + 0 =$ $11 + 0 =$ $6 + 0 =$
49	$x + y$	$x = 0$ $y = 0$	$0 + 0 =$
17, 31, 57	$(-x) + y$	$x > y$	$(-18) + 3 =$ $(-2) + 1 =$ $(-16) + 4 =$
40, 44	$(-x) + y$	$x = 0$	$(-5) + 0 =$ $(-3) + 0 =$ $(-10) + 0 =$
5, 35, 69	$x + (-y)$	$x > y$	$45 + (-5) =$ $36 + (-9) =$ $20 + (-4) =$
26, 61	$x + (-y)$	$x = 0$	$0 + (-18) =$ $0 + (2) =$ $0 + (-9) =$
2, 22, 75	$(-x) + (-y)$	$x > y$	$(-14) + (-7) =$ $(-35) + (-5) =$ $(-12) + (-2) =$

Appendice B-5: Liste d'items pour la construction des post-tests d'application (problèmes)**ITEMS POUR LA CONSTRUCTION DE L'EXERCICE DE VÉRIFICATION
(Problèmes)**

N.B.: Les numéros devant chaque item correspondent aux numéros des items de l'exercice de résolution de problèmes.

ADDITION:**Items de type " $x + y$ "**

10. Un marchand paie 500\$ pour un téléviseur. A quel prix doit-il revendre ce téléviseur s'il veut faire un profit de 50\$?
18. Pour son anniversaire, Julien a reçu 20\$ de son oncle et 40\$ de sa tante. Combien d'argent a-t-il reçu en tout?
33. En jouant au blackjack, Ginette a perdu 50 jetons. S'il lui reste encore 25 jetons, combien en avait-elle au début du jeu?

Items de type " $-x + y$ ", où $x > y$

3. Le mois dernier, une compagnie a fait une perte de 20 000\$. Ce mois-ci, elle a fait un profit de 10 000\$. Quel est le résultat total de ces mois d'opération?
14. Gilles doit 2 000\$ à son père. Depuis qu'il travaille, il a gagné 500\$ qu'il s'est empressé de remettre à son père pour rembourser une partie de sa dette. Quel est maintenant la situation financière de Gilles?
24. Un ascenseur descend de 15 étages, pour remonter par la suite de 5 étages. A quelle hauteur se trouve-t-il alors par rapport à son point de départ?

SOUSTRACTION:**Items de type " $x - y$ ", où $x > y$**

1. Le conseil étudiant possédait 8 000\$. Après avoir déboursé 1 000\$ pour organiser une soirée, combien a-t-il d'argent?
36. Une cousine de la reine Victoria est décédée en l'année 1900. Elle était alors âgée de 19 ans. En quelle année est-elle née?
47. Nadia a ouvert un compte de banque en faisant un dépôt de 600\$. Après avoir fait un chèque pour payer son loyer, il reste 200\$ dans son compte. Combien lui coûte son loyer?

Items de type " -x - y "

8. Louise est à la diète. Le mois dernier, elle a perdu 4 kilogrammes. Ce mois-ci, elle a perdu 2 kilogrammes. Quel est le résultat total de la diète de Louise?
26. Un ballon dirigeable perd graduellement de l'altitude. Il descend d'abord de 200 mètres et il descend ensuite de 100 mètres. A quelle altitude se trouve-t-il alors par rapport à son point de départ?
39. La valeur d'une auto a diminué de 3 000\$ lors de l'année de son achat. Elle a ensuite diminué de 1 000\$ lors de l'année suivante. Représente mathématiquement la variation totale de la valeur de cette auto.

Items de type " x - (- y) "

11. Une montagne s'élève à 4 000 mètres au-dessus du niveau de la mer et une vallée se trouve à - 50 mètres par rapport au niveau de la mer. Quel est l'écart d'altitude entre les deux?
23. A Terre-Neuve, la température la plus basse a atteint - 50°C et la température la plus haute a été de 40°C . Quel est l'écart entre ces deux températures?
41. Jules César est né en l'an - 100 par rapport à notre ère. En l'an 2000, combien d'années se seront écoulées depuis sa naissance?

Items de type " - x - (- y) "

5. Le cousin de l'empereur Marc Antoine est décédé en l'année - 10 par rapport à notre ère. Il est né en l'année - 40. A quel âge est-il décédé?
15. Un mineur travaille à une profondeur de - 300 mètres par rapport à la surface. Un autre mineur, situé directement sous lui, travaille à une profondeur de - 900 mètres par rapport à la surface. Quelle est la distance entre les deux mineurs?
29. Un gaz devient liquide à une température de - 180°C . Si on continue de le refroidir, il devient alors solide à - 220°C . Quel est l'écart de température entre la liquéfaction et la solidification de ce gaz?

MULTIPLICATION:**Items de type " x X y "**

19. Le conseil étudiant a vendu 400 caisses de chocolat avec un profit de 10\$ la caisse. Combien a-t-il fait de profit lors de cette vente?
27. Quel est le poids de 5 caisses de tomates, si chacune de ces caisses pèse 10 kilogrammes?
32. Dans un verger, il y a 10 rangées de pommiers; chaque rangée contient 20 pommiers. Combien y a-t-il de pommiers en tout dans ce verger?

Items de type " $x \times (-y)$ "

4. Afin de se débarrasser de sa vieille marchandise, le gérant d'un magasin a vendu 20 tourne-disques en faisant une perte de 80\$ sur chacun de ces tourne-disques. Quel est le résultat financier de cette vente?
25. Rita Élégance, la dessinatrice de haute couture, a diminué la longueur des jupes de 2 centimètres à chaque année pendant 4 ans. Représente mathématiquement le changement de longueur des jupes pendant cette période.
48. Un hélicoptère perd 30 mètres d'altitude à chaque minute pendant 3 minutes. Où se situe-t-il par rapport à sa position de départ?

Items de type " $(-x) \times y$ ", qui serait l'inverse de " $x + (-y)$ "

22. A partir de la surface de l'océan, un plongeur a effectué 4 descentes successives de 20 mètres chacune. A quelle hauteur se trouve-t-il maintenant par rapport à son point de départ?
34. Afin de payer ses études, Martine a fait 4 emprunts, chacun ayant une valeur de 1 000\$. Si Martine n'a pas pu trouver de travail afin de rembourser ces emprunts, quelle est maintenant sa situation financière?
40. Pendant l'été, une rivière a enregistré 3 baisses de niveau d'une valeur de 6 centimètres chacune. A quel niveau se trouve-t-elle maintenant par rapport à son point de départ?

Items de type " $(-x) \times (-y)$ "

9. Tu dois 6\$ à ton père. Celui-ci, qui aime les devinettes, te dit: "Je vais t'enlever 3 fois le montant de ta dette, si tu peux me dire ce que cela représente mathématiquement". Qu'est-ce que tu lui réponds?
21. En jouant à un jeu, tu es dans une situation où ton pointage est - 9. Tu piges une carte qui te dit: " Si votre pointage est négatif, cette carte vous permet d'annuler 3 fois le montant de ce pointage." Représente mathématiquement ce que cette carte te propose.
45. Lors d'une partie de poker à la cafétéria, tu as emprunté 4 jetons à chacun de tes partenaires. 2 de ces partenaires laissent la partie pour aller en classe, en oubliant de te réclamer les jetons que tu leur dois. Représente mathématiquement l'effet du départ (et de l'oubli) de ces partenaires sur le nombre de jetons que tu auras à la fin du jeu.

DIVISION:**Items de type " $x + y$ "**

2. Une cycliste veut parcourir la distance de 120 kilomètres en 4 heures. Pour ce faire, combien de kilomètres devrait-elle parcourir en moyenne à chaque heure?
12. Un père a 5 enfants. Il veut leur laisser sa fortune s'élevant à 100 000\$ en héritage. Si chaque enfant reçoit le même montant, quel est ce montant?

44. Un marchand "en vrac" veut vider une poche contenant 40 kilogrammes de farine dans des sacs contenant 5 kilogrammes chacun afin de les vendre au détail. Combien lui faut-il de sacs?

Items de type " $(-x) + y$ "

20. Pendant une diète de 4 semaines, un homme a perdu 8 kilogrammes. Par rapport à son point de départ, quel a été le changement moyen de son poids pour chaque semaine?
31. Une entreprise perd 20 000\$ pendant sa première année d'opération. Si 4 personnes sont associées à parts égales dans cette entreprise, quelle est la situation financière de chacune de ces personnes à la suite de cette année d'opération?
46. Un homme-grenouille doit atteindre une profondeur de 120 mètres en-dessous de la surface de l'océan. Afin d'éviter une compression trop rapide, il doit effectuer cette plongée en 4 étapes de même distance. Représente mathématiquement le trajet parcouru lors de chacune de ces étapes, par rapport à la surface de l'océan.

Items de type " $x + (-y)$ "

16. Une personne possède 500\$ dans son compte de banque. Elle fait 10 retraits de même valeur, ce qui l'amène à vider complètement son compte de banque. Représente mathématiquement l'effet de chacune de ces transactions sur son compte de banque, par rapport à son point de départ.
28. Un ballon dirigeable est à 900 mètres d'altitude. Pour atterrir en douceur, il doit effectuer 3 descentes de même valeur. Représente mathématiquement le changement d'altitude effectué par ce ballon par rapport à son point de départ, lors de chacune de ces étapes.
38. Nathalie est au 90^{ème} étage d'un gratte-ciel. Pour atteindre le niveau de la rue, elle doit faire 3 descentes de valeur égale, en changeant à chaque fois d'ascenseur. Représente mathématiquement le trajet parcouru par un de ces ascenseurs, par rapport à son point de départ.

Items de type " $(-x) + (-y)$ "

7. A partir de la surface, un ascenseur descend dans une mine de charbon à raison de 100 mètres à chaque minute. Combien de minutes mettra-t-il pour atteindre une profondeur de - 700 mètres par rapport à la surface?
35. Un scaphandrier a plongé à une profondeur de - 100 mètres par rapport à la surface de l'océan. Combien de minutes lui a-t-il fallu pour atteindre cette profondeur, s'il descendait à raison de 10 mètres à chaque minute?
42. Pour les besoins d'une expérience, la température d'une substance, qui est actuellement à 0°C, doit atteindre - 150°C. Si un instrument refroidit cette substance au rythme de 10°C par minute, en combien de minutes la substance atteindra-t-elle la température voulue?

Items utilisant le zéro (addition / soustraction)

- 13. La somme de deux nombres est 0. Si l'un de ces nombres est 15. Quel est l'autre nombre?
- 30. Si on ajoute un certain nombre à - 27, on obtient 0. Quel est ce nombre?
- 43. La somme de deux nombres est - 42. Si l'un de ces nombres est 0, quel est l'autre?

Items utilisant le zéro (multiplication / division)

- 6. Tu obtiens une fraction en réponse à une équation. Si le numérateur est 35 et que le dénominateur est 0, quelle est la réponse finale?
- 17. Le produit de deux nombres est 0. Si l'un des nombres est - 60, quel est l'autre nombre?
- 37. La réponse d'une division est 0. Si le diviseur est - 37, quel nombre a été divisé?

ITEMS SUPPLÉMENTAIRES**Items de type " $x - y$ ", où $x > y$**

- 50. Pendant le mois de janvier, une compagnie a fait un profit de 20 000\$. Pendant le mois de février, elle a enregistré une perte de 60 000\$. Quel est le résultat de ses deux mois d'opération?
- 51. Un homme possède 500\$. Les réparations de son auto s'élèvent à 2 000\$. Quel est maintenant l'état financier de cet homme?

Items de type " $-x + y$ ", où $x < y$

- 52. Hier, Rémi a joué aux courses. Lors de la première course, il a perdu 10\$. Lors de la deuxième course, il a gagné 30\$. Quel est le résultat total de Rémi aux courses?
- 53. Lors d'un tour de Monopoly, Pierre-Paul doit d'abord reculer son pion de 4 cases pour ensuite l'avancer de 12 cases. A quelle distance son pion se trouve-t-il alors par rapport à son point de départ au début de ce tour?

Items de type " $-x - y$ ", où $x < y$

- 54. Jeanne doit 10\$ à son père. Elle doit aussi 20\$ à sa mère. Quelle est la situation financière de Jeanne?
- 55. Au mois de juillet, le niveau d'une rivière a baissé de 2 centimètres. Au mois d'août, il a baissé de 6 autres centimètres. Représente mathématiquement le changement total du niveau de cette rivière pendant ces deux mois.

Appendice C-1: Fiche de renseignements personnels**FICHE DE RENSEIGNEMENTS PERSONNELS**

Nom:

Sexe:

Age:

Origine ethnique:

Lieu de naissance:

Langue parlée à la maison:

Matière préférée:

Matière la mieux réussie:

Matière la moins aimée:

Matière la moins réussie:

Résultats précédents (maths):

Orientation future:

Occupation des parents:

Horaire	Sujet	Enseignant	Local
Période 1:			
Période 2:			
Période 3:			
Période 4:			

Appendice C-2: Fiche d'observations "au vol"**Fiche d'observations "au vol"****Événement:** _____**Niveau:** _____**Date:** _____**ÉLABORATION OU CLARIFICATION (des faits observés ou entendus):****CORRESPONDANCES (entre éléments des données):****HYPOTHÈSES / INTUITIONS (explications à donner aux événements):****IMPRESSIONS (atmosphère, doutes / satisfactions, etc.):****QUESTIONS (à creuser avant la prochaine cueillette de données):**

Appendice C-3: Fiche-synthèse d'événement

Fiche-synthèse d'événement

Événement: _____

Niveau: _____

Date: _____

POINTS SAILLANTS (thèmes / questions importantes):

RÉSUMÉ (résultats aux questions et interventions):

Mots-clefs:

Informations:

AUTRES DÉTAILS (frappants, intéressants, révélateurs):

RÉFLEXIONS (questions, inquiétudes, hypothèses):

PLANIFICATION (reciblage, nouvelles questions / interventions):

Appendice D-1: Grille de codage des critères d'évaluation des productions métaphoriques

Code	Description
1[MP:x+y] 2[MB:-X+y] 4[MA:-x-Y] 5[ME:x-(-Y)] 7[MCP:xxY]	1, 2, 4, 5, 7: numéro de l'item <u>Identification de l'item</u> x: 1er terme y: 2e terme Minuscule: le plus petit terme Majuscule: le plus grand terme <u>Évaluation de la métaphore</u> MP : métaphore parfaite (aucune violation) MB : bonne métaphore (une ou plusieurs violations mineures) MA : métaphore approximative (une violation majeure) ME : métaphore erronée (plus d'une violation majeure) MCP: la lettre C a été intercalée pour indiquer une métaphore corrigée par l'élève.
5{V a/imp} 8{Cl/pré}	Violation majeure: déficience qui infirme la validité explicative d'une métaphore pour représenter un concept
7{Cl/pré} 7{Cl/suf}	Violation mineure: déficience qui indique certaines limites au niveau de l'utilisation d'une métaphore pour représenter un concept, limites qui à elles seules ne pourraient invalider l'explication

CLARTÉ / PRÉCISION DES CORRESPONDANCES

Précision avec laquelle les éléments de l'importation sont définis dans l'énoncé pour correspondre à chacun des éléments de la situation représentée. Ce critère tient également compte de la séquence des éléments quand elle est significative (addition, soustraction, multiplication avec un négatif).

N.B.: Ce critère s'adresse strictement à la description des éléments, sans jugement sur la validité de la description. Ainsi, l'énoncé suivant ne viole pas le critère de précision puisque chaque élément est bien défini. Le problème en est un d'importation:
- 3 - 6: "Geneviève avait une dette de 3\$. Puis un jour, elle se promenait dans le parc et elle a trouvé 6\$. Maintenant, elle a un profit de 3\$. Sa dette est éliminée. (...) = -9." (16A/2)

Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Absence d'un ou plusieurs éléments de l'énoncé mathématique Code: {CI/pré}	- terme: (-3) X 6 = (-?) X 6 - signe opératoire: 3 X (-6) = 3 - 6 [V:-(=)] - signe prédicatif: -3 - (-6) = - 3 - 6 [V:-(=+)] - réduction d'un énoncé selon la loi qui le régit: -3 - (-6) = - 3 + 6 (-3) X (-6) = 3 X 6	"...j'ai perdu... les montres de 6 de mes amies.... eh... m'avaient données pour les tenir pendant leur cours de danse. = 18." (7A/M2) "Durant un jour, 3 chiens sont nés. Mais, le prochain jour, -6 chiens se sont fait frapper par une auto... en voulant dire -6 chiens sont morts. Ok, donc, -18 chiens sont dans cette ville." (6G/M1) "Jacques a déjà perdu 3 joutes de charade contre Marie. Dans la prochaine heure, il perd un autre 6 joutes. Ce n'est pas une bonne journée pour Jacques; il a perdu 9 joutes. (...) = 3." (18A/AS4) "Les mineurs descendent 3 planchers sous la terre dans un élévateur, et ensuite remonte de 6. (= 3)" (2G/AS3) "Dans un village de 3 personnes, il y a 6 fois plus de personnes qu'au début. = 18." (17G/M4)

Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Attribution erronée d'un signe opératoire ou prédicatif Code: {Cl/pré}	- signe prédicatif: $3 - (-6) = -3 - 6$ [V: Ass] - associativité: $(-3) \times 6 = -(3 \times 6)$ - commutativité des signes: $3 \times (-6) = (-3) \times 6$ $6 + (-3) = (-6) + 3$	"...je devais (...) 3 cigarettes... puis j'en emprunte 6." (4G/AS10) "...j'ai emprunté de 3 personnes, 6\$." (13G/M2) "J'ai perdu 3 jetons à chaque des 6 matchs. D'abord, j'ai perdu 18 jetons." (3G/M1) "Je dois 6\$ à 3 personnes. Combien d'argent est-ce que je dois à chaque personne? Je dois -2\$." (5A/D2).
Changement des termes qui empêche de vérifier la maîtrise d'une notion. Code:{Cl/pré}	- ajout: $-3 - 6 = 9 - 3 - 6$ - réutilisation: $-3 - (-6) = -3 - 6 - (-6)$ $(-3) \times 6 = -3 - 6 \times 3$ - substitution: $0 \times 3 = 0 \times 0$ $3 \times (-6) = 3 - 21$	"Hem... j'ai été au magasin avec 9\$ dans mes poches et j'ai acheté deux barres de chocolat pour 3\$ et quatre paquets de gomme pour 6\$. Alors, il... il n'avait plus d'argent. (7A/AS5) "Martine doit 3\$ à sa mère. (...) Et elle doit 6 à son père et je lui dois 6. Elle doit 9\$ en tout." (8G/AS7) "Dans une ville, - 3 rues ont été détruites. 6 autres ont été détruits durant 3 jours. Ok. Donc cette ville reste avec -18 rues." (6G/M2) "Lyne a 0 pomme... Oui. Personne lui en donne, alors elle a encore 0 pomme." (17A/M5) "...j'avais 3\$ et j'ai perdu 21? = -18." (18G/M1)

Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Représentation qu'il est impossible de réduire sous la forme définitive d'un énoncé mathématique. Code: {CI/pré}	[V:-Molt] - ambigüe: $0 + 3 = 0 + 3$ ou 0×3 $3 + 0 = 3 + 0$ ou 3×0 - approximative: $6 + 3$: $6 + (-3)$: - incomplète: $3 \times (-6) = 3 - 6 \times ?$ $-3 - (-6) = -3 - 6 - ?$ - irréductible: $(-6) + 3$: $0 + 0$: - du genre "T'sé veux dire": $(-6) + 3$: $6 + (-3)$:	"...j'ai pas d'argent et que faut que je donne à 3 personnes... En total, les personnes ont rien." (1A/D6) "Je dois 3\$ à personne. Alors, je dois pas d'argent." (2A/D12) "J'ai gagné 6\$ à un jeu et je l'ai divisé à 3 pour donner à mon partenaire. = 2. (21G/D1) "Julie a 6\$. Elle les parie aux courses. Elle perd 3 courses sur 3. Quelle est la perte qu'elle fait pour chaque course? (...) Eh... -2." (6A/D2) "Une journée ensoleillée en hiver peut avoir 3°C et peut baisser très rapidement jusqu'à 6 fois. Alors la température, la température est rendu à -18°C." (4A/M2) "J'ai une dette de 3\$ et j'ai accumulé une autre dette de 6\$, moins l'autre dette que j'avais. Alors maintenant, j'ai 3\$." (20A/AS1) "J'ai perdu 6 poker et j'ai réussi le troisième tour. Il me revient 2 poker. = -2. (12A/D1) "...Paul n'a plus d'argent. Et Kim, non plus. Y a plus d'argent, alors comment peuvent-ils se partager une poutine quand ils n'ont plus d'argent? (15A/D6) "Il n'y a plus de pommes au marché. Burton a besoin de 6 pommes pour les donner à 3 de ses amis. Comme cela (...), chaque ami aura 2 pommes. Mais le marché manque -18 pommes. (...) = -2. (17A/D1) "6 pupitres de reste dans la classe. - 3 ont été donnés à 3 élèves... 2 fois. Ils auraient pu être vendus, mais non. = -2." (6G/D2)

Violation mineure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Ajout d'un élément qui n'altère pas le résultat. Code: {CI/pré}	Exemples: $6 - 3 = 0 + 6 - 3$ $-6 + 3 = 0 - 6 + 3$	"C'est comme si... tu parlais de 0, t'avances de 6, puis tu recules de 3. T'es rendu à la case 3 maintenant." (13A/AS2) "Ok, ben j'commence avec 0, je perds 6\$ et ensuite j'en gagne 3. Je finis avec - 3." (3A/AS2)
Répétition sous-entendue d'un élément. Code: {CI/pré}	Exemples: $3 \times 6 = 3 + 6 \times 3$ $3 \times (-6) = 3 - (6 \times 3)$	"Marc a 3\$ dans ses poches. Sa mère lui donne 6 fois le montant qu'il avait au début. Marc a maintenant 18\$ dans ses poches." (9A/M1) "...jusqu'à date, dans une partie de poker, tu as gagné 3\$. Ensuite, tu as perdu 6 fois le montant que tu as gagné. = -18." (5G/M2)
Décomposition d'un terme. Code: {CI/pré}	[V:Dist] - distributivité: $3 + 6 = 3 + 5 + 1$ $3 \times 6: 6 + 6 \times 2$	"Il y a 3 personnes dans une taverne. Dirty Harry entre avec 5 de ses amis. Il y a combien de personne dans la taverne? Il y a 9 personnes dans la taverne." (5A/AS1) "Marie partit pour une marche. Elle trouva 6\$. Durant sa marche, elle trouva 6\$, 2 autres fois. (...) Elle trouva 18\$ pendant sa marche." (18A/M1).
Identification déficiente d'un élément. Code: {CI/pré}	[V:ident] - terme: $(-3) \times (-6):$ $6 - 3:$ [V:+(x et y)] - d'un signe opératoire: $3 + 6 = +(3 \text{ et } 6)$ $-3 - 6 = -(3 \text{ et } 6)$	"Il fait moins 3 fois moins 6. = -9. =18." (13G/M3) "Un ascenseur a monté de 6 et a descendu de 3, qui fait 3." (20G/AS2) "Puis... l'ascenseur a monté de 3, et après de 6. Alors, elle a monté de 9." (20G/AS1) "Tu dois 3 billes à ton ami et 6 à ta sœur. Tu dois 9 billes en tout." (8A/AS3)

Violation mineure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Absence d'un élément de clarification qui rend l'énoncé ambigu quant à l'opération ou à son résultat (sauf pour la division par 0). Code: {Cl/pré}	[V:chaque] - "chacun" pour la multiplication: $(-3) \times 6 = (-3) \times 6$ ou $(-3) + 6$ $3 \times 6 = 3 \times 6$ ou $6 + 3$ [V:parts égales] - "parts égales" ou "moyenne" pour la division "Valeur d'une part": $6 + 3 = 2$ ou $1, 2$ et 3, etc. $(-6) + 3$; -2 ou -4, -1 et -1, etc.	"Marc doit 3\$ à 6 de ses amis. Marc doit rembourser 18\$ en tout." (9A/M2) "3 personnes me donnent 6 bonbons. = 18." (4G/M1) "J'ai 6 livres que j'ai déjà lus. Je veux les donner à mes 3 amies. Elles en auront chacune, 2." (14A/D1) "Tu as perdu 6 billes en 3 joutes. Combien de billes as-tu perdu par joute? (...)-2." (10A/2)
Séquence inversée d'une opération. Code: {Cl/pré}	[V:Inv] - inversion: $-3 - 6 = -6 - 3$ [V:Comm] - commutativité: $3 \times (-6) = (-6) \times 3$	"J'ai 6 jetons de perdus. Mais j'ai encore perdu 3. J'ai une perte de -9 jetons." (3G/D2) "Je dois 6 caisses de 3 pommes, donc je dois 18 pommes?" (11A/M2)

CLARTÉ / SUFFISANCE DE L'IMPORTATION		
Suffisance de l'importation à représenter la totalité de la situation de base sans recours à des éléments de celle-ci.		
Violation mineure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Déficiência de la description analogique au niveau des signes. Code: {CI/suf}	- signe opératoire: -3 - (-6): 3 X 6: - signe prédicatif: -6 + 3: (-6) + 3:	"Jean a une dette de 3\$ moins une autre dette de 6\$ et il me reste 3\$." (1A/AS3) "...ta mère te donne 3\$ (...) 6 fois, alors tu as 18\$. (7G/M1) "Je suis à -6 étages. Ok. Je décide de monter de 3 étages. Ensuite, je vais être à -3 étages." (16G/AS1) Si tu as -6 pommes et que tu les partages entre 3 personnes égal, cela donne combien de pommes par personne? -2." (12GD1)

CLARTÉ / UNIVOCITÉ DES CORRESPONDANCES

Constance de la correspondance établie entre une importation et l'élément qu'il représente à l'intérieur d'un même énoncé ou d'un énoncé à l'autre.		
Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Utilisation d'une expression qui laisse sous-entendre une opération ou un résultat différent. Code: {CI/uni}	- "il reste": -6 + 3: - "fois": -3 - 6: - "fois": -3 - 6:	"Ok, j'ai perdu 6 billes, mais mon p'tit frère en a trouvé 3. Alors, il m'en reste 3 billes à trouver." (7A/AS2) "Je dois 3 jetons, j'en perds 6. Combien m'en reste-t-il? -9. (3 raturé)" (17G/AS6) "Michel avait déjà perdu 3 joutes de monopoly. Les gars voulaient encore jouer. Deux heures plus tard, Michel avait perdu encore 6 fois. Son total de pertes était 9 fois." (14G/AS8)
Violation mineure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Changement de perspective entre l'énoncé et le résultat. Code: {CI/uni}	- "devoir et avoir": 3 X 6: - "avoir et dépenser": (-6) + 3:	"Nous sommes 3, et nous devons tous 6\$ à Michel. Michel a maintenant 18\$." (8G/M1) "Tu veux payer pour tes amis. Tu as 6\$ et vous êtes 3. Combien peux-tu dépenser? 2\$." (7G/D1)
Ambiguïté d'un élément de l'importation. Code: {CI/uni}	- "vendre": 3 X 6: - "paiements": (-6) + (-3):	"Durant 3 semaines, la ville a vendu des livres. Au cours de une semaine, ils en ont vendu 6. En tout, ils en ont vendu 18." (6G/M1) "Je dois 6\$ et je fais des paiements de 3\$. Combien de paiements dois-je faire? 2 paiements?" (5A/D3)

VALIDITÉ DE L'IMPORTATION		
Vraisemblance de l'importation comme descripteur de la situation de base.		
Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Inefficacité de la conception utilisée pour expliquer l'opération. Code: {Va/Imp}	ADDITION - SOUSTRACTION: 3 + 6: conception mixte (abscisse + transformation) -3 - 6: abscisse -3 - 6: comparaison -3 - (-6): transformation -3 - (-6): relation MULTIPLICATION: 3 X (-6): transformation linéaire 3 X (-6): transformation + abscisse (-3) X (-6): comparaison	"...l'ascenseur part du 3e étage et se rend au 6e. Alors, cela veut dire que l'ascenseur monte de 3 étages.= 9." (9G/AS1) "Ce matin, il faisait -3°C. Et l'après-midi, il fait 6°C. La différence est de 3°C." (19G/AS3). "Sur la gauche d'une rue, y a -3 d'autos... ok, que sur le côté droit, -6. En tout il a 9 autos." (6G/AS5) "Tu dois 3 billes (...). Et tu n'en gagnes 6. Tu as maintenant 3 billes." (8A/AS5) "Georges doit 3 autos à Joe, mais Georges lui en doit pas 6. Georges se trouve avec 3 autos." (4A/AS4) "Martin était à la 3e case du jeu de monopoly. C'était encore son tour, il avance de 6 et sur la 6e case, on lui dit de piger une carte. La carte disait: recule de 6." (14G/M1) "Un thermomètre est à 3° ... eh, pendant la journée, elle descend à 6°. = -18." (15G/M2) "La roue gauche d'une auto fait -3 fois moins de tours que la roue droite, qui en fait moins... eh, 6 moins. Donc 18 tours sont faits en tout." (6G/M3)

Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Inefficacité de la conception utilisée pour expliquer l'opération (suite). Code: {Va/imp}	DIVISION: 6 + 3: opération inverse (-6) + 3: nombre de parts 6 + (-3): soustractions répétées (-6) + (-3): valeur d'une part (-6) + (-3): transformation linéaire 0 + 3: soustractions répétées 3 + 0: valeur d'une part 0 + 0: valeur d'une part	"Je suis au 6e étage, je décide de descendre 3 fois ce nombre. Ensuite, je vais être au 2e étage." (16G/D1) "...tu as 6... thermomètres à -6° et tu les mets en groupes de 3." (13G/D1). "On veut installer 2 ascenseurs dans un édifice de 6 étages, mais un des ascenseurs ne monte qu'au 3e étage. Il manque 3 étages pour qu'il se rende au 6. = -2" (15G/D1) "Les 3 amis de Billy refusent (...) de payer la dette de 6\$ de Billy. Donc, il est dans le trouble. = 2" (1G/D2) "Il me manque 6 pommes et j'en mange 3. Donc ça fait 2." (11A/D5) "Il y a personne dans l'ascenseur (...). Elle monte jusqu'au 4e étage et ramasse 1 personne à chaque étage. Rentré au 4e, tout le monde déhurque. Il ne reste plus personne du tout dans l'ascenseur." (15G/D6) "Marc a 3\$ dans ses poches et décide de ne pas le partager. Marc a encore 3\$." (9A/D7) "Si t'aurais 0 pomme et tu voulais les partager entre 0 personne également. = 0." (12G/D5)

Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Incapacité de l'importation à expliquer le concept. Code: {Va/imp}	Exemples: -6 + 3: -3 - 6: 0 + 0:	"Il manquait 6 personnes au début du party et 3 personnes ont parti. Combien qui reste? = -9." (17G/AS3) "Geneviève avait une dette de 3\$. Puis un jour, elle se promenait dans le parc et elle a trouvé 6\$. Maintenant, elle a un profit de 3\$. Sa dette est éliminée. (...) = -9." (16A/AS2) "J'aimerais mettre mes pommes dans des sacs, mais il ne me reste plus de pommes et je n'ai pas de sac. (...) Alors j'ai 0 pomme dans 0 sac." (14A/D9)
Invraisemblance d'une importation qui imite une conception appropriée. Code: {Va/imp}	Exemples: (-3) X 6: (-6) + 3: 6 + (-3): (-6) + (-3):	"Si tu as - 3 personnes et tu leur donnes 6 pommes chacune, Combien de pommes cela fait? -18." (12G/D2) "-6 cochons ont été séparés dans 3 groupes. Donc, -2 troupes de cochons qui va rester à la fin." (6G/D1) "...tu as 6 pommes et 3 de mangées, comme t'en as déjà mangé 3... Tu veux savoir combien de 3 pommes mangées il y a dans 6...() pommes. (= -2)." (2G/D2). "...le sous-sol de Jean lui manque... lui manque 6 dimensions. 3 jours plus tard, il s'est aperçu qu'il lui manquait 3 choses dans chaque dimension. = 2." (22G/D3)
Violation mineure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Invraisemblance d'un élément de l'importation Code: {Va/imp}	Exemples: 6 + 3: 0 + 3:	"Tu vas au magasin et tu vois quelque chose que tu aimes pour 6\$. Tu as seulement des billets de 3\$ (...) Combien de billets de 3\$ dois-tu utiliser?" (2G/D1) "...t'as 0 life savers et... Tu fais 3 groupes. = 0." (13G/D5)

VALIDITÉ CONCEPTUELLE DE L'ÉNONCÉ		
Justesse conceptuelle de l'énoncé.		
Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Le résultat mathématique ne découle pas de l'énoncé. Code: {Va/con}	Exemples: $-6 + 3 = -9$ $3 - (-6) = 3 - 6 + 6 = 9$ $(-6) + 3 = 6 + 3 = -2$	"J'avais perdu -6\$ et j'ai regagné 3. = -9." (18G/AS2) "Ce matin, il fait 3°C. La météo dit qu'elle... qu'elle est supposée de baisser et de remonter de 6°C (...). Ce qui devrait donner 9°C pour l'après-midi." (17A/AS3) "...j'ai -6\$ à la banque. Il dit qu'ils vont prendre combien de 3 en 6. Et j'ai -2\$ de reste." (10G/D1)
Le résultat ne découle pas de l'énoncé potentiellement correct. Code: {Va/con}	Exemples: 0 X 3: $(-6) + (-3):$	"Lise devait faire un calcul mathématique, 3 fois. Mais, elle ne l'a pas fait. Donc, sa réponse était 0". (18A/M3) "-6 maisons sont fait voler dans un an. (...) ...durant la prochaine année, -3 maisons ont été volées. 2 voleurs ont fait tous ces dommages." (6G/D3)
L'énoncé, tel que formulé, produit un résultat différent de celui qui est attendu. (Obstacle: 0 absolu) Code: {Va/con}	Exemples: 3 X 6 3 X (-6):	"Ok, j'ai 3\$ dans la banque. J'ai mis 6 fois plus de l'argent dans la banque. J'ai maintenant 18\$." (10G/M1) "Un thermomètre indique qu'il fait 3° durant la soirée. La température baisse 6 fois cette température. Quelle température fait-il? Il fait -18?" (5A/M1)

Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Incongruence logique à l'intérieur de l'énoncé. Code: {Va/con}	Exemples: 3 - (-6): 3 - (-6):	"...tu avais 3 billes, puis tu en as perdues 6. Combien de billes as-tu perdu en tout? (...) Eh... moins... eh... - 3? = 9." (10A/AS4) "Il restait 3 vieilles maisons dans un village. -6 de ces maisons ont brûlé. Donc il en reste plus de nouvelles et ce village a -3 maisons. (-9, +3 et -3 raturés.)" (6G/AS7)
Deux (2) conceptions appropriées pour expliquer le concept entre en conflit pour produire le résultat. Code: {Va/con}	Exemples: 6 - 3: 3 - (-6): 0 + 3:	"Si l'ascenseur est au 6e étage et elle descend... (...) au 3e étage, elle a descendu... (...) de 3 étages. = 3." (9G/AS6) "Hier, il faisait 3°C. Aujourd'hui, il fait -6°C. La température a baissé de 9°C. Moins... ouais. = -9°C." (19G/AS6) "Tu n'as pas de billes et tu les sépares en 3 groupes. Combien de groupes de billes as-tu? = 0." (10A/D9)
L'énoncé viole un principe mathématique. Code: {Va/con}	- addition d'éléments différents: -3 - (-6): - multiplication d'éléments semblables: 0 X 3: 3 X (-6): - inversion des unités dans la division: 0 + 300: 6 + (-3):	"Eric manque son tour 3 fois. Mais, rendu à son quatrième tour, il a eu de la chance et avance de plus six, qui lui donne trois cases de plus que ses amis." (14G/AS11) "0 bonbon fois 3 bonbons, fait 0 bonbon." (15A/M6) "Je veux balancer mon gageure parce que je dois 3\$ fois 6\$ que j'ai pas. = -18." (-3 raturé) (11G/M1) "Monsieur Leblanc n'a pas d'employé. Alors, il ne doit pas diviser son profit de 300\$... (...) = 300." (19A/D8) "Je dois 3 cigarettes à 6 personnes. = -2." (4G/D2)

Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Présence d'un obstacle conceptuel concernant le sens d'une opération. Code: {Va/con}	- la multiplication augmente: 3 X (-6): (-3) X 6: - la division diminue: 6 + 3: (-6) + 3: 0 + 3:	"Hier, il faisait 3°C. Aujourd'hui, il fait (...)... moins 6 fois de plus qu'hier. Il fait -18." (19GM2) "Le matin, il faisait -3°C; et pendant la journée, le soleil a augmenté la température de 6 fois du même degré qu'il faisait ce matin. Alors pour cette journée, nous avons une température de -18°C." (20AM1) "Pierre avait 6\$. Puis, Marianne lui a volé 3 fois cette valeur. Il ne lui reste que 2\$... à Pierre." (16A/D1) "Jean-Michel était dans l'ascenseur qui est brisé. Il a été au 6e étage à plusieurs reprises et ensuite est descendu 3 fois." (14G/D1) "J'ai 0 pomme et j'en donne 3. (...) Ok, ça me donne 0." (11A/D13)
Violation mineure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Une réponse absolue suit un énoncé relatif. (Obstacle: 0 absolu) Code: {Va/con}	Exemples: 3 + 6: 3 X 6: 0 X 3: 6 + 3: 0 + 3:	"Gilles a gagné 3\$. Ok, première main... et 6\$, la deuxième main. Il a maintenant 9\$." (1G/AS1) "Un ascenseur a monté 3 fois 6 étages. Alors, l'ascenseur se trouve à la 18e étage." (21A/M1) "Je ne dois pas d'argent à 3 de mes amis (...). Alors, je dois 0\$." (2A/M5) "Il fait 6°C. Pendant 3 heures, la température augmentait de 2°C chaque heure. (19G/D) "Marc a aucune pomme dans son sac de dîner et désire la séparer en 3. Marc demeure encore avec aucune pomme." (9A/D10)

VALIDITÉ MATHÉMATIQUE		
Justesse du calcul.		
Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Le résultat de l'opération représentée est erroné. Code: {Va/mat}	Exemples: $-3 - 6 = 3$ $(-3) \times 6 = 18$	"Je suis au 6e étage. Je décide de descendre 3 étages. Maintenant, je suis au 3e étage." (16G/AS4) "J'ai emprunté 3\$ et j'ai gagné 6 fois le nombre que j'avais emprunté. = 18." (21G/M2)
Le résultat de l'énoncé et celui du calcul ne coïncident pas. Code: ({Va/mat})	Exemples: $3 - (-6):$ $-3 - (-6):$	"Julie a 3\$, mais elle en doit 6 à Sébastien. Évalue sa situation financière. -3\$. = 9." (6A/AS4) "Elle dit que t'as perdu 3 billes, puis t'en as perdu 6. Combien de billes as-tu perdues? Ben là, ça fait -9. = 3." (10A/AS4)
Violation mineure	Cas spécifiques	Exemples-prototypes
Le résultat erroné a été changé pour le résultat juste à la suite de la rédaction de l'énoncé. Code: ({Va/mat})	Exemples: $-3 - 6:$ $-3 - (-6):$	"...je dois à la banque 3\$, puis 6\$.... donc, en tout, je dois 9\$. = -9 (-3 raturé)." (11G/AS6) "...l'ascenseur a descendu de - 3 et a remonté de 6, qui fait 3. (-3 raturé)" (20G/AS7)

RICHESSSE / DENSITÉ DES IMPORTATIONS		
Quantité d'importations provenant d'un même modèle.		
Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Changement de modèles à l'intérieur d'une même catégorie d'opérations. Code: {Ri/den}	- à l'intérieur de l'addition-soustraction: e.g., entre $-3 - 6$ et $-3 - (-6)$ - à l'intérieur de la multiplication: e.g., entre $(-3) \times 6$ et $(-3) \times (-6)$ - à l'intérieur de la division: e.g., entre $(-6) \div 3$ et $(-6) \div (-3)$	"Pendant une partie de poker, tu as perdu 3\$ et ensuite 6\$. Puis là, égale -9." (5G/AS5) "Dans une population, y a eu 3 décès. Et ensuite, moins moins 6 décès. Ben ça, ça... Egale 3." (5G/AS6) "Joey avait une dette de 3\$. Puis maintenant, il doit un autre 6 fois le montant de sa dette qui est de 18\$." (16A/M3) "La température est de -3°. Ce soir, la température va baisser de -6 fois ce montant. Il sera 18°." (16A/M4) "Je dois un total de 6\$ à 3 amis. Alors, je dois 2\$ à chacun de mes amis. (2A/D1) "La température descend de 6°, dans l'espace de 3 heures. Alors, il y a... il a descendu de 2° à chaque heure. (Rz = 2)" (2A/D3)
Violation mineure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Changement de modèles d'une catégorie d'opérations à un autre. Code: {Ri/den}	- de l'addition-soustraction: e.g., $3 + 6$ à la multiplication: e.g., 3×6 - de la multiplication: e.g., 3×6 à la division: e.g., $6 \div 3$	"En se levant, Pierre regarde le thermomètre. Il indique qu'il fait 3°C. Au courant de la journée, il monte de 6°C. Alors, il fait 9°C." (17A/AS1) "Jacques a 3 pommes. Ses amis lui en donnent 6 fois plus, ce qui lui donne 18 pommes." (17A/M1) "Si l'ascenseur est au 3e étage et elle monte 6 fois plus haut, elle va être au 18e étage." (9G/M1) "Si j'ai 6 billes et on... et on est 3 personnes, on va avoir 2 billes chaque." (9G/D1)

RICHESSSE DU DÉTAIL		
Présence de détails qui ne recèlent aucune valeur de vérité nécessaire à l'importation, mais qui ajoutent à sa plausibilité.		
Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Omission de détails qui empêche de vérifier l'utilité d'une conception correcte. Code: {Ri/dét}	Exemples: 0 + 3: (-6) + (-3):	"Je n'ai pas de l'argent, mais combien de 3 est-ce qu'il y a en 0? Y en a pas." (10G/D5) "Combien de -3 est-ce qu'il y a en -6?" (11G/D2)
Violation mineure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Omission d'un détail pertinent à la résolution de la situation. Code: {Ri/dét}	- remise de l'argent gagné: -6 + 3; - dépense totale du montant: 6 + 3;	"Je devais... (...) 6\$, puis j'en ai gagné 3. (...) Ça fait que je dois juste 3\$." (4G/AS2) "Marc a 6\$. Puis, il y a 3 objets qu'il veut acheter de le même montant d'argent. Chacun des objets va être 2\$." (9A/D1)

SYSTÉMATICITÉ

Un "mapping" est systématique quand n'importe quelle correspondance peut être dérivée ou au moins partiellement contrainte par les autres. (trad. de Gentner, 1982, pp. 114-115).

Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Représentation de la soustraction d'un négatif en terme d'addition. Code: {Sy}	Exemples: $3 - (-6) = 3 + 6$ $-3 - (-6) = -3 + 6$	"Kevin était déjà en train de gagner le monopoly, il était à la 3e case,... (et ses amis étaient en prison. C'était son tour, il brasse les dés. Ils montraient qu'il devait avancer de 6 cases. Alors, il était maintenant rendu à la 9e case. Kevin gagnait vraiment contre ses amis)". (14G/AS11) "Je commence la joute avec une dette de 3\$. La prochaine main me donne une fortune lorsque je gagne 6\$. Je paie ma dette de 3\$ et je finis avec 3\$. (3A/AS3)
Représentation de la division en terme d'extension de la multiplication. Code: {Sy}	Exemples: $6 + 3 = 3 \text{ fois moins que } 6$ $(-6) + 3 = -6 - (3 \times 6)$ $6 + (-3) = -3 \text{ fois moins que } 6$ $(-6) + (-3) \rightarrow -3x = -6 \rightarrow x = 2$ $0 + 3 = 3 \times 0$	"Il y a 6 familles dans une maison. Il y a 3 fois moins... de de familles? = 2." (17G/D1) "Ok, pendant une partie de poker, tu as perdu 6\$. Ok, -6. Et ensuite, tu perds (...) 3 fois le montant que t'as perdu. = -2." (5G/D2) "La température, hier, était de 6°. Aujourd'hui, la température est -3 fois sa valeur... que celle de hier. La température est de -2°C. (16A/D3) "J'ai commencé avec 0\$ et j'ai perdu 3\$ 'x' fois pour faire un total de -6\$. Je m'aperçois que j'ai joué 2 joutes." (3A/D2) "Un homme veut jouer au poker avec 3\$, mais personne veut jouer avec lui (...). Donc il ne gagne rien." (1G/D6)

SYSTÉMATIcITÉ-ABSTRACTION

Un "mapping" est systématique quand n'importe quelle correspondance peut être dérivée ou au moins partiellement contrainte par les autres. Ces contraintes entre correspondances du premier degré peuvent être explicitement représentées comme des relations du second degré, ce qui engendre une hiérarchie de niveaux qui définit l'abstraction du "mapping". (trad. de Gentner, 1982, pp. 114-115).

Violation majeure	Cas spécifique	Exemple-prototype
Représentation de la multiplication et de la division en termes d'additions ou de soustractions répétées. Code: {Sy-Ab}	- multiplication: additions répétées $3 \times (-6) = -(6 + 6 + 6)$ -division: soustractions répétées $6 + 3 = 6 - 3 - 3$ -division: additions répétées $(-6) + 3 = -6 + 3 + 3$	"Tu dois 6 billes à ton frère, 6 à ta soeur et 6 à ton voisin.(...) -18." (8A/M3) "Un ascenseur contient 6 personnes. A chaque étage, 3 personnes débarquent de l'ascenseur. Elle a dû prendre 2 étages jusqu'à ce que l'ascenseur se vide." (15G/D1) "Tu dois 6 billes à tes amis. Tu ne veux pas faire de la chicane (rire). Alors, tu en donnes 3 à un ami et 3 à l'autre. Tu sé pares les billes en 2. (Rz = -2)" (8A/D1)
Représentation de la multiplication et de la division en termes d'additions ou de soustractions simples. Code: {Sy-Ab}	Exemples: $3 \times (-6) = 3 - 6$ $0 \times 3 = 0 + 3$ $(-6) + 3 = -6 - 3$ $0 + 3 = 0 + 3 - 3$ $3 + 0 = 3 - 3$	"Y avait 3 avions à l'aéroport. Et on ajoute -6 avions. Le produit est -18." (12A/M2) "Si l'ascenseur est au lobby, en autres mois: étage 0. Elle monte de 3. = 0." (9G/M6) "J'ai dépensé 6\$ et j'ai un rabais de 3\$. = -2." (21G/D1) "Jean, y a rien. (...) Y a rien... et quelqu'un lui offre... (...) 3 choses, mais (...) y a pas voulu. = 0." (22G/D6) "Les 3... les 3 personnes, dans l'ascenseur, débarquent toutes à la cave. Il ne reste personne dans l'ascenseur." (15G/D8)

Appendice D-2: Grille de codage des conceptions identifiées dans les analogies

Addition / Soustraction	
Définition et Code	Exemple-prototype
Transformation Modification linéaire d'une mesure ou d'une quantité d'éléments similaires par un événement subséquent, e.g. augmentation, diminution. Code: [Trans]	3 + 6: "...j'ai 3\$ dans la bank et mon ami m'a fait un check pour 6\$. J'ai maintenant 9\$." (10G/AS1) -6 + 3: "Il manque 6 personnes à un party. 3 personnes arrivent en autobus. Combien manque-t-il de personnes au party? Il manque 3 personnes." (5A/AS1). 6 - 3: "Si tu as 6\$ et tu en fais voler 3, tu as 3\$ de reste." (2G/AS2) -3 - 6: "Ce soir-là, il faisait -3°C avec un vent qui baissait la température de 6°C. Alors, avec le facteur du vent, il faisait -9°C." (4A/AS2)
Relation Rapport linéaire de quantités d'éléments similaires, e.g. bilan, comparaison. Code: [Rel]	3 + 6: "3 pommes plus 6 pommes me donnent 9 pommes." (11G/AS1) -6 + 3: "Dans une ville, -6 sont décédés... mais 3 bébés sont nés. = -3." (6G/AS2) 6 - 3: "Ben, moi j'ai dit: ça égale à 3... parce que 6 pommes moins 3 pommes égale 3 pommes." (11G/AS4) -3 - 6: "Dominique a une dette de 3\$ et une autre dette de 6\$. Maintenant sa dette au total est de 9\$." (1A/AS3)
Abscisse Détermination de l'écart entre deux coordonnées de l'abscisse ou de l'ordonnée, e.g. différence. Code: [Abs]	6 - 3: "Un ballon coûte 6\$. Il est en vente à 3\$, aujourd'hui. (...) 3." (19A/AS4) 3 - (-6): "Jean a une allocation de 3\$. Il demande à son père pour 6\$ d'avance. Il est en dette de 6\$, mais il a maintenant 9\$." (19A/AS5) -3 - (-6): "Hier, il faisait -3°C. Aujourd'hui, il fait -6°C. La différence est de -9°C." (19G/AS10)
Mixte Interaction de deux conceptions au niveau de la représentation d'une même opération. Codes: [Trans+Abs]	6 - 3: "Si l'ascenseur est au 6e étage et elle descend de... au 3e étage, elle a descendu (...) de 3 étages." (9G/AS6) 3 - (-6): "Hier, il faisait 3°C. Aujourd'hui, il fait -6°C. La température a baissé de 9°C. = -9°C." (19G/AS6)

Multiplication	
Définition et Code	Exemple-prototype
Combinaison Rassemblement de quantités égales d'éléments similaires dont l'avènement est répétitif ou simultané. Code: [Combin]	3 X 6: "...le professeur de Luc (...) lui a donné 3 numéros à faire (...). De chaque numéro, y a 6 questions. Je pense que Luc, y a 18 questions." (22G/M1) 3 X (-6): "Je joue encore 3 mains consécutives, mais cette fois, je perds 6\$ chaque fois. Et si j'ai commencé avec 0, j'ai maintenant une dette de 18\$." (3A/M1) (-3) X 6: "Je dois 3 caisses de 6 pommes. Donc, je dois 18 pommes." (11A/M2) (-3) X (-6): "3 de mes amis me doit de l'argent, 6\$... mais, me l'ont... me l'ont pas donné. Rz = 18." (7A/M3) 0 X 2: "Sébastien n'a pas travaillé pendant 2 jours. Quel est le gain financier qu'il a fait pendant ces 2 jours?" (6A/M4). 3 X 0: "Un bâton de baseball se fait swigner 3... eh, 3 fois, mais la balle ne le frappe pas. Donc, le bâton a été frappé 0." (6G/M4)
Comparaison Rassemblement de quantités égales d'éléments similaires qui se répètent ou sont réunis simultanément en comparaison avec un événement antérieur. Code: [Compar]	3 X 6: "...dans une journée, mon amie Justine a gagné 3 joutes de billes. Et moi, j'en ai gagné 6 fois plus qu'elle. Combien de joutes ai-je gagnées? (...) 18." (10A/M1) 3 X (-6): "C'est comme si un joueur commence de 0, avance de 3 et qu'on lui dit de reculer 6 fois sa case. Il est à la case -18." (13A/M2) (-3) X 6: "Hier, il faisait -3°C. Aujourd'hui, il faisait 6 fois plus que hier. Il fait -18°C." (19G/M2) 0 X 3: "Il y a 0 de personne. (...) Il y a 3 fois plus qu'avant. = 0." (17G/M5)
Soustractions répétées Rassemblement linéaire d'une série de quantités égales d'éléments similaires dont l'avènement est répétitif et/ou simultané. Code: [SoustRép]	3 X (-6): "La mère à Julien a acheté un sac de pommes. Julien mange 6 pommes la première journée. Ensuite, il mange 6 pommes la seconde... et 6 pommes, la troisième. Julien doit remettre 18 pommes avant que sa mère le sache." (15A/M1) (-3) X 6: "Tu as perdu 3 billes, n'en dois 3 à ton frère, 3 à ta soeur, 3 à ton voisin, 3 à ton ami... (...) Et tu t'en es fait voler 3. Il te manque 18 billes." (8A/M4)

Division	
Définition et Code	Exemple-prototype
Valeur d'une part Partage d'une quantité d'éléments similaires qui détermine la valeur de parts égales dont le nombre est défini. Code: [Vpart]	6 + 3: "J'ai 6\$ pour repayer en partie... mes 3 amis, pour qu'ils aient chacun un montant d'argent égal. Je leur donne 2\$ chaque." (2A/D1) (-600) + 3: "Lors d'un party, 3 filles ont cassé la télévision de 600\$. (...) Ils doivent tout payer pour la télévision, et payer le montant égal de 200\$ chaque." (19A/D2) 6 + (-3): "Julie a 6\$. Elle les parie aux courses. Elle perd 3 courses sur 3. Quelle est la perte qu'elle fait pour chaque course? (...) Eh... -2." (6A/D2) 0 + 3: "Eh... nous n'avons pas d'argent, nous sommes 3. Alors, chacun de nous n'avons pas un sou." (8G/D6)
Nombre de parts Partage d'une quantité d'éléments similaires qui détermine le nombre de parts égales dont la valeur est définie. Code: [Nparts]	6 + 3: "S'il y a 6 life savers et tu les mets en groupes de 3. (...) Combien que t'as de groupes? Ben, ça fait 2." (13G/D1) (-6) + (-3): "J'ai perdu 6\$. Là, j'ai perdu 3\$. Pour faire un total de - 6\$, je veux savoir combien de fois que j'ai perdu 3\$." (3A/D2) 0 + 3: "Combien de 3\$ vont dans 0? 0." (2G/D5)
Soustractions répétées Partage d'une quantité d'éléments similaires qui détermine le nombre de parts sous forme d'une série de soustractions de parts égales. Code: [Soustrép]	6 + 3: "Un ascenseur contient 6 personnes. A chaque étage, 3 personnes débarquent de l'ascenseur. Elle a dû prendre 2 étages jusqu'à ce que l'ascenseur se vide." (15G/D1) 6 + 3: "Ben, tu pars de 6\$, puis tu dois 3\$ à chaque ami." (16A/D2)
Opération Inverse Division conçue comme une extension de la multiplication. Code: [OpInv]	6 + 3: "Il y a 6 familles dans une maison. Il y a 3 fois moins... de, de familles? = 2." (17G/D1)

Définition et Code	Exemple-prototype
Mixte Interaction de deux ou trois conceptions au niveau de la représentation d'une même opération. Codes: [Vpart+OpInv] [Vpart+Soustrép+Npart] [Nparts+OpInv]	6 + 3: "Il fait 6°C. Pendant 3 heures, la température augmentait de 2°C chaque heure." (19G/D1) 6 + 3: "Tu as acheté 6 billes. Ta mère dit de les partager avec ta soeur en parts égales. Tu en as (...) 3. Elle en a 3. Tu as séparé le paquet de billes en 2." (8A/D1) (-6) + (-3): "J'ai commencé avec 0\$ et j'ai perdu 3\$ 'x' fois pour faire un total de -6\$. Je m'aperçois que j'ai joué 2 joutes." (3A/D2)
Indéterminée Conception dont il est impossible d'extraire une opération. Code: [Ind]	(-6) + 3: "La température de l'eau est de -6°C. Si on la fait chauffer pendant 3 minutes, la température montera à -2°C." (16A/D3) 6 + (-3): "Luc avait 6 boîtes de... de gommes. Et il a perdu 3 gommes. (= -2)" (22G/D3) (-6) + (-3): "Sébastien doit déjà 6\$. Il perd 3 autres paris." (6A/D3) 0 + 3: "Natalie a 0\$. Elle fait une histoire et dit qu'elle doit 3\$ à 2 de ses amis. Mais en réalité, elle a quand même 0\$." (17A/D7) 3 + 0: "Marie a fait jusqu'à date 3 tests en anglais... et a eu 0 sur les 3. Alors qu'elle lui donne 0 sur le pourcentage de ses tests." (14G/D7) 0 + 0: "L'ascenseur n'a pas été utilisé. = 0." (20G/D7)

Appendice D-3: Grille de codage: lois mathématiques et obstacles épistémologiques

LOI MATHÉMATIQUE (Eléments et Séquence)		
Procédure utilisée pour effectuer un calcul.		
Code	Description	Exemple
3b[L:x-Y=S-]	3b,5a,8,13: identification de l'item	$3 - 6 = -3$
3b[L:x-Y=I+]	x: 1er terme y: 2e terme	$3 - 6 = 6 - 3 = 3$
5a[L°:-x-Y=A-]	Rz: résultat isolé de l'opération	$3 - (-6) = -3 - 6 = -9$
5a[L:x-(-Y)=X+]	Majuscule: le plus grand terme Minuscule: le plus petit terme	$3 - (-6) = 18$
8[L:-xXY=+]		$(-3) \times 6 = 18$
8[L°:-xXY=S-]	=S-: soustraction / résultat négatif =I+: inversion / résultat positif =A-: addition / résultat négatif =X+: multiplication / résultat positif = + : résultat positif = - : résultat négatif	$(-3) \times 6 = 3$
13[L:-Y+x=-]		$(-6) + 3 = -2$
(Rz=...)		Réponse = -2
11b[L:Xx0=0] 16a[L:0+Y=ind] 16b[L:0+-Y=-Y] 17[L:X+0=imp] 18[L:0+0=1]	Le zéro et l'unité sont décrits tels quels Les réponses qui ne sont pas des nombres sont décrites de façon abrégée	$3 \times 0 = 0$ $0 + 3 = \text{indéfini}$ $0 + (-3) = -3$ $3 + 0 = \text{impossible}$ $0 + 0 = 1$
4b[L:-/X+y=A-] 5a[L:-/Y-x=S-]	Le signe de la réponse est déterminé par une loi avant que l'opération ne soit effectuée	$-6 - 3 = -/6 + 3 = -9$ $3 - (-6) = -/6 - 3 = -3$
5b[L:X-y/-=S-] 6b[L:X+y/-=A-]	L'opération est effectuée et le signe de la réponse est ensuite déterminé par une procédure	$6 - (-3) = 6 - 3/- = -3$ $-6 - (-3) = 6 + 3/- = -9$
2a[L:-(-x+Y)=A-] 4b[L:-(-X-y)=A-] 6a[L:-(-x+Y)=A-]	Le signe opérationnel entraîne une opération dans le système des nombres naturels	$6 + 3 = -(-6 + 3) = -9$ $-6 - 3 = -(-6 - 3) = -9$ $-3 - (-6) = -(3 + 6) = -9$
5/6[L:-(-=+)]	L'élève énonce une loi se rapportant à un genre d'item	$3 - (-6) = 3 + 6$ $-3 - (-6) = -3 + 6$
4[L:?]	L'élève ne sait pas comment résoudre un genre d'item	$-3 - 6 = ?$ $-6 - 3 = ?$

LOI CONFLICTUELLE		
Généralisation de lois où une vérité absolue est attribuée à des règles particulières.		
Code	Description	Exemple
[LC:-/+=+]	Deux (2) signes négatifs entraînent un résultat positif	$-3 - 6 = 9$ $-6 - 3 = 3$
[LC:-/+=-]	Un signe négatif et un signe positif entraînent un résultat négatif	$-3 + 6 = -9$
[LC:3=-]	Trois (3) signes négatifs entraînent un résultat négatif	$-3 - (-6) = -3$ ou -9
[LC:Ggs]	Le signe du résultat est déterminé par le signe du nombre supérieur	$(-3) \times 6 = 18$ $6 + (-3) = 2$
[LC:-X=-] [LC:--=-]	Deux (2) signes négatifs entraînent un résultat négatif	$(-3) \times (-6) = -18$ $(-6) + (-3) = -2$
[LC:-(-=+]	Deux (2) signes négatifs entraînent un résultat positif seulement quand ils se suivent	$(-3) \times (-6) = -18$
[LC:-Xpair=+]	La multiplication d'un nombre négatif avec un nombre pair positif entraîne un résultat positif	$(-3) \times 6 = 18$ $6 \times (-3) = 18$
[LC:par=X]	Une parenthèse entraîne nécessairement une multiplication	$3 - (-6) = 18$ $-3 - (-6) = -18$
[LC:par=OrdOp]	Une parenthèse entraîne nécessairement l'application de la loi de l'ordre des opérations	$3 - (-6) = -6 - 3$ $-3 - (-6) = 6 - 3$

OBSTACLE ÉPISTÉMOLOGIQUE D'ORDRE PERCEPTUEL

L'habitude de calculer dans un autre système de nombres entraîne des procédures erronées au niveau de la résolution des opérations sur les nombres entiers relatifs.

SYSTÈME DES NOMBRES NATURELS

Code	Description	Exemple
[OPC:-(X+y)] [OC:N(+)]	L'addition des nombres naturels entraîne une associativité erronée	$-6 + 3 = -(6 + 3)$ $-3 - (-6) = -(3 + 6)$
[OPC:-(X-y)] [OC:N(-)]	La soustraction des nombres naturels entraîne une associativité erronée	$-6 - 3 = -(6 - 3)$ $-3 - 6 = -(6 - 3)$

OBSTACLE ÉPISTÉMOLOGIQUE D'ORDRE CONCEPTUEL

Toute conception dérivée de l'expérience personnelle qui entre en conflit avec l'utilisation et la résolution efficaces des opérations sur les nombres entiers relatifs, selon la théorie mathématique établie.

SYSTÈME DES NOMBRES NATURELS

Code	Description	Exemple
[OC:N]	L'ajout d'un terme assure un raisonnement en nombres naturels	$-6 + 3 = 10 - 6 + 3$ $-3 - 6 = 9 - 3 - 6$
[OC:N(-)]	Le raisonnement en nombres naturels ne permet pas de soustraire un plus grand nombre d'un plus petit	$0 - 3 = ?$ $3 - 6 = \text{impossible}$
[OC:N(G-p)→Inv]	La soustraction en nombres naturels entraîne une inversion	$3 - 6 = 6 - 3 = 3$ $-3 - 6 = 6 - 3 = 3$
[OC:N(G-p)→CS]	La soustraction en nombres naturels entraîne la commutativité des signes	$-6 + 3 = 6 - 3$
[OC:X=aug]	La multiplication augmente	$3 \times (-6) = -6 \text{ fois plus que } 3$
[OC:+=dim]	La division diminue	$(-6) \div 3 = -6 - 3$

ZÉRO ET NOMBRES ABSOLUS		
Code	Description	Exemple
[OC:0 abs]	Le zéro (0) est absolu et ne permet pas de réponse qui lui soit inférieure	$0 - 3 = 0$
[OC:N]	L'ajout du zéro (0) assure un raisonnement en nombres absolus	$-3 - 6 = 0 - 3 - 6$
[OC:0 abs]	Une réponse en nombre absolu suit un énoncé en nombres relatifs	$+6 - 3 = 3$
[OC:Ptdép (0 abs)→AddMult (Comm)]	La stabilité du point de départ entraîne une addition où le zéro (0) est considéré comme point de départ absolu	$3 \times 6 = 3 + 6 \times 3 = 18$ $-3 \times 6 =$ $-3 + 6 \times (-3) = -18$
[OC:Stab0]	Stabilité du zéro (0)	$3 + 0 = 0$ $0 + 0 = 0$
[OC:StabEnt] ou [OC:StabEnt→Inv +0=1]	Stabilité de l'entier	$0 \times 3 = 3$ $0 + 3 = 3$
[OC:StabEntDéb]	Stabilité de l'entier initial	$3 \times 0 = 3$
[OC:StabEntNég]	Stabilité de l'entier négatif	$0 \times (-3) = -3$ $0 + (-3) = -3$
[OC:StabEntNég Déb]	Stabilité de l'entier négatif initial	$(-3) \times 0 = -3$ $(-3) + 0 = -3$

LOIS ET CONCEPTIONS PERTINENTES À D'AUTRES OPÉRATIONS		
Code	Description	Exemple
[OC:loiX+]	Application d'une loi de la multiplication-division à l'addition-soustraction	Voir lois conflictuelles
[OC:loi+-]	Application d'une loi de l'addition-soustraction à la multiplication division	Voir lois conflictuelles
[OC:CommSig]	Application de la loi de la commutativité aux signes prédicatifs	$3 \times (-6) = (-3) \times 6$ $6 + (-3) = (-6) + 3$
[OC:ChangUnit]	Addition d'unités différentes	$-6 + 3 = -6x + 3y$
[OC:MêmUnit]	Multiplication inappropriée de la même unité	$3 \times 6 = 3\$ \times 6\$$
[OC:InvUnit]	Application de la loi de la commutativité en division par inversion des unités	$6 + (-3) = (-3) + 6$ $6 + 3 = 6 \text{ hres} + 3\$$
[OC:Nég→Soust/Add]	La présence d'un signe négatif indique une soustraction-addition	$3 \times (-6) = 3 - 6$ $(-3) \times 6 = -3 + 6$
[OC:loiExp]	Application de la loi des exposants à la multiplication des nombres pairs	$(-3) \times 6 = 18$
[OC:Railin]	Application d'un raisonnement linéaire dans l'explication d'une multiplication ou d'une division	$3 \times (-6) = -6 - 6 - 6$ $6 + (-3) = 6 - 3$
[OC:Cconf]	Deux (2) conceptions justes entrent en conflit au niveau de l'explication d'une opération	$3 - 6 =$ de 3 à -6, on diminue de -9
[OC:OpInv] (ou autres)	La conception utilisée pour décrire une opération n'explique pas son résultat	$(-6) + 3 =$ $-6 - (3 \times 6) = -2$
[OC:Npart] [OC:Npart→ 0=1] (ou autres)	La conception utilisée pour effectuer une opération engendre un résultat erroné	$0 + 0 = 1$ $3 + 0 = 3$
[OCD:loi]	La conception utilisée pour expliquer une opération indique l'application d'une loi mathématique incomprise.	$3 - (-6) = 3 + 6 = 9$ $(-6) + (-3) =$ $(-6) + 3 = 2$

LOIS ET CONCEPTIONS ORIGINALES		
Code	Description	Exemple
[L:-/+ = +]	Un signe négatif et un signe positif entraînent un résultat positif	$-6 + 3 = 3$
[L:-/(- = +)]	Trois (3) signes négatifs entraînent un résultat positif	$-6 - (-3) = 3$ ou 9
[OC:NégDéb →X+]	Un nombre négatif initial entraîne une multiplication et un résultat positif	$-3 + 6 =$ $(-3) \times 6 = 18$
[OC:PetitDéb]	Un nombre inférieur positif initial entraîne un résultat positif	$3 \times (-6) = 18$
NOTATIONS		
[OC: - + -]	Non équivalence de deux expressions due à l'absence d'un signe d'addition	$-3 - 6$ et $-3 + -6$ $3 - 6$ et $3 + -6$
[OC: not/-Y → -x]	L'absence d'un signe d'addition entre les deux termes entraîne la fiction d'un nombre négatif initial	$3 - 6 = -3 - 6$
[OC:-(- = -)]	Deux (2) signes confondus en un seul	$3 - (-6) = 3 - 6$
[OC:-(- = +(-)]	Deux (2) négatifs séparés par une parenthèse indique l'addition d'un négatif	$3 - (-6) = 3 + -6$ $-3 - (-6) = -3 + -6$
[OC:-(- répartis)]	Deux (2) négatifs séparés par une parenthèse indique une répartition des signes entre les termes	$3 - (-6) = -3 - 6$
[OC:-(-/négpar →négrép]	Un nombre négatif entre parenthèses entraîne un résultat négatif	$3 - (-6) = -9$ ou -3 $-3 - (-6) = -3$ ou -9
[OC:-(- → posrép]	Deux (2) négatifs séparés par une parenthèse entraînent un résultat positif	$3 - (-6) = 3$ $-6 - (-3) = 3$ ou 9
[OC: notParX]	Les parenthèses entraînent une multiplication	$3 - (-6) = 18$ $-3 - (-6) = -18$
[OC: ParOrdOp]	Les parenthèses entraînent un calcul selon l'ordre des opérations	$3 - (-6) = -6 - 3$

AUTRES CONCEPTIONS, LOIS ET PROCÉDURES		
Code	Description	Exemple
[OC:Drunif]	L'élève effectue ses calculs exclusivement du côté négatif ou positif de la droite dirigée, indiquant que celle-ci n'est pas unifiée	$3 - (-6) = 3 + 6 - 6$ $-3 - (-6) = -3 - 6 + 6$
[L:Drdir]	L'élève dépend complètement sur la droite dirigée pour effectuer tous les calculs d'un genre d'items	"-17 + 2 (...) Ben d'habitude... (...) Oui, ma ligne... puis, je place mon 0. Là, je place... comme un certain nombre. Puis, la même chose de l'autre côté." (14G/AS2)
[L:CalUnit]	L'élève ne peut résoudre un item de l'addition-soustraction, où le nombre initial est négatif que par un calcul à l'unité	"Ben, -10 + 7, c'est eh... 8, 9, 10. 3...non, -3." (11G/AS2)
[OC:calculatrice]	L'élève déclare ne pas pouvoir résoudre un genre d'items sans un recours à la calculatrice	"-18 - 1 (...) Ah, ben, j'suis pas capable. J'ai besoin de ma calculatrice." (7G/AS3)
[OC:sig]	L'élève déclare ne pas savoir interpréter les signes négatifs d'un genre d'items	"C'est les signes. C'est parce qu'il y a un signe là... puis, y a un signe là... y a un signe là..." (14G/D1)
8/9[Iden] [OC:Comm]	L'élève déclare que les opérations $(-3) \times 6$ et $3 \times (-6)$ sont identiques et représentent une même réalité	"Mais c'est... le moins, quand c'est une multiplication, ça fait pas de différence c'est quel. Fallait juste trouver une nouvelle affaire." (1G/M2)
8/9[Diff]	L'élève déclare que les opérations $(-3) \times 6$ et $3 \times (-6)$ représentent des réalités différentes et spécifie la différence	"Ben oui. Ton négatif est au 6 là, puis ton négatif est au 3 là. (...) Eh... ça serait ben plus simple d'avoir un problème de même [$3 \times (-6)$], parce que t'as moins de personnes à aller courir après." (4G/M3)
[Ecal]	Erreur de calcul	$-9 + 2 = -6$

Appendice D-4: Grille de codage des degrés de certitude et des raisons qui les supportent

DEGRÉ DE CERTITUDE	
Jugement évaluatif que l'élève porte sur la justesse de tous les éléments inclus dans la métaphore qu'il a produit pour expliquer une opération.	
Code	Description
1(C4:I+) 2=(C3:M+) 4=(C2:U-) 5*(C1:C-) 6*♦(C0:P-) 7(C?)	1, 2, 3, etc.: numéros de l'item C4 : certitude C3 : confiance C2 : incertitude C1 : méfiance C0 : certitude contraire C? : absence de degré de certitude <u>Évaluation de la métaphore concernée:</u> = : bonne métaphore ≈ : métaphore approximative * : métaphore erronée au niveau de la conception ♦ : métaphore erronée au niveau de la réponse : une absence de symbole indique une métaphore parfaite <u>Raisons évoquées pour justifier le degré de certitude</u> P, C: la majuscule indique une référence à une violation majeure du critère évoqué i, p: la minuscule indique une référence à une violation mineure du critère évoqué M+ : le critère est évoqué pour supporter un aspect jugé correct de la métaphore U- : le critère est évoqué pour justifier un degré de certitude inférieur à 4 I? : la justesse de la métaphore est mise en doute selon le critère évoqué
12=(C3:p-) 4*(C3:I?)	

Changement des degrés de certitude		Exemple-prototype
Code	Description	
3(C2↑4:I+)	L'élève augmente ou diminue son degré de certitude quant à la justesse de sa métaphore, tout en indiquant le nouveau degré	"Ok, mais c'est certain, celui-là. (...) Parce que ça peut être 6, et puis... ah, non. Ben si, j'ai dépensé, parce que c'est moins là... Si j'ai dépensé, il me reste 3\$." (12A/AS2)
12=(C2↑4:I+)		"Ouais, ben là... là, je viens juste de penser. Ce serait 4. (...) Ok, t'es dans la 6e case, ok? (...) Ok, bon là... au prochain tour, il faut que tu recules... 3 fois de la 6e case. So... 1, 2... (...) Wo, attends minute. 1, 2, 3. Tu vas le faire dans 3. Ah, non. Ça, c'est ouais..." (5G/D1)
6*(C4↓2:I-)		C'est niaisieux, ça. (...) Mais, c'est un 2." (13A/AS4)
13=(C4↓3:p-)		"Ouais. Ben, je tomberais à 3, là. (...) C'est pas ben, ben certain. (...) Eh... (...) ...parce que je le dis pas encore qu'il faudrait que tu le sépares également." (4A/D1)
18*♦(C2↑:I+)	L'élève augmente ou diminue son degré de certitude quant à la justesse de sa métaphore, sans toutefois mentionner un nouveau degré	"Ouais, mais là je vois que ça avait du sens. (...) Que j'ai rien, puis que je suis pas obligé de le donner à personne, donc ça ne me donne rien." (1A/D6)
5*♦(C4↓:I-)		"Là, peut-être, je pensais que c'était bien, là... mais, je pense pus là. (...) Ben... comme, elle a descendu de -6... je comprends pas ça, moi non plus... eh, moi-même." (20G/AS6-7)
13*♦(C3↓:M-)		"Ben, ça se peut pas. La réponse est -2." (8A/D1)
2(C3↑:for-)	Le degré de certitude est augmenté quand l'élève déclare qu'un degré inférieur à 4 reflète une simple incertitude quant à la formulation d'un énoncé métaphorique	"Ben, j'sais pas si ça fait du sens. (...) Ben, si je t'expliquais ça, si tu comprendrais." (15A/AS2)
7=(C2↑:for-)		"Ben... parce que... je sais pas... mon raisonnement est pas mal... y est mal dit, j'cré ben." (15G/M1)
9=(C3↑:for-)		"Là, j'ai mis confiance parce que... moi, quand je relis mon problème, puis j'ai de la misère à me comprendre... c'est pas trop clair..." (14A/M2)
14*(C3↑:for-)		"Eh... y aurait peut-être ben un mot que j'aurais manqué ou quelque chose." (6G/D2)

CLARTÉ		
Code	Cas spécifique	Exemple-prototype
14*(C4:P+)	Précision - clarté de l'énoncé	"Il fait 6... (...) Ok, dans la soirée, la température descend à 3 fois ce nombre. (...) Eh... celle-là, y a l'air un petit peu plus clair que les autres." (16G/D2)
6*♦(C4↓:P-)	- absence d'un élément	"J'ai mon -3. (...) J'ai mon -6. Mais, y me manque mon moins, encore." (2A/AS3-4)
12=(C3↓1:P-)	- attribution erronée d'un signe opératif	"Il y a 3 fois moins de familles. (...) Non... ce serait 1. (...) C'est comme une division, ça, hein? Je veux dire une multiplication." (17G/D1)
9=(C3:P-)	ou d'un signe prédicatif	"Qu'il ait perdu 3 fois. (...) So... non. Ça devrait être -6... comme si tu te bases que le problème que j'ai écrit, ça devrait donner 3 X (-6)." (6A/M2)
12=(C4↓:p-)	- distributivité d'un terme	"Ouais, si elle sépare en 3 pour elle et ses 2 amis, ça a pas rapport... à cause qu'elle sépare en 3." (17A/D1)
13=(C4↓:p-)	- absence d'un élément de clarification: "parts égales"	"J pense que j'ai oublié une étape. Ok, Marc doit 6\$ à 3 de ses amis. (...) Eh... Il doit... 18. il doit partager son 6\$ comme également à ses 3 amis. Parce que là, ça a l'air pareil comme -6, comme il leur doit chacun 6\$." (9A/D1)
13(C3:p-)	"chaque"	"J'étais pas encore sûre comme du 6 billes en 3 joutes, je veux dire... comme... peut-être, j'aurais dû expliquer que... (...) comme à chaque joute, combien j'avais perdu." (10A/D2-3)
9=(C3:p-)	- répétition non intentionnelle d'éléments	"Eh... c'est trop d'écriture.... (...) Faudrait que je l'écrive plus petit..." (4A/M3)
12=(C4↓:s-)	Suffisance métaphorique	"...ouais, ben là, je dis divise, c'est pas bon, ça." (4A/D1)
8=(C4↓b:U-) (b: bon)	Univocité des termes	"Non, c'est que... c'est juste j'ai pas bien... j'aurais dû dire, au lieu... ça aurait plus clair si j'aurais dit: Eric a dépensé... ou a donné 18\$ en tout." (2A/I-2)

VALIDITÉ		
Code	Cas spécifique	Exemple-prototype
1=(C4:I+)	Validité de l'importation	"Je sais juste que ça fonctionne." (5A/AS1)
2(C4:I+)	Vraisemblance de l'importation pour représenter le sens de l'opération	"Moi, je dis comme... si j'ai -6... ok, dans la banque... puis, si je renets 3. Ça me donne -3 comme... en bas de 0 encore." (11G/AS2)
2(C4:I+)		"Eh... (...) ça fait du sens... ben, avec la... l'exemple, là.... ok, le -6 + 3." (5G/AS2)
5*(C1:I-)	Invraisemblance de l'importation pour représenter le sens de l'opération	"Eh... méfiance. (...) Oui... à cause que je savais pas comment expliquer les deux moins... comme comment qu'y pourraient devenir un plus." (2G/AS3)
5*♦(C0:I-)		"Ça, je comprends pas avec les parenthèses, pis toute. Je comprends rien là-dedans." (9G/AS9)
14*♦(C3:I-)		"Ça veut dire je comprends pas ce que j'ai écrit." (3A/D1)
14*(C1:I-)		"Ok, je pense que dans les multiplications, je faisais 3 fois plus... puis là, je faisais - 3 fois." (16A/D4)
15*♦(C0:I-)		"Parce que ça, ça marche pas... parce que... eh... c'est pas lui qui faut qui paie les 3 autres dettes, c'est la compagnie. Mais je savais pas comment écrire ça" (21A/D2-3)
15=(C2:I-)		"God, je faisais pas de sens." (8A/D4)
15*(C1:I-)		"Mais comme là, j'ai pas de division." (11A/D5)
15*(C2:I-)		"...si elle a pas d'argent, puis elle le sépare en 3 parties égales. Mais, elle a pas d'argent, alors elle peut pas le séparer en parties." (17A/D3)
12(C2:I?)	Incertitude à propos de la justesse de l'importation	"Ben, j'étais pas sûr si ma... mon chose était... mon explication était bon." (13G/D1)

Code	Cas spécifique	Exemple-prototype
5*(C0:C-)	Validité conceptuelle	"Mais, c'est pas ça. Tu vois, c'est... (...) Parce que... tu perds 3 billes et tu n'en devais 6. J'ai eu la bonne réponse, mais le problème... c'est pas la bonne réponse." (8A/AS4)
8*(C0:C-)	Le résultat n'a aucun rapport logique avec l'énoncé	"Ça me donne... ça me donnera pas -18, ça." (15G/M2)
12*(C0:C-)		"Non, non, parce que le 6 personnes doit 3\$... ça, ça serait eh... 12... 18." (4G/D1)
4(C4:M+)	Validité mathématique	"Parce que j'étais certain que c'était ça. (...) Parce que - 3 - 6, ça fait - 9." (3A/AS2)
5*♦(C4:M+) 14*(C4:M+)	Le résultat de l'opération est juste	"... 3 - (-6)... moi, je dirais que ça donne, que ça donne moins." (7G/AS6)
		"Ben, je suis certain que c'est -2." (1G/D2)
4=(C4:L:M-) 5*♦(C3:M-)	Le résultat de l'opération est erroné	"Eh, non, parce que c'est -9, la réponse." (7A/AS5)
		"D'habitude, je fais... ben ici, j'ai fait 3 - 6. Ça fait 3. Ben, j'ai mis -3. Je le sais pas pourquoi." (10G/AS6)
4(C3:M?)	Incertitude à propos du résultat de l'opération	"Ok, ben... ici, j'sais pas... je suis pas trop sûr à cause y a deux moins." (18G/AS5)
4(C3:M?)		"Je le sais pas parce que... je m'avais mélangé dans mes règles, puis j'étais pus sûr ce qu'un négatif et un positif, ça donnait. Un négatif... ou si ça donnait un positif... je m'avais mélangé." (15G/AS7)
6(C0:M?)		"Ben, c'est ça... c'est ma loi des signes, là. (...) Je le sais pas pantoute." (12G/AS7)

AUTRES			
Code	Cas spécifique	Exemple-prototype	
5*♦(C4↓:loi+)	Une loi justifie le degré de certitude	"Eh... ça, j'sais pas. Attends. Mais ça, là... c'est vrai à cause y a deux moins un à côté de l'autre. Ça, ça fait un plus. Ça, c'est vrai, par exemple." (18G/AS6)	
4=(C3:inc)	Incertitude générale dont les raisons ne sont pas précisées	"Parce que j'étais pas mal sûr de moi. Ben, comme... j'étais pas... j'étais pas vraiment comme..." (22G/AS11)	
14*(C2:inc)		"Ben, je le sais pas comme... ben, j'étais pas sûr, là... si..." (10A/D3)	
3(C4:aff)	Le degré de certitude est réaffirmé fortement sans raison pour le supporter	"Moi, je suis certaine à propos de ça." (7G/AS2)	
3(C4:aff)		"Ça, c'est bon." (4A/AS2)	
1(C4:?)	Aucune raison ne peut être trouvée pour justifier le degré de certitude	"Ben... Eh... j'sais pas, là. Ça m'a l'air certain, pour moi." (7G/AS2)	
12=(C3:?)		"Attends une minute, je suis pas sûr. Ouais. (...) Ok, ben mon degré de certitude... ben, ça va être 3. (...) Ben... ce serait peut-être... ouais ben, j'sais pas." (4G/D1)	
8*(C2:aut-)	Toute autre raison qui n'entre pas dans les catégories précédentes ou dont il est impossible de préciser la catégorie	"Parce que... on va dire que ça avait de l'air dumb. (...) Ouais, mais... ce que je voulais montrer là, c'est que... on va dire que sa mère voulait faire une compote, puis elle avait acheté des pommes juste pour ça... Puis lui, a été les manger, fait que..." (15A/M1)	
12=(C3:aut-)		"Ben, c'était juste comme... la manière que j'ai... comme, que je l'ai écrit." (10G/D1)	
4*♦(C2) 6*♦(C4↓)	Le degré de certitude n'est pas justifié	"C'est pas certitude. Je le sais pas." (9G/AS10)	

Appendice E: Exemple d'un protocole codé (1G)

Identification:	22e sujet (1G)
Sexe:	Masculin
Age:	16 ans
Origine ethnique:	Franco-ontarien
Langue parlée à la maison:	Français et anglais
Orientation future:	Fermier
Matière préférée:	Education physique
Matière la mieux réussie:	Education physique
Matière la moins aimée:	Anglais
Matière la moins réussie:	Mathématiques (a failli 10A, reprend 10G) Français.
Résultat de la mi-semestre:	80.8%
Pré-test le plus difficile:	?
Modèle unique:	Poker (argent)

I: DIAGNOSTIC / CHANGEMENT CONCEPTUEL (+/-) (E: Expérimentateur, S: Sujet) Page AS/1

- E: Mais là, ce qu'on va commencer par faire... c'est que je vais te dire, par exemple, les chiffres, là... puis, tu vas me le relire pour te le remettre dans la tête... tu vas le relire tout fort, ce que t'as écrit, là... Et puis moi, je vais te poser des questions là-dessus. Y a des choses qui m'intéressent.
- S: Ok.
- E: Ok? Ça fait que 3 + 6. Shoot!
- S: 1[MB:x+Y]
1{C/|pré} Ok. Gilles a gagné 3\$. Ok, première main... et 6\$,
1{Va/con} la deuxième main. Il a maintenant 9\$.
1[Con:Trans]
1[OC:N0 abs]
1[V: +(x et y)]
- E: 1=(C4:I+) Ok. T'as dit que t'étais certain.
- S: Oui.
- E: Comment que tu fais ça? Décider que t'es certain?
- S: Ben, j' imagine la game de poker (rire). Là, le gars... la première joute, la première main... y gagne 3\$.
- E: Donc, c'est ton 3 qu'il y a là.
- S: Oui.
- E: Puis?
- S: Là, la deuxième main, y gagne 6\$.
- E: Veux-tu dire que gagne, c'est ça qui représente le plus?
- S: Le plus, ouais.
- E: Ok. Et puis là, t'es certain dans ce temps-là?
- S: Ben, oui. J'suis certain.
- E: Correct. On continue au numéro suivant: - 6 + 3.
- S: 2[MP:-X+y] Ok, la première main, Gilles a perdu 6\$. Ok, et la deuxième main, AS/2
2[Con:Trans] il a gagné donc... eh, il a gagné 3\$. Donc, il est 3\$ dans le trou.
- E: 2(C4:I+) Ok. T'es certain?
- S: J'suis certain.

- E: Parce que?
 S: Ben, parce que... j'suis certain.
 E: (rire).
 S: Ben là, si y a gagné... Ok, si y a perdu 6\$ au commencement, ça veut dire: y a - 6. Là, s'il a gagné la deuxième main, 3\$... c'est comme -6 + 3... puis ça donne - 3. Dans le trou, ça veut dire -3.
- E: C'est ça. Le suivant: 6 - 3.
 S: 3[MB:X-y] Ok. Billy a gagné 6\$ la première main, mais a perdu
 3{Va/con} 3\$ la deuxième main. Donc, il lui reste 3\$.
 3[Con:Trans]
 3[OC:N0 abs]
- E: 3=(C4:aff) Puis t'es certain?
 S: Ah, oui.
 E: Puis là, je te demanderai même pas. J'sais comment tu décides ça. Eh... ça, qu'est-ce que ça donne?
- S: 3b[L:Y-x=I+] Ça? 2 - 9, ça donne 7.
 E: Ok. Ça (4 - 14), qu'est-ce que ça donne?
 S: 10.
 E: Ça (1 - 12), qu'est-ce que ça donne?
 S: 11 (rire).
 E: Ok. Fais-moi donc une métaphore pour m'expliquer ça.
 S: Quoi, ça? Ça? Toute ça?
 E: Ouais. C'est la même chose, dans le fond.
 S: Les trois?
 E: Non, prend la première.
 S: Ok. 2 - 9? Ok. Là, là, y a hum....
 E: Je vais l'écrire, là...
 S: Ok. N'importe quoi?
 E: Ben, continue avec ta partie de poker. C'est parfait.
 S: 3b[ME:x-Y] Ok. Ok, Billy là... ok, y a 9\$ dans les poches... ok, et puis y s'en va jouer au poker...
 E: Ah! c'est de même que t'expliques ça. Moi, j'aurais pensé qu'y avait... Ok, y a 9\$ dans les poches.
- S: 3b{Va/imp} 9\$ dans les poches, oui. Y s'en va jouer là. Puis là, le bid là,
 3b{Va/mat} c'était 2\$ pour rentrer. Puis là, y a perdu 2\$. Ça fait que là, AS/3
 3b[Con:Trans] y reste 7 dans les poches.
- E: 3b[OC:N(G-p)→Inv] (...) C'est drôle, ce que t'es en train de me dire, c'est que le 9 est positif...
 S: Oui.
 E: Puis que le 2 est négatif.
 S: Est négatif, oui.
 E: Puis ici, le 2... c'est bien écrit qu'il est positif.
 S: Oui, mais comme... de la manière, j'sais pas...
 E: T'as une règle, toi là, hein? Une p'tite règle dans ta tête.
 S: Ben, ouais. (rire) Ouais.
 E: Une p'tite règle qui te coûte cher (rire). Tu sais, ce que tu viens de dire là... dans ton test de petits calculs là... tu m'avais donné exactement ces réponses-là. Si on reste avec la manière que t'es parti... Billy a 2\$ dans ses poches.
 S: Hu, hu.
 E: Puis y perd 9\$.
 S: Ooooh....

- E: Qu'est-ce qui arrive?
 S: S'il a 2\$ dans les poches, puis y perd 9\$... ça se peut pas. Y est mort (rire).
 E: Y est pas mort, là... mais...
 S: Y doit, y doit 7\$, -7.
 E: Y a une dette de 7\$. 2 - 9, ça fait -7.
 S: Oui, mais là, là...
 E: Oui.
 S: Ok.
 E: 3b*♦(C4:M+) Parce que t'étais certain de ça là, que 2 - 9 faisait 7, hein?
 S: Oui, oui.
 E: Ok. Je voudrais que tu me le dises ton... oui, mais là, là.
 S: Là, là? Dire mon oui, mais...
 E: Ton objection. Oui, oui, t'as une objection à ça.
 S: Non, j'ai pas d'objection. Je vois maintenant.
 E: Tu le vois bien?
 S: Oui.
 E: Vois-tu? Y avait 4\$...
 S: Puis là, y a perdu 14.
 E: Oui, ou bien y veut s'acheter... j'sais pas...
 S: Y fait un emprunt.
 E: Un emprunt de 14\$. Bon, ben... un emprunt, c'est pas bien diable parce qu'habituellement y donnerait le 4 tout de suite, là.
 S: Non, ouais.
 E: Mais y a 4\$. Puis, il rentre 14 dans le trou. C'est un peu le gars qui s'en va au garage. Puis, y a 500\$ dans ses poches. AS/4
 Puis là, le gars dit: tes réparations, y coûtent 2 000\$.
 S: Ah, ouais.
 E: Donc, y donne le 500... mais, y a encore une dette...
 S: De 1 500.
 E: Es-tu certain là, que tu le vois que 2 - 9, ça fait -7.
 S: Oui. C'est toujours que je pense que c'est 9 - 2.
 E: Probablement qu'on t'a enseigné ça quand t'étais petit... qu'ils ont dit que tu faisais la différence... et puis là, y t'ont donné une règle quelconque... puis, il lui est arrivé malheur à quelque moment dans ta vie...
 S: Ouais.
 E: Ok. Donc, on prend ça en note que 2 - 9, ça fait -7. Tu vas t'en rappeler? Parce que ça doit t'avoir coûté quelques piastres...
 S: (Rire).
 E: Ou quelques points l'année passée. Parce qu'il y en avait énormément de négatifs en avancé.
 S: Ouais.
 E: Là, tu vas avancer en général... puis, il va y en avoir de plus en plus. Puis si t'as 0 - 13, qu'est-ce que ça donne?
 S: 0 - 13? -13?
 E: T'es sûr?
 S: Ouais.
 E: Pourquoi?
 S: Ben, parce que si t'as 0... si t'as 0 ou... c'est pareil comme celui-là (x - Y), si t'as pas d'argent... puis, tu t'en vas au magasin... puis là, y dit ok, ça coûte 13\$.
 E: Ouais. Donc, t'es 13 dans le trou. Ok. Parce que tu m'as écrit aussi la même règle que ça.
 3c[L:Y-0=I+] Tu m'as dit 0 - 13 = 13. Donc, tu voyais ça de même toi... que la dette...
 S: Oui.

- E: Tu t'es jamais posé de questions sur le moins?
 S: Non.
 E: Jamais?
 S: 3c[OC:N(G-p)] Non.
 E: Ah ben, c'est cute. Bon, ok.
 S: 3bc[OD:N(G-p)] Parce que quand on est jeune, on voit toujours ça comme ça... puis là (9 - 2), quand t'arrives à l'école secondaire... là, y te montrent que ça appartient comme au 9... ça, c'est ensemble. Mais quand t'es jeune, y t'apprennent jamais ça.
- E: Ouais.
 S: Comme quand y te donnent deux numéros, là... puis, un moins entre... Tu sais... comme c'est... y te disent pas que ça appartient à l'un ou l'autre.
 E: Ah, bon. Mais quand t'es jeune, par exemple, la maîtresse dit: ça, ça se peut pas. AS/5
 S: Oui. Ça fait comme ça.
 E: 5c[L*:-(-=+)] Ouais. Ok. Bon. Dis-moi donc la réponse de ça [0 - (-13)].
 S: Certainement. Ah, non, là, là... 13. A cause un moins, puis un moins, ça fait un plus.
 E: T'es sûr de ça?
 S: Non.
 E: T'es pas sûr de ça, hein? (rire).
 S: Non. C'est ça là. C'est pour ça.
 E: Ok, je vais essayer d'éclaircir ça avec toi, cette affaire-là.
 S: Ok.
 E: Mais avant, on va aller au dernier. Ok? - 3 - 6.
 S: Ok. Ok. Tu vois là... en tout cas.
 E: Non, dis-le moi ce que...
 S: 4[OC:not] Ok. C'est que... Regarde là. - 3 - 6? Là, là... Là, là... lui appartient à lui, puis lui appartient à lui. C'est quoi le signe dans le milieu? C'est ça que je comprends pas. Comme... comme il faut parce que y a comme... c'est dur à comprendre. Y est ti moins, où si c'est juste -6? Comme - 6 ou le nombre est négatif?
- E: Ok. Ok. Puis t'as du trouble... tu fais des erreurs avec celui-là aussi, hein?
 S: Ouais.
 E: T'es porté à faire quoi, comme erreur?
 S: Ben, je vas voir ma réponse.
 E: Tu l'as pas fait, là.
 S: Non? Je l'ai pas fait comme y faut?
 E: Non, on dirait que ça c'est comme un remède... quand t'es obligé de le mettre en dette. Dans ta vie, tu fais pas ces erreurs-là. C'est juste dans tes tests et tes devoirs de maths que t'es fais (rire). Parce que t'es pas fou... dans la vie, regarde ce que t'as écrit.
 S: Ah, c'était ti bien ça?
 E: Ben, lisons-le donc.
 S: 4[MP:-x-Y] Ok. Billy devait 3\$. Il a continué et il a perdu encore 6\$. Ok. Il a maintenant 9
 4[Con:Trans] dans le trou.
 4(C4:I+) C'est ça. Regarde... là moi, je vois ça comme... je vois le même signe. Je vois juste -3, puis -6. Comme y a perdu -3... puis là, y a perdu encore -6.
 E: Oui.
 S: C'est de même que je le vois
 E: Oui. Puis ça fait qu'il a perdu 9. AS/6
 S: Oui.
 E: 4[L*:?] Mais habituellement, quand t'as pas d'argent, c'est pas ça que tu fais.
 S: Ah, si c'est juste ça, là... j'sais pas quoi faire.

- E: Bon. Ben, à cette heure... là, les règles, là... va falloir que tu les jettes par dessus bord. Y en a pus de règles.
- S: (Rire).
- E: Puis, vois-tu? Non, je pense que c'est ton meilleur moyen parce que tu sais très bien quoi faire avec l'argent. Puis dans la vie, y a pas personne qui va te mêler là-dessus, non plus.
- S: Non! (rire)
- E: Hein? Parce que tu vas dire: aie! minute, là. Donc, faudrait que tu te donnes l'habitude, pour les quelque temps à venir... puis après ça, ça va devenir automatique. Au début, va falloir que tu t'arrêtes pour y penser... puis dire: je vais y penser en termes d'argent.
- S: Oui.
- E: Puis automatiquement, t'as la bonne réponse.
- S: Ok.
- E: 4[L*:?] Parce que regarde ce que t'as écrit dans ton test avant. T'as dit: $-18 - 1 = -17$.
- S: C'est ti bien, ça?
- E: C'est ti bien, ça? Regarde donc. Pense-le en termes d'argent.
- S: Ok. Y a perdu... oui, c'est bien. Eh, non, c'est pas bien. S'il a perdu 18\$... puis là, y a perdu 1\$, ça fait -19.
- E: Exact.
- S: Ok. Ça c'est dans le test? Pas de métaphores, là...
- E: Non, non, non. Dans le petit.
- S: Ah ok. Le premier qu'on a fait.
- E: Le petit... de calcul. Vois-tu, là?
- S: Ok. Mais, c'était pas de l'argent, rien, là?
- E: Non. Ben, non. C'est pour ça que je te dis: si tu penses en termes d'argent... à toutes les fois qu'il y a des négatifs, t'es correct. Si tu te mets à penser en termes d'autre chose, ça fait dur.
- S: Ouais, je le sais. Regarde là, aussi.
- E: 4b[L*:- (X-y)=S-] C'était quoi ta règle? Tu dis $18 - 1$?... As-tu une règle, là?
- S: Oui. Mais là, là... moi, là, quand je vois ça, là... c'est comme t'enlèves le moins... là c'est 17... mais, un moins.
- E: 4b[OPC:N(G-p)] le moins... là c'est 17... mais, un moins.
- E: Le plus gros chiffre gagne le kit? Non,
- S: 4a[L*:- (Y-x)=I-] ici ($-1 - 4 = -3$) ... tu dis... AS/7
- S: Comme ici...
- E: Vois-tu, y a une différence-là. Celui-là est plus petit que celui-là?
- S: Ben là, c'est un moins. Regarde. Là, t'enlèves le moins... Regarde, j'enlève le moins.
- E: Là, il te reste $1 - 4$.
- S: Oui. Là, $1 - 4$... ben là, moi, c'est pareil comme au commencement, là.
- S: Ça.
- E: Ok, ok.
- S: Puis là, je fais juste mettre le moins.
- E: 4a[OPC:N(G-p)→Inv + not]
- E: Te rappelles-tu où est-ce que t'as pris ça, cette règle-là?
- S: Non.
- E: Aucune idée.
- S: Non.
- E: Bon. Ça fait qu'à cette heure, si tu les regardes en termes d'argent, qu'est-ce que tu dis?
- S: Hu, hu. Là, ici ou celui-là?
- E: Celui-là ($-12 - 2$), ça va être quoi?
- S: Ok. Ben là, si y perd -12\$... puis là, y perd encore 2\$, c'est -14.
- E: Ok. Celui-là ($-1 - 4$).
- S: Là, y perd -1\$, plus moins... ben, encore -4, ça fait -5.

- E: Exact.
 S: Puis là, lui (-5 - 11), c'est -16. Puis lui (-3 - 16), ça fait -19 à cause y perd les deux.
 E: Oui, puis ça (- 5 - 0), qu'est-ce que ça donne?
 S: Ça, ça donne -5... à cause si... ben, c'est comme la game, là... si y perd -5\$... puis là, la deuxième joute, y perd pas rien, c'est -5.
 E: Donc, t'es correct avec le -5 - 0.
 S: Ouais, ouais.
 E: Ok. T'aperçois-tu que quand tu penses en argent, t'es correct.
 S: 4[L*:-/=+] Puis là, ici aussi, ça me mélange parce que je pense: deux moins, ça donne un 4[OC:loiX+] plus.
 E: Ok. Il faut qu'ils soient collés. Faut vraiment qu'ils soient collés pour ça. Mais moi, les cheveux commençaient à me dresser sur la tête... parce que je vois que t'es bon en maths... puis là, je me disais... je savais pas que t'avais failli ta 10 avancé...
 S: Non? Ça influence-tu, les signes?
 E: Ben, c'est rien que de ça en 10e avancé, à un moment donné. Tout est sur une base de négatifs et de positifs. T'as dû perdre...
 S: Ouais, ben... je vais pas blâmer ça sur le professeur, là... mais, c'est...

(remarques désobligeantes...)

AS/8

- E: (...) Ok. Tu me posais une question, à savoir ça appartient ti à un, ça appartient ti à l'autre...?
 S: Ouais, c'est ça.
 E: 4[OC:not] Ça, ça pourrait être vu... des fois, y a certains livres qui font ça de même... (-3) + (-6).
 S: Oui, c'est ça. Ça, je comprends ça. Ça, je comprends ça. Mais, quand c'est de même, là...
 E: Mais, très souvent... ça, y font ça au début pour vous habituer. Puis après ça, y tombent là-dedans. Puis toi, quand tu calcules... habituellement, tu t'en vas direct avec ça.
 S: Oui, je fais - 3 - 6... à la place de faire (-3) + (-6). C'est ça qui....
 E: C'est ça qui te mêlait. Mais je pense que ton problème est réglé automatiquement... AS/9
 S: Avec de l'argent.
 E: Oui, parce qu'autrement t'as trop de règles... je dirais, toutes mêlées, là... que si tu te mets à chercher à défaire les règles, tu vas venir tout mêlé. Ça fait que si tu penses en argent, t'es correct.
 S: Ok. Ok.
 E: On va aller régler ton - (-).
 S: Oui, ça là...
 E: On va aller voir celui-là, et puis on va aller voir le suivant aussi. Puis, y a quelque chose de drôle, c'est qu'il y en a un que tu fais pas d'erreur.... puis l'autre, tu fais des erreurs. Puis là, j'ai hâte de voir ce qu'est la règle.
 S: (Rire).
 E: Ok? Alors, allons-y avec 3 - (-6). T'as dit que ça donnait 9.
 S: Oui. Ok, là...
 5[ME:x(-Y)] Billy gagne 3\$, ok?... pour la première main.
 5[Va/imp] Puis là, la deuxième main, il perd 6\$ (qu'il
 (5[Va/mat]) devait déjà. Donc, il est 3\$ dans le trou).
 5[Va/con] (Rz= 9)
 5[Con:Trans]
 5[OCD:loi]
 Ça, ça se fait... Ça fait que là, là... y gagne 3\$...
 E: Oui, ça c'est +3.

- S: Oui. Y gagne 3\$, la première main. Là, la deuxième main, y perd 6\$. Ok? Puis là, il a déjà donc eh... ah, non... là, là...
- E: Tu dis: il perd 6\$ qu'il devait déjà.
- S: Ouais, c'est ça. C'est ça. Il perd... y devait déjà 6\$ à quelqu'un....
- E: Puis, il le reperd. Y est rendu à -12.
- S: Puis là, là... Oui (rire).
- E: 5*♦(C4:M+/Rz) Qu'est-ce qu'il y a? (rire). T'as mis que t'étais certain!
- S: J'sais pas. Ouais, mais... tu vois, c'est ça, là (= 9). J'étais certain...
- E: 5*♦(C4↓:I-) L'es-tu encore, certain?
- S: Non (rire). Ça fait que moi, je pensais là... qu'il gagnait... qu'il devait 6\$... mais là, il l'a pas repayé; il a joué avec à la place.
- E: Ouais, ouais. Puis là, regarde... avec ton beau p'tit raisonnement, t'es arrivé à 3 à la fin.
- S: Ouais. C'est ti bien ça?
- E: Regarde. T'as dit: il gagne 3\$... puis, y perd 6... donc, il est rendu à -3.
- S: -3, oui.
- E: Ça va très bien avec ton raisonnement. Ça, ce raisonnement-là, est parfait. Excepté que ça va pas avec ça. Tu vois ça? AS/10
- S: 5[L*:-(-=+)] Parce que tu l'as bon, quand tu dis que c'est 9.
- S: Oui... Ah, c'est 9?
- E: Quoi? T'es pas certain de ça?
- S: Non, j'étais pas certain.
- E: Ok. On va aller voir le suivant... puis, je vais les prendre les deux ensemble. Ok?
- S: Ok. C'est quel, le suivant?
- E: Le suivant, c'est celui d'en haut de la page.
- S: Ok. Là, c'est - 3 - (-6). Aie, là, là. Ça, incertitude. Ok.
- S: 6[ME:-x-(-Y)] Billy devait 3\$ et 6\$. Ok. Y devait, y devait
- S: 6{Va/imp} 9... les deux. Mais il a continué à jouer et
- S: 6{Cl/pré} il a perdu encore.
- E: 6{Va/con} (Rire).
- S: 6{Va/mat} (Rire). Il a 9\$ dans le trou.
- S: 6[Con:Rel]
- S: 6[OPC:N(+) → -(X+y)]
- S: 6[OCD:lol]
- E: Y a perdu quoi? Ok. Y devait 3, puis y devait 6, t'as déjà ton -9.
- S: Puis là, y a rejoué encore...
- E: Puis, y a perdu?
- S: Oui.
- E: 6*♦(C2:P-) Y a perdu quoi?
- S: Ben, je le sais pas. C'est pour ça que j'ai mis incertitude.
- E: C'est pour ça que t'as mis incertitude. Ok.
- S: Mais, je savais qu'y avait perdu 3... puis, qu'y avait perdu 6.
- E: Ce que t'as écrit, dans le fond, c'est - 3 - 6 = - 9.
- S: Oui.
- E: Il te manque un moins, là-dedans.
- S: (Rire).
- E: 5/6[OCD:lol] Puis l'autre bord, c'est exactement la même chose que t'as fait. T'as considéré le - (- comme étant un seul moins. Puis t'as dit: - 3 - 6 = - 3. Par contre, y a un moment donné où tu savais que c'était 9, la réponse.
- S: J'sais pas comment ça peut, ça.
- E: Ça là, pour le voir comme il faut.... je pense que le problème... en tout cas, je m'imagine que le problème peut être ça... pourquoi vous arrivez pas à le saisir... C'est qu'avant,

- y avait quelque chose, y se passait de quoi... y avait une action, y se passait de quoi de positif... tu gagnais au poker... puis là, tu te ramassais plus haut. AS/11
- S: Hu, hu.
- E: Ou bien tu parlais de quelque part... puis là, y se passait des pertes... puis là, tu te ramassais plus bas.
- S: Oui.
- E: Bon. Pour comprendre quelque chose de même, il faut vraiment voir ça comme deux points. Moi, je te dirais: y était là, à tel moment... puis y avait tant d'argent à un autre moment... puis, c'est quoi la différence entre les deux? Ça serait ça, le genre de situation. Je vais te donner un exemple.
- S: Ok.
- E: Puis là, je pense qu'on va changer de modèle... parce qu'on le voit très bien avec le thermomètre. Je sais que le thermomètre est plate comme modèle, là... mais on le voit, numéro un. Vois-tu?
- S: Ouais, ouais.
- E: Bon. Je vais te dire: hier, y faisait 3°... ça c'est le premier que je trouve à prendre, ok?
- S: Ok.
- E: Je vais dire: aujourd'hui, il fait -6. Y fait froid, cette nuit-là... (rire). Ok?
- S: (Rire). Y faisait 3, + 3?
- E: Y faisait + 3, ouais.
- S: Ok. Puis là, y fait -6.
- E: Puis aujourd'hui, y fait -6.
- S: Puis, c'est quoi la différence?
- E: Puis, je te demanderais: c'est quoi la différence entre les deux?
- S: 9.
- E: Ah!
- S: 9°C.
- E: Ok. Tu le vois très bien. On va regarder ça sur le thermomètre. Ici, j'ai 3; là, j'ai -6. Je te demande la différence. C'est ça, puis ça.
- S: Oui.
- E: Bon, une différence, c'est le plus grand moins le plus petit, habituellement. C'est une soustraction.
- S: Oui.
- E: Puis, si je veux pas me mêler avec des négatifs à la fin... je prends le plus grand moins le plus petit. Le plus grand chiffre... Ben 50 - 10, hein? D'habitude...
- S: Oui, oui. Pour pas arriver avec un négatif.
- E: Donc, je prends le grand moins le petit. Regarde bien ça.
- S: C'est le 3...
- E: Le grand, c'est 3. Moins, ça c'est le moins de la soustraction...
- S: Ouais. Ouais, c'est ça.
- E: - 6. Ça, c'est la valeur... le moins appartient au 6. Tu sais, tout à l'heure, tu me parlais d'appartenance, là.
- S: Oui. Hu, hu. Là, y appartient au 6. AS/12
- E: Qu'est-ce que ça représente dans le fond? Tu m'as dit que ça donnait 9.
- S: Oui. Oui, là... je vois là.
- E: Ok. Ça fait que c'est pour ça qu'à chaque fois que t'as - (-6)...
- S: C'est toujours plus.
- E: C'est toujours, toujours, toujours plus.
- S: Mais là, ce moins-ci, là?
- E: Attends. On va passer au prochain. Tu vas le faire tout seul.
- S: Ok.
- E: Ok. Hier... Tu vas voir, t'auras même pas besoin de dessin, je pense. ...y faisait - 3. Puis aujourd'hui, y fait -6. Puis, je te demande: c'est quoi la différence entre les deux?

- S: Ok. Y fait -3... puis là, elle est descendu à -6. La différence, c'est 3.
- E: Donc, si on veut le faire par écrit... ta solution, là. Le plus grand moins le petit, c'est le plus chaud... Le plus grand, c'est le plus chaud.
- S: Ouais. - 3 - (-6).
- E: Ça fait?
- S: - 3 + 6. Ça fait 3. Oui.
- E: Vois-tu? Toi, t'avais deux règles différentes.
- S: J'aurais dû user le thermomètre.
- E: Ben, pour t'en rappeler... en tout cas, tu peux te rappeler de cette petite image-là. Quand j'ai un - (... le moins, d'abord, appartient à ça... C'est le plus grand moins le plus petit.... donc ça, ça devient plus. Puis, tu le vois bien que ça fait ça.
- S: Ouais, hu, hu.
- E: Je le sais pas quelle sorte de sapristi de règles que t'avais ici. Ceux-là, tu les as bons. 3 - (-6), t'as mis 9. Tu les a bons dans ton test de calcul. Quand t'arrives à - 3 - (-6)...
- S: Là, là...
- E: Ben là, là... qu'est-ce qui est arrivé?
- S: Ben là, là...
- E: Ça fait que là, tu dis que ça... c'est toute des plus.
- S: Ouais.
- E: 6b[L:-(X+y)=A-] Ça fait que là, ça [- 8 - (-7)] fait -1.
- S: C'est exact.
- E: Mais comment tu faisais ça? Quelle sorte de raisonnement que tu pouvais bien faire.
- S: Là, là... moi je pensais que ça, ça donnait un plus. Ok. Ça, ça donnait un plus. Ok, puis là, ces deux-là ensemble, plus un moins. J'oubliais le moins, pareil comme la dernière fois, là...
- E: 6a[OPC:N(+)] Puis là, je les additionnais... puis, je mettais moins. AS/13
- E: C'est compliqué ces règles-là?
- S: J'sais pas où j'ai ramassé ça.
- E: Ben, t'as toute fait la même chose.
- S: 6[LC:3=-] Ouais, c'est ça. Comme j'oublie le moins...Ça, je le savais... puis aussi une autre affaire, c'est que... si t'as un... je me rapelle de ça, mais je pense pas que j'ai bien capté la règle, là... c'est, c'est... si t'as le nombre de... je me souvenais toujours, j'avais entendu que 2 moins, ça donne un plus...ok? Mais 3 moins, ça donne un moins.
- E: Ok.
- S: 6[OC:lotX++Exp] Comme un nombre pair, ça donne un plus. Puis un nombre impair, ça donne un moins.
- E: Se pourrait-il que tu te sois mêlé avec la loi des exposants?
- S: Ça se peut.
- E: Regarde. (-3) au carré, ça fait 9. Puis (-3) au cube, ça fait -27. Bon, ça c'est vrai dans la multiplication seulement, ta fameuse règle. Parce que ça là, ça fait (-3) X (-3)...
- S: Oui, c'est ça.
- E: Puis ça, ça fait (-3) X (-3) X (-3).
- S: Oui, c'est ça. C'est ça, là.
- E: Bon. Elle est seulement vraie, là.
- S: Ok.
- E: T'as pas de... Tu sais, avec la multiplication simple... qui se répète. Puis ça, tu rencontres ça dans les exposants. Tu sais, tu peux en avoir 50 de ces petites affaires-là.
- S: Ok. C'est là, où ce que j'ai ramassé ça. Ça doit.

- E: Ok. Donc, c'est encore une règle à balancer par la fenêtre. Puis ça, au lieu de prendre l'argent... ben, celui-là, va falloir que tu restes avec la température, je pense. Parce qu'avec l'argent, ça se voit mal. Parce que des dettes, on voit pas ça, hein? Là, si j'ai des - (-...)
- S: Ouais.
- E: Bon. On va le prendre avec un autre modèle, par exemple. Les relatifs, on pourrait dire qu'on a "monter et descendre".
- S: Ok.
- E: Ça... monter et descendre, c'est simple, hein? Tout ce qui monte et qui descend, là. L'argent, les objets, les longueurs... ça augmente et diminue. Puis, t'as "avancer et reculer".
- S: Ah, ça. Ça, là. AS/14
- E: Qu'est-ce qu'il y a là?
- S: Avancer et reculer, ça me... j'aime pas ça.
- E: Bon, ok. On va en faire un d'abord. Ça va peut-être te démêler. Là, on va prendre les années. Ok. Avant et après Jésus-Christ.
- S: Ah, non.
- E: Parce que là, on en a des moins.
- S: (Rire).
- E: (Rire). Tu vois, c'est simple. On va te faire une p'tite guerre. Ok?
- S: La ligne du temps.
- E: Bon. C'est après Jésus-Christ, c'est nous autres ça, là.
- S: Ok.
- E: Puis ça, c'est avant Jésus-Christ. Jésus-Christ est là.
- S: Ok.
- E: Ok, y a eu une p'tite guerre. Elle a commencé en l'année -3... puis, elle a fini en l'année 6.
- S: Ok.
- E: Je veux pas la réponse. Je veux la solution. Combien d'années a duré cette guerre là?
- S: Combien d'années?
- E: Oui.
- S: Elle a duré...
- E: Solution!
- S: Ok. Si tu t'en vas par là... c'est plus.
- E: Ok. Donc, le plus grand...
- S: Ok.
- E: Moins le plus petit, encore.
- S: Moins?
- E: Oui.
- S: Ah, c'est toujours moins.
- E: Parce que si je te disais: cette année, y a une guerre qui finit en '92... puis, elle avait commencé en '82. Tu dis: combien temps qu'elle dure. Tu dis: 1992 - 1982. Tu sais, le plus... là, c'est pas le plus chaud moins le plus froid. Là, c'est le plus vieux moins le plus jeune (rire).
- S: Ok. Le plus grand c'est 6. - (- ... Oui. Ça fait que là... ça, ça fait 6 + 3.
- E: Puis, ça te donne?
- S: 9.
- E: 9 ans. Donc, vois-tu? Même application que ça.
- S: Hu, hu.
- E: Puis dans le fond, tu peux toujours le voir que ça va faire ça.
- S: Ouais.
- E: Eh... la p'tite guerre a duré de - 6 à - 3. Donne-moi la solution.
- S: De - 6 à - 3?
- E: Ouais.
- S: Ça donne encore 9. .

- E: Ok. Elle a commencé en - 6. Puis, elle a fini en - 3. AS/15
- S: Puis là, ça c'est un moins, par exemple, dans le milieu, là. Ok. Ok. Là, on va prendre le plus grand, c'est - 3. Là, - (-6). Là, ça fait - 3 + 6. Ça fait 3.
- E: Elle a duré, donc, cette petite guerre-là pendant...
- S: 3 ans.
- E: 3 ans. Tu me regardes avec des yeux... (rire).
- S: Complexes.
- E: Complexes?
- S: Oui.
- E: C'est bon ou c'est pas bon?
- S: Ben, c'est bon.
- E: C'est bon? 4 sur 4 de certitude?
- S: Non.
- E: Combien?
- S: Sur 4? 3, 2.5...
- E: Pourquoi?
- S: Ben, parce que... de moins... Ça va mieux avec l'échelle, là...
- E: Oui. Mais c'est parce que tu l'as pas tout le temps, l'échelle... hein?... y des les problèmes... quand y te les donnent, que tu l'as pas. Donc, faut que tu...
- S: Ouais, c'est ça. Faut que tu y penses, là. Mais, c'est pareil... oui, ça va bien avec le thermomètre. Si t'es -6...
- E: Puis d'ailleurs, tu vas le voir tout de suite. Ok, 0...
- S: Puis là, - 3 est là... puis là, -6 est là. Puis là, le déplacement...
- E: Y a 3 ans de différence entre les deux. 4 sur 4?
- S: Hu, hu. Ouais.
- E: Regarde. Y faut éviter une chose. Ce qu'il faut éviter dans les problèmes surtout. Mais ça arrive, quand t'as des calculs, y te les donnent de même. Mais dans les problèmes, faut que t'évites de prendre le plus petit moins le plus grand. Parce que tu vas arriver avec un négatif.
- S: Puis, c'est pas ça.
- E: Ben habituellement, regarde... là t'arriverais avec la guerre a duré - 3 ans.
- S: Ça fait pas de sens.
- E: C'est un film du reculon, ça...
- S: (Rire).
- E: Puis, quand on demande une différence ou un écart... habituellement, c'est pas un moins. C'est un chiffre, comment je dirais bien ça, donc? C'est un chiffre... même pas de plus, c'est 3. L'écart, la différence, c'est 3 de différence.
- S: Ça l'a pas un plus ou un moins.
- E: Quasiment pas.
- S: Ah, ok. C'est le déplacement.
- E: Oui, oui, c'est ça.
- S: Ok.
- E: Donc habituellement, t'évites de prendre le plus petit moins le plus grand. Tu prends le plus grand moins le plus petit.
- S: Ça, est-ce que ça s'applique tout partout?
- E: Dans tous les problèmes où t'as ce genre de choses-là. Quand t'as des chiffres, AS/16 tu peux toujours t'organiser pour avoir la réponse pareil. Mais quand t'as des problèmes d'algèbre... puis là, y te diraient: la guerre a commencé en l'année - x... puis, elle a fini en l'année y. Wo! Ta-bar-nouche...
- S: (Rire).
- E: Ça fait que là, c'est bon de penser... ok, c'est le plus grand, le plus vieux moins le plus petit.
- S: Y - (-x).

- E: Ouais.
 S: Ça fait...
 E: $y + x$. Je peux pas aller plus loin... mais, y me diraient d'autres choses dans le problème, tu sais.
 S: Oui, oui.
 E: Donc ça, tu comprends ça à 4 sur 4?
 S: Ouais.
 E: Puis, ça avec l'argent... les comprends-tu à 4 sur 4, aussi?
 S: Ouais.

II: DIAGNOSTIC / CHANGEMENT CONCEPTUEL (X)

M/1

- E: On va voir la multiplication.
 S: C'est où ça? C'est juste ici. Ah, ça c'est facile.
 E: Ok. Alors, 3 X 6. Qu'est-ce que t'as dit là?
 S: 7[MB:xXY] 3 X 6... là. Billy a joué 3 mains, ok?... de poker,
 7{CI/uni} qui valaient 6\$ chaque. Donc, y a gagné 18\$.
 7[Con:Combin]
 E: 7=(C4:aff) Ton degré de certitude?
 S: 4, 4.
 E: Ok. Le suivant.
 S: 8[MA:xX-Y] Ok. Là, Billy a perdu 3 mains qui valaient 6\$.
 8{CI/pré} Donc, y est 18\$ dans le trou.
 8[Con:Combin]
 8[OC:CommSig]
 8[V:Chaque]
 8=(C4:aff) Degré de certitude, 4.
 E: Ok. Pourquoi t'as l'air provocateur, là (rire)?
 S: (Rire) Oui.
 E: Qu'est-ce qu'il y a?
 S: Rien. C'est juste que tu regardais.
 E: Ok. Allons voir au suivant. Puis, on va faire la différence entre les deux, pour voir s'il y en a une.
 S: 9[MA:-xXY] Ok. Ok. Là, Billy a joué 6 mains de 3\$
 9{CI/pré} (chaque), ok? Puis là, y a perdu comme... toutes les mains. Donc, c'est encore
 9[Con:Combin] (il perd) 18\$, -18.
 9[OC:CommSig]
 9[V:Comm]
 9=(C4) (4)
 E: Ok. Sais-tu le premier, là... tu dis: y a perdu 3 mains. Me semble moi, que ça ressemble plus à (-3)
 X 6.
 S: 8/9[Iden] Ah, ouais. Ouais. Mais c'est... le moins, quand c'est une M/2
 multiplication, ça fait pas de différence c'est quel.
 E: Donc, y a pas de différence entre les deux? Tu dis que c'est la même chose.
 S: Fallait juste trouver une nouvelle affaire.
 8/9[OC:Comm]
 E: C'est la même réponse, mais il y a une différence.
 S: C'est le 6 qui a moins... puis là, c'est le 3 qui a moins.
 E: Oui. Comme là, là... si on voulait être honnête (rire), là...
 S: C'est l'inverse.
 E: C'est ça. C'est que ici, y a perdu 6 mains de 3\$ chacune. C'est ça, c'est que tu les as inversés.
 Mais tu comprends quand même le principe de l'affaire. Ok.
 S: 8/9[Iden] Ouais, ouais. C'est juste qu'y a pas vraiment de différence.

- E: Ici, si on voulait 3 X (-6), on pourrait dire: y joue 3 games... puis à chacune, y a perdu...
- S: 6\$. Oui, oui. C'est ça.
- E: Ok. Eh... on passe au suivant.
- S: Ok. Là, là... ça, j'étais pas sûr, là.
- 10*(C0:I-) Ok, j'étais sûr de la réponse, 18. J'suis pas sûr comment l'expliquer en métaphore.
- E: Ok. Parce que tu dis:
- 10[ME:-xX-Y] (Billy) perd 3 et perd 6... (Rz=18)
- 10{CI/pré}
- 10{Va/imp}
- 10{Va/con}
- 10{Sy-Ab}
- 10[Con:Trans]
- 10[OCD:lol]
- 10[OC:(MémUnit) + RaiLin]
- ça, ça serait comme perd 9.
- S: Oui. Mais là, c'est fois.
- E: T'es correct en argent, là-dedans. Je pense que c'est la meilleur façon d'y penser, là. Tiens, j'ai préparé ça. Ici, t'as... mettons 3 amis te donnent, ou tu gagnes 6\$. Ça te donne 18. Celui-là, on a pas besoin de...
- S: Non, non.
- E: Bon, ok. Mettons qu'on parle en termes de dettes. Ici, j'ai 3 amis, je leur dois 6\$ à chacun. Ou je joue 3 parties, puis je perds 6\$ à chacune. Ça va, hein?
- S: Oui, -18.
- E: Ici, on pourrait dire que j'ai 3 dettes de 6\$ chacune...
- S: C'est la même chose.
- E: 3 baisses de température de 6° chacune.
- S: Celui-là, c'est un p'tit peu plus dur, là.
- E: Un p'tit peu plus dur? Il y en a une qui m'en a trouvé une bonne, j'ai aimé ça.
- Je dois 3 paquets de bonbons, puis y a 6 bonbons dans chaque paquet. M/3
- S: C'est compliqué pour rien.
- E: Tu trouves?
- S: Ouais. Moi, j'aime mieux ça, la dette.
- E: T'aimes mieux 3 dettes de 6\$.
- S: Ou, ou, ou... t'as 3 dettes, mais là tes amis... y te paient chaque dette. A cause, ça te donnerait-tu la même affaire?
- E: Eh.....
- S: Non.
- E: C'est dans la division que ça s'utiliserait mieux, cette affaire-là.
- S: Ok. Ok.
- E: Celui-là, c'est vraiment une règle mathématique, mais tu peux voir ça comme... tes 3 amis, tu leur dois chacun 6\$. Puis tes 3 amis, là... y te disent: tu me dois plus rien.
- S: Aaaaah! Aaaaaah!
- E: Y annulent la dette. Chacun annule la dette. J'avais un problème de même dans votre test. C'était le bonhomme qui jouait au poker... puis, qui devait 50\$ à tous les joueurs.
- S: Oui, c'est ça.
- E: T'as ris parce que tu l'as dit à un autre. T'as dit: lis le problème numéro 45.
- S: Ouais, ouais.
- E: Billy the Kid rentre. Puis, y tue 3 de ces bonhommes-là. Qu'est-ce qui est arrivé? Dans le fond, ça y a donné...
- S: 150\$.

- E: 150\$, parce qu'y doit pus l'argent. Y est pas obligé de le payer.
- S: Ah, là... je comprenais pas trop, trop le problème. Le problème, c'est que lui... lui, y devait de l'argent aux 3 gars. Mais là, y les a tués... ça fait qu'il doit pas rien.
- E: C'est ça.
- S: Ah, je comprenais pas le problème.
- E: Donc, vois-tu comment est-ce qu'un moins fois un moins va donner un plus?
- S: Ouais.
- E: Ou bien, ce serait tes amis qui te disent... y en a un qui arrive et qui te dis: le 6\$ que tu me dois, oublie ça... ça fait assez longtemps que tu me le dois (rire). Puis, l'autre arrive et te dit encore la même chose. Donc, y annulent ou y enlèvent ta dette. Ça fait pas 18\$ de plus dans tes poches vraiment.
- S: Ça te met égal.
- E: Oui, mais ça te fait... y a une élève qui disait: ça fait 18\$ de plus à mon nom. C'était une élève, il y a quelques années, qui m'a trouvé l'histoire de Billy the Kid. J'avais jamais pensé à ça. Je l'ai trouvé vraiment bonne.
- En veux-tu une gross? Il y a une élève qui m'a dit que moins, c'était manger. M/4
J'ai mangé... ça $[(-3) \times 6]$, c'est 3 poignées de 6 chips. Puis, ils les mangent...
- S: Ah, c'est moins, ok (rire).
- E: Puis, avec l'autre moins, elle les vomit. Ça fait qu'ils reviennent (rire).
- S: (Rire).
- E: En tout cas.
- S: Je pense que je vais garder celle de Billy the Kid.
- E: Garde Billy the Kid, parce que ça explique bien ce qui se passe. Les 3 gars disparaissent...
- S: Ça fait que là... y doit plus rien.
- E: Y doit plus d'argent. Ça fait que ça te fait de l'argent de plus à toi. Tu vois ça? Ok. On va aller régler le problème du 0...
- S: Ok. Le premier.
- E: Mais tu les vois les négatifs ici, hein?
- S: Ouais.
- E: 3 dettes, 3 descentes de température...
- S: Les températures.... j'aime mieux avec l'argent.
- E: T'aimes mieux avec l'argent, mais les problèmes... y en a de toutes les sortes là, hein?
- S: Oui.
- E: Avant 3×0 , avant... dis-moi donc ce que ça fait, ça?
- S: (Rire).
- E: Là, tu me vois venir, hein? Bon, chacun de ceux-là.
- S: 11a[L*:0xY=0] Ok. Eh...(0 X 14) 14 X 0, c'est 0.
- E: T'es sûr?
- S: 11d[L*:-Xx0=0] Oui. Là... (-18) X 0, c'est... c'est 0.
- E: C'est 0?
- S: C'est 0.
- E: Pourquoi tu ris?
- S: Ben, j'suis pas sûr.
- E: Pourquoi t'es pas sûr?
- S: 11a[ME:0XY] Ben... si... ça, c'est comme si t'as 14\$..
11{Va/Imp} puis, là tu joues... tu joues pas... ben, y
11a{Va/mat} doit te rester 14\$.
11a{Sy-Ab}
11a{Cl/pré}
11a{Con:Trans}
11a[OC:StabEnt + RaiLin(MémUnit)]

- 11a[V:Comm]
 11*♦(C2:inc) J'suis pas sûr.
- E: Je le sais que t'es pas sûr, parce que regarde ce que t'as fait dans ton test. M/5
 S: Hon.... Ça, c'est mes réponses de mon test? Ah... J'étais pas sûr.
 E: Puis c'est quoi, le point? C'est quoi le, le, le....?
 S: Ah ben, ça... c'est que... ben là... c'est ça que je te dis là.
 E: Tu peux pas figurer une manière, dans ta tête...
 S: Universelle, de...
 E: Qui dirait: ah! c'est ça que ça veut dire? C'est de même que ça se passe?
 S: 11a[ME:0XY] Non. Ben là... là, comment je le vois, c'est
 11a{Va/imp} que y a 14\$... mais là, y doit pas rien à
 11a{Va/mat} personne... ça fait qu'il reste encore 14\$.
 11a{Cl/pré}
 11a{Sy-Ab}
 11a[Con:Trans]
 11a[OC:StabEnt + RaiLin(MémUnit)]
 11a[V:Comm]
- E: Donc, tu le vois un p'tit peu dans le sens de l'addition et de la soustraction, ton 0, là.
 S: Ouais.
 E: Parce que t'avais raison, c'est toute des 0.
 S: Ben là, j'étais... j'étais pas sûr...
 E: On va commencer avec celui-là, puis on va voir des métaphores de ça pour te montrer comment ça fait du sens.
 S: Ok.
 E: On va lire la tienne pour 3 X 0.
 S: 11c[MB:Xx0]
 11c{Cl/pré} Ok. Billy a joué 3 mains de poker, mais il ne
 11c{Va/con} gagnait rien. Donc, il a 0.
 11c[Con:Combin]
 11c[V:aucun]
 11c[N0 abs]
- E: Puis, t'as pas mis de degré ici, là. Qu'est-ce que c'est?
 S: Ah. J'ai oublié.
 E: 11c*(C4:M+) Qu'est-ce que tu mettrais comme degré de certitude?
 S: Ben là... ben là, je le sais que c'est 0. Ça ferait que je mettrais 4.
 E: Ok. Donc, ça a plein de bon sens, ça. Y joue 3 mains... puis à chaque game, y gagne pas, y gagne rien, c'est nul... donc, y a rien gagné.
 S: Ouais.
 E: Ça fait plein de sens. Celle-là, mettons que tu... elle est un peu bête avec 0 X 14 là... Je vais la baisser à 0 X 2. Mettons que t'es benévole... si t'es benévole, combien tu gagnes de l'heure? M/6
 S: 0.
 E: 0. Ton boss a gagné la lotterie... le 6 000 000, là... puis y dit: cette semaine, je vais tous doubler vos salaires pour partager avec vous autres.
 S: Mais, y en a pas de salaire (rire).
 E: Toi, t'en as pas (rire).
 S: (Rire).
 E: Mais, y en ont, je suppose... Donc...
 S: Ça l'augmente pas.
 E: Ça te l'augmente pas. Celui-là [(-8) X 0], c'est absolument la même chose.
 S: Tu dois.

- E: Mettons que ta mère te dit: J..., t'as une mauvaise habitude, t'arrives tout le temps en retard à l'école le matin. A cette heure, là... à chaque fois que t'arrives en retard, tu vas me devoir 8\$.
- S: Là, j'ai arrivé 0 fois en retard.
- E: T'es pas arrivé en retard une seule fois.
- S: Je dois pas rien.
- E: Tu lui as rien donné. Puis, tu peux faire la même chose avec ça [0 X (-5)]. Donc, commences-tu à voir le sens de...? Donc, une multiplication par 0, c'est toujours 0.
- S: Tout le temps.
- E: Oui, puis ce qu'il y a... c'est que dans ton test, celle-là (3 X 0), tu l'avais bon.
- S: Puis les autres (rire)?
- E: Puis les autres, tu t'es mis à déconner, là... puis à mettre... justement comme tu disais, à faire un genre d'addition... parce que tu pouvais pas figurer trop, trop, comment ça se pouvait.
- S: J'étais pas sûr.
- E: Non. Ok, ça va.

III: DIAGNOSTIC / CHANGEMENT CONCEPTUEL (+)

D/1

- Ok, division.
- S: Ok. C'est-ti bon mes divisions, ou...?
- E: Tu vas voir, là. Vois-y: $6 + 3$.
- S: Ben, c'est 2.
- E: Eh, eh....
- S: 12[MB:X+y] Ah, ah. Ok. Billy a (rire) 6\$ dans ses poches. Ses 3 amis arrivent, ok. Ils
12{Cl/pré} séparent l'argent en 3, donc 2\$ chaque.
12[Con:Vpart]
12[V:parts égales]
12=(C4) (4)
- E: Mais, c'est quoi qui m'empêche de penser qu'il y en a un qui aurait 1\$, l'autre aurait 2\$, l'autre...
- S: Egales, égales, 3...
- E: En 3 parties égales. Parfait. Excellent. Eh... $(-6) + 3$.
- S: 13[MB:-X+y] Ok, ben là... les 3 amis de Billy, ok... décident de payer sa dette de -6.
13{Cl/pré} (Donc, ils doivent payer 2\$ chaque).
13[Con:Vpart]
13[V:parts égales]
...comme sa dette de -6. Ça fait que là, eux autres...
- E: Des bons chums, là...(rire).
- S: Oui. Ça fait que là, eux autres... ok, égal encore, là...
- E: Oui. En parties égales, ok.
- S: Ça fait que là, eux autres, sont en dette de -2\$... comme on va dire. Ben là...
- E: 13=(C4:I+) Puis là, t'as dit que t'étais certain de ça, que c'était une bonne explication.
- S: Oui.
- E: Oui. Pourquoi?
- S: Ben parce que... lui, là... eux autres y viennent... puis là, lui a pus de dettes.
Mais, eux autres... eux autres ont -2.
- E: Y ont chacun -2.
- S: Oui. Ils doivent chacun 2\$ pour payer sa dette.
- E: Ok. T'étais fier de celle-là, hein?
- S: Oui. C'est-ti bon?
- E: Oui, oui, c'est bon. Ben, pourquoi que tu dis que t'es certain?
- S: Ben, tu l'as encerclé. Puis, t'avais mis une affaire. Je sais pas moi.
- E: Non, non, ça va. Regarde, y a un beau p'tit crochet rouge aussi.

- S: Ok, là. D/2
- E: (Rire). Le prochain.
- S: Ok. Le prochain, on va regarder ça.
 14[OC:loiX/Comm] Ben là, c'est la même affaire... là, avec les cartes. C'est la même affaire que les multiplications.
 14[ME:X+-y] Ok, les 3 amis de Billy lui offrent de payer
 14{CI/pré} sa dette de 6\$. (Donc, ils vont devoir 2\$ chaque).
 14{Va/imp}
 14[Con:Vpart]
 14[OC:Vpart→CommSig]
 14[V:parts égales]
- E: 14[OCD:loi] C'est pas une dette de 6. C'est un 6 que t'as là.
- S: Ben, c'est comme... c'est 6 amis, puis y ont une dette de 3\$. Mais ça, ça faisait pas de sens.
- E: Ça fait 50 cents, chaque.
- S: Je le sais. Ça fait que ça, là... c'est pour ça, ça faisait pas de sens.
- E: 14*(C4:M+) Donc...? T'as mis que t'étais certain, hein?
- S: Oui. Ben, je suis certain que c'est -2.
- E: 14*(C4?:I?) Ok, t'es certain que c'est -2. Ben moi, je te demande: es-tu certain que ton explication est bonne?
- S: Ben, les 3 amis de Billy arrivent, offrent de payer la dette de 6\$ de Billy. Donc ils vont devoir... Ben, je suis certain que ça, c'est vrai. Mais je suis pas certain que ça s'applique.
- E: Ce que t'es en train de dire, c'est qu'il a une dette de 6\$... puis, les 3 amis paient... puis, y en doivent chacun 2.
- S: Oui, c'est pareil... c'est pareil comme avant.
- E: C'est le même que l'autre.
- S: Oui.
- E: Allons voir le suivant, pour voir si t'as été plus brillant (rire).
- S: Ben non, j'ai pas été plus brillant (rire). Ok.
 15[ME:-X+-y]
 15{CI/pré} Les 3 amis de Billy refusent (rire) de payer la dette
 15{Va/imp} de 6\$ de Billy. Donc, il est dans le trouble (rire).
 15[Con:Vpart] (Rz=2)
 15[OC:Vpart/n]
 15[V:parts égales] D/3
- E: Il est dans le trouble (rire). Ok. Ouais.
- 15*(C0:I-) T'as mis certitude contraire. Tu trouves que ça faisait pas d'allure, pas une miette, hein?
- S: Non, non.
 15*(C4:M+/Rz) Ben je le sais que la
 15[OCD:loi] réponse est vraie, par exemple.
- E: Oui, je sais que tu connais tes règles. Bon. Ici, t'as un problème avec les signes de la division. On dirait que t'arrives pas à faire des signes qui aillent tout partout... puis dans tes problèmes, tu mets des signes n'importe comment. Ça fait que regarde, je vais essayer de te les ramasser dans un modèle. Je vais le faire avec quelque chose de visuel. Ça, c'est pas un champignon, c'est un ballon dirigeable... tu sais une montgolfière... comment ça s'appelle ça en anglais?
- S: Eh.. hot air balloon.
- E: Oui, c'est ça.
- S: T'as failli ton cours d'art, hein, je crois?
- E: Oui. Ben, y en avait pas dans mon temps. Y en avait le vendredi après-midi. Puis, si on avait pas

- été fins, y nous coupaient ça... puis, y nous donnaient des devoirs. Ça fait qu'on n'en avait jamais: y avait tout le temps quelqu'un, sur 30, qui avait pas été fin.
- S: Ah, ok.
- E: Je vais te le faire de façon visuelle. Puis ensuite, je vais essayer de te le traduire en argent. Parce que là, on le voit...
- S: Tu le vois mieux.
- E: L'argent, on le voit pas, hein?
- S: Ouais, avec des divisions. Ben...? Pas trop, non.
- E: Pas trop. Bon, regarde bien ici. Là, t'as le ballon... y a monté de 6 km. Ça marche? En 3 montées...
- S: Ça veut dire qu'y a arrêté.
- E: 3 étapes. Tu sais là... y a arrêté, puis y a reparti... pour réchauffer l'air, puis y est remonté.
- S: Egal, égal.
- E: Ouais. Donc à chaque fois, y faisait...
- S: 2 km.
- E: On va le reprendre en argent après. Mais, tu l'as compris parfaitement?
- S: Oui. Ok.
- E: Une autre que t'as compris parfaitement, c'est celle-là.
- S: C'est juste l'inverse de celle-là.
- E: C'est qu'au lieu de monter, y a descendu... en 3 étapes. Puis à chaque fois, c'était...
- S: De 2 km. -2 km.
- E: C'est ça, y faisait -2. Puis, t'as la bonne explication ici. D/4
C'est deux-là, t'étais mêlé. Dans tes problèmes aussi, t'étais mêlé. C'est drôle, hein?
Regarde bien. Ton ballon est là, il est à 6 km. Y va descendre jusqu'en bas, en 3 descentes.
- S: Mais, c'est déjà... Ben, comment ça que celui-là sont moins?
- E: Regarde bien. C'est ça que tu m'as dit que $6 + (-3)$, ça faisait -2. C'est vraiment une loi mathématique, mais on pourrait le comprendre comme ça...
- S: Hu, hu.
- E: Donc chacun va représenter -2. Vois-tu là, ses mouvements. Ça, c'était des montées. Ça, c'est des...
- S: Descentes, ok.
- E: Donc, $6 + (-3)$, ça fait des descentes... puis chacune, c'est -2, -2, -2.
- S: Hu, hu.
- E: Celui-là est différent. Puis regarde, c'est le même problème, là... puis, c'est pas le même dessin. Dans le fond, l'idée c'est: combien de ça qu'il y a là-dedans? (...) Combien de -3 km... combien d'étapes de -3 km, j'ai dans -6?
- S: 2.
- E: 2. Bon, tu comprends comment, jusqu'ici, ces deux-là? 3? 4? 4, 4, tous les deux? Parfaite compréhension.
- S: Oui, oui.
- E: Ok. Bon. En argent, t'as dit: y a 6\$ que tu partages avec 3 amis, en parts égales. Ici, tes 3 amis partagent ta dette de 6\$: ils ont chacun -2.
- S: Ici.
- E: Bon ici, faudrait penser quasiment en termes de compte de banque à vider.
- S: Aaaah, ok, ok.
- E: Oui, tu l'as?
- S: Oui. Oui, mais là, tu peux juste y aller 3 fois, on va dire. Tu peux pas y aller... tu peux pas le sortir tout en même temps.
- E: Ben oui. C'est un p'tit gars... y est tout petit...
- S: Puis là, y a une restriction là...
- E: Oui, c'est ça. Y a un p'tit compte de banque de 6\$... donc il fait...
- S: Il fait 3 sorties?

- E: C'est ça, 3 retraits. Donc à chaque fois, qu'est-ce qui arrive?
 S: -2, y pogne 2\$.
 E: C'est ça. Y sort 2\$ de son compte. Donc, le vois-tu avec l'argent ici?
 S: Oui. Oui.
 E: Je pense que tu vois le mieux, même, qu'avec le ballon.
 S: Oui.
 E: Ok. Bon, ici. D/5
 S: Là!
 E: L'as-tu, ou bien si tu veux que je le dise?
 S: En argent? Je vais essayer. Ça fait que là, lui...
 E: T'es dans les dettes ici, là par dessus la tête.
 S: Ok, il doit... il doit 6\$... mais là, y peut juste les payer en... non...?
 E: Ce serait plutôt comment est-ce qu'il les a empruntées que comment il les a payées.
 S: Ahhhh!
 E: Combien est-ce que j'ai emprunté de 3\$...
 S: Aaaaa!... pour faire... Aaaaah, ok!
 E: Puis, vois-tu? Ça, c'est des partages... puis celui-là, y se comprend quasiment juste en cherchant le nombre de parts, le nombre de fois.
 S: Ok. Ok.
 E: Combien est-ce que j'ai emprunté de 3\$ pour me faire une dette de 6\$.
 S: 2 fois. J'ai emprunté 2 fois. Ok, ok.
 E: Ou à combien d'amis, j'ai emprunté 3\$ pour que je doive 6\$? 2 amis.
 S: Ok. Ok.
 E: Tu le vois parfaitement?
 S: Ouais. Hu, hu.
 E: Ok. Puis, c'est ça qu'y a de drôle, c'est de voir que le dessin est pas le même. Puis pourtant, c'est 6 et 3 pareil. Mais là, c'est combien d'affaires de même dans ça. 4 sur 4?
 S: Hu, hu. On va essayer.
 E: On va aller avec les divisions avec 0. On va aller, par exemple, avec la plus simple. Les deux autres se ressemblent. On va aller avec 0 + 3. Ok?
 S: Hu, hu. Ok. Un homme veut jouer...
 E: 16[L:0+Y/-Y=0] Arrête donc un peu une minute. 0 + 9, 0 + (-1), puis 0 + (-15).
 S: (Rire). Toute 0.
 E: Tout 0. Par -1, aussi?
 S: Oui.
 E: Par -15, aussi?
 S: Divisé... oui. Toute 0.
 E: 16[L:0=1+Y/-Y=I+/-] Pourquoi t'a écrit ça (9, -1, -15)?
 S: (Rire). Ça, c'est pareil comme... Ben là, là...
 E: Oui, explique-moi ça.
 S: Ça, je le sais que c'est mal parce que ça serait 1.
 E: Donc, t'as considéré ton 0 comme un 1. Es-tu capable de m'expliquer...?
 S: 11[L:0=1XY=Y] Ben, c'est pareil comme le fois. C'est pareil comme les autres avant là... tu sais là.
 E: Attends un p'tit peu. Où est-ce qu'elles étaient? D/6
 S: Oui, c'est pareil comme ça.
 E: C'est vrai, t'avais considéré le 0 comme un 1.
 S: Pareil, pareil.
 E: 16[OC:StabEnt→Inv + 0=1]
 E: Mais, pour quelle raison?

- S: J'étais pas sûr. Je le sais pas.
- E: Y a pas un p'tit quelque chose dans ta tête, là?
- S: Ouais. Ben, c'est comme...
- E: Une p'tite règle?
- S: 16a[ME:0+Y] Oui. Comme si... c'est 0 + 9... c'est comme...tu dois pas d'argent à
 16a{Va/con} personne... mais, y a 9 personnes.
 16a{Va/mat}
 16a[Con:Vpart]
 16a[OC:StabEnt]
- E: 16a[OC:StabEnt] Donc, y restent toujours là?
- S: Comme... y a 9 personnes, mais tu leur dois pas rien... ben, y a encore 9 personnes.
- E: 16a[Con:Vpart] Ok, ok, ok. Bon, dans le fond là... toi, tu prends... tu continues à prendre le partage.
- S: Oui.
- E: Puis, regarde. Dans le fond, y faudrait continuer à considérer ça comme un nombre de parts plutôt. Combien est-ce qu'il y a de ça là-dedans?
- S: Y en a 0.
- E: Combien est-ce qu'il y a de 9 dans 0? Y en a 0.
- S: Ok.
- E: Et puis le partage, c'est un mauvais....
- S: Exemple.
- E: Ben, c'est tellement un mauvais exemple, que ça t'emmène à écrire des réponses de même. Parce que regarde ici ce que t'as dit. Qu'est-ce que t'as dit?
- S: 16a[ME:0+Y] Ok. Un homme veut jouer au poker avec 3\$, mais
 16{Va/imp} personne veut jouer avec lui (rire). Donc il
 16{Sy} gagne rien.
 16{Va/con}
 16[Con:Vpart]
 16[OC:Vpart→InvUnit]
- E: Pourquoi tu ris?
- S: Ben, parce que c'est drôle (rire).
- E: 16*(C4:I+) Oui. T'as mis que t'étais certain que c'était la bonne solution, la bonne représentation. D/7
- S: Ouais. Ouais. Ben ouais, c'est 0, y gagne rien.
- E: Ok, je suis bien d'accord avec toi. Mais, où est-ce qu'elle est la division?
- S: Ben là, ben y a... un homme veut jouer au poker avec 3\$, mais personne... ben là, la division... c'est que personne veut jouer avec lui. Personne veut jouer... ben ça, c'est le 0, là. Comme si j'aurais dit: ben, y a 3 gars qui veulent jouer avec lui... c'est 3 + 3. Mais là, je dis: y a personne qui veut jouer avec lui.
- E: Y aurait-il une meilleure...? Essayons de voir comment...
- S: Tu peux exprimer...
- E: Ça, de façon à ce que tu fasses pus d'erreurs, non plus.
- S: Ben, n'importe quoi divisé par 0, c'est 0.
- E: Ok, regarde, j'en ai une... en argent, encore.
- S: Ok. Ok.
- E: Toi et tes 2 chums, vous achetez des billets de lotterie. Puis, vous dites: ce qu'on va gagner, là...
- S: On le partage.
- E: A parts égales. Puis vous dites: ce qu'on va gagner, on le sépare en parts égales. Arrive la 6/49, y a pas un saudit billet qui a gagné. Vous êtes à 0. Ça fait qu'à parts égales, là...
- S: J'ai 0.

- E: Chacun a...
- S: On est 3, on a payé chacun....
- E: Puis tout le monde a tout perdu. Donc, tu vois bien que c'est vraiment un 0.
- S: Hu, hu.
- E: Allons maintenant à la division par 0. $3 + 0$.
- S: 17[ME:X+0] Ok. Ben là, ok... ça c'est... ben 3 jeunes
 17{Cl/pré} hommes jouent au poker... (sans argent. Donc,
 17{Va/imp} ni un ni l'autre gagnent.)
 17{Va/mat}
 17{Va/con}
 17[Con:Vpart]
 17[OC:Vpart→InvUnit→Stab0]
- E: Pourquoi jeunes (rire)?
- S: Ben, c'était trop... c'était trop... c'était toute la même chose (rire). Fallait que je change un p'tit peu. Ok, là... sans argent, donc ni un ni l'autre gagnent. Ça fait que là... y jouent les 3...
- E: Bon, ça c'est les 3 gars, le 3.
- S: Oui. Puis là, y ont pas d'argent. Comme y jouent juste pour le fun, y ont pas d'argent. Ben, y gagnent rien.
- E: Où est-ce qu'elle est la division?
- S: Ben c'est ça, les 3 gars. C'est les 3, là. Puis là... c'est ça, y sont 3.
- E: 17*♦(C3:I-) T'as mis confiance. Pourquoi confiance? D/8
- S: Ben, j'étais pas sûr, sûr, sûr.... mais, j'étais confiant.
- E: Serais-tu capable de me dire où est-ce que c'est que t'es pas sûr?
- S: Ok, les 3... ben, ok... ben, ni un ni l'autre gagnent. J'étais pas sûr si c'était... comme une division, comme tu dis. J'étais pas sûr s'il y en avait. Mais là, y sont 3...
- E: Ok. Je lis ça, là... puis, j'essaie de faire une... Ok, j'ai 3 hommes...
- S: Ok. Puis là, y jouent au poker, là. Sont juste 3.
- E: Bon. Si ni un, ni l'autre, gagnent... c'est comme si c'est $+ 0 - 0$. Y ont pas gagné, ni perdu.
- S: Non, non. C'est pas ça que je veux dire. Non, j'veux dire ni un ni l'autre des 3 gagnent.
- E: Où est-ce qu'elle est la division?
- S: Je le sais pas (rire). C'est pour ça que j'étais pas sûr. Ni un, ni l'autre... j'voulais dire les 3... y en a pas un qui gagne. Mais y sont 3, par exemple. C'est ça.
- E: Ouais... (...) Hum... j'pense qu'il te manque une division là-dedans. Vois-tu qu'il manque une division, toi?
- S: Ben moi, non. Moi, je vois pas... parce qu'ils sont 3... y sont 3, y jouent tous au poker.
- E: 17*♦(C3:M+) Oui. Ben au moins, tu veux me dire que ça égale à 0, $3 + 0$?
- S: Oui, oui. Oui, oui.
- E: C'est pas vrai, ça.
- S: $3 + 0$?
- E: Ça égale pas 0.
- S: Non?
- E: Non.
- S: Qu'est-ce que ça l'égale?
- E: Je vais t'expliquer ça tout à l'heure. On va aller voir $0 + 0$.
- S: 18[ME:0+0] Ok. Ok. Le poker est vide. Donc, personne
 18{Cl/pré} gagne rien. Bon.
 18{Va/imp}

- 18{Va/mat}
 18[Con:Vpart+OpInv]
 18[OC:Vpart+OpInv=Mult→Stab0]
- E: Où est-ce qu'elle est la division?
 S: Y en pas.
 E: Y en a pas?
 18*♦(C4:I+) Pourquoi t'as mis que t'étais certain? D/9
 S: Ben, j'suis certain que s'il y a personne là,
 puis personne gagne... ben, c'est 0.
 E: Tu penses que $0 + 0$, ça fait 0?
 S: Oui.
 E: Ok. Mais c'est pas vrai.
 S: 18[L:0+0=1] Mais, c'est 1.
 E: C'est 1?
 S: Ouais.
 E: T'as changé d'idée?
 S: Ouais.
 E: Pourquoi?
 S: 18[OC:Nparts] Parce que combien de 0 y a dans un 0? Y en a 1.
 E: Tu dis: y en a 1. T'es certain, là?
 S: De 1?
 E: Oui.
 S: J'suis pas certain. Je pense.
 E: Tu te mettrais à 3, quasiment?
 S: Oui.
 E: Ok. Je vais te finir ton cours... ton cours privé avec l'explication de la division par 0. Ok.?
 S: Ok.
 E: Ok. Ça, les mathématiciens ont bretté des centaines d'années, là-dessus. Y en a qui disait: ça fait 0. D'autres disaient: ça fait 1.
 S: $0 + 0$?
 E: Oui. Ah oui, les mêmes choses que tu disais.
 S: Ok.
 E: Jusqu'à temps qu'il y en ait un qui trouve une belle p'tite solution comme ça. Y a dit: regardez bien les gars (rire)... y a dit: 1×0 , ça fait 0. T'es d'accord avec ça? Bon. T'as fait 10A, l'année passée. T'as appris que je pouvais isoler le 1, en faisant l'inverse de $\times 0$ de l'autre côté. Donc, $1 = 0 + 0$. Hein?
 S: Je vois ça.
 E: Bon. Y dit: regardez bien les gars, à cette heure, $2 \times 0 = 0$.
 S: Là, tu peux inverser.
 E: Là, tu peux inverser. Puis $0 + 0 = 2$... 3×0 ?
 S: 0 (rire).
 E: 0. Puis là, si je continuais, qu'est-ce qui se passerait?
 S: Ça continuerait à l'infini.
 E: Puis là, ça pourrait partir jusqu'à moins l'infini de l'autre bord. Ça fait qu'il y en a bien des possibilités. Qu'est-ce qu'on dit dans ce temps-là?
 S: C'est incertain.
 E: Indéfini.
 S: Indéfini.
 E: C'est pas défini à une réponse. C'est pas infini, là. Parce qu'infini, c'est rien que le petit bout, au bout de la droite.
 S: L'infini, ok. D/10

- E: Le plus loin possible. C'est un point.
 S: Indéfini.
 E: Ça, c'est indéfini. Ça veut dire que ça peut être n'importe quoi.
 S: Ok.
 E: Parce que n'importe quoi $\times 0$, ça donne 0... si on fait l'opération inverse.
 S: Ok.
 E: Puis, c'est ce qui fait que les profs font continuellement des restrictions. Tu te rappelles les restrictions?
 S: Oui, n'égale pas... Aaaah.
 E: Y disent a/b , à condition que b n'égale pas 0.
 S: C'est ça.
 E: Parce que là ton problème, il ne finit plus. Mais si tu continues en 11G et en 12G, tu vas t'apercevoir... je me rappelle, dans le livre bleu, dans les équations quadratiques, y en avait plusieurs. T'arrives d'un coup à des choses comme $x/0$.
 S: Ça se peut pas.
 E: Puis t'arrêtes. Tu peux pas continuer avec égale 1, égale 2, égale 3, égale 4, égale 5... Tu dis: indéfini. T'arrêtes, tu te rends pas plus loin. Les élèves aimaient ça les problèmes indéfinis...
 S: (rire).
 E: Parce qu'ils n'avaient pas besoin de les finir. Ça, c'est $0 + 0$. Je peux peut-être, par exemple, te faire une p'tite métaphore pour te faire comprendre....
 S: Mais, je comprends là ça.
 E: $6 + 0$.
 S: Ok.
 E: C'est indéfini, aussi.
 S: Ben, c'est l'inverse de ça là, non?
 E: Ça, c'est $0 + 0$.
 S: Ouais. Mais c'est comme...
 E: Que ça soit l'inverse? Pas vraiment.
 S: Mais comme $3 + 0$?
 E: Parce que l'inverse de ça, c'est 0×0 .
 S: Ok.
 E: Puis ça, ça se comprend bien mieux en disant: combien de parts, combien est-ce qu'il y a de morceaux de même dedans... que de penser à partager le premier nombre. Parce que là, partager en 0 morceaux, faut avoir de l'imagination pas mal pour voir ça, hein?
 S: (Rire).
 E: Donc, faut regarder 0 dedans, combien est-ce qu'il va de fois.
 S: Ben 0 dans 6, 0 dans 6?
 E: Il y en a combien de 0 dans 6? (...) Il peut y en avoir 50. C'est pas gros 0, ça.
 S: C'est indéfini.
 E: C'est indéfini. Quelqu'un me dit: il y en a 10 000. Moi, je suis pas capable de lui prouver le contraire, hein? D/11
 S: Non.
 E: Parce que 0... Ben, on va faire ça... mais, je sais pas si tu vas comprendre ce que je veux dire. Mais, peut-être que tu vas le comprendre. Bon, j'y vais à l'envers. Combien est-ce qu'il y a de loonies, ça c'est 1, dans 6\$? Y en a 6.
 S: Oui.
 E: Combien est-ce qu'il y a de 2\$, des billets bruns dans 6\$?
 S: Y en a 3.
 E: Y en a 3.
 S: Ouais, je travaille au Treats sur St-Laurent. Je connais ça.
 E: Puis, si je te demandais: combien est-ce qu'il y a de 0 dans 6\$. Là, tu peux me dire: y en a 50,

- y en a 10 000. Puis, il y a un p'tit genre de preuve de ça. Eh... Tu sais qu'à la banque, ils donnent de l'intérêt?
- S: Oui.
- E: Puis quand ils calculent l'intérêt...
- S: C'est pas assez.
- E: Non, y en donnent pus gros, hein?
- S: Non (rire).
- E: Là, y sont rendus à des .75 par je ne sais pas quoi. Puis là, ça se met à faire des chiffres à ne plus finir, hein? Mais.... mettons 21.614085.
- S: Ok.
- E: Puis 21.612375.
- S: Ok.
- E: Mais, eux autres, ils ne s'embarassent pas avec ça, ces affaires-là, hein? Qu'est-ce qu'ils font? Ils coupent ça ici, puis y disent: t'as eu 21.61.
- S: Ouais. Ben, y font là... Si ça c'est plus que ça, ils font l'arrondissement.
- E: Non.
- S: Y font juste le couper?
- E: Y paraît qu'ils coupent. Parce que les ordinateurs.... c'est comme... les ordinateurs sont bons pour calculer la moyenne, mais la médiane... ils ont bien du trouble avec ça.
- S: Ouais?
- E: Le chiffre du milieu, là? Puis là, savoir si je complète ou....
- S: Ouais, y faudrait qu'ils fassent ça à la main, puis y ont....
- E: Oui. C'est ce que mon fils me disait, qu'il avait lu à quelque part que ça coupe là... que les ordinateurs viennent tous mêlés avec ça.
- S: Ça fait que là... Ben, ça c'est 21.61\$.
- E: Ouais.
- S: Parce qu'il coupe là. Où est-ce que tu peux aller avec ça, avec les cents?
- E: Ben sais-tu, y paraît qu'ils font de l'argent. S'ils ramassent toutes les cents de tout le monde...
- S: Les moitiés de cents, les quarts de cents....
- E: Ça finit par faire des 1 000.
- S: Ben, c'est ça... nous autres quand... si c'est... Regarde, quand le monde achète quelque chose... puis là, c'est... je vais te donner un exemple, attends. C'est 3... si c'est 7% de taxe sur 50 cents.... D/12
- E: Ça fait 3 1/2. Là, vous chargez 4 dans ce temps-là.
- S: Ouais. Oui, oui, c'est ça. Si c'est 1\$ égale 7% de taxe. La moitié, ouais... t'est pas pour donner... 3 1/2.
- E: Si le produit coûte 50 cents, là.
- E: Tu charges 4.
- S: On charge 4, et non 3 1/2. Parce que 3 1/2, c'est quoi?
- E: Mais, il en paie juste 3 1/2, ton boss. Quand c'est tout ramassé ensemble. Puis le reste, il le garde.
- S: Ouais. Ouais.
- E: J'sais pas s'il se fait de l'argent un peu avec ça?
- S: J'sais pas. Mais, c'est ça que j'ai dit à un client. J'ai dit: comment ça se peut que si t'achètes quelque chose à 50 cents, que c'est pas 3 1/2. Mais, comment tu pourrais faire ça, 3 1/2. C'est quoi 3 1/2?
- E: Ben, ça te prendrait 3 cents, puis en chopper une dans le milieu. C'est pas possible.
- S: Non.
- E: Donc, eux autres, c'est la même chose. Puis en faisant ça, ils se trouvent quasiment à déclarer que ça (.004...), c'est égal à 0. (...) Parce qu'ils te le donnent pas.
- S: Mais en fait?
- E: Non, non, mais ç'est ça qu'ils disent. Puis des 0 de même, dans 6\$, y en a 1500.

- S: Ça...
- E: Ces bouts-là, il y en a 1500 dans 6\$. Parce que c'est .004. Si tu prends ta calculatrice... $6 \div .004$... tu vas voir que ça te donne 1500.
- S: Ou $1500 \times .004$, ça donne 6.
- E: C'est ça. Et puis là, si je prenais le 6, puis je le divisais par ce 0 là.
- S: Par .002.
- E: Ben, y en a 3000 dans ça.
- S: Ça fait que...
- E: C'est indéfini. A chaque calcul que la banque fait, il y a un chiffre différent. Puis y disent tout le temps: c'est 0... tu vois jamais la couleur de ça. Puis la réponse serait tout le temps différente.
- S: Ça fait que là, s'il y aurait une personne qui... s'il y avait 1 500 personnes qui ont ça, ça donne 6\$.
- E: Oui, ça donne 6\$ à la banque. Ils en ont un paquet de clients. S'ils calculent à chaque mois. Ou il y en a que c'est quotidien.
- S: Chaque semaine.
- E: Non, y en a que c'est chaque semaine... puis il y en a d'autres que c'est à intérêt quotidien. Donc, c'est calculé chaque jour. Donc, ça veut dire: y a 365 jours. Mettons qu'ils t'ôtent 1/2 cent à chaque fois.
- S: 1/2 cent, ça fait....
- E: Ça leur fait... $365 \div 2$. Mettons presque 2\$ par personne, par année.
- S: Y en a des personnes.
- E: Ben, c'est ça. Puis ça, c'est de même tout partout, pour tout ce qui se passe. Donc, y a sûrement quelque 1 000... pas de quoi se mettre riche, là...
- S: Non, mais...
- E: Mais quelques 1 000\$ qui flottent, qu'ils ne savent pas d'où ça vient... mais que c'est en surplus dans leur banque.
- S: Hu, hu.
- E: Ok. Good. Aie, c'est bon.
- S: Ok. C'est tout?
- E: Oui, t'es pas mal bon.
- S: Ok.
- E: Bon, y a une chose que j'aimerais te rappeler. Quand tu fais tes problèmes, guette tes signes, puis oublie z'en pas. Ça, c'est une chose importante, là. Puis quand t'as du calcul à faire, oublie pas de penser en argent.
- S: Ok.
- E: J pense que je t'avais fait un genre de petit résumé. Je devrais te le donner.
- S: Celui-là?
- E: Tiens, celui-là. Ça là, c'est des affaires où tu dois penser en argent. C'est surtout ces deux-là qui te bloquaient, hein?
- S: Hu, hu.
- E: Et puis, ça tu l'avais bien. Puis ça ici, tu te mêlais ben raide quand il y avait - (-.
- S: Ouais. Mais là, je le sais.
- E: Là, tu le sais. Donc, c'est les deux choses à te rappeler ça. Si tu veux les garder, juste pour te le remettre en tête.
- S: Ok.

D/13

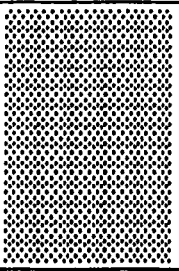
Appendice F-1: Fiche-synthèse des résultats

FICHE-SYNTHESE DES RESULTATS (ERREURS)

Numéro: _____

Nom: _____

ADDITION:

TYPE	APPLICATION				VÉRIFICATION			
	#	CALCUL	#	PROBLÈME	MÉTAPHORE	DC	CALCUL	DC
x+y	47		10					
	66		18					
	80		33					
-x+y	20		3					
	41		14					
	71		24					
-x+y	9							
	12							
	65							

Appendice F-2: Fiche-synthèse diagnostique

FICHE-SYNTÈSE DIAGNOSTIQUE (ERREURS)

Numéro: _____

Nom: _____

ADDITION:

CALCUL							PROBLÈME							
TYPE	MÉTAPHORE	LOI-OBST	Pré	App	Ver	Conc.	Pré-test	Applic	Vérfic	P	A	V	Conc.	
x+y														
	-x+y													
		-x+y												

Appendice G-1: Analyse et interprétation des résultats aux pré-tests

Cette section présente les résultats quantitatifs et qualitatifs aux trois pré-tests, une analyse des patrons de réponses à ces tests, ainsi qu'une interprétation de ces résultats.

Les résultats au pré-test de calcul

Les réponses aux 80 items du pré-test de calcul furent évaluées pour chaque élève. Il fut déterminé qu'un élève rencontrait un obstacle épistémologique au niveau d'une opération quand il produisait plus d'une réponse erronée au niveau des trois items représentant cette opération. Ainsi, un patron d'erreurs est stable, si les trois items présentent le même patron d'erreurs; il est dominant, si deux des trois items présentent le même patron d'erreurs; il est absent si les trois items présentent des patrons de réponses différents.

On se rappelle que chaque opération du pré-test se présentait selon des séries, où l'emplacement des nombres inférieurs et supérieurs était différent (e.g. $-3 - 6$ et $-6 - 3$), afin d'étudier l'effet posé par ces permutations. Les réponses à ces paires d'opérations de même structure furent comparées afin de déterminer si l'erreur était isolée à une configuration de l'opération. Une erreur fut classifiée comme isolée lorsque les items d'une opération de la paire de même structure (e.g. $-3 - 6$) présentaient au moins deux réponses erronées alors que les items de l'autre (e.g. $-6 - 3$) présentaient au moins deux réponses correctes.

Les réponses aux paires d'opérations de même structure (e.g. $-3 - 6$ et $-6 - 3$) furent également comparées afin de déterminer si les erreurs se présentaient selon des patrons différents d'une configuration à l'autre. Les erreurs furent classifiées comme différentes lorsque les items d'une opération de la paire de même structure présentaient un patron d'erreurs stable ou dominant (e.g. $-3 - 6 = 3$) qui est différent du patron stable ou dominant présenté par les items de l'autre (e.g. $-6 - 3 = -3$). Les erreurs furent aussi classifiées comme différentes lorsque les items d'une opération de la paire de même structure présentaient au moins deux réponses dont les patrons (e.g. $-3 - 6 = 9$ et $-3 - 6 = 3$) ne correspondaient pas à ceux des réponses aux items de l'autre (e.g. $-6 - 3 = 18$ et/ou $-6 - 3 = -3$).

Les Appendices G-2 à G-4 présentent la fréquence des différents patrons d'erreurs rencontrées. Le tableau 1 résume et complète ces résultats. Pour mieux comprendre ce tableau et les autres qui suivront, rappelons que pour chaque opération, la minuscule indique le plus petit nombre et la majuscule indique le plus grand nombre. Le "x ou X" indique le premier terme alors que le "y ou Y" indique le second terme. Ainsi, $-3 - 6$ se traduirait par $-x - Y$ et $-6 - 3$ par $-X - y$. Il est également à noter que, dans l'en-tête de ce tableau, la lettre G identifie les résultats des élèves de niveau général, alors que la lettre A identifie ceux du niveau avancé.

Au tableau 1, si on se réfère aux lignes qui représentent les opérations avec les nombres naturels ($x + y$, $X - y$, $x X y$ et $X + y$), on remarque d'abord que ces opérations sont bien maîtrisées par les élèves des deux niveaux, à l'exception d'un seul élève de niveau général qui commet des erreurs systématiques lors de la soustraction.

Si on se reporte maintenant au grand total, à la fin de la deuxième page du tableau, on constate que les résultats bruts indiquent 32.9% d'erreurs au niveau général par rapport à 10.9% au niveau avancé. Si on exclut la division par zéro (0), qu'aucun élève ne maîtrise, ces pourcentages (entre accolades, au bas de la colonne pourcentage) sont rétablis à 28.8% d'erreurs au niveau général par rapport à 5.5% au niveau avancé, ce qui donne une représentation plus juste de la différence de niveau d'habiletés mathématiques de ces deux groupes. De ces derniers pourcentages d'erreurs, un calcul des fréquences d'erreurs révèle qu'environ le quart (8.0%) de ces derniers pourcentages d'erreurs (entre accolades) se rapportent aux autres

Tableau 1: Fréquences des erreurs au pré-test de calcul

Erreur	Avec patron	Sans patron	Patron différent	Erreur isolée	Total	Pourcentage
Niveau	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) % (%)
ADDITION / SOUSTRACTION						
$x + y$	- -	- -	- -	- -	0(0)	0.0(0.0)
$-X + y *$	6(0)	2(0)	[1(0)]	[1(0)]	8(0)	36.4(0.0)
$-x + Y *$	7(0)	3(0)	[4(0)]	[3(0)]	10(0)	45.5(0.0)
$X - y$	1(0)	- -	- -	- -	1(0)	4.5(0.0)
$x - Y *$	11(3)	1(0)	[3(3)]	[3(3)]	12(3)	54.5(14.3)
$0 - Y *$	- -	- -	[7(4)]	[5(4)]	14(4)	63.6(19.0)
$-x - Y *$	12(0)	3(0)	[1(0)]	[1(0)]	15(0)	68.2(0.0)
$-X - y * \diamond$	15(1)	2(0)	[11(1)]	[3(1)]	17(1)	77.3(4.8)
$-X - 0 \diamond$	- -	- -	[5(1)]	[1(1)]	9(1)	40.9(4.8)
$x - (-Y) * \diamond$	11(2)	1(0)	[0(0)]	[0(0)]	12(2)	54.5(9.5)
$X - (-y) *$	9(2)	3(0)	[4(0)]	[0(0)]	12(2)	54.5(9.5)
$0 - (-Y) \diamond$	- -	- -	[9(2)]	[4(2)]	12(4)	54.5(19.0)
$-x - (-Y) *$	11(1)	5(1)	[3(0)]	[3(0)]	16(2)	72.7(9.5)
$-X - (-y) *$	14(3)	2(1)	[8(2)]	[3(2)]	16(4)	72.7(19.0)
Niveau général	81.5%	18.5%	36.6%	17.6%	50.0%	50.0%
Niveau avancé	85.7%	14.3%	56.5%	56.5%	7.8%	7.8%
MULTIPLICATION						
$x X y$	- -	- -	- -	- -	0(0)	0.0(0.0)
$x X (-Y) *$	1(0)	1(0)	[0(0)]	[0(0)]	2(0)	9.1(0.0)
$X x (-y) *$	3(2)	- -	[2(2)]	[1(2)]	3(2)	13.6(9.5)
$(-x) X Y *$	0(1)	- -	[0(1)]	[0(1)]	0(1)	0.0(4.8)
$(-X) x y *$	1(1)	1(0)	[2(1)]	[2(1)]	2(1)	9.1(4.8)
$(-x) X (-Y) *$	4(1)	1(0)	[1(0)]	[1(0)]	5(1)	22.7(4.8)
$(-X) x (-y) *$	4(1)	1(0)	[1(0)]	[1(0)]	5(1)	22.7(4.8)

... à suivre

Tableau 1 (suite)

Erreur	Avec patron	Sans patron	Patron différent	Erreur isolée	Total	Pourcentage
Niveau N(N)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) % (%)
MULTIPLICATION						
$0 \times Y$ *♦	- -	- -	[1(1)]	[1(1)]	3(1)	13.6(4.8)
$0 \times (-Y)$ *♦	- -	- -	[0(0)]	[0(0)]	2(0)	9.1(0.0)
$X \times 0$ *♦	- -	- -	[0(0)]	[0(0)]	5(0)	22.7(0.0)
$(-X) \times 0$ *♦	- -	- -	[2(1)]	[2(1)]	7(1)	31.8(4.8)
0×0 ♦	- -	- -	[1(0)]	[1(0)]	1(0)	4.5(0.0)
Niveau général	76.4%	23.5%	28.6%	25.7%	13.3%	13.2%
Niveau avancé	100.0%	0.0%	66.7%	66.7%	3.2%	3.2%
DIVISION						
$X + y$	- -	- -	- -	- -	0(0)	0.0(0.0)
$(-X) + y$ *	3(0)	1(0)	[2(0)]	[2(0)]	4(0)	18.2(0.0)
$X + (-y)$ *	3(2)	- -	[2(2)]	[1(2)]	3(2)	13.6(9.5)
$(-X) + (-y)$	3(1)	1(0)	- -	- -	4(1)	18.2(4.8)
$+ 1 \text{ \& } (-1)$	2(1)	2(0)	- -	- -	4(1)	18.2(4.8)
$0 + Y$ *	- -	- -	[0(1)]	[0(1)]	1(2)	4.5(9.5)
$0 + (-Y)$ *	2(1)	2(0)	[3(0)]	[3(0)]	4(1)	18.2(4.8)
$X + 0*/(-X) + 0$ *	22(21)	- -	[3(1)]	[0(0)]	22(21)	100.0(100.0)
$0 + 0$	- -	- -	- -	- -	22(21)	100.0(100.0)
Niveau général	85.4%	14.6%	41.7%	17.6%	32.3%	{ 9.1%}
Niveau avancé	100.0%	0.0%	15.5%	11.5%	25.9%	{ 3.3%}
GRAND TOTAL						
Niveau général	145(44)	32(2)	[76(23)]	[42(22)]	253(80)	
Niveau avancé	81.9%	18.1%	34.2%	18.9%	32.9%	{28.8%}
	95.7%	4.3%	40.4%	38.6%	10.9%	{ 5.5%}

* / ♦ : Paire d'opérations de même structure. (%) : Pourcentage excluant la division par zéro (0)

[] : Les erreurs isolées à un item de la paire d'opérations de même structure et les erreurs présentant différents patrons d'un item à l'autre n'ont pas été additionnées pour donner le total.

opérations avec le zéro (0) pour le niveau général, par rapport au tiers (2.0%) pour le niveau avancé. Si on compare finalement les pourcentages d'erreurs, retrouvés en dernière colonne du tableau pour chaque catégorie d'opérations, on constate que la catégorie "addition / soustraction" engendre plus d'erreurs que les catégories "multiplication" et "division" pour les deux groupes, selon un rapport approximatif de 4 : 1 : 1 pour le niveau général et 2 : 1 : 1 pour le niveau avancé. Ces résultats sont en accord avec les répertoires d'obstacles épistémologiques identifiés par les experts lors des transitions des nombres naturels aux nombres entiers (Brousseau, 1989a), puis aux nombres relatifs (Glaser, 1981; Tirosh & Graeber, 1990, 1994; Vergnaud, 1989a, 1989b). On y insiste davantage sur les problèmes causés par le zéro (0) ainsi que ceux qui sont posés par l'addition et la soustraction des nombres relatifs: quand la soustraction cesse d'être nécessairement une diminution et l'addition une augmentation, et quand la possibilité de soustraire un nombre négatif se manifeste. Si on jette un regard comparatif sur les résultats aux différents items du tableau 1, on constatera que ce sont précisément ces items qui engendrent les plus grandes quantités d'erreurs de toutes sortes.

Si on revient maintenant au grand total de ce tableau, on observe que les erreurs se répètent avec un même patron selon des pourcentages de 95.7% au niveau avancé et de 81.9% au niveau général. Ces résultats sont également consistant avec ceux des recherches précédentes qui affirment que les erreurs épistémologiques se manifestent systématiquement et sous forme de configurations consistantes (Glaser, 1981; Matz, 1980; Resnick & Ford, 1981; Tatsuoka, 1984). On explique la stabilité et la solidité de ces erreurs par la validité, la cohérence et l'efficacité locales des conceptions qui les supportent (Brousseau, 1983; Léonard & Sackur, 1990; Vosniadou, 1994). Cet argument définit aussi en quelque sorte la nature de la différence de 13.8% existant entre les deux niveaux. En effet, les entrevues ont révélé un plus grand nombre d'élèves de niveau général qui affirmaient ne posséder aucun savoir pertinent à la résolution de certaines opérations ou qui énonçaient une série de lois conflictuelles pour expliquer la façon d'effectuer une même opération. En d'autres mots, ces élèves ne possédaient pas de conceptions valides, cohérentes et efficaces pour ces opérations.

Toujours au grand total, il est intéressant de constater que les paires d'opérations de même structure (identifiées par * et ♦) révèlent des patrons différents de réponses selon des pourcentages de 40.4% au niveau avancé et de 34.2% au niveau général. Ainsi, dépendamment de l'emplacement du plus grand nombre aux items "-3 - 6" (-x - Y*) et "-6 - 3" (-X - y*), ou de la présence d'un zéro (0) aux items "- 6 - 3" (-X - y♦) et "-6 - 0" (-X - 0♦), les élèves ne produiront pas le même patron de réponses. De ces derniers pourcentages, le grand total révèle que 38.6% (niveau avancé) et 18.9% (niveau général) des erreurs sont alors isolées à une seule opération de la paire de même structure alors que l'autre est réussie. Chez les élèves qui éprouvent davantage de difficultés, les obstacles se composent pour engendrer un différent patron d'erreurs pour chaque opération de la paire de même structure. Ainsi, si on soustrait les pourcentages précédents, on retrouve 15.3% d'erreurs dont le patron est différent d'un item similaire à l'autre pour le niveau général par rapport à seulement 1.8% pour le niveau avancé. Tous ces résultats s'expliquent par deux des caractéristiques précédemment citées de l'erreur épistémologique, i.e. la solidité et la localisation des conceptions utilisées (Brousseau, 1983; Léonard & Sackur, 1990; Vosniadou, 1994). En ce qui a trait à leur solidité, il est intéressant de constater que ces pourcentages importants d'erreurs ont résisté à la contradiction logique que pose le fait d'effectuer une même opération selon des procédures différentes. Un dernier retour sur les résultats aux items, au tableau 1, permettra de constater que les opérations qui engendrent le plus de ces erreurs isolées ou différentes sont toujours celles qui ont été identifiées antérieurement, à partir des répertoires, comme posant les plus grandes difficultés épistémologiques: les opérations avec le zéro (0) et

les diverses configurations de l'addition-soustraction en nombres relatifs (Brousseau, 1989a; Glaeser, 1981; Vergnaud, 1989a, 1989b).

Les résultats au pré-test de résolution de problèmes

Les solutions aux 48 items du pré-test de résolution de problèmes furent évaluées de la même façon que celles du pré-test de calcul afin de déterminer si les erreurs se présentaient selon des patrons stables et dominants ou sans patron. Lors de cette évaluation, les solutions justes qui engendraient des erreurs systématiques de calcul lors de la résolution de problèmes, alors qu'elles étaient résolues correctement lors du pré-test de calcul, furent considérées sous le titre d'erreurs. De plus, les solutions de type " $(-X) + y$ " et " $x X (-y)$ " furent respectivement jugées comme adéquates pour répondre aux items de structure " $X + (-y)$ " et " $(-x) X y$ " puisqu'elles offraient une représentation juste de la nature de ces problèmes. Finalement, cinq des six items demandant des opérations avec le zéro (0) furent rejetés, réduisant le nombre d'items analysés à 43, parce que la majorité des élèves y avaient répondu de façon intuitive au lieu de produire les solutions structurées qui auraient permis de comparer leurs résultats à celui des autres pré-tests. L'item comportant une division par zéro (0) fut conservé, mais comme sa formulation spécifiait expressément la structure de sa solution, les résultats en seront présentés ultérieurement.

Les Appendices G-5 et G-6 présentent le détail et la fréquence des patrons d'erreurs rencontrées. Le tableau 2 résume et complète ces résultats. En comparant les données de ce tableau à celles du précédent, on remarque que les items reliés aux nombres naturels ($x + y$, $X - y$, $x X y$ et $X + y$) sont encore ceux qui produisent les meilleurs résultats aux deux niveaux d'habileté. Cependant, on note déjà une légère augmentation du nombre d'élèves de niveau général qui éprouvent des difficultés à discerner la convenance des opérations à utiliser lors des situations demandant l'addition et la division.

Si on se réfère au grand total, les résultats bruts indiquent 59.7% d'erreurs au niveau général par rapport à 40.1% au niveau avancé. Même si on exclut les items demandant la multiplication de deux nombres négatifs [$(-x) X (-y)$] et la division d'un nombre positif par un nombre négatif [$X + (-y)$], dont la nature des problèmes-types pourrait être controversée, ces pourcentages (identifiés par un astérisque) s'élèvent à 53.0% par rapport à 32.5%, confirmant la tendance des différences d'habiletés mathématiques entre ces deux groupes. En comparaison approximative avec le pré-test de calcul, le pourcentage d'élèves qui font des erreurs a doublé au niveau général alors qu'il est six fois plus élevé pour le niveau avancé. Ces résultats supportent ceux des recherches précédentes qui ont observé que les obstacles épistémologiques se manifestent davantage lors de la résolution de problèmes, plus complexe (Closset, 1983a; Johsua, 1989; Mandl, Gruber & Renkl, 1993; Tirosh & Graeber, 1990, 1994).

Si on revient au grand total, on constate que les erreurs continuent de se répéter selon un même patron, comme c'était le cas lors du pré-test de calcul, quoique selon des pourcentages moindres: 66.3% au niveau général et de 70.3% au niveau avancé. Ces résultats confirment la systématité, la stabilité et la solidité de ce genre d'erreurs, même au niveau de problèmes qui, non seulement se présentent selon des situations différentes, mais sont également dispersés à travers quantité d'autres problèmes.

L'analyse des patrons de solutions erronées (Appendices G-5 et G-6) révèle que les habitudes de calcul dans le système des nombres naturels constituent l'obstacle qui est à la source de la plus grande proportion de ces erreurs, tendance qui s'est également prolongée au niveau des solutions qui ne révélaient aucun patron particulier. Ces résultats sont consistants avec ceux des recherches précédentes sur la nature des erreurs épistémologiques qui affirment que bien qu'elles assurent des réponses efficaces dans un contexte fréquemment rencontré et permettent ainsi d'aborder une large classe de problèmes pratiques

Tableau 2: Fréquences des erreurs dans le pré-test de résolution de problèmes

Erreur	Avec patron	Sans patron	Total	Pourcentage
Niveau N(N)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) % (%)
ADD/SOUST.				
$x + y$	0(0)	2(0)	2(0)	9.1(0.0)
$-X + y$	6(2)	2(1)	8(3)	36.4(14.3)
$X - y$	1(0)	0(0)	1(0)	4.5(0.0)
$-x - y$	6(1)	3(0)	9(1)	40.9(4.8)
$x - (-y)$	15(14)	6(4)	21(18)	95.5(85.7)
$-x - (-Y)$	12(13)	9(7)	21(20)	95.5(95.2)
Niveau général	64.5%	34.9%	47.0%	22.7% *
Niveau avancé	71.4%	28.6%	33.3%	4.8% *
MULTIPLICATION				
$x \times y$	- -	- -	0(0)	0.0(0.0)
$x \times (-y)$	11(4)	7(4)	18(8)	81.8(38.1)
$(-x) \times y$	13(4)	5(0)	18(4)	81.8(19.0)
$(-x) \times (-y)$	12(11)	10(9)	22(20)	100.0(95.2)
Niveau général	62.1%	37.9%	65.9%	54.5% **
Niveau avancé	59.4%	40.6%	38.1%	19.0% **
DIVISION				
$X + y$	0(0)	2(0)	2(0)	9.1(0.0)
$(-X) + y$	13(8)	6(3)	19(11)	86.4(52.4)
$X + (-y)$	18(13)	4(3)	22(16)	100.0(76.2)
$(-X) + (-y)$	15(13)	6(4)	21(17)	95.5(81.0)
Niveau général	71.9%	28.1%	72.7%	63.6% **
Niveau avancé	77.3%	22.7%	52.4%	44.4% **
GRAND TOTAL				
Niveau général	122(83)	62(35)	184(118)	53.0% **
Niveau avancé	66.3%	33.5%	59.7%	32.5% **

* : Sans les items $x - (-y)$ et $-x - (-y)$ ** : Sans les items $(-x) \times (-y)$ et $X + (-y)$

(Bachelard, 1938; Brousseau, 1989; Johsua, 1989a; Sierpinska, 1989; Vergnaud, 1989a), ils engendrent, par contre, des réponses fausses hors de ce contexte (Closset, 1983a; Johsua, 1989; Mandl, Gruber & Renkl, 1993; Tirosh & Graeber, 1990, 1994).

Qu'on exclut ou non les deux séries d'items mentionnés précédemment, ce sont les problèmes demandant une division qui entraînent le plus d'erreurs chez les deux groupes. Si on les exclut (pourcentages **), comme ce fut le cas pour les divisions par zéro (0) lors du pré-test de calcul, on peut comparer plus justement les rapports d'erreurs selon les différentes catégories d'opérations d'un pré-test à l'autre. Ainsi, le rapport approximatif d'erreurs (addition-soustraction : multiplication: division) passe de 4 : 1 : 1 qu'il était pour les calculs à 4 : 5 : 6 pour les problèmes correspondants au niveau général et de 2 : 1 : 1 à 3 : 2 : 4 au niveau avancé. En consultant le tableau 2, on remarque que les items concernant la soustraction d'un négatif [$x - (-y)$ et $-x - (-Y)$], qui exigent une solution en abscisse, ont un effet d'inflation sur les résultats de leur catégorie dont les autres items demandent une solution linéaire. Si on exclut également ces items (pourcentages *), que la plupart des élèves des deux niveaux n'ont pas réussis, les nouveaux rapports d'erreurs pour les problèmes se rétablissent à 2 : 5 : 6 au niveau général et à 1 : 4 : 9 au niveau avancé. En excluant ainsi les items qui posent des difficultés particulières, on observe chez les deux groupes la gradation habituelle du niveau de difficulté posé par les différentes catégories d'opérations, alors qu'on observait une tendance inverse lors des calculs. Ces résultats démontrent que, bien que les lois mathématiques qui s'appliquent aux opérations avec les nombres relatifs sont mieux maîtrisées pour la multiplication et la division que pour l'addition-soustraction linéaire, la connaissance de ces lois n'est pas un gage de réussite en situation de résolution de problèmes pratiques, même des plus simples.

En comparant les items correspondants des tableaux 1 et 2 de certaines opérations linéaires ($-x + y$ et surtout $-x - y$), on remarque que les problèmes qui demandent leur utilisation supportent souvent une solution juste chez les élèves de niveau général, même si les lois concernant les calculs de ces opérations ne sont pas maîtrisées. Par contre, ce phénomène n'apparaît que dans les problèmes où le signe prédicatif peut être confondu avec le signe opératif. Quand le problème nécessite qu'on tienne compte à la fois du signe prédicatif et du signe opératif, comme c'est le cas de la division, la multiplication et la soustraction d'un négatif, la plupart des patrons d'erreurs (voir Appendices G-5 et G-6) indiquent qu'il n'a été tenu compte que de l'un ou l'autre de ces signes, à moins que l'un des signes ne soient déjà spécifié pour certains items demandant l'utilisation de deux signes prédicatifs négatifs. Ce phénomène est facilement attribuable à un obstacle posé par l'habitude d'opérer dans le système des nombres naturels, où chaque opération ne contient toujours qu'un signe (opératoire). Mais, étant donné la difficulté qu'éprouve beaucoup d'élèves lors de la résolution de problèmes en mathématiques et ailleurs, elle pourrait aussi s'expliquer par les limites de la capacité mentale ou mémoire de travail. Selon Lawson (1983), la compréhension des conceptions scientifiques requiert fréquemment la coordination d'un certain nombre de pièces d'information et les limites de la capacité mentale pourraient alors contribuer à la rétention des erreurs épistémologiques.

La fidélité des pré-tests par rapport à la performance habituelle des élèves

Les résultats quantitatifs aux pré-tests de calcul et de résolution de problèmes, ainsi que ceux du bulletin que les élèves reçurent au moment où se poursuivaient la présente expérimentation, furent réduits en échelles ordinales pour chacun des groupes. Le coefficient de corrélation de rang de Spearman ($\alpha = 0.05$) fut utilisé pour comparer la performance des élèves pour chacun des pré-tests à leur performance habituelle, telle que déterminée par les résultats du bulletin.

Les résultats de ces analyses montrèrent que, pour le pré-test de résolution de problèmes, il existe

une corrélation positive significative pour le groupe de niveau avancé [$r_s = 0.603$, $p > 0.05$] et pour le groupe de niveau général [$r_s = 0.552$, $p > 0.05$]. Par contre, pour le pré-test de calcul, alors qu'il existe encore une corrélation positive significative pour le groupe de niveau avancé [$r_s = 0.550$, $p > 0.05$], il n'en existe pas pour le groupe de niveau général [$r_s = 0.240$, $p < 0.05$].

Il semble donc que les deux pré-tests représentent la performance habituelle des élèves, telle que reflétée par les notes du bulletin officiel, sauf en ce qui a trait au pré-test de calcul pour ceux du niveau général. Cette exception s'explique par une tendance des élèves du niveau général à recourir à la calculatrice pour effectuer les moindres calculs lors des devoirs et des tests, alors que les élèves du niveau avancé ne l'utilisent qu'en présence de nombres élevés. Lors de l'administration de ce test, où l'expérimentateur a expliqué qu'il avait été spécifiquement composé à partir des petits nombres afin qu'on puisse y répondre facilement sans calculatrice, plusieurs élèves de niveau général ont exprimé leur doute quand à leur capacité de le réussir sous ces conditions (fiche-synthèse d'événement). En comparaison, les élèves de niveau avancé ont accepté ces conditions comme si elles étaient normales. Le fait que les élèves du niveau général aient pris, en moyenne, 3.29 minutes de plus que ceux du niveau avancé pour compléter un exercice aussi simple, de même que le besoin de recourir à la calculatrice réexprimé lors des entrevues individuelles, supportent également cette explication.

Les résultats au test métaphorique

Les solutions aux 18 items du test métaphorique furent évaluées qualitativement pour chaque élève selon la grille de codage des productions métaphoriques (Appendice D-1) et celle des conceptions identifiées dans les analogies (Appendice D-2) qui ont été présentées précédemment. Comme les élèves qui participaient à l'expérimentation ne possédaient aucune expérience relative à ce genre d'exercice, ils ont été invités à relire leurs analogies lors des entrevues individuelles, et à les corriger quand ils le jugeaient nécessaire et qu'ils en étaient capables. Les tableaux suivants présentent donc les résultats des productions initiales, ainsi que les corrections qui y furent apportées, telles que codées à partir des protocoles verbaux concourants. Les erreurs corrigées ont quand même été conservées au niveau des résultats parce qu'elles indiquent souvent des difficultés qui ne sont pas complètement maîtrisées.

On remarquera que les violations majeures composées aux critères d'évaluation, qui déterminent les analogies erronées et dont l'éventail couvre souvent la majorité des critères d'évaluation au niveau d'une même analogie, ont été regroupées sous le nom de la violation dominante afin de faciliter l'analyse. Une violation dominante est celle qui capte le mieux l'essence de l'erreur. Ainsi, la validité d'une importation (I+) a préséance sur sa précision parce qu'elle procure un indice précis de l'obstacle épistémologique. De même, la systématité (Sy+) d'une importation a préséance sur sa validité parce qu'elle représente un sous-ensemble des violations qui lui sont dues et permet de raffiner davantage le diagnostic, etc. Les absences de conceptions ont été cataloguées sous la rubrique validité d'importation.

Les résultats de cette analyse qualitative pour chacune des catégories d'opérations seront d'abord présentés pour être ensuite comparés, dans une étape subséquente, aux résultats des deux pré-tests précédents (voir chapitre 3). Même si les fréquences et surtout les différences de ces fréquences entre les groupes de niveaux général et avancé sont parfois réduites à cause des échantillons restreints et de la précision de diagnostic que permet ce genre d'analyse, elles indiquent des tendances intéressantes qui semblent typiques de ces deux groupes.

Le tableau 3 présente les résultats de l'addition et la soustraction. Du côté des violations majeures composées (analogies erronées), on note que tous les élèves des deux niveaux maîtrisent la signification de

Tableau 3 (suite)

Item	x + Y		-X + y		X - y		-x - Y		x - (-Y)		-x - (-Y)		# d'élèves
Niveau (N)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G + A (22 + 21)
VIOLATION MINEURE**													
s Insuffisance	2	-	1	-	1	-	3	-	-	1	3	2	6 + 2
d Richesse du détail	2(1)	-	3	-	1(1)	-	-	-	2	-	1	1	6 + 1
p Identification	2	-	1	-	1	-	4(1)	2	-	1	-	-	5 + 3
p Distributivité	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	0 + 2
TYPE DE CONCEPTION													
Transformation	21	21	21	21	19	21	15	18	17	16	16(1)	15	21 + 21
Relation	1	-	1	-	1	-	6(1)	3	2	2	3	3	7 + 6
Abscisse	-	-	-	-	1	1(1)	1	-	-	1	1	-	1 + 1
Mixte (Trans+Abs)	1(1)	-	1(1)	-	1	-	-	1(1)	2	1	1	1	2 + 2
Aucune	-	-	-	-	-	-	1	-	1	1	2	2	3 + 3

+ Composante dominante des analogies erronées.

* Ces violations chevauchent la ou les violations majeures déjà mentionnées.

** Ces violations peuvent chevaucher d'autres violations ou se chevaucher entre elles à l'intérieur d'une même analogie.

() Un petit chiffre entre parenthèses indique le nombre d'élèves qui ont corrigé l'erreur ou abandonné la conception pendant l'entrevue. Si on le soustrait du chiffre auquel il est associé, on obtient le nombre d'élèves chez qui cette violation ou conception est définitive.

[] Total des quatre (4) premiers items seulement.

ces opérations dans le système des nombres naturels ($x + Y$ et $X - y$), comme l'avaient laissé prévoir les pré-tests précédents. Les rares violations majeures composées ou simples (analogies approximatives) y ont toutes été rectifiées lors de l'entrevue, étant dues à l'inexpérience, sauf dans le cas d'un élève de niveau général pour qui l'analogie est demeurée approximative. Cette approximation, qui résulte d'un conflit lors du passage d'une conception juste à une autre (C*) lors de l'explication de la soustraction, est symptomatique d'une difficulté similaire au niveau de la résolution de problèmes comme nous le verrons par la suite.

Parmi les autres items, ce sont ceux qui demandent d'expliquer la soustraction d'un négatif qui entraînent le plus d'analogies erronées pour les deux groupes, comme ce fut le cas dans le pré-test de résolution de problèmes. En fait, un seul élève de niveau avancé est parvenu à une solution adéquate pour l'item " $x - (-Y)$ ", solution qu'il n'a pu généraliser à l'item " $-x - (-Y)$ ". Si on se réfère à la ligne V+*, on note cependant que la plupart des élèves du niveau avancé et presque la moitié des élèves du niveau général, bien qu'ils ne puissent expliquer ces opérations, sont capables de produire un calcul juste en utilisant la loi mathématique, comme l'indiquait le pré-test de calcul. En se référant à la ligne Sy+, il est intéressant de constater qu'un souci de précision a retenu presque tous les élèves de niveau avancé de recourir à cette loi pour expliquer le premier item, le quart y succombant lors du second item, alors que plus de la moitié des élèves de niveau général qui la connaissaient y eurent recours pour les deux items. Ainsi, une élève de niveau avancé préféra expliquer l'item " $3 - (-6)$ " de la façon suivante afin d'essayer d'expliquer les deux signes négatifs:

Nathalie a 3\$. Mais, elle a rencontré Guy et il lui a demandé de ravoir son 6\$ qu'elle lui doit. Donc, elle lui donne 3, mais, elle lui doit encore 3\$. (Rép.= 9) (...) j'étais pas sûre... à cause d'habitude (...) j'aurais changé les signes, puis mettre un plus. (18A/AS4),

alors qu'un élève de niveau général, qui connaissait cette même loi mathématique, produisit plutôt ce genre d'explication:

Le thermomètre est monté de 3°, ok... Deux heures plus tard, Jean retourne voir le thermomètre. Il est monté de 6°. En tout, il a monté de 9. (22G/AS15)

Une comparaison des résultats à ces items, aux lignes C+ et (M)+*, révèle également que les élèves de niveau avancé sont plus concernés par la cohérence interne de leurs analogies que ceux du niveau général. Ils préfèrent conclure celles-ci par l'énoncé logique d'une réponse fausse et les déclarer erronées par la suite au niveau d'une rectification du calcul et des degrés de certitude, comme c'est le cas lors du premier des exemples précédents. Par contre, l'élève de niveau général est moins concerné que sa réponse découle de son explication, comme le montre cette explication du même item:

Ben, si le thermomètre affiche 3°C... plus tard, dans la journée, il baisse de 6. Egale 9. (5G/AS5)

Un autre aspect de cette même tendance se retrouve dans la richesse du détail (d), où plus d'élèves du niveau avancé ont ressenti le besoin d'expliquer spécifiquement comment le résultat découlait de la situation pour tous les items. Les explications suivantes de l'item " $-6 + 3$ " montre bien cette différence entre les deux niveaux:

Je dois 6\$ à ma mère, et je n'en reçois 3\$. Je donne le 3\$ à ma mère et je lui dois maintenant juste 3\$. (2A/AS1)

Je devais... (...) 6\$, puis j'en ai gagné 3. (...) Ca fait que je dois juste 3\$. (4G/AS2)

Toujours du côté des violations majeures composées (analogies erronées), les items " $-X + y$ " et " $-x - Y$ " révèlent finalement tous des problèmes d'importation (I+), i.e. une inefficacité de la conception utilisée pour expliquer l'opération. Par rapport à l'un et l'autre des pré-tests précédents, on note ici une nette diminution du nombre d'erreurs chez les élèves de niveau général. Il s'agit d'une preuve du pouvoir

autodidacte de l'analogie lors de situations simples, le seul fait d'avoir à expliquer ainsi une opération leur ayant permis de rectifier des erreurs précédentes. Cependant, on note également une augmentation des violations majeures simples (analogies approximatives) et de certaines violations mineures au niveau de ces mêmes items qui révèlent que ces concepts ne sont pas parfaitement maîtrisés. Les violations mineures concernées, qui se rapportent surtout aux divers aspects du critère de clarté-précision (p et s), sont:

- les inversions (p) qui indiquent le plus souvent une habitude de soustraire le plus petit nombre du plus grand nombre dans le système des nombres naturels;
- les calculs rectifiés [(m)] qui indiquent que l'élève a changé la réponse de son calcul après avoir rédigé son analogie;
- les insuffisances d'importation (s);
- les identifications déficientes d'éléments (p) qui indiquent une carence à conceptualiser ces opérations dans des situations pratiques.

Le manque d'univocité (U) est la violation majeure simple la plus fréquemment rencontrée ici. Elle indique également une habitude de calculer en nombres naturels et ses répercussions se sont manifestées surtout dans la résolution de problèmes au niveau avancé, alors qu'elle a produit des effets divers au niveau général. Elle se manifeste ainsi:

-6 + 3: Ok, j'ai perdu 6 billes, mais mon p'tit frère en a trouvé 3. Alors, il m'en reste 3 à trouver. (7A/AS2).

-3 - 6: Je dois 3 jetons, j'en perds 3. Combien m'en reste-t-il? -9. (3 raturé) (17G/AS6)

Au niveau avancé, les analogies erronées et approximatives, correspondant à ces deux items, présentent toutes la même structure que celles retrouvées dans les problèmes correspondants, ces élèves ne démontrant aucune difficulté au niveau des calculs.

Les analogies permettent également de déceler d'autres tendances. Ainsi, la difficulté de différencier le zéro absolu (c) d'avec le zéro-origine se retrouve ici chez presque la moitié des élèves de niveau général, e.g.:

-6 + 3: Eh... l'élévateur descend 6 étages, monte 3 étages. Alors, où est-ce qu'il est rendu?
À -3. (13G/AS1)

Bien qu'elle semble presque absente au niveau avancé, on notera cependant que le quart de ces élèves, conscients de la difficulté que pose le zéro-origine, choisissent de contourner la difficulté en postulant un point de départ (P et p), e.g.:

-6 + 3: ...c'est comme si un joueur commençait à 0, puis on lui dit de reculer de 6...
comme le -6... de reculer de 6, puis après ça d'avancer de 3... ça fait qu'y est
rendu à la case -3. (13A/AS1)

De même, on observe que la distributivité (p), bien qu'elle constitue ici une violation, est un raffinement dont les élèves de niveau avancé semblent détenir le monopole. Si on examine le tableau 3 et les suivants (4 et 5) sous cet item, on note qu'un seul élève de niveau général y a eu recours et il s'agit d'un élève récemment transféré du niveau avancé.

De retour au tableau 3, les analogies permettent aussi de diagnostiquer d'autres erreurs épistémologiques qui se manifestent plus régulièrement au niveau général. Il s'agit de l'addition-soustraction d'unités différentes (C*), e.g.:

- 6 + 3: Julie avait manqué son tour 6 fois. Depuis qu'elle a commencé le jeu avec ses amis, elle a été chanceuse à son septième tour elle a... à la fin... HUUUU... elle a été chanceuse à son septième tour, elle a finalement pu avancer de + 3. Alors, elle était rendue à la 3ième case. (Rép.: -3) (14G/AS3)

Il s'agit également des conflits de conceptions justes à l'intérieur d'une même opération (C*). Par exemple,

le passage d'une conception en abscisse à une conception-transformation, qui sont deux conceptions justes de la soustraction, engendre une erreur de calcul lors de l'explication suivante de l'opération "3 - (-6)":

3 - (-6): Hier, il faisait 3°C. Aujourd'hui, il fait -6°C. La température a baissé de 9°C.
(Rép.: -9°C) Moins... ouais. (19G/AS6)

Si on examine finalement les sortes de conceptions qui ont été utilisées pour expliquer l'addition-soustraction, on remarque que les conceptions linéaires séquentielles (transformation ou relation) sont maîtrisées par tous les élèves et que le nombre d'élèves qui n'ont pu produire une explication pour l'une ou l'autre des opérations est comparable pour les deux groupes. La transformation est la conception qui s'avère la plus disponible chez tous, et ceci pour toutes les opérations. Elle est suivie par la relation, à laquelle plus du quart des élèves des deux niveaux recourent de temps en temps. La conception en abscisse, qui demande un renversement de séquence et que nécessite l'explication de la soustraction d'un négatif, est presque absente du répertoire des élèves des deux niveaux, comme en témoignent également les résultats aux items " $x - (-y)$ " et " $-x - (-y)$ " du pré-test de résolution de problèmes. Quand on l'y retrouve, elle est presque toujours contaminée par la transformation. Ce phénomène semble être le pendant, et peut-être le précurseur, d'un obstacle épistémologique qui a été identifié ailleurs au niveau du raisonnement. En physique, il se manifeste par une tendance à réduire la complexité des dépendances fonctionnelles impliquées dans l'évolution de systèmes à plusieurs variables interdépendantes sous la forme d'un raisonnement séquentiel, linéaire, causal à une seule variable (Closset, 1983b; Viennot 1989a, 1989b). Ici, bien qu'on soit en présence d'une seule variable et que le raisonnement soit déjà linéaire, on remarque ce même attachement au raisonnement séquentiel causal.

Le même phénomène, sous son aspect linéaire cette fois, continue de se manifester au niveau de la multiplication, dont le tableau 4 présente les résultats. Presque la moitié des élèves de niveau général et plus du quart des élèves de niveau avancé ont fait appel à la transformation linéaire (SA+) sous forme d'additions-soustractions simples ou de soustractions répétées pour expliquer l'un ou l'autre des items, e.g.:

0 X 3: Jean avait rien... ok?... dans... dans sa...? Maison. Il veut ajouter 3 choses.
(Rép.: 0). (22G/M3)

(-3) X 6: Tu as perdu 3 billes, n'en dois 3 à ton frère, 3 à ta soeur, 3 à ton voisin, 3 à ton ami... (...) Et tu t'en es fait voler 3. Il te manque 18 billes. (8A/M4)

Relativement à la multiplication, Vergnaud (1989a) mentionne que la transition des opérations linéaires aux opérations bi-dimensionnelles pose un obstacle épistémologique qui se traduit par une difficulté à contrôler le sens de cette opération comme additions répétées. Ses répercussions jusqu'en 10^e année ne font que confirmer les recherches précédentes qui veulent que les erreurs, dues aux obstacles épistémologiques, continuent de se reproduire de façon déconcertante pendant plusieurs années (Brousseau 1989a; Giordan, 1989a; Halloun & Hestenes, 1985; Songer & Mintzes, 1994; Stepan, 1991; etc.).

Outre cet aspect, les résultats du tableau 4 révèlent que la multiplication présente en général un niveau supérieur de difficulté conceptuelle à celui de l'addition-soustraction pour les élèves de 10^e année. Bien que cette opération dans le système des nombres naturels continue d'engendrer de bons résultats, comme le laissait prévoir les deux pré-tests, deux élèves de niveau général et un élève de niveau avancé ne sont pas arrivés à la conceptualiser (SA+ et I+). Plus du tiers des élèves de niveau général et presque le quart des élèves de niveau avancé ne sont parvenus à en produire qu'une explication approximative. Ces difficultés sont dues à la combinaison de deux obstacles épistémologiques, soit le raisonnement séquentiel et le 0 absolu (spC*). Elles se manifestent chez la moitié des élèves des deux niveaux au gré d'un ou plusieurs items de la multiplication et sont directement associées à l'utilisation de la conception-comparaison

Tableau 4: Fréquences des violations et des conceptions - test métaphorique: multiplication

Item	x X Y		x X (-Y)		(-x) X Y		(-x)X(-Y)		{0 x (-Y)} 0 x Y		{(-X) x 0} X x 0		# d'élèves
Niveau (N)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (15)	A (17)	G (9)	A (8)	G + A (22 + 21)
VIOLATION MAJEURE													
SA+ Raisonnement linéaire	1	1	4	3	4	1	4	4	4	1	3	4	[9 + 6]
P+ Précision	1	-	3	2(1)	2	3(1)	-	-	-	2	1(1)	2	4 + 5
I+ Importation	1(1)	-	6(1)	-	7	2(1)	18	16	4	3	-	2(1)	[9 + 6]
(M)+* Calcul rectificateur	-	-	-	1	-	-	3	11	-	-	1	-	4 + 11
V+* Calcul juste = loi	2	1	11	4	10	4	18	19	7	3	2	6	[15 + 8]
P Commutativité des signes	#	#	3	5(2)	3	2	#	#	#	#	#	#	5 + 6
P Associativité	#	#	3	-	2	-	#	#	#	#	#	#	3 + 0
spC* 0 absolu	8(1)	5(1)	6	6(1)	5	6	6	6	#	#	#	#	10 + 10
C/P Autres	-	-	-	-	1	1	-	1	1	1	1	-	3 + 3
C* Même unité multipliée	-	-	1	1	1	1	1	2	2	2	-	-	3 + 5
c* Multiplication augmentée	-	-	1	1	2	4	1	1	2	-	-	1	4 + 4
I/C* Stabilité du naturel	#	#	#	#	#	#	#	#	1	-	2(1)	2(1)	3 + 2
VIOLATION MINEURE*													
p Pt de départ (0)	-	1	-	3	-	1	1	2	-	1	-	-	1 + 4
p Commutativité	3	4(1)	3	5	5	5	-	-	2	2	-	-	9 + 11
c 0 absolu	2	1	-	1	-	1	-	-	2	3(1)	1	-	5 + 3

... à suivre

Tableau 4 (suite)

Item	x X Y	x X (-Y)	(-x) X Y	(-x)X(-Y)	{0 x (-Y)} 0 x Y	{(-X) x 0} X x 0	# d'élèves
Niveau (N)	G A (22) (21)	G A (22) (21)	G A (22) (21)	G A (22) (21)	G A (15) (17)	G A (9) (8)	G + A (22 + 21)
VIOLATION MINEURE*							
p Distributivité	1 5	- 1	- 1	-	-	-	1 + 6
p Chaque absent	2(2) 3	4 3(1)	3(1) 4	2 6	3 2	4	9 + 10
s Insuffisance simple	6 6(1)	5 2	5(1) 4	5 2	2 2	- 1	8 + 10
sp Insuffisance composée	+	+	+	+	4 7(1)	- 1	4 + 8
u/p Autres	4 1(1)	+	+	+	1 2	-	5 + 2
TYPE DE CONCEPTION							
Combinaison	10 12	11 13	11 13	7 9	7 9	5 3	14 + 17
Comparaison	11 8	8(1) 6(1)	7(1) 7	9 7	2 8(1)	1 1	13 + 11
Transformation linéaire	1 1	4 1	4 1	4 4	4 1	3 4	9 + 6
Soustractions répétées	-	-	- 1(1)	-	-	-	0 + 2
Aucune	-	-	2(1) -	2 1	2(1) -	-	5 + 1

* Ces violations peuvent se chevaucher à l'intérieur d'une même analogie.

+ Composante dominante des analogies erronées.

Le même symbole dans une colonne signifie que ce genre de violation a été supplanté par des violations majeures.

Ce genre de violation ne s'applique pas à l'item concerné.

() Un petit chiffre entre parenthèses indique le nombre d'élèves qui ont corrigé l'erreur ou abandonné la conception pendant l'entrevue. Si on le soustrait du chiffre auquel il est associé, on obtient le nombre d'élèves chez qui cette violation ou conception est définitive.

[] Ce total exclut l'item (-x) X (-Y).

de cette opération, e.g.:

3 X 6: Ok, j'ai 3\$ dans la banque. J'ai mis 6 fois de l'argent dans la banque. J'ai maintenant 18\$. (10G/M1)

3 X (-6): Un thermomètre indique qu'il fait 3° durant la soirée. La température baisse 6 fois cette température. Quelle température fait-il? Il fait -18? (5A/M1)

Parmi les autres items, ce sont ceux qui demandent d'expliquer la multiplication de deux négatifs qui entraînent le plus d'analogies erronées pour les deux groupes, comme ce fut le cas dans le pré-test de résolution de problèmes, une seule élève de niveau avancé étant parvenue à une solution approximative de cet item. Étant donnée la nature de cette opération, les difficultés rencontrées en sont toutes d'importation (I+), le raisonnement linéaire (SA+) représentant une sous-catégorie de celle-ci. Cependant, la plupart des élèves des deux niveaux sont capables d'effectuer un calcul juste (V+*) en utilisant la loi mathématique, comme l'a indiqué le pré-test de calcul. La tendance des élèves du niveau avancé à respecter la cohérence interne de leurs analogies continue de s'y manifester [(M)+*].

Toujours du côté des analogies erronées, près des trois-quarts des élèves de niveau général et du quart des élèves de niveau avancé ne peuvent conceptualiser adéquatement la multiplication d'un nombre négatif, ce qui reflète d'assez près les résultats au pré-test de résolution de problèmes. La diminution d'erreurs, chez les deux groupes cette fois, souligne encore le pouvoir auto-didacte de l'analogie dans les situations simples. Le niveau de difficulté supérieur de la multiplication explique que cette différence soit cependant moins marquée que précédemment chez les élèves de niveau général. Encore une fois, la plupart de ces élèves connaissent la loi mathématique (V+*) comme l'indiquait le pré-test de calcul. Bien qu'on y rencontre surtout des problèmes d'importation (I+ et SA+) aux deux niveaux, des difficultés de précision (P+) qui entraînent des problèmes de cohérence interne sont aussi à la source des erreurs de quelques élèves. Il apparaît finalement que la présence du nombre négatif initial rende l'item " $(-x) \times Y$ " légèrement plus difficile à expliquer que l'item " $x \times (-Y)$ " pour les deux groupes.

La difficulté posée par ces items se manifeste également au niveau de la précision (P) des analogies approximatives. Ainsi, quelques élèves des deux niveaux ont tenté de la contourner en généralisant la commutativité des nombres aux signes, e.g.:

3 X (-6): Eric repaie 3\$ à 6 de ses amis, pour annuler ses dettes. Eric vient alors de remettre 18\$ en tout. (2A/M1)

tandis que d'autres le faisaient en utilisant l'associativité des nombres, e.g.:

$(-3) \times 6 = -(3 \times 6)$:... j'ai emprunté de 3 personnes, 6\$. (13G/M2)

Cette dernière manifestation, spécifique aux élèves de niveau général, rend impossible l'identification du nombre auquel est attribué le signe négatif. On note en plus un accroissement de l'utilisation de la commutativité (p) au niveau de ces items, e.g.:

3 X (-6): Je dois 6 caisses de 3 pommes, donc je dois 18 pommes? (11A/M2)

Finalement, les résultats révèlent qu'au moins la moitié des élèves des deux niveaux ne peuvent expliquer adéquatement la multiplication avec le zéro (0) sous un aspect ou un autre, bien que plusieurs d'entre eux connaissent la loi mathématique qui la régit (V+*) comme le laissait prévoir le pré-test de calcul. Comme pour les autres items de la multiplication, la majorité des erreurs relèvent de l'importation (I+ et SA+). Parmi les élèves du niveau général, l'item " $0 \times Y$ ou $0 \times (-Y)$ " produit deux fois plus d'erreurs que l'item " $X \times 0$ ou $(-X) \times 0$ " alors que la tendance est renversée au niveau avancé, où le second genre d'items engendre un peu plus d'erreurs que le premier. Certaines analogies suggèrent que l'obstacle épistémologique majeur, qui entre ici en cause, soit la stabilité du nombre naturel, surtout quand

il est initial, e.g.:

3 X 0 : Y en achète 3 (cigarettes). Pendant la semaine, y en fume pas. Y en reste encore 3. (15A/M7)

Les analogies permettent également de diagnostiquer la présence de deux autres obstacles épistémologiques chez les deux groupes, soit la multiplication inappropriée d'une même unité (C*) qui est spécifique à l'addition et la soustraction, e.g.:

3 X (-6): Je veux balancer mon gageure parce que je dois 3\$ fois 6\$ que j'ai pas. = -18. (11G/M1)

ainsi que la conception que la "multiplication augmente" (c*) qui est spécifique au système des nombres entiers naturels, où le produit d'une multiplication est généralement plus grand que les quantités multipliées, e.g.:

(-3) X 6: Le matin, il faisait -3°C; et pendant la journée, le soleil a augmenté la température de 6 fois du même degré qu'il faisait ce matin. Alors pour cette journée, nous avons une température de -18°C. (20A/M1)

Du côté des violations mineures, la difficulté épistémologique que pose le zéro absolu (p) vient augmenter le nombre d'erreurs déjà mentionnées en association avec le raisonnement séquentiel (spC*). Presque absente en addition-soustraction chez les élèves de niveau avancé, cette difficulté affecte maintenant la moitié d'entre eux comme c'est le cas des élèves du niveau général pour qui la proportion s'est maintenue. De même, la tendance de chercher à contourner cette difficulté en postulant un point de départ (p), typique de certains élèves du niveau avancé, a augmenté.

Les insuffisances simples d'importation (s), qui s'ajoutent aussi aux insuffisances combinées d'importation (sp = spC*), ont connu une augmentation significative par rapport à l'addition-soustraction et viennent accentuer ce que révèlent tous les résultats précédents, i.e. une difficulté accrue à conceptualiser la multiplication dans des situations pratiques, e.g.:

3 X 6: ...ta mère te donne 3\$ (...) 6 fois, alors tu as 18\$. (7G/M1)

Si on compare le nombre d'élèves qui ont utilisé la conception-combinaison (14 + 17), avec le nombre d'élèves qui ont négligé d'apporter la précision (p) du mot "chaque" (9 + 10) qui y fait la différence entre une multiplication et une division, on remarque que plus de la moitié de ces élèves des deux niveaux sont peu sensibles à cette distinction à un moment ou un autre.

Si on examine finalement, à la deuxième page du tableau 4, les types de conceptions qui ont été utilisées pour expliquer la multiplication, on remarque que la combinaison est celle qui s'avère la plus disponible pour tous. Elle est suivie de très près par la comparaison, conception à laquelle plus de la moitié des élèves des deux niveaux ont recours à un moment où un autre. Bien que cette conception, juste quoique plutôt primitive, semble suffisante pour opérer à l'intérieur du système des nombres naturels, comme le démontrent les résultats au pré-test de résolution de problèmes, elle s'avère moins efficace par la suite, où plusieurs élèves éprouvent de la difficulté à l'accommoder selon les besoins de l'opération, que ce soit au niveau de la précision (P+) ou de l'importation (I+). On remarquera d'ailleurs que certains élèves l'ont délaissée après le premier item, pour n'y recourir de nouveau que lorsqu'ils rencontraient des difficultés avec la multiplication de deux négatifs et du zéro (0).

Viennent ensuite les transformations linéaires simples, plus typiques des élèves de niveau général, sauf dans les cas des difficultés déjà mentionnées avec les items "X x 0" et "(-x) X (-Y)", où on remarque une régression vers les conceptions plus primitives chez les élèves de niveau avancé. Finalement, la soustraction répétée se rencontre exclusivement au niveau avancé pour expliquer les multiplications d'un négatif. Il est intéressant de noter que cette conception, quoique plus raffinée, ne semble permettre aux

élèves qui l'ont utilisée de résoudre qu'un seul des deux genres de problèmes correspondants.

Ces trois dernières conceptions sont toutes des manifestations, à divers degrés et sous différentes formes, des obstacles épistémologiques rencontrés précédemment au niveau de la résolution de problèmes. Il s'agit de l'habitude d'opérer dans le système des nombres naturels où l'on ne tient compte que d'un signe (opérateur) à la fois et l'habitude d'un raisonnement séquentiel, linéaire, causal à une seule variable, obstacles qui pourraient également être reliés à une limite de la mémoire de travail (Lawson, 1983).

Alors que la tendance à ne fournir aucune explication pour l'un ou l'autre des items de l'addition-soustraction était comparable pour les deux groupes, elle devient plus marquée dans la multiplication chez les élèves de niveau général. De là, elle continue de s'amplifier à mesure que la difficulté continue d'augmenter, comme le montre le tableau 5, qui présente les résultats de la division. Le nombre des élèves de niveau général à n'y produire aucune explication, et à plus d'une reprise maintenant, double alors que la tendance demeure réduite et constante chez les élèves de niveau avancé. Ces résultats manifestent une différence typique entre les élèves des deux niveaux, i.e. une tenacité supérieure des élèves de niveau avancé à résoudre une difficulté, alors que ceux de niveau général ont tendance à démissionner plus facilement.

Au tableau 5, la difficulté conceptuelle accrue que présente la division se manifeste également au nombre d'analogies erronées engendrées par l'item " $X + y$ ". Comme le laissait prévoir les deux pré-tests, cette opération continue d'engendrer de bons résultats, quoiqu'un peu moindres dans la résolution de problèmes au niveau général. Il y a maintenant quatre élèves de ce niveau qui ne peuvent conceptualiser cette opération dans le système des nombres naturels (SA+ et I+), deux de plus que pour la multiplication dans ce même système.

Bien que la plupart des conceptions erronées des divers items de la division soient attribuables aux utilisations inappropriées de conceptions justes de l'opération (I+) dont nous discuterons plus tard, on remarque que le nombre d'élèves à recourir aux conceptions linéaires (SA+) non seulement se maintient, mais augmente légèrement par rapport à la multiplication. Si on inclut les items approximatifs (SA), ce phénomène se manifeste chez la moitié des élèves des deux groupes, bien que la soustraction répétée s'avère efficace dans le système des nombres naturels.

Les analogies erronées permettent également de constater un autre phénomène chez un peu moins du quart des élèves des deux groupes à un moment ou un autre, celui de recourir à l'opération inverse (Sy+) pour expliquer la division. Bien cette conception s'avère efficace dans le système des nombres naturels (Sy), e.g.:

$6 + 3$: Il y a 6 familles dans une maison. Il y a 3 fois moins... de familles? ($= 2$).

(17G/D1)

la multiplication devient un obstacle épistémologique à la conceptualisation de la division dans le système des nombres relatifs, e.g.:

$(-6) + (-3)$: Un thermomètre affiche -6°C ... (...) Plus tard, a baissé 3 fois moins. ($=2$)

(5G/D3)

Le reste des erreurs est finalement dû à des conflits internes (CM), où une explication potentiellement juste de l'opération est suivie d'un résultat mathématiquement faux, indiquant que l'obstacle épistémologique se situe plus au niveau de lois mathématiques erronées appliquées lors des calculs que de conceptions fausses de l'opération, e.g.:

$(-6) + (-3)$: Combien de -3 est-ce qu'il y a en -6\$? Il y a -2. (10G/D2)

Outre la division par zéro (0), qu'aucun élève n'a réussi à conceptualiser justement, c'est l'item " $X + (-y)$ ", suivi de près par l'item " $(-X) + (-y)$ ", qui entraîne le plus d'erreurs pour les deux groupes,

Tableau 5: Fréquences des violations et des conceptions - test métaphorique: division

Item	X + y		(-X) + y		X + (-y)		(-X)+(-y)		0 + Y		X + 0		0 + 0		# d'élèves
Niveau (N)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G + A (22 + 21)
VIOLATION MAJEURE															
SA+ R. linéaire	3	1	4(1)	2	3	4(1)	3	2	5	2	4	2(1)	5	4	10 + 8
I+ Importation	1(1)	1(1)	11	5(1)	17	13	16	14	5(1)	2	15	17	14	16	21 + 20
Sy+ Op. Inverse	1	1(1)	2	1	2	3	1	1	2	1	1	2	-	1	4 + 5
CM Conflit interne	-	-	-	2(1)	-	-	2	1(1)	1	1	2	1	3	-	3 + 4
(M)+* C. rectificateur	-	-	-	4	4	8	1	8	-	1	-	-	-	-	5 + 13
V+* Calcul juste = loi	4	1	16	8	19	18	17	16	9	4	-	-	-	-	22 + 20
P Précision	1	-	+	+	+	2	+	+	3(2)	5	+	+	+	+	4 + 6
Sy Op. Inverse	2	-	+	+	+	+	+	1(1)	+	+	+	+	+	+	2 + 1
SA R. linéaire	1	2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	1 + 2
DCT/ Autres	2	-	1	+	+	+	+	2	2	1	+	+	+	+	4 + 2
C* InversionUnit	1(1)	1(1)	2	1(1)	1	5	-	-	2(1)	2	7	4(1)	1	-	8 + 10
P* CommSig	#	#	-	1(1)	1	3	#	#	#	#	#	#	#	#	1 + 4
C* C. conflictuelle	-	-	1	-	-	-	-	-	-	2	-	2	-	-	1 + 3
I/C* Stab. du naturel	#	#	#	#	#	#	#	#	2	2(1)	3	7(5)	#	#	5 + 8
I/C* Stab. du zéro	#	#	#	#	#	#	#	#	#	#	15	15	21	20(1)	21 + 21

VIOLATION MINEURE*

P Pt de départ (0)	-	1	-	1	-	2	-	2(1)	1	2	-	1	-	4	1 + 8
c 0 absolu	2	-	1	1	1	1	2	1	4	6	2	-	5	7	6 + 11

... à suivre

Tableau 5 (suite)

Item	X + y		(-X) + y		X + (-y)		(-X) + (-y)		0 + Y		X + 0		0 + 0		# d'élèves
Niveau (N)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G (22)	A (21)	G + A (22 + 21)
VIOLATION MINEURE*															
c Division diminuée	8	2	5	-	1	1	1	-	1	2	5	3	3	4	10 + 7
p Distributivité	-	1	-	2	1	-	-	-	-	1	-	-	-	-	2 + 3
s Insuf. simple	1	1	4	-	4	2	3	3	1	1	1	1	-	1	9 + 7
p Parts égales	9	13(1)	7	13(2)	8	10	5	10	#	#	#	#	#	#	12 + 17
d/M/a Autres	2	1	1	1	+	1	+	2(1)	3	7	+	+	+	+	5 + 8
TYPE DE CONCEPTION															
Valeur d'une part	8	16	6	14	7	10	3	11	8	14	8	14	7	16	10 + 19
Nombre de parts	6	2	4(1)	1	3	1	4	3	3	1	3	1	3	-	7 + 4
Opération inverse	2	1(1)	2	1	2	4	1	1	2	1	1	2	-	1	4 + 5
Soust. répétées	1	1	-	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1 + 1
Transf. linéaire	3	1	3(1)	1	2	4(1)	2	2	4	2	4	2	5	4	9 + 6
Mixte	2	1	3	1	2	3(1)	4	3(1)	2	2	1(1)	1	3	-	6 + 7
Indéterminé	-	-	1	2	1	-	-	2	-	1	2	2	3	-	4 + 7
Aucune	-	-	5	1	4	1	8	-	2	-	4	-	1	-	10 + 2

* Ces violations peuvent se chevaucher à l'intérieur d'une même analogie.

+ Composante dominante des analogies erronées.

() Le même symbole dans une colonne signifie que ce genre de violation a été supplanté par des violations majeures.

Un petit chiffre entre parenthèses indique le nombre d'élèves qui ont corrigé l'erreur ou abandonné la conception pendant l'entrevue. Si on le soustrait du chiffre auquel il est associé, on obtient le nombre d'élèves chez qui cette violation ou conception est définitive.

. Ce genre de violation ne s'applique pas à l'item concerné.

comme ce fut le cas dans le pré-test de résolution de problèmes. En comparaison au niveau avancé, où quatre élèves ont réussi à expliquer le dernier item et où deux sont parvenus à une solution approximative du premier, aucun élève de niveau général n'est parvenu à une résolution efficace de l'un ou de l'autre.

Vient ensuite l'item " $(-X) + y$ ", que les trois-quarts des élèves de niveau général et plus du tiers des élèves de niveau avancé ne peuvent conceptualiser adéquatement. Ces résultats, qui sont un peu meilleurs que ceux du pré-test de résolution de problèmes chez les deux groupes, continuent de montrer le pouvoir autodidacte de l'analogie dans les situations plus simples. Cet effet a déjà été observé lors des items les plus simples d'addition et de multiplication. Cependant, il est ici presque disparu chez les élèves du niveau général pour qui l'opération devient complexe, la difficulté accrue de la division se combinant à celle de la présence d'un nombre négatif.

La difficulté que pose cet item se manifeste également au niveau de la précision (P) des analogies approximatives, où il est impossible de distinguer une division avec le zéro (0) de la multiplication du zéro (0), e.g.:

$0 + 3$: ...je dois 0\$ à 3 personnes, alors je dois pas d'argent. (2A/D10)

Bien qu'en général, les conceptions erronées souffrent ici des mêmes limites que pour les autres items de la division, les analogies révèlent que l'obstacle épistémologique que rencontrent les quelques élèves qui y commettent une erreur de calcul est le même que celui rencontré lors de la multiplication du 0, soit la stabilité du nombre naturel.

$0 + 300$: Monsieur Leblanc n'a pas d'employé. Alors, il ne doit pas diviser son profit de 300\$... ($0 + 3 = 3$). (19A/D8)

Cet obstacle se manifeste également au niveau de l'item " $X + 0$ ", e.g.:

$3 + 0$: 3 bonbons ont été séparés par 0 personne. Donc, il reste 3 bonbons. (6G/8D)

Il y est cependant supplanté par celui de la stabilité du zéro qui est exprimée directement:

$3 + 0$: J'ai pas d'argent et je dois 3\$ à personne. J'ai donc 0\$. (14A/D8),

ou justifiée par une inversion des unités (C*):

$3 + 0$: Julie fait du bénévolat à l'hôpital pendant 3 jours. Combien d'argent gagne-t-elle par jour? Eh.... (...) 0. (6A/D5)

Ce dernier obstacle, concernant le zéro (0) initial cette fois, entre en cause dans presque toutes les conceptions utilisées pour expliquer l'item " $0 + 0$ ", e.g.:

$0 + 0$: Le poker est vide. Donc, personne gagne rien. Bon. (1G/D9-10)

Les autres explications, quoique rares, révèlent un autre obstacle épistémologique, soit la conception "nombre de parts" qui produit l'unité comme résultat en réponse à la question: "Combien y a-t-il de zéro dans zéro?":

$0 + 0$: Personne va à la fête de Georges. Alors, personne ne doit donner d'argent pour acheter un (1) cadeau. (19A/D11)

Outre la division par zéro (0), la plupart des élèves des deux niveaux connaissent encore une fois les lois mathématiques ($V + *$) qui régissent les calculs pertinents à ces items, comme l'indiquait le pré-test de calcul. Et la tendance des élèves du niveau avancé à mieux respecter la cohérence interne de leurs analogies $[(M) + *]$ demeure constante.

Les analogies permettent également de diagnostiquer la présence d'autres obstacles épistémologiques qui se rencontrent chez les deux groupes. La commutativité de l'addition et de la multiplication contamine la division sous deux formes. Elle se manifeste surtout par une inversion des unités (C*), erreur qui se retrouve communément dans le pré-test de résolution de problèmes de façon stable ou isolée, e.g.:

$6 + (-3)$: Je dois un total de 3\$ à 6 amis. Alors, je leur dois 50 sous chaque. (2A/D1)

On la retrouve aussi sous l'aspect d'une commutativité des signes (P*) comme dans la multiplication, e.g.:

$6 + (-3)$: Je dois 6\$ à 3 personnes. Combien d'argent est-ce que je dois à chaque personne? Je dois -2\$. (5A/D2)

Le fait que cet obstacle affecte un peu plus d'élèves de niveau avancé que de niveau général pourrait être interprété comme l'effet d'un effort à résoudre certaines difficultés par généralisation et extrapolation. Cette interprétation est supportée par le nombre d'entre eux qui ont corrigé ces erreurs par la suite.

Vient ensuite l'obstacle qui veut que la "division augmente" selon le système des nombres entiers naturels, où le quotient d'une division est plus petit que le dividende. Par rapport à la multiplication ("qui augmente"), le nombre d'élèves des deux groupes, affectés par cette difficulté, a plus ou moins doublé, e.g.:

$(-6) + 3$: J'ai dépensé 6\$ et j'ai un rabais de 3\$. (Rép.: -2). (21G/D1)

Finalement, la division d'unités inappropriées, qui n'a pas été cataloguée au tableau 5 parce qu'elle empiète sur d'autres violations et que les multiples formes qu'elle adopte selon les items la rendent presque impossible à regrouper sous un obstacle spécifique, s'est révélée épidémique au niveau de cette section, e.g.:

$(-6) + 3$: Je te dois 6\$. Je sépare le paiement en groupes de 3\$. Combien cela fait-il de paiements? Cela fait - 2 paiements? (5A/D1)

$(-6) + (-3)$: Les 3 amis de Billy refusent de payer la dette de 6\$ de Billy. Donc, il est dans le trouble. (Rép.: 2). (1G/D2)

Du côté des violations mineures, la difficulté épistémologique simple que pose la différence entre le zéro-origine et le zéro absolu (p) s'est maintenue chez à peu près un quart des élèves de niveau général alors qu'elle se manifeste maintenant chez la moitié des élèves de niveau avancé à un moment ou un autre. La tendance de chercher à contourner cette difficulté en postulant un point de départ (p), typique de certains élèves du niveau avancé, a doublé par rapport à la multiplication, atteignant maintenant plus du tiers d'entre eux. Comme on peut le constater au tableau 5, ces augmentations sont dues aux problèmes particuliers que posent les divisions du zéro (0).

On remarque également que le nombre d'insuffisances simples d'importation (s) se maintient par rapport à la multiplication. De même, si on compare le nombre d'élèves qui ont utilisé les conceptions "valeur d'une part" et "mixte" au nombre d'élèves qui ont négligé d'apporter la précision de l'expression "parts égales", on remarque que la plupart des élèves des deux niveaux sont peu sensibles aux distinctions qu'elle apporte. En plus de faire la différence entre une multiplication et une division, elle devient ici nécessaire à la détermination du résultat de l'opération.

Si on examine finalement les sortes de conceptions qui ont été utilisées pour expliquer la division, on remarque que la conception "valeur d'une part" est celle qui s'avère la plus disponible pour tous. Elle se rencontre toutefois chez moins de la moitié des élèves de niveau général, pour qui la conception "nombre de parts" est presque aussi disponible, alors qu'elle est presque absente du répertoire des élèves de niveau avancé. Il semble que la plupart des élèves des deux niveaux ne disposent couramment que d'une conception de la division pour satisfaire à tous les besoins. Comme ces deux conceptions sont pré-requises à l'explication de tous les items de la division dans le système des nombres relatifs, il n'est donc pas étonnant que les élèves aient eu autant de difficulté à expliquer les opérations qui demandent l'utilisation d'une conception alternative et à résoudre efficacement les problèmes qui leur correspondent. Cet effet se manifeste spécifiquement à l'item " $(-X) + y$ " chez les élèves de niveau général qui favorisent la conception "nombre de parts" et à l'item " $(-X) + (-y)$ " pour ceux du niveau avancé qui favorisent la conception "valeur d'une part", où ces conceptions sont inappropriées.

Viennent ensuite les transformations linéaires, qui, comme pour la multiplication, sont plus typiques

des élèves de niveau général, sauf dans les cas des difficultés posées par les items " $X + (-y)$ " et " $0 + 0$ ", où les élèves de niveau avancé y recourent davantage. Ces conceptions sont des soustractions simples et témoignent du nombre d'élèves pour qui la notion la plus primitive de la division ("entraîne une diminution") tient lieu de conception unique, autant que de ceux qui y régressent en cas de difficulté.

Viennent finalement les conceptions "soustractions répétées", la conception "opération inverse" qui est le pendant de la "comparaison" en multiplication, et les conceptions mixtes qui sont pour la plupart d'autres formes de la conception "opérations inverses". Bien que ces conceptions soient plutôt primitives, elles semblent suffisantes pour opérer à l'intérieur du système des nombres naturels, comme le démontrent les résultats au pré-test de résolution de problèmes. Elles s'avèrent moins efficaces par la suite, où plusieurs élèves éprouvent de la difficulté à les accommoder selon les besoins de l'opération. Elles sont en fait des obstacles épistémologiques posés par les opérations d'addition-soustraction et multiplication. Comme précédemment, quelques élèves les ont délaissées après le premier item, pour n'y régresser que lorsqu'ils rencontraient des difficultés.

Encore une fois, plusieurs de ces conceptions sont des manifestations des obstacles épistémologiques causées par l'habitude d'opérer dans le système des nombres naturels où l'on ne tient compte que d'un signe (opérateur) à la fois et par l'habitude d'un raisonnement séquentiel et linéaire.

A mesure que la difficulté augmente, la tendance à ne fournir aucune explication pour l'un ou l'autre des items de la division augmente. Par rapport à la multiplication, le nombre d'élèves à pratiquer l'abstention a doublé aux deux niveaux. Près de la moitié des élèves de niveau général sont dans cette catégorie, dont certains de façon systématique. On remarque également l'apparition, pour la première fois, de conceptions indéterminées, i.e. de conceptions dont il est impossible d'inférer un diagnostic spécifique, si ce n'est que son auteur est incapable de saisir le sens d'une opération.

Le critère de richesse-densité des importations n'a pas été inclus dans les tableaux précédents puisqu'il s'agit d'un critère global d'évaluation des productions. Il concerne la quantité d'importations provenant d'un même modèle. En relation avec ce critère, les élèves des deux groupes avaient reçu la consigne de s'en tenir autant que possible à un modèle métaphorique pour expliquer toutes les opérations, et de ne recourir à des modèles alternatifs qu'en cas de besoin. En fait, 10 sujets du niveau général et 6 sujets du niveau avancé se sont confinés à un modèle unique, ne violant ce critère d'aucune façon, alors qu'ils auraient peut-être dû. Il est à noter que les élèves les plus compétents du niveau avancé ne font pas partie de ce groupe d'élèves. Par contre, il s'y retrouve des élèves forts, moyens et faibles du niveau général. A l'opposé, un élève de niveau général et quatre élèves de niveau avancé ont changé de modèle de façon systématique à la plupart des items, de sorte qu'il est impossible de dégager de modèles dominants. Il s'agit d'élèves très faibles des deux niveaux, à l'exception d'une élève forte de niveau avancé, qui s'est montrée particulièrement créative (coups de poigne, verres d'eau, poignées de chips, etc.). La prochaine analyse concerne donc les sujets restants, soit respectivement 11 élèves de chaque niveau.

Cette analyse avait pour but de déterminer si les violations au critère de richesse-densité des importations révéleraient des indices diagnostiques supplémentaires. Une violation majeure à ce critère est un changement de modèle à l'intérieur d'une même catégorie d'opérations. Une violation mineure est un changement de modèle d'une catégorie d'opérations à une autre. Les productions métaphoriques concernées ont donc été examinées afin d'établir à quels items et/ou entre quelles catégories d'opérations ces changements étaient effectués. Les items, où il y a eu retour au modèle jusque-là dominant pour cette catégorie d'opérations, ont également été identifiés. Dans les rares cas, où l'item concerné rendait le

nouveau modèle utilisé égal en nombre d'items à celui du premier, le premier modèle a été considéré comme dominant. Notons enfin que lorsqu'un élève a expliqué une série d'opérations en utilisant une variété d'objets de même nature, ces items ont été considérés comme faisant partie d'un même modèle (e.g. paquet de bonbons et boîte de gommes).

Le tableau 6 présente la fréquence des violations au critère de richesse-densité des importations. Les items y sont listés dans l'ordre où ils se présentaient à l'intérieur du test métaphorique. Le nombre d'analogies erronées correspondant à chacun des changements de modèle a été mentionné en parallèle afin de dégager les relations de cause à effet.

Si on se réfère aux lignes identifiant les catégories d'opérations, on remarque d'abord que c'est la multiplication qui a entraîné le moins d'élèves des deux niveaux à changer de modèle d'une opération à l'autre (violation majeure). De même, ces élèves ont totalisé moins de ces changements en comparaison avec les autres catégories d'opérations. De plus, elle a entraîné moins de changement de modèle dominant d'une catégorie à l'autre (violation mineure). Viennent ensuite l'addition-soustraction, puis la division au niveau avancé. Au niveau général, le nombre d'élèves, qui ont changé de modèle à l'intérieur de ces deux dernières catégories, est égal. Cependant, le fait qu'on y ait davantage changé de modèle en abordant la division (violation mineure) révèle que cette catégorie est celle qui a entraîné le plus de changements de modèle, comme au niveau avancé. Si on se réfère maintenant au grand total des violations majeures, on constate que les élèves de niveau avancé changent légèrement plus de modèles à l'intérieur d'une même opération que ceux du niveau général. Cependant, ils ont tendance à revenir davantage au modèle dominant. Toujours au grand total, on remarque que ces retours au modèle dominant sont plus fructueux que les changements de modèle pour les deux groupes, car ils engendrent significativement moins d'analogies erronées.

Même si les nombres de cas sont ici restreints, un patron émerge de ces aller-retours lors de l'addition-soustraction. En comparant les items " $-X + y$ " et " $X - y$ " ainsi que " $x - (-Y)$ " et " $-x - Y$ ", on peut constater que la perception d'une difficulté au premier item de ces paires entraîne un changement de modèle. Ensuite, on observe un retour au modèle dominant au second item qui est plus facile. Les résultats des analogies correspondantes supportent cette interprétation des résultats. Quoique les changements de modèle permettent à certains élèves de résoudre efficacement la difficulté perçue, la moitié et plus des analogies erronées correspondantes montrent que la difficulté n'a pas été surmontée. Par contre, le retour au modèle précédent lors des items plus faciles n'occasionne aucune analogie erronée.

Lors de la multiplication et de la division, on remarque le même phénomène au niveau avancé, où les opérations avec le zéro (0) sont perçues comme plus faciles à expliquer que celles avec les nombres relatifs. Cependant, à mesure que la difficulté augmente, les retours au modèle dominant se révèlent moins fructueux, même si on observe encore des réussites aux items " $0 \times Y / X \times 0$ " et " $0 + Y$ ". On remarque également, qu'à mesure que les difficultés s'accumulent, on continue de changer de modèle d'une opération à l'autre et qu'on revient peu au modèle dominant au niveau général. Il en est de même au niveau avancé, si on exclut les items avec zéro (0).

Des 9 élèves de chaque niveau, qui ont justifié leurs changements de modèle lors des entrevues, un seul élève du niveau général a invoqué le besoin d'apporter de la variété. Tous les autres ont mentionné

Tableau 6: Violations au critère de richesse-densité des importations

Item	Changement de modèle	Analogie erronée	Retour au mo- dèle dominant	Analogie erronée
Niveau N	G(A) 11(11)	G(A) 11(11)	G(A) 11(11)	G(A) 11(11)
VIOLATION MAJEURE				
Add./Soust.	7(9)	7(9)	7(9)	7(9)
-X + y	5(3)	0(0)	- -	- -
X - y	1(0)	0(0)	2(2)	0(0)
x - (-Y)	5(6)	5(6)	- -	- -
-x - Y	3(1)	0(0)	2(4)	0(0)
-x - (-Y)	4(4)	4(4)	- -	- -
Total	18(14)	9(10)	4(6)	0(0)
Multiplication	5(8)	5(8)	5(8)	5(8)
x X (-Y)	2(2)	1(0)	- -	- -
(-x) X Y	1(2)	1(0)	- -	- -
(-x) X (-Y)	2(4)	2(4)	1(1)	1(1)
0 X Y / X x 0	2(1)	2(1)	1(4)	1(2)
Total	7(9)	6(5)	2(5)	2(3)
Division	7(11)	7(11)	7(11)	7(11)
(-X) + y	4(5)	4(4)	- -	- -
X + (-y)	2(3)	2(3)	1(1)	1(1)
(-X) + (y)	1(5)	1(5)	0(1)	0(1)
X + 0	2(1)	2(1)	0(6)	0(6)
0 + Y	2(3)	2(2)	1(3)	0(1)
0 + 0	3(3)	3(3)	1(1)	1(1)
Total	14(20)	14(18)	3(12)	2(10)
GRAND TOTAL	39(43)	29(33) 74.4%(76.7%)	9(23)	4(13) 44.4%(56.5%)

VIOLATION MINEURE

Changement de modèle dominant de l'addition à la multiplication	4(4)
Changement de modèle dominant de la multiplication à la division	7(5)

la perception de difficultés à généraliser l'utilisation de leur modèle dominant. Pour justifier une violation majeure, ils ont dit, par exemple:

...j'ai commencé avec le monopoly, puis après ça, quand j'ai vu un moins... c'est comme si... que tu peux pas commencer comme à -3... c'est comme le 0. (5G/AS1)

Ben, j'voulais prendre des pommes tout le long. Mais, comment est-ce que je peux comme... avoir 6 pommes, puis diviser par - 3? (9A/D2)

Et pour expliquer une violation mineure, la première justifiant un changement de modèle entre l'addition-soustraction et la multiplication, et le second entre la multiplication et la division:

La multiplication... j'savais pas comment mettre le thermomètre en multiplication.

(17A/M2)

- Ah! puis là, je vois que t'as changé de modèle (du thermomètre aux life savers). Pourquoi?

- Ben, parce que tu peux faire les groupes. (13G/D1)

Les changements de modèle procurent donc généralement l'indice diagnostique d'une difficulté épistémologique qui est perçue consciemment par l'élève. Cependant, la combinaison des données de la spécification des degrés de certitude, à celles du critère richesse-densité, permet de faire des distinctions intéressantes. Ainsi, il serait plus juste de dire que les changements de modèle représentent une perception qui est seulement partielle de ces difficultés quand l'analogie erronée, produite en utilisant un modèle alternatif, est accompagnée d'un haut degré de certitude. A partir de ces constations et des résultats précédents, il devient logique de croire qu'un retour à un modèle dominant qui engendre une analogie erronée ($X + 0$ au niveau avancé, e.g.) puisse s'avérer un indice d'une difficulté inconsciente, surtout si elle est accompagnée d'un haut degré de certitude. Il s'agit de distinctions qui sont importantes au niveau d'un diagnostic et d'une remédiation, si on se rappelle la nature implicite / inconsciente des erreurs épistémologiques qui les rend particulièrement insidieuses et résistantes (Brousseau, 1989b; D'Ambrosio & Mewborn, 1994; Désautels, 1989; Resnick, 1989a; Sierpiska, 1989; Tirosh & Graeber, 1990, 1994).

Appendice G-2: Fréquences des patrons* d'erreurs au pré-test de calcul: addition et soustraction

Patron	A +	A -	S +	S -	X -	X +	Aucun	[Diff.]	[Isolé]	Total	Pourcentage
Niveau	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) %
Item											(%)
x + y	#(#)	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	0(0)	0.0(0.0)
-X + y	2(0)	4(0)	- -	#(#)	- -	- -	2(0)	[1(0)]	[1(0)]	8(0)	36.4(0.0)
-x + Y	1(0)	4(0)	#(#)	1(0)	1(0)	- -	3(0)	[4(0)]	[3(0)]	10(0)	45.5(0.0)
X - y	- -	- -	#(#)	1(0)	- -	- -	- -	- -	- -	1(0)	4.5(0.0)
x - Y	- -	2(3)	9(0)	#(#)	- -	- -	1(0)	[3(3)]	[3(3)]	12(3)	54.5(14.3)
-x - Y	3(0)	#(#)	6(0)	3(0)	- -	- -	3(0)	[1(0)]	[1(0)]	15(0)	68.2(0.0)
-X - y	2(0)	#(#)	3(0)	9(1)	- -	1(0)	2(0)	[11(1)]	[3(1)]	17(1)	77.3(4.8)
x - (-Y)	#(#)	3(0)	3(0)	5(1)	- -	0(1)	1(0)	[0(0)]	[0(0)]	12(2)	54.5(9.5)
X - (-y)	#(#)	1(0)	6(1)	2(0)	- -	0(1)	3(0)	[4(0)]	[0(0)]	12(2)	54.5(9.5)
-x - (-Y)	2(0)	4(0)	#(#)	5(0)	0(1)	- -	5(1)	[3(0)]	[3(0)]	16(2)	72.7(9.5)
-X - (-y)	3(1)	5(1)	4(0)	#(#)	1(1)	1(0)	2(1)	[8(2)]	[3(2)]	16(4)	72.7(19.0)

* Patrons d'erreurs stables ou dominants

Patron approprié de réponses

A : Addition S : Soustraction + : Réponse positive - : Réponse négative

[] Les erreurs isolées à un item de la paire d'opérations de même structure et les erreurs présentant différents patrons d'un item à l'autre n'ont pas été additionnées pour donner le total.

Appendice G-3: Fréquences des patrons d'erreurs au pré-test de calcul:
multiplication et division

Erreur	Réponse positive	Réponse négative	Aucun	[Diff.]	[Isolé]	Total	Pourcentage
Niveau	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) % (%)
Multiplication							
$x \times y$	#(#)	- -	- -	- -	- -	0(0)	0.0(0.0)
$x \times (-y)$	1(0)	#(#)	1(0)	[0(0)]	[0(0)]	2(0)	9.1(0.0)
$X \times (-y)$	3(2)	#(#)	- -	[2(2)]	[1(2)]	3(2)	13.6(9.5)
$(-x) \times y$	0(1)	#(#)	- -	[0(1)]	[0(1)]	0(1)	0.0(4.8)
$(-X) \times y$	1(1)	#(#)	1(0)	[2(1)]	[2(1)]	2(1)	9.1(4.8)
$(-x) \times (-y)$	#(#)	4(1)	1(0)	[1(0)]	[1(0)]	5(1)	22.7(4.8)
$(-X) \times (-y)$	#(#)	4(1)	1(0)	[1(0)]	[1(0)]	5(1)	22.7(4.8)
Division							
$X \div y$	#(#)	- -	- -	- -	- -	0(0)	0.0(0.0)
$(-X) \div y$	3(0)	#(#)	1(0)	[2(0)]	[2(0)]	4(0)	18.2(0.0)
$X \div (-y)$	3(2)	#(#)	- -	[2(2)]	[1(2)]	3(2)	13.6(9.5)
$(-X) \div (-y)$	#(#)	3(1)	1(0)	- -	- -	4(1)	18.2(4.8)
Réponse							
	+1/-1	Change signe	Aucun			Total	Pourcentage
Niveau	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)			G (A) 22(21)	G (A) % (%)
+ 1 & (-1)	2(0)	0(1)	2(0)			4(1)	18.2(4.8)

* Patrons d'erreurs stables ou dominants # Patron approprié de réponses

[] Les erreurs isolées à un item de la paire d'opérations de même structure et les erreurs présentant différents patrons d'un item à l'autre n'ont pas été additionnées pour donner le total.

**Appendice G-4: Fréquences des patrons d'erreurs au pré-test de calcul:
calculs avec le zéro (0)**

Réponse	0	X	-X	1	Aucun	[Diff]	[Isolé]	Total	Pourcentage
Niveau	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) % (%)
Add./Soust.									
0 - Y	1(4)	13(0)	#(#)	- -	- -	[7(4)]	[5(4)]	14(4)	63.6(19.0)
-X - 0	5(1)	4(0)	#(#)	- -	- -	[5(1)]	[1(1)]	9(1)	40.9(4.8)
0 - (-Y)	5(2)	#(#)	7(2)	- -	- -	[9(2)]	[4(2)]	12(4)	54.5(19.0)
Multiplication									
0 x Y	#(#)	3(1)	- -	- -	- -	[1(1)]	[1(1)]	3(1)	13.6(4.8)
0 x (-Y)	#(#)	- -	2(0)	- -	- -	[0(0)]	[0(0)]	2(0)	9.1(0.0)
X x 0	#(#)	5(0)	- -	- -	- -	[0(0)]	[0(0)]	5(0)	22.7(0.0)
(-X) x 0	#(#)	7(1)	- -	- -	- -	[2(1)]	[2(1)]	7(1)	31.8(4.8)
0 X 0	#(#)	- -	- -	1(0)	- -	[1(0)]	[1(0)]	1(0)	4.5(0.0)
Division									
0 + Y	#(#)	1(1)	- -	0(1)	- -	[0(1)]	[0(1)]	1(2)	4.5(9.5)
0 + (-Y)	#(#)	- -	2(1)	- -	2(0)	[3(0)]	[3(0)]	4(1)	18.2(4.8)
X + 0 et									
(-X) + 0	17(18)	1(0)	4(2)	0(1)	- -	[3(1)]	[0(0)]	22(21)	100.0(100.0)
0 + 0	20(21)	- -	- -	2(0)	- -	- -	- -	22(21)	100.0(100.0)

: Patron approprié de réponses

[] Les erreurs isolées à un item de la paire d'opérations de même structure et les erreurs présentant différents patrons d'un item à l'autre n'ont pas été additionnées pour donner le total.

Appendice G-5: Fréquences des patrons d'erreurs au pré-test de résolution de problèmes:
addition et soustraction

Expression proposée	$x + y$	$-X + y$	$X - y$	$-x - y$	$x - (-y)$	$-x - (-Y)$
Niveau	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)
PATRON D'ERREUR						
$x + y$	#(#)	- -	- -	3(0)	0(5)	- -
$-x + y$	- -	#(#)	- -	1(0)	- -	0(1)
GN - pn et rép. en naturel	- -	6(2)	- -	- -	- -	0(2)
$y - X$	- -	- -	1(0)	- -	- -	- -
$x - y / -y + x$ $/ x + (-y)$	- -	- -	- -	1(0)	14(8)	0(2)
$-x - y / -y - x$ $(-x) + (-y)$	- -	- -	- -	#(#)	- -	11(7)
$-x - (-y)$	- -	- -	- -	1(1)	- -	- -
$-y - (-x)$	- -	- -	- -	- -	- -	1(1)
$x X (-y)$	- -	- -	- -	- -	1(0)	- -
Aucune solution	- -	- -	- -	- -	0(1)	- -
Aucun patron	2(0)	2(1)	0(0)	3(0)	6(4)	9(7)
TOTAL	2(0)	8(3)	1(0)	9(1)	21(18)	21(20)
Niveau général	9.1%	36.4%	4.5%	40.9%	95.5%	95.5%
Niveau avancé	0.0%	14.3%	0.0%	4.8%	85.7%	95.2%

: Patron approprié de réponses GN - pn: Grand nombre - petit nombre

Appendice G-6: Fréquences des patrons d'erreurs dans le pré-test de résolution de problèmes: multiplication et division

Expression proposée	x X y	x X (-y)	(-x) X y	(-x) X (-y)	X + y	(-X) + y	X + (-y)	(-X) + (-y)
Niveau	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)
PATRON D'ERREUR								
x X y	#(#)	10(4)	8(4)	4(1)	-	-	1(0)	1(0)
-x X y / x X -y	-	#(#)	#(#)	6(6)	-	-	-	-
x X y - y	-	-	-	0(2)	-	-	-	-
Soustraction	-	1(0)	-	1(0)	-	1(0)	1(0)	1(0)
X + y	-	-	2(0)	0(1)	#(#)	9(6)	14(10)	3(2)
-X + y	-	-	-	-	-	-	-	9(9)
y + X	-	-	-	-	-	0(1)	-	-
y + -X	-	-	-	-	-	-	-	0(1)
-y + -X	-	-	-	-	-	-	-	0(1)
X - y - y...= 0 ou X - (z X y) = 0	-	-	-	-	-	-	0(3)	-
Autres								
Aucune solution	-	-	-	0(1)	-	0(1)	-	-
Aucun patron	-	-	3(0)	1(0)	-	3(0)	2(0)	1(0)
	-	7(4)	5(0)	10(9)	2(0)	6(3)	4(3)	6(4)
TOTAL	0(0)	18(8)	18(4)	22(20)	2(0)	19(11)	22(16)	21(17)
Niveau général	0.0%	81.8%	81.8%	100.0%	9.1%	86.4%	100.0%	95.5%
Niveau avancé	0.0%	38.1%	19.0%	95.2%	0.0%	52.4%	76.2%	81.0%

Appendice H-1: Fréquences et pourcentages des correspondances diagnostiques entre les pré-tests: addition et soustraction

Item			x + y	-x+y	x - y	-x-Y	x-(-Y)	-x-(-Y)	Total	Pourcentage
Métaphore N(N)	Cal	Pro	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 132(126)	G (A) % (%)
DIRECTE									96.4(97.7)	
Calcul									[73.6(69.9)]	
Parfaite	B	B	12(17)	4(15)	15(20)	3(17)	- -	- -	34(69)	25.8(54.8)
Bonne	B	B	8(4)	1(2)	5(1)	1(3)	0(1)	- -	15(11)	11.4(8.7)
Approximative	B	B	- -	1(1)	- -	- -	- -	- -	1(1)	0.8(0.8)
Parfaite	B	E	2(0)	3(0)	- -	3(0)	- -	- -	8(0)	6.1(0.0)
Bonne	B	E	- -	3(0)	- -	- -	- -	- -	3(0)	2.3(0.0)
Approximative	B	E	- -	1(3)	1(0)	- -	- -	- -	2(3)	1.5(2.4)
Erronée	E	B	- -	1(0)	- -	3(0)	- -	- -	4(0)	3.0(0.0)
Erronée	E	E	- -	1(0)	- -	2(0)	12(2)	15(2)	30(4)	22.7(3.2)
Problème									[83.5(95.3)]	
Parfaite	B	B	12(17)	4(15)	15(20)	3(17)	- -	- -	34(69)	25.8(54.8)
Bonne	B	B	8(4)	1(2)	5(1)	1(3)	0(1)	- -	15(11)	11.4(8.7)
Approximative	B	B	- -	1(1)	- -	- -	- -	- -	1(1)	0.8(0.8)
Parfaite	E	B	- -	4(0)	1(0)	2(0)	- -	- -	7(0)	5.3(0.0)
Bonne	E	B	- -	- -	- -	1(0)	- -	- -	1(0)	0.8(0.0)
Approximative	E	B	- -	3(0)	- -	3(0)	- -	1(0)	7(0)	5.3(0.0)
Erronée	B	E	- -	- -	- -	0(1)	9(16)	6(18)	15(35)	11.4(27.8)
Erronée	E	E	- -	1(0)	- -	2(0)	12(2)	15(2)	30(4)	22.7(3.2)
INVERSE									0.8(2.4)	
Erronée	B	B	- -	- -	- -	- -	1(2)	0(1)	1(3)	0.8(2.4)
CURATIVE									3.1(0.0)	
Calcul & Problème										
Parfaite	E	E	- -	- -	- -	1(0)	- -	- -	1(0)	0.8(0.0)
Bonne	E	E	- -	- -	- -	2(0)	- -	- -	2(0)	1.5(0.0)
Approximative	E	E	- -	- -	- -	1(0)	- -	- -	1(0)	0.8(0.0)
TOTAL									100.3(100.1)	
									... à suivre	

Item		x + y	-x+y	x - y	-x-Y	x-(-Y)	-x-(-Y)	Total	Pourcentage
Métaphore N(N)	Cal Pro	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 132(126)	G (A) % (%)
CURE PARTIELLE									20.5(2.4)
Calculs									[10.6(0.0)]
Parfaite	E B	- -	4 (0)	1 (0)	2 (0)	- -	- -	7 (0)	5.3(0.0)
Bonne	E B	- -	- -	- -	1 (0)	- -	- -	1 (0)	0.8(0.0)
Approximative	E B	- -	3 (0)	- -	3 (0)	- -	- -	6 (0)	4.5(0.0)
Problème									[9.9(2.4)]
Parfaite	B E	2 (0)	3 (0)	- -	3 (0)	- -	- -	8 (0)	6.1(0.0)
Bonne	B E	- -	3 (0)	- -	- -	- -	- -	3 (0)	2.3(0.0)
Approximative	B E	- -	1 (3)	1(0)	- -	- -	- -	2(3)	1.5(2.4)
AUTRE									
Calcul									
Curatif par comparaison		- -	1 (0)	- -	- -	2 (1)	3 (0)	6 (1)	4.5(0.8)
Nouvelle erreur		- -	- -	- -	- -	1 (0)	- -	1 (0)	0.8(0.0)

[] Total déjà inclus dans le pourcentage total

B: Bons

E: Erronés

Données précédemment incluses avec les calculs

Appendice H-2: Fréquences et pourcentages des correspondances diagnostiques entre les pré-tests: multiplication

Item			x X y	(-x) X y	x X (-y)	(-x) X (-y)	Total	Pourcentage
Métaphore N(N)	Cal	Prob	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 88(84)	G (A) % (‰)
DIRECTE								97.7(96.5)
Calcul								[54.5(67.9)]
Parfaite	B	B	1(4)	1(2)	0(2)	- -	2(8)	2.3(9.5)
Bonne	B	B	12(11)	2(5)	1(8)	- -	15(24)	17.0(28.6)
Approximative	B	B	7(5)	0(6)	4(6)	- -	11(17)	12.5(20.2)
Bonne	B	E	- -	0(2)	2(0)	- -	2(2)	2.3(2.4)
Approximative	B	E	- -	7(2)	2(0)	0(1)	9(3)	10.2(3.6)
Erronée	E	E	- -	2(1)	2(1)	5(1)	9(3)	10.2(3.6)
Problème								[85.2(90.5)]
Parfaite	B	B	1(4)	1(2)	0(2)	- -	2(8)	2.3(9.5)
Bonne	B	B	12(11)	2(5)	1(8)	- -	15(24)	17.0(28.6)
Approximative	B	B	7(5)	0(6)	4(6)	- -	11(17)	12.5(20.2)
Erronée	B	E	- -	10(3)	11(3)	17(18)	38(24)	43.2(28.6)
Erronée	E	E	- -	2(1)	2(1)	5(1)	9(3)	10.2(3.6)
INVERSE								2.3(3.6)
Erronée	B	B	2(1)	- -	0(1)	0(1)	2(3)	2.3(3.6)
TOTAL								100.0(100.1)
CURE PARTIELLE								
Problème								12.5(6.0)
Bonne	B	E	- -	0(2)	2(0)	- -	2(2)	2.3(2.4)
Approximative	B	E	- -	7(2)	2(0)	0(1)	9(3)	10.2(3.6)
AUTRE								
Curatif / comparaison			- -	1(0)	- -	1(0)	2(0)	2.3(0.0)
Nouvelle erreur			- -	- -	1(0)	1(0)	2(0)	2.3(0.0)

[] Total déjà inclus dans le pourcentage total

B: Bons

E: Erronés

Données précédemment incluses avec les calculs

Appendice H-3: Fréquences et pourcentages des correspondances diagnostiques entre les pré-tests: division

Item			X+y	(-X)+y	X+(-y)	(-X)+(-y)	Total	Pourcentage
Métaphore N(N)	Cal	Pro	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 22(21)	G (A) 88(84)	G (A) % (%)
DIRECTES								
Calcul								[38.7(50.2)]
Parfaite	B	B	1(4)	0(1)	- -	- -	1(5)	1.1(6.0)
Bonne	B	B	11(14)	2(8)	- -	- -	13(22)	14.8(26.2)
Approximative	B	B	6(2)	1(0)	0(1)	- -	7(3)	8.0(3.6)
Parfaite	B	E	- -	- -	- -	0(1)	0(1)	0.0(1.2)
Bonne	B	E	- -	2(4)	- -	0(1)	2(5)	2.3(6.0)
Approximative	B	E	- -	- -	0(1)	0(2)	0(3)	0.0(3.6)
Erronée	E	E	- -	4(0)	3(2)	4(1)	11(3)	12.5(3.6)
Problème								[94.4(77.5)]
Parfaite	B	B	1(4)	0(1)	- -	- -	1(5)	1.1(6.0)
Bonne	B	B	11(14)	2(8)	- -	- -	13(22)	14.8(26.2)
Approximative	B	B	6(2)	1(0)	0(1)	- -	7(3)	8.0(3.6)
Erronée	B	E	2(0)	13(7)	19(13)	17(12)	51(32)	58.0(38.1)
Erronée	E	E	- -	4(0)	3(2)	4(1)	11(3)	12.5(3.6)
INVERSE								3.4(11.9)
Erronée	B	B	2(1)	0(1)	0(4)	1(4)	3(10)	3.4(11.9)
TOTAL								100.1(100.2)
AUTRE								
Problème (cure partielle)								2.3(10.8)
Parfaite	B	E	- -	- -	- -	0(1)	0(1)	0.0(1.2)
Bonne	B	E	- -	2(4)	- -	0(1)	2(5)	2.3(6.0)
Approximative	B	E	- -	- -	0(1)	0(2)	0(3)	0.0(3.6)
Calcul								
Curatif par comparaison			- -	3(0)	1(0)	1(0)	5(0)	5.7(0.0)
Nouvelle erreur			- -	- -	2(0)	2(1)	4 (1)	4.5(1.2)

[] Total déjà inclus dans le pourcentage total

B: Bons

E: Erronés

Données précédemment incluses avec les calculs

Appendice H-4: Fréquences et pourcentages des correspondances diagnostiques entre les pré-tests: multiplication et division avec le zéro (0)

Item			0 x -Y	-X x 0	0 + Y	X + 0	0 + 0	Total	Pourcentage
			0 x Y	X x 0					
Métaphore N(N)	Cal	Rés*	G(A) 15(17)	G(A) 9(8)	G(A) 22(21)	G(A) 22(21)	G(A) 22(21)	G(A) 90(88)	G (A) % (%)
CALCUL									96.6(96.5)
Corr. complète									[76.6(79.5)]
Parfaite	B	B	0(1)	1(1)	2(2)	- -	- -	3(4)	3.3(4.5)
Bonne	B	B	6(9)	3(0)	5(7)	- -	- -	14(16)	15.6(18.2)
Approximative	B	B	0(1)	1(0)	3(5)	- -	- -	4(6)	4.4(6.8)
Erronée	E	E	1(0)	1(1)	2(1)	22(21)	22(21)	48(44)	53.3(50.0)
Corr. partielle									[20.0(17.0)]
Erronée	B	B	7(5)	2(6)	9(4)	- -	- -	18(15)	20.0(17.0)
Corr. inverse									1.1(1.1)
Erronée	B	E	- -	- -	1(1)	- -	- -	1(1)	1.1(1.1)
Curative									2.2(1.1)
Bonne	E	B	- -	1(0)	- -	- -	- -	1(0)	1.1(0.0)
Approximative	E	B	1(0)	- -	0(1)	- -	- -	1(1)	1.1(1.1)
Autre									0.0(1.1)
Curat./comparaison	E	B	0(1)	- -	- -	- -	- -	0(1)	0.0(1.1)
TOTAL									99.9(99.8)
PROBLÈME									100.0(95.2)
Corr. complète									
Erronée	E	E**	# #	# #	# #	22(20)	# #	22(20)	100.0(95.2)
Corr. inverse									
Erronée	E	B**	# #	# #	# #	0(1)	# #	0(1)	0.0(4.8)

* Correspondances avec le résultat de la métaphore, sauf pour l'item X + 0 qui est relié à un problème.

** Correspondances avec le résultat du problème.

[] Résultats déjà inclus dans le total.

Appendice I-1: Obstacles des nombres entiers naturels (calculs), lois mathématiques et analogies correspondantes : addition et soustraction

Addition en entiers naturels		
Loi mathématique	G(A)	Analogie correspondante
Associativité erronée: $-6 + 3 = -(6 + 3) = -9$	6(0)	-6 + 3: "Il manquait 6 personnes au début du party et 3 personnes ont parti. Combien qui restent? -9." (17G/AS3) -6 + 3: "L'ascenseur était à 3 étages dessous la terre, alors à -6." (9G/AS4)
Associativité erronée: $-3 - (-6) = -(3 + 6) = -9$	7(1)	-3 - (-6): "Billy devait 3\$ et 6\$. Ok. Y devait, y devait 9... les deux. Mais il a continué à jouer et il a perdu encore. (...) Il a 9\$ dans le trou." (1G/AS10) -3 - (-6): "Je dois 3 à Denis et 6 à Jean. = -9." (4G/AS12)
Soustraction en entiers naturels		
Impossibilité de soustraire un grand nombre d'un plus petit $3 - 6 = -9$	0(1)	3 - 6: "Parce que, j'dis, ben si comme t'as 3, t'as 3 pommes pis faut que t'en donnes 6, c'est pas possible, so... (...) Des degrés? Eh... Ben, y fait 3° maintenant, puis tout à coup ça tombe à -6, so..." (1A/AS2)
Impossibilité de soustraire du zéro (0) $0 - 6 = 0$	3(1)	0 - 6: "La température était de 0°. Puis, elle a augmenté de - 6. (...) La température était de 0°. Elle a descendu de 6°. Et puis, ça a donné 0." (12A/AS2) 0 - 13: "T'es cassée aujourd'hui, t'as 0. (...) Et puis, y a quelqu'un... y a quelque chose que tu veux... un autre tape, que tu veux absolument. Puis, il va te le vendre 13\$. (...) Ça serait quand même 0, non?" (14G/AS7)
Nombre inférieur initial entraîne une inversion: $3 - 6 = 6 - 3 = 3$	6(0)	2 - 9: "Billy là... ok, y a 9\$ dans les poches... ok, et puis y s'en va jouer au poker.(...) Puis là, le bid là, c'était 2\$ pour rentrer. Puis là, y a perdu 2\$. Ça fait que là, y reste 7 dans les poches." (1G/AS2-3)
$0 - 13 = 13 - 0 = 13$	3(0)	0 - 13: "T'es cassé, t'as 0. (...) T'emprunes 13\$. Ben, tu vas avoir juste 13." (22G/AS7)

Soustraction en entiers naturels		
Loi mathématique	G(A)	Analogie correspondante
Négatif initial entraîne la commutativité des signes: $-6 + 3 = 6 - 3 = 3$	1(0)	Curative
Associativité erronée: $-6 - 3 = -(6 - 3) = -3$ + traduite en inversion quand le nombre initial est inférieur: $-3 - 6 = -(6 - 3) = -3$ $-3 - 6 = 6 - 3 = 3$	7(1) [3(0)] [1(0)]	-6 - 3: "J'ai dépensé 6\$, puis il me manquait 3?" (7A/AS3) -3 - 6: "L'ascenseur est à 3 étages dessous la terre et... = -3." (9G/AS8) -3 - 6: "Jean est descendu de 3 marches, <u>il lui en reste</u> 6 à descendre. En tout, il y a 9 marches à descendre. (= -3 raturé)" (22G/AS10) -3 - 6: "Sur la gauche d'une rue, y a -3 d'autos... ok, <u>que sur le côté droit</u> , -6." (6G/AS5)
Signes prédicatifs et opératifs confondus en un signe opératif: $3 - (-6) = 3 - 6 = -3$ et $6 - (-3) = 6 - 3 = 3$ $-3 - (-6) = -3 - 6 = -9$ et $-6 - (-3) = -6 - 3 = -9$ + composé d'inversion quand le nombre initial est inférieur: $3 - (-6) = 3 - 6 = 6 - 3 = 3$ + composé d'associativité erronée et d'inversion: $-3 - (-6) = -(6 - 3) = -3$ $-6 - (-3) = -(6 - 3) = -3$	10(1) [1(0)] [2(0)] [1(0)] [2(0)]	3 - (-6): "Il fait 3°C dehors. Mais, à mesure que vient la nuit, le thermomètre descend de 6°. Il fait maintenant -3." (15G/AS8) 3 - (-6): "J'ai 3\$ dans la banque. La banque me charge 6\$ pour NSF, mais je n'ai pas assez d'argent. Alors, j'ai -3\$ dans la banque." (10G/AS7) -3 - (-6): "...je m'ai fait voler 3 billes. (...) Et mon frère m'en a pris 6. Il m'en manque 9... ben, dans mon paquet." (7A/AS6) -3 - (-6): "...-3 chats sont morts cette semaine. La semaine passée, -6 chats sont morts. Donc, il y a 9 chats de morts en deux semaines." (6G/AS8) 3 - (-6): "...j'ai 3 pommes. (...) Je dois 6. (...) Puis après ça, c'est supposé d'être -3. (= + 3 raturé)." (11G/AS6) -3 - (-6): "Tu dois 3\$ et tu empruntes 6. Tu dois maintenant 9\$. = -3." (7G/AS8)

G(A): nombre d'élèves par niveau qui ont évoqué les lois correspondantes

[G(A)]: nombre d'élèves déjà compris dans les nombres sans crochet

Appendice I-2: Obstacles des nombres entiers naturels (calculs), lois mathématiques et analogies correspondantes : multiplication et division

Loi mathématique	G(A)	Analogie correspondante
Stabilité du nombre naturel initial: $3 \times 0 = 3$	4(2)	3 X 0: "J'ai 3\$ et ça fait longtemps que je travaille... et toujours rien de plus." (8G/M3) 3 X 0: "Y en achète 3. Pendant la semaine, y en fume pas. Y en reste encore 3." (15A/M6)
Stabilité inconditionnelle du nombre naturel: $0 \times 14 = 14$ $0 + 9 = 9$ $3 + 0 = 3$	2(0) 2(1) 2(3)	0 X 14: "Ben... si... ça, c'est comme si t'as 14\$.. puis, là tu joues... tu joues pas... ben, y doit te rester 14\$." (1G/M4) 0 + 9: "...c'est comme...tu dois pas d'argent à personne... mais, y a 9 personnes. (...) Comme... y a 9 personnes, mais tu leur dois pas rien... ben, y a encore 9 personnes." (1G/D6). 0 + 3: "J'avais pas d'argent à l'école, aujourd'hui. (...) Mais, arrivée à la maison, ma mère m'a donné 3\$. = 3." (21G/D6) 3 + 0: "Alors, t'as 3 billes. Ta mère te dit de partager tes billes avec ton frère. Ton frère ne les aime pas. Alors tu ne sépares pas tes billes. Tu as encore 3 billes." (8A/D9) 3 + 0: "3 bonbons ont été séparés par 0 personne. Donc, il reste 3 bonbons." (6G/D7)
Stabilité du nombre naturel justifiée par une inversion, où on ne peut pas diviser: $0 + 3 = 3 + 0 = 3$	1(1)	0 + 300: "Monsieur Leblanc n'a pas d'employé. Alors, il ne doit pas diviser son profit de 300\$. (...) (0 + 3 = 3)." (19A/D8)
Conception "nombre de parts": - "Il y a un 0 dans 0": $0 + 0 = 1$ - "Il y a un 0 dans chaque unité": $3 + 0 = 3$	0(1) 2(1)	0 + 0: "Paul n'a plus d'argent. Et Kim, non plus. Y a plus d'argent, alors comment peuvent-ils se partager <u>une</u> poutine quand ils n'ont plus d'argent?" (15A/D6) 3 + 0: "Eh... j'ai gagné 3\$ à moi seule... = 3." (8G/D7) 3 + 0: "On est 3 personnes à partager 1 gâteau. Et je l'ai coupé en 3." (7A/D2)

Loi mathématique	G(A)	Analogie correspondante
Ne peuvent justifier un résultat positif:		
$(-6) + 3 = 2$	2(0)	$(-6) + 3$: "Jean-Michel était dans l'ascenseur qui est brisé. Il a été au 6e étage à plusieurs reprises et ensuite est descendu 3 fois." (14G/D1)
$6 + (-3) = 2$	1(1)	$(-6) + 3$: "J'ai perdu 6 billes..." (9G/D1)
		$6 + (-3)$: " = 2. Je ne comprends point." (15A/D1)
		$6 + (-3)$: " = 2." Aucune métaphore. (21G/D1)

G(A): nombre d'élèves par niveau qui ont évoqué les lois correspondantes

Appendice I-3: Obstacles des lois généralisées de façon erronée (calculs), lois mathématiques et analogies correspondantes : addition et soustraction

Lois de multiplication et division		
Loi mathématique	G(A)	Analogie correspondante
2 négatifs entraînent un résultat positif + traduite en addition: $-3 - 6 = 3 + 6 = 9$ + traduite en soustraction: $-6 - 3 = 6 - 3 = 3$ + traduite en: $-3 - 6 = -3 + 6 = 3$, où le nombre supérieur hérite du signe positif	15(0) [3(0)] [2(0)] [1(0)]	-3 - 6: "Tu avais 3\$ et ton ami te fait rappeler que tu dois 6\$. Alors, tu en dois 9\$. = +9." (7G/AS5) -3 - 6: "Je dois 3 jetons, j'en perds 6. <u>Combien m'en reste-t-il?</u> = - 9. (3 raturé)" (17G/AS6) -3 - 6: "Je suis au 6e étage. Je décide de descendre 3 étages. Maintenant, je suis au 3e étage." (16G/AS4)
Justification des associativités erronées + un négatif et un positif entraînent un résultat négatif: $-6 + 3 = -(6 + 3) = -9$ + 3 négatifs entraînent un résultat négatif: $-3 - (-6) = -(3 + 6) = -9$ $-3 - (-6) = -(6 - 3) = -3$	2(0) 6(1) [5(1)] [1(0)]	-6 + 3: "J'avais perdu -6\$ et j'ai regagné 3. = -9." (18G/AS2) (Voir aussi exemples précédents des associativités erronées) (Voir exemples précédents des associativités erronées)

Lois conflictuelles		
Loi mathématique	G(A)	Analogies correspondantes
L'habitude de calculer dans le système des nombres relatifs est généralisée à celui des nombres naturels: $6 - 3 = -3$	1(0)	6 - 3: "Si l'ascenseur est au 6e étage et elle descend de... au 3e étage, elle a descendu du 3e... de 3 étages." (9G/AS6)
Le signe positif résultant des deux négatifs est attribué autrement: $-3 - (-6) = 3 - 6$	3(0)	-3 - (-6): "...y manque 6 jetons et je gagne 3. Combien m'en reste-t-il? = -3." (17G/AS8)
$-3 - (-6) = -3 + -6$	[1(0)]	-3 - (-6): "Hier, il faisait -3°C. Aujourd'hui, il fait -6°C. La différence est de -9°C." (19G/AS10)
	[2(0)]	-3 - (-6): "Je dois la banque 3\$ et j'emprunte 6\$ de plus. = -9." (11G/AS7)
Justification des associativités erronées: signe hérité du nombre supérieur: $-6 + 3 = -(6 + 3) = -9$ $-6 - 3 = -(6 - 3) = -3$ $3 - (-6) = -(3 + 6) = -9$	6(0)	(Voir exemples précédents des associativités erronées)
	[2(0)]	
	[2(0)]	
	[2(0)]	

G(A): nombre d'élèves par niveau qui ont évoqué les lois correspondantes

[G(A)]: nombre d'élèves déjà compris dans les nombres sans crochet

Appendice I-4: Obstacles des lois généralisées de façon erronée (calculs), lois mathématiques et analogies correspondantes : multiplication et division

Lois d'addition et de soustraction		
Loi mathématique	G(A)	Analogie correspondante
Signe du résultat hérité du nombre supérieur: $(-3) \times 6 = 18$ $6 + (-3) = 2$	3(1) 3(1)	$(-3) \times 6$: "J'ai emprunté 3\$ et j'ai gagné 6 fois le nombre que j'avais emprunté. 18." (21G/M2) $(-3) \times 6$: "...j'ai été en dette de 3\$ et j'ai gagné 21. = 18." (18G/M2) $6 + (-3)$: "Il avait 6 personnes avec les cheveux bruns dans cette salle, mais il en avait 3 qui sont parties. Alors, il resterait la moitié." (7A/D1) $6 + (-3)$: "Elise et Jason étaient dans l'ascenseur. Ils ont monté jusqu'au 6e étage et ensuite descendu au 3e étage. Le total était maintenant rendu à 3." (14G/D1) $6 + (-3)$: "Ben, j'avais 6\$. J'ai perdu 4\$... puis, j'avais 2\$ qui me restaient." (18G/D2) $6 + (-3)$: "J'ai 6 gommes que je dois séparer entre 3 de mes amis." (17G/D3)
Signe négatif entraîne une soustraction: $(-3) \times 6 = -3 + 6 = 3$	1(0)	$(-3) \times 6$: "Alain a perdu 3 joutes de monopoly sur 6 joutes, ce qui lui donne le même nombre gagné que Kevin." (14G/M1)
2 signes négatifs entraînent un résultat négatif: $(-3) \times (-6) = -18$ $(-6) + (-3) = -2$	2(0) 1(0)	$(-3) \times (-6)$: "J'ai une partie... j'ai une perte de 3 jetons..., puis, pour 6 mains... qui me donne un total de -18." (3G/M2) $(-3) \times (-6)$: "Sébastien... avait 3 paires de pantalons troués. Dans une fin de semaine, il a troué 6 paires de pantalons." (15A/M4) $(-6) + (-3)$: "Combien de - 3 y a-t-il dans -6? = -2." (11G/D2) $(-6) + (-3)$: "3 hommes jouent au poker. En tout, ils doivent 6\$. Chaque monsieur est en dette de 2\$." (15A/D2)

Lois des exposants		
Loi mathématiques	G(A)	Analogie correspondante
Nombre pair + parenthèses entraînent un résultat positif: $(-3) \times 6 = 18$	0(1)	Curative
La division du zéro = 1: $0 \div 3 = 1$	1(1)	0 + 3: "J'ai 0 gomme et j'en dois 3 à... <u>un</u> chien. = 1." (17G/D7)
La division par zéro = 1: $3 \div 0 = 1$	3(3)	3 + 0: "J'ai 3 bonbons... et j'en dois 0 à personne. = 1." (17G/D10)

Loi de la commutativité		
Commutativité des signes: $3 \times (-6) = (-3) \times 6$	8(6)	3 X (-6): "Eric repaie 3\$ à 6 de ses amis pour annuler ses dettes. Eric vient alors de remettre 18\$ en tout." (2A/M1) (-3) X 6: "Après que son père lui a donné son argent, il perd son allocation de 6\$ pour 3 semaines. = -18." (2G/M2)
Inversion des termes de la division par commutativité: $3 \div 0 = 0 \div 3 = 0$	7(4)	3 + 0: "Julie fait du bénévolat à l'hôpital pendant 3 jours. Combien d'argent gagne-t-elle par jour? Eh.... (...) 0." (6A/D5) 3 + 0: "...combien de 3 qu'il y a dans 0? = 0." (11G/D7)

Lois conflictuelles		
Loi mathématique	G(A)	Analogie correspondante
La soustraction (addition) répétée est l'opération inverse de la division: $3 + 0 = 0$, car $0 + 0 + 0... = 0$	1(0)	3 + 0: "Les 3 personnes dans l'ascenseur débarquent tous à la cave. Il ne reste personne dans l'ascenseur. (...) ...des 0, y en a combien dans 3? Y en a pas... parce que même si tu fais $0 + 0 + 0 + 0...$ tu peux faire ça jusqu'à l'infini... jusqu'à l'infini, puis ça donnera jamais 3." (15G/D8)
La multiplication est l'opération inverse de la division: $0 + 0 = 0$ car $0 \times 0 = 0$ $0 + 0 = 1$ car $1 \times 0 = 0$	2(0) 1(1)	0 + 0: "Il fait 0°C. Pendant 0 heure, la température augmentait de 0." (19G/6) 0 + 0: "Le poker est vide. Donc, personne ne gagne rien." (1G/D8) 0 + 0: "Personne va à la fête de Georges. Alors, personne ne doit donner d'argent pour acheter <u>un</u> cadeau." (19A/D10) 0 + 0: "J'ai 0 gomme et j'en dois 0 à <u>mon</u> chat." (17G/D9)
Généralisation de la stabilité du zéro (0) initial lors de la division par zéro (0): $0 + 0 = 0$	3(10)	0 + 0: "Marc a aucun argent dans ses poches et il désire le séparer (...). Marc demeure encore avec aucun argent." (9A/D8) 0 + 0: "Il n'y a pas de personne dans l'ascenseur. (...) Elle ne bouge pas. Il y a encore personne dans l'ascenseur." (15G/D7)

G(A): nombre d'élèves par niveau qui ont évoqué les lois correspondantes

Appendice I-5: Obstacles de la notation (calculs), lois mathématiques et analogies correspondantes : addition et soustraction

Absence d'un signe d'addition		
Loi mathématique	G(A)	Analogie correspondante
Cause de la fiction d'un nombre négatif initial: $3 - 6 = -3 - 6 = -9$	1(1)	3 - 6: "La mère à... on va dire Pierre... lui a servi 6 carottes... puis là, lui en mange 3 autres..." (15A/AS2)
Cause de la fiction d'un nombre positif en second: $-3 - 6 = -3 + 6 = 3$	2(0)	-3 - 6: "Ce matin, il faisait -3°C. Et l'après-midi, il fait 6°C. La différence est de 3°C." (19G/AS3)
Cause d'une associativité: $-6 - 3 = -(6 - 3) = -3$	1(0)	Curative
Parenthèses		
Cause de la répartition des signes entre les termes: $3 - (-6) = -3 - 6 = -9$	3(0)	3 - (-6): "...je perds 3\$... puis, j'en devais 6 au top de ça. = -9." (4G/AS10)
Cause de l'application de la loi de l'ordre des opérations où les signes sont répartis par inversion: $3 - (-6) = -6 - 3 = -9$	1(0)	3 - (-6): "...tu dois 3\$ et tu empruntes... 6. Tu dois maintenant 9\$." (7G/AS8) 3 - (-6): "J'ai 6 jetons de perdus... (...) Mais, j'ai encore perdu... 3 autres. (...) Et puis, ça égale à une perte de -9." (3G/AS3)
Cause de la multiplication: $3 - (-6) = 18$ $-3 - (-6) = -18$	2(2)	3 - (-6): "J'avais juste 3\$ et j'ai gagné 15\$, qui donne 18\$." (18G/AS6) -3 - (-6): "Ce matin, il faisait -3°C. La température a baissé durant la journée. Mais elle a descendu... descendu de 6°C durant le soir. Alors, la température est à -18°C." (17A/AS3)
2 négatifs séparés par une parenthèse entraînent un résultat positif: $3 - (-6) = 3$	1(0)	3 - (-6): "...l'ascenseur est au 3e étage... et elle est descendue au 6e étage, mais dessous la terre. Alors, elle est à la 3e étage." (9G/AS9)
Un nombre négatif entre parenthèses entraîne un résultat négatif: $-3 - (-6) = -3$	1(0)	-3 - (-6): "L'ascenseur est à la 3e étage sous la terre et elle est descendue encore de 3 autres étages. Alors, elle est au moins... négatif 6." (9G/AS9)

Appendice I-6: Autres obstacles (calculs), lois mathématiques et analogies correspondantes

Obstacles ontogéniques		
Addition et soustraction		
Loi mathématique	G(A)	Analogie correspondante
Un négatif et un positif entraînent un résultat positif: $-11 + 2 = 9$	1(0)	Nouvelle erreur / Curative
3 négatifs entraînent un résultat positif: $-8 - (-7) = 15$	1(0)	Nouvelle erreur
Négatif initial entraîne une multiplication: $-3 + 6 = (-3) \times 6$	1(0)	Curative
Multiplication et division		
Résultat hérité du signe initial: $3 \times (-6) = 18$	1(0)	3 X (-6): "Martin était à la 3e case du jeu de monopoly. C'était encore son tour, il avance de 6 et sur la 6e case, on lui dit de piger une carte. La carte disait: recule de 6." (14G/M1)
Un nombre inférieur initial entraîne un résultat positif: $3 \times (-6) = 18$	1(0)	Nouvelle erreur
Impossibilité de multiplier un nombre supérieur par zéro (0): $0 \times 3 = 0 + 3 = 3$	1(0)	0 X 3: "J'avais pas d'argent à l'école, aujourd'hui. (...) Mais, arrivée à la maison, ma mère m'a donné 3\$.= 3." (21G/M7)
Impossibilité de diviser le zéro (0), justifié par une inversion: $0 + 3 = 3 + 0$	0(1)	Nouvelle erreur / Curative
Stabilité d'un nombre relatif négatif: $0 + (-3) = -3$	1(0)	Curative
Stabilité d'un nombre négatif initial seulement: $(-8) \times 0 = -8$	1(0)	Curative

Obstacle technologique		
Loi mathématique	G(A)	Analogie correspondante
Dépendance totale de la calculatrice (signe): $-3 - 6 = -9$ ou 9	1(0)	-3 - 6: "Tu avais 3\$ et ton ami te fait rappeler que tu dois 6\$. Alors, tu en dois 9\$. = +9. (...) Ah, ben, j'suis pas capable. J'ai besoin de ma calculatrice." (7G/5 & 3)

Autres obstacles		
Les nombres négatifs interfèrent dans les calculs avec zéro (0): $0 - 6 = ?$	0(1)	Curative: 0 - 6: "Mes zéros sont.... J'ai de la misère, j'sais pas pourquoi. J'ai aucune idée pourquoi. Mais, depuis qu'on a appris les négatifs là, les zéros c'est mêlé. J'sais que quand on multiplie, c'est 0. Mais quand on divise, additionne, puis soustrait... comme, de même j'pourrais pas le faire. Mais $6 - 0$, ce serait 6. (...) Marc a pas d'argent dans ses poches. Mais il en emprunte 6 de son ami. Alors, il est en... 6\$ de dette." (9A/2)
Calcul à l'unité erroné entraîné par un nombre négatif initial	1(0)	Curative: -6 + 3: "Je dois la banque 6\$. Je les donne 3 et je les dois encore 3. (= +3 remplacé par -3) (...) Ben, $-10 + 7...$ c'est eh... 8, 9, 10. 3... non, -3" (11G/AS2)
Droite dirigée non unifiée: $3 - (-6) = 3 - 6 + 6 = 3$ + calcul à l'unité de quantités hétérogènes utilisé inefficacement: $-6 + 3 = 3$	2(0) [1(0)]	3 - (-6): "...j'ai 3\$, j'en devais 6 à ma mère. (...) Puis, mon père me devait 6\$. (...) Alors, il m'en reste 3. = 9." (8G/AS5) -6 + 3: "Julie avait manqué son tour 6 fois depuis qu'elle a commencé le jeu avec ses amis. (...) Huum... elle a été chanceuse à son septième tour, elle a finalement pu avancer de + 3. Alors, elle était rendue à la 3e case." (14G/AS3)
Dépendance totale de la droite numérique	3(0)	-18 - 1: "Ben d'habitude, d'habitude... je vas regarder sur une règle. Comme mon 0 est là, mon moins, puis mon positif... A part ça, j'ai -18, après ça je racule... de 18... je racule de 1 encore, ça va me donner -19." (4G/AS5)

G(A): nombre d'élèves par niveau qui ont évoqué les lois correspondantes

Appendice J-1: Obstacles, solutions des problèmes et analogies correspondantes:
addition et soustraction

Solution des problèmes	G(A)	Analogie correspondante
$-6 + 3 = 6 - 3 = 3$ et $-6 + 3 = 3$	3(4) [1(3)]	Univocité des termes: $-6 + 3$: "J'ai perdu 6 billes, mais mon p'tit frère en a trouvé 3. Alors, <u>il m'en reste</u> 3 billes à trouver." (7A/AS2)
$6 - 3 = 3 - 6 = 3$	1(0) [1(0)]	Conceptions conflictuelles (transformation et abscisse): $6 - 3$: "Si l'ascenseur est au 6e étage et elle descend au 3e étage, elle a descendu de 3 étages. = 3." (9G/AS6)
$-3 - 6 = -3 - (-6) = 3$	0(1) [0(1)]	Conception erronée de la soustraction: $-3 - 6$: "Geneviève avait une dette de 3\$. Puis un jour, elle se promenait dans le parc et elle a trouvé 6\$. Maintenant, elle a un profit de 3\$. Sa dette est éliminée. (...) Ben moi, je pensais que c'était une dette de 3\$... (...) Puis t'ôtes 6\$ de ta dette. Y va t'en rester 3." (16A/AS2-3)
$-3 - 6 = 3 - 6$	1(0) [1(0)]	Relation comparative: $-3 - 6$: "Sur la gauche d'une rue, y a -3 d'autos... ok, que sur le côté droit, -6. En tout il a 9 autos." (6G/AS5)
$-3 - 6 =$ solution ou réponse en naturels	1(0) [1(0)]	Aucune conception
$3 - (-6) = 3 + 6 = 9$ $3 - (-6) = 9$ $3 - (-6) = 3 - 6^*$	0(7) [0(4)] [0(2)] [0(1)]	Conception littérale de la loi: $3 - (-6)$: "Au début de la joute, j'ai 3\$. Dans la prochaine main, je perds ma dette de 6\$. J'ai alors 9\$." (3A/AS3)
$3 - (-6) = 3 - 6$	5(0) [4(0)]	Conception additive de la loi: $3 - (-6)$: "Si tu es au 3e étage et que tu montes 6 étages. Rép. = 9." (2G/AS3)
$3 - (-6) = 3 - 6$ Solutions hétéroclites Aucune solution* $3 - (-6) = 3 + 6^*$	16(12) [11(7)] [5(3)] [0(1)] [0(1)]	Interprétation erronée de la soustraction d'un négatif: $3 - (-6)$: "J'ai acheté... 3 pommes et ma mère m'en a enlevé 6. Donc, c'est égale à..." (11A/AS3) $3 - (-6)$: "Billy gagne 3\$, ok?... pour la première main. Puis là, la deuxième main, il perd 6\$ qu'il devait déjà. Donc, il est 3\$ dans le trou." (1G/AS9) $3 - (-6)$: "Ok, ben... je perds... ok, je perds 3\$... puis, j'en devais 6 au top de ça. = -9." (4G/AS10)

Solution des problèmes	G(A)	Analogie correspondante
$3 - (-6) = 3 \times (-6)$ $3 - (-6) = 3 - 6$	1(1) [1(0)] [0(1)]	Aucune conception
$-3 - (-6) = 3$ ou $-6 - (-3)$ ou $-3 + 6$ et $6 - 3 = 3$	0(5) [0(5)]	Conception littérale de la loi: $-3 - (-6)$: "J'ai -3\$, une dette. (...) J'ai une autre dette de 6\$. (...) Mais, la personne me dit que c'est pas nécessaire de la payer... de la repayer. (...) J'ai donc... 3\$." (14A/AS4)
$-3 - (-6) = -3 - 6$ Solutions hétéroclites	6(4) [3(3)] [3(1)]	Conception additive de la loi: $-3 - (-6)$: "Je commence la joute avec une dette de 3\$. La prochaine main me donne une fortune lorsque je gagne 6\$. Je paie ma dette de 3\$ et je finis avec 3\$." (3A/AS3) $-3 - (-6)$: "...de -3°, la température monte de 6... donc, elle se retrouve à...? 3." (13G/AS5)
Solutions hétéroclites $-3 - (-6) = -3 - 6$ $-3 - (-6) = -6 + 3^*$ $-3 - (-6) = -6 - (-3)^*$ $-3 - (-6) = 6 - 3^*$	13(10) [6(4)] [6(3)] [0(2)] [0(1)] [1(0)]	Interprétation erronée de la soustraction d'un négatif: $-3 - (-6)$: "Eh... je m'ai fait voler 3 billes. (...) Et mon frère m'en a pris 6. Il m'en manque 9... ben, dans mon paquet." (7A/AS6) $-3 - (-6)$: "Tu dois 3\$ et tu empruntes 6. Tu dois maintenant 9\$." (7G/AS8)
$-3 - (-6) = -3$	1(0) [1(0)]	Interprétation erronée de la conception en abscisse: $-3 - (-6)$: "Hier, il faisait -3°C. Aujourd'hui, il fait -6°C. La différence est de -9°C." (19G/AS10)
$-3 - (-6) = -3 - 6$ Solutions hétéroclites	2(2) [1(1)] [1(1)]	Aucune conception

* solutions atypiques

G(A) nombre d'élèves ayant produit ce genre d'analogies

[G(A)] nombre d'élèves, déjà compris dans les nombres sans crochet, qui ont produit systématiquement ce genre de solutions

Appendice J-2: Obstacles (problèmes), solutions des problèmes et analogies correspondantes: multiplication et division

Solution des problèmes	G(A)	Analogie correspondante
$3 \times (-6)$ et/ou $(-3) \times 6 = 3 \times 6$ $6 \div 3$ Solutions en naturels	$8(6)$ $[4(2)]$ $[2(0)]$ $[2(1)]$	Comparaison aux deux items: $3 \times (-6)$: "La dette de Patrick a une dette... de 6. J'sais pas là. La dette a monté de 3 fois sa valeur. Il est maintenant en dette de 18\$." (16A/M1) $(-3) \times 6$: "Ok, pendant une partie de poker, tu as perdu 3\$. Ensuite, tu as gagné 6 fois le montant que tu as perdu. = -18." (5G/M2)
$3 \times (-6)$ et $(-3) \times 6 = 3 \times 6$	$2(0)$ $[2(0)]$	Combinaison invalide aux deux items: $3 \times (-6)$: "Je veux balancer mon gageure parce que je dois 3\$ fois 6\$ que j'ai pas égale -18. (= -3 raturé)" (11G/M1) $(-3) \times 6$: "Si tu as - 3 personnes et tu leur donnes 6 pommes chacune. Combien de pommes cela fait? = -18." (12G/M2)
$3 \times (-6)$ et/ou $(-3) \times 6 =$ Solutions en naturels	$1(1)$ $[1(1)]$	Combinaison incomplète: $3 \times (-6)$: "J'ai perdu les sacs de pommes de ma grand-mère, de ma tante et de... de ma... (...) De ma mère. (...) Alors, il me manque 18 sacs." (7A/M1) $(-3) \times 6$: "Dans le sous-sol, Luc a trouvé 3 sacs de bonbons... = - 18." (22G/M2)
$3 \times (-6)$ et $(-3) \times 6 = 3 \times 6$ Solutions en naturels et aucune solution	$2(0)$ $[1(0)]$ $[1(0)]$	Combinaison valide insuffisante aux deux items: $3 \times (-6)$: "L'ascenseur a descendu de 3 fois le montant de -6, qui fait -18." (20G/M1) $(-3) \times 6$: "...tu dois 3 fois 6\$, alors tu dois 18\$." (7G/M2)
$3 \times (-6)$ ou $(-3) \times 6 = 3 \times 6$	$0(2)$ $[0(2)]$	Soustraction répétée: $3 \times (-6)$: "La mère à Julien a acheté un sac de pommes. Julien mange 6 pommes la première journée. Ensuite, il mange 6 pommes la seconde... et 6 pommes, la troisième. Julien doit remettre 18 pommes avant que sa mère le sache." (15A/M1) $(-3) \times 6$: "Tu as perdu 3 billes, n'en dois 3 à ton frère, 3 à ta soeur, 3 à ton voisin, 3 à ton ami... (...) Et tu t'en es fait voler 3. Il te manque 18 billes." (8A/M4)

Solution de problèmes	G(A)	Analogie correspondante
$3 \times (-6)$ et $(-3) \times 6 =$ 3×6 $3 - 6$ et aucune solution	4(1) [3(1)] [1(0)]	Transformation linéaire aux deux items: $(-3) \times 6$: "...j'ai perdu 3 billets... (...) Et je reçois 6 billets. Le produit est -18." (12A/M3) $3 \times (-6)$: "Un thermomètre est à 3°... eh, pendant la journée, elle descend à 6°. = -18." (15G/M2)
$6 \times (-3) = 6 + 3$	2(0) [2(0)]	La division en naturels est l'opération inverse de la multiplication: $6 + 3$: "Il y a 6 familles dans une maison. Il y a 3 fois moins... de de famille? Rép. = 2." (17G/D1)
$3 \times (-6) = 3 - 6$ $(-6) + 3 = 3 - 6$ $6 + (-3) = 6 - 3$ $(-6) + (-3) = 6 - 3$	1(0) [1(0)]	Le signe prédicatif négatif devient systématiquement un signe opératoire dans les opérations bi-dimensionnelles: $3 \times (-6)$: "Martin était à la 3e case du jeu de monopoly. C'était encore son tour, il avance de 6 et sur la 6e case, on lui dit de piger une carte. La carte disait: recule de 6." (14G/M1) $(-6) + 3$: "Jean-Michel était dans l'ascenseur qui est brisé. Il a été au 6e étage à plusieurs reprises et ensuite est descendu 3 fois." (14G/D1) $6 + (-3)$: "Elise et Jason étaient dans l'ascenseur. Ils ont monté jusqu'au 6e étage et ensuite descendu au 3e étage. Le total était maintenant rendu à 3." (14G/D1) $(-6) + (-3)$: "L'ascenseur était au 6e étage et descend 3 fois. Alors, l'ascenseur est vraiment au 2e étage." (14G/D1)
$(-6) + 3 = 6 + 3$	2(1) [2(1)]	"Valeur d'une part" invalide: $(-6) + 3$: "Il n'y a plus de pommes au marché. Burton a besoin de 6 pommes pour les donner à 3 de ses amis. Comme cela chaque... comme cela... comme cela, chaque ami aura 2 pommes. Mais le marché manque -18 pommes." (17A/D1) $(-6) + 3$: "Si tu as -6 pommes et que tu les partages entre 3 personnes égale, cela donne combien de pommes par personne? = -2." (12G/D1)
$(-6) + 3 =$ Division ou réponse en naturels Solutions hétéroclites Aucune solution	3(1) [1(0)] [1(0)] [1(0)]	Nombre de parts: $(-6) + 3$: "Oui, j'ai -6\$ à la banque. Il dit qu'ils vont prendre combien de 3 en 6. Et j'ai -2\$ de reste." (10G/D1)

Solution des problèmes	G(A)	Analogie correspondante
$(-6) + 3 = 6 + 3$ $(-6) + 3 = 6 - 3$ Solutions hétéroclites	2(1) [0(1)] [1(0)] [1(0)]	Opération inverse: $(-6) + 3$: "La température est de -6°C et elle a augmenté 3 fois sur cette même température qui est de -6°C . Ce qui me fait une température de -18°C . = - 2." (20A/D1) $(-6) + 3$: "Ok, pendant une partie de poker, tu as perdu 6\$. Ok, -6. Et ensuite, tu perds 3\$. Non. 3 fois le montant que t'as perdu. = -2." (5G/D2)
$(-6) + 3 = 6 + 3$ Division ou réponse en naturels	3(1) [2(0)] [1(1)]	Transformation linéaire: $(-6) + 3$: "Il y a un ascenseur qui se trouve à 6 étages sous la surface... non. L'ascenseur monte la moitié de cela et se trouve à 2 étages sous la surface." (21A/D1) $(-6) + 3$: "J'ai dépensé 6\$ et j'ai un rabais de 3\$. = -2." (21G/D1)
$(-6) + 3 = 6 + 3$ Aucune solution	2(1) [1(1)] [1(0)]	Conception mixte invalide: $(-6) + 3$: "Tu dois 6 billes à tes amis. Tu ne veux pas faire de la chicane (rire). Alors, tu en donnes 3 à un ami et 3 à l'autre. Tu sépare les billes en 2. = -2." (8A/D1) $(-6) + 3$: "-6 cochons ont été séparés dans 3 groupes. Donc, -2 troupes de cochons qui va rester à la fin." (6G/D1)
Solutions en naturels $(-6) + 3 = 6 + 3$	1(2) [1(1)] [0(1)]	Conception indéterminée: $(-6) + 3$: "J'ai perdu 6 poker et j'ai réussi le troisième tour. Il me revient 2 poker." (12A/D1) $(-6) + 3$: "Jean a perdu 6 billes... eh... 6 sacs de billes. Ok? (...) Et il y avait 3 sacs. (...) Et il y avait 3 billes, 3 billes dans chaque." (22G/D2)
$(-6) + 3 = 6 + 3$ Solutions ou réponses en naturels Aucune solution	5(1) [3(0)] [1(1)] [1(0)]	Aucune conception
$6 + (-3) = 6 + 3$ Solutions en naturels $6 + (-3) = 6 - 3 - 3 = 0$	7(8) [5(4)] [2(0)] [0(1)]	"Valeur d'une part" invalide: $6 + (-3)$: "C'est comme si un joueur commence à 0. Puis y avance de 6, puis qu'on y dise de couper en -3, son score. Il est à la case -2." (13A/D2) $6 + (-3)$: "6 life savers... tu fais des groupes... au négatif." (13G/D2)

Solution des problèmes	G(A)	Analogie correspondante
$6 + (-3) = 6 + 3$ $6 + (-3) = 6 - 3 - 3 = 0$ Solutions en naturels Aucune solution	3(1) [1(0)] [0(1)] [1(0)] [1(0)]	Nombre de parts: $6 + (-3)$: "Tu as 6 billes. Tu sépares ces billes par le nombre que tu dois à ton voisin. Tu lui en dois 3. Tu as 2 groupes de 3 billes que tu dois à ton voisin." (8A/D3) $6 + (-3)$: "Ok, tu as 6 pommes et 3 de mangées, comme t'en as déjà mangé 3... Tu veux savoir combien de pommes mangées il y a dans 6. ...il y a dans 6 pommes. = -2." (2G/D2)
$6 + (-3) = 6 + 3$ $6 + (-3) = 6 - (2 \times 3)$ Solutions en naturels	2(4) [2(2)] [0(1)] [0(1)]	Opération inverse: $6 + (-3)$: "Ce matin, il faisait 6°C au-dessus de 0. Il a neigé l'après-midi de 3 fois moins le montant de température de ce matin. Il fait -3°C dehors. = -2." (9A/D2) $6 + (-3)$: "Ok. Il fait 6°C dehors. Plus tard dans la soirée, la température descend à 3 fois ce nombre. Il va faire -2." (16G/D2)
$6 + (-3) = 6 + 3$	1(0) [1(0)]	Soustraction répétée: $6 + (-3)$: "On veut installer 2 ascenseurs dans un édifice de 6 étages, mais un des ascenseurs ne monte qu'au 3e étage. Il manque 3 étages pour qu'il se rende au 6. = -2." (15G/D1)
$6 + (-3) = 6 + 3$ Solutions hétéroclites $6 + (-3) = 6 - 3$	2(3) [0(2)] [1(1)] [1(0)]	Transformation linéaire: $6 + (-3)$: "Le lac était à 6 centimètres au-dessus du niveau habituel. Durant la journée, il baissa de 3 centimètres. A la fin de la journée, il ne restait que 2 centimètres au-dessus du niveau habituel. = -2." (18A/D2) $6 + (-3)$: "Ben, j'avais 6\$. J'ai perdu 4\$... puis, j'avais 2\$ qui me restait. = -2." (18G/D2)
$6 + (-3) = 6 + 3$	2(2) [2(1)]	Conception mixte: $6 + (-3)$: "Tu as 6 billes et tu en dois 3 à 2 différentes personnes. A combien de personne dois-tu des billes? (...) -2." (10A/D3) $6 + (-3)$: "Ben, il fait 6°C... et pendant (...) -3 heures, elle augmenterait de -2°C." (19G/D2)
$6 + (-3) = 6 + 3$	1(0) [1(0)]	Conception indéterminée: $6 + (-3)$: "Luc avait 6 boîtes de... de gommes. Et il a perdu 3 gommes. = -2." (22G/D3)

Solutions des problèmes	G(A)	Analogies correspondantes
$6 + (-3) = 6 + 3$ Solutions en naturels Aucune solution	4(1) [2(1)] [1(0)] [1(0)]	Aucune conception
$(-6) + (-3) = (-6) + 3$ $(-6) + (-3) = (-3) + (-6)$ $(-6) + (-3) = 6 \times 3$ Solutions hétéroclites	3(11) [1(5)] [0(1)] [1(0)] [1(0)]	Valeur d'une part: $(-6) + (-3)$: "Eh... 3 hommes jouent au poker. En tout, ils doivent 6\$. Chaque monsieur est en dette de 2\$." (15A/D2) $(-6) + (-3)$: "Les 3 amis de Billy refusent de payer la dette de 6\$ de Billy. Donc, il est dans le trouble. = 2." (1G/D2)
$(-6) + (-3) = 6 + 3$ $(-6) + (-3) = (-6) + 3$ Solutions hétéroclites	4(0) [2(0)] [1(0)] [1(0)]	"Nombre de parts" invalide: $(-6) + (-3)$: "...le sous-sol de Jean lui manque... lui manque 6 dimensions. 3 jours plus tard, il s'est aperçu qu'il lui manquait 3 choses dans chaque dimension. = 2." (22G/D3)
$(-6) + (-3) = (-6) + 3$	1(1) [1(0)]	Opération inverse: $(-6) + (-3)$: "Un thermomètre affiche -6°C... (...) Plus tard, a baissé 3 fois moins. = 2." (5G/D3)
$(-6) + (-3) = (-6) + 3$ Aucune solution	2(2) [1(2)] [1(0)]	Transformation linéaire: $(-6) + (-3)$: "Il me manque 6 pommes et j'en mange 3. Donc ça fait 2." (11A/D5) $(-6) + (-3)$: "L'ascenseur a monté de 6, a descendu 4, qui fait 2." (20G/D2)
Solutions hétéroclites $(-6) + (-3) = 6 + 3$ $(-6) + (-3) = (-6) + 3$	4(2) [3(1)] [0(1)] [1(0)]	Conception mixte: $(-6) + (-3)$: "La température dehors est de -6. Au cours de 3 heures, la température a descendu de -2°C." (9A/D3) $(-6) + (-3)$: "Eh... j'ai 6 bonbons et j'en dois 3 à chacun... chaque personne. = 2." (17G/D4)
$(-6) + (-3) =$ $(-6) + 3$ ou $6 + 3$	0(2) [0(2)]	Conception indéterminée: $(-6) + (-3)$: "Il fait -6°C depuis 3 jours." (7A/D2)
$(-6) + (-3) = (-6) + 3$ $(-6) + (-3) = 6 + 3$ Solutions hétéroclites	8(0) [4(0)] [1(0)] [2(0)]	Aucune conception

G(A)

nombre d'élèves ayant produit ce genre d'analogies

[G(A)]

nombre d'élèves, déjà compris dans les nombres sans crochet, qui ont produit systématiquement ce genre de solutions

Appendice K-1: Fréquences et pourcentages des résultats aux post-tests: addition et soustraction

Item	-X + y		-x + Y		X - y		x - Y		-x - Y		-X - y		Total		Pourcentage	
	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	Applicat.	Vérificat.
Niveau	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G	(A)
(N)	8(0)	8(0)	10(0)	10(0)	1(0)	1(0)	12(3)	12(3)	15(0)	15(0)	17(1)	17(1)	63(4)	63(4)	%	(%)

Calcul	8(0)	8(0)	6(0)	8(0)	1(0)	1(0)	11(3)	7(3)	11(0)	12(0)	13(1)	15(0)	50(4)	51(3)	79.4(100.0)	81.0(75.0)
2:2 points	-	-	4(0)	1(0)	-	-	1(0)	2(0)	4(0)	1(0)	4(0)	1(1)	13(0)	5(1)	20.6(	0.0)
1:2 point	-	-	-	1(0)	-	-	-	3(0)	-	2(0)	-	1(0)	-	7(0)	-	-
0:2 point	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Item	-x + y		x + y		-x - y		Total		Pourcentage	
	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	Applicat.	Vérificat.
Niveau	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G	(A)
N(N)	7(3)	7(3)	2(0)	2(0)	9(1)	9(1)	18(4)	18(4)	%	(%)

Problème	3(2)	4(1)	1(0)	1(0)	1(0)	4(1)	5(2)	9(2)	27.8(50.0)	50.0(50.0)
4:4 points	-	2(1)	-	-	4(0)	1(0)	4(0)	3(1)	22.2(0.0)	16.7(25.0)
3:4 points	3(1)	0(1)	1(0)	1(0)	3(1)	2(0)	7(2)	3(1)	38.9(50.0)	16.7(25.0)
2:4 points	1(0)	1(0)	-	-	1(0)	2(0)	2(0)	3(0)	11.1(0.0)	16.7(0.0)
0:4 point	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Item	x - (-Y)		X - (-y)		-x - (-Y)		-X - (-y)		Total		Pourcentage		Grand total		Pourcentage total	
	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.
Niveau	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)
(N)	12(2)	12(2)	12(2)	12(2)	16(2)	16(2)	16(4)	16(4)	56(10)	56(10)	119(14)	119(14)	%	%	%	%

[illegible]

Item	x - (y) App. Vér.	- x - (-y) App. Vér.	Total App. Vér.	Pourcentage Applicat. Vérificat.	Grand total App. Vér.	Pourcentage total Applicat. Vérificat.
Niveau	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G (A) G (A)	G(A) G(A)	G (A) G (A)
N(N)	21(18) 21(18)	21(20) 21(20)	42(38) 42(38)	% (%) % (%)	60(42) 60(42)	% (%) % (%)

4(10)	0(10)	10(15)	1(8)	14(25)	1(18)	33.3(65.8)	2.4(47.4)	19(27)	10(20)	31.7(64.3)	16.7(47.6)
4(1)	3(2)	4(2)	4(4)	8(3)	7(6)	19.0(7.9)	16.7(15.8)	12(3)	10(7)	20.0(7.1)	16.7(16.7)
11(7)	5(2)	4(2)	3(4)	15(9)	8(6)	35.7(23.7)	19.0(15.8)	22(11)	11(7)	36.7(26.2)	18.3(16.7)
-	3(1)	-	2(1)	-	5(2)	-	11.9(5.3)	-	5(2)	-	8.3(4.8)
2(0)	10(3)	3(1)	11(3)	5(1)	21(6)	11.9(2.6)	50.0(15.8)	7(1)	24(6)	11.7(2.4)	40.0(14.3)

Appendice K-2: Fréquences et pourcentages des résultats aux post-tests: multiplication

Item	x X (-Y)	X x (-Y)	(-x) X Y	(-X) x y	(-x) X (-Y)	(-X) x (-Y)	Total	Pourcentage			
	App. Vér.	App. Vér.	App. Vér.	App. Vér.	App. Vér.	App. Vér.	App. Vér.	Applic.	Vérific.	Applic.	Vérific.
Niveau	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G (A)	G (A)	G (A)	G (A)
N(N)	2(0) 2(0)	3(2) 3(2)	0(1) 0(1)	2(1) 2(1)	5(1) 5(1)	5(1) 5(1)	17(6) 17(6)	% (%)	% (%)	% (%)	% (%)
Calcul											
2:2 points	2(0) 1(0)	2(2) 2(2)	0(1) 0(1)	2(1) 1(1)	4(1) 3(0)	4(1) 3(0)	14(6) 10(4)	82.4(100)	58.8(66.7)		
1:2 point	- - -	1(0) -	- - -	- - -	1(0) 1(0)	1(0) 0(1)	3(0) 1(1)	17.6(0.0)	5.9(16.7)		
0:2 point	- - 1(0)	- - 1(0)	- - -	- - 1(0)	- - 1(1)	- - 2(0)	- - 6(1)	- - -	35.3(16.7)		
Niveau	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G(A) G(A)	G (A)	G (A)	G (A)	G (A)
N(N)	18(7) 18(7)	18(7) 18(7)	18(4) 18(4)	18(4) 18(4)	22(20) 22(20)	22(20) 22(20)	58(31) 58(31)	% (%)	% (%)	% (%)	% (%)
Problème											
4:4 points	15(5)	5(2)	12(2)	4(2)	6(7)	2(3)	33(14) 11(7)	56.8(45.2)	19.0(22.6)		
3:4 points	- - -	- - -	1(0) 1(0)	1(0)	- - -	- - -	1(0) 1(0)	1.7(0.0)	1.7(0.0)		
2:4 points	3(1)	7(1)	4(2)	7(1)	12(10)	11(7)	19(13) 25(9)	32.8(41.9)	43.1(29.0)		
1:4 points	- - -	1(0)	- - -	- - -	- - -	1(0)	- - 2(0)	- - -	3.5(0.0)		
0:4 point	0(1)	5(4)	1(0)	6(1)	4(3)	8(10)	5(4) 19(15)	8.6(12.9)	32.8(48.4)		

Appendice K-3: Fréquences et pourcentages des résultats aux post-tests: division

Item	X + y		(-X) + y		X + (-y)		(-X) + (-y)		Div/let-1		Total		Pourcentage	
	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	Applic.	Vérific.
Niveau N(N)	G(A) 0(0)	G(A) 0(0)	G(A) 4(0)	G(A) 4(0)	G(A) 3(2)	G(A) 3(2)	G(A) 4(1)	G(A) 4(1)	G(A) 4(1)	G(A) 4(1)	G(A) 15(4)	G(A) 15(4)	G (A) % (%)	G (A) % (%)
Calcul														
2:2 points	-	-	0(0)	3(0)	2(1)	2(2)	4(1)	1(1)	4(1)	2(0)	10(3)	8(3)	66.7(75.0)	53.3(75.0)
1:2 point	-	-	4(0)	-	1(0)	-	-	1(0)	-	0(1)	5(0)	1(1)	33.3(0.0)	6.7(25.0)
0:2 point	-	-	0(0)	1(0)	0(1)	1(0)	-	2(0)	-	2(0)	0(1)	6(0)	0.0(25.0)	40.0(0.0)
Niveau N(N)	G(A) 1(0)	G(A) 1(0)	G(A) 18(11)	G(A) 18(11)	G(A) 22(16)	G(A) 22(16)	G(A) 21(16)	G(A) 21(16)	G(A) 21(16)	G(A) 21(16)	G(A) 62(43)	G(A) 62(43)	G (A) % (%)	G (A) % (%)
Problème														
4:4 points	-	-	4(7)	1(0)	10(10)	2(3)	3(3)	0(4)			17(20)	3(7)	27.4(46.5)	4.8(16.3)
3:4 points	-	-	7(1)	1(1)	-	1(1)	0(2)	-			7(3)	2(2)	11.3(7.0)	3.2(4.7)
2:4 points	-	-	7(2)	9(5)	9(6)	3(3)	11(7)	3(1)			27(15)	15(9)	43.5(34.9)	24.2(20.9)
1:4 point	-	-	0(1)	1(0)	-	1(0)	1(1)	1(1)			1(2)	3(1)	1.6(4.7)	4.8(2.3)
0:4 point	1(0)	1(0)	-	6(5)	3(0)	15(9)	6(3)	17(10)			10(3)	39(24)	16.1(7.0)	62.9(55.8)

Appendice K-4: Fréquences et pourcentages des résultats aux post-tests: avec le zéro (0)

Calcul	0 - Y		-X - 0		0 - (-Y)		Total			
	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.		
Niveau	G (A)	G (A)	G(A)	G(A)	G (A)	G (A)	G (A)	G (A)		
N(N)	14(4)	14(4)	9(1)	9(1)	12(4)	12(4)	35(9)	35(9)		
2:2 points	11(4)	10(3)	9(1)	7(1)	9(4)	4(3)	29(9)	21(7)		
1:2 point	2(0)	4(0)	-	2(0)	3(0)	1(1)	5(0)	7(1)		
0:2 point	1(0)	0(1)	-	-	-	7(0)	1(0)	7(1)		
Calcul	0 x Y		0 x (-Y)		(-X) x 0		Total			
	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.		
Niveau	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G (A)	G (A)		
N(N)	3(1)	3(1)	2(0)	2(0)	8(1)	8(1)	13(2)	13(2)		
2:2 points	3(1)	2(0)	2(0)	1(0)	8(1)	3(1)	13(2)	6(1)		
1:2 point	-	-	-	-	-	1(0)	-	1(0)		
0:2 point	-	1(1)	-	1(0)	-	4(0)	-	6(1)		
Calcul	0 + Y		0 + (-Y)		X+0 / (-X)+0		0 + 0		Total	
	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.
Niveau	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G (A)	G (A)	G (A)	G (A)	G (A)	G (A)
N(N)	1(2)	1(2)	4(1)	4(1)	22(21)	22(21)	22(21)	22(21)	49(45)	49(45)
2:2 points	1(1)	1(0)	3(1)	1(0)	13(18)	7(13)	15(17)	8(8)	32(37)	17(21)
1:2 point	0(1)	-	1(0)	-	7(3)	4(0)	7(4)	5(0)	15(8)	9(0)
0:2 point	-	0(2)	-	3(1)	2(0)	11(8)	-	9(13)	2(0)	23(24)
Problème	X + 0						Pourcentage			
Niveau	G(A)						G (A)		G (A)	
N(N)	22(20)						22(20)		%	
2:2 points	19(20)						3(13)		86.4(100)	
1:2 point	3(0)						16(7)		13.6(0.0)	
0:2 point	-						3(0)		-	
Item	Soustraction avec 0		Multiplication avec 0		Division avec 0					
	Applicat.	Vérificat.	Applicat.	Vérificat.	Applicat.	Vérificat.	Applicat.	Vérificat.	Applicat.	Vérificat.
Niveau	G (A)	G (A)	G (A)	G (A)	G (A)	G (A)	G (A)	G (A)	G (A)	G (A)
N(N)	% (%)	% (%)	% (%)	% (%)	% (%)	% (%)	% (%)	% (%)	% (%)	% (%)
2:2 points	82.9(100.0)	60.0(77.8)	100.0(100.0)	46.2(50.0)	65.3(82.2)	34.7(46.7)				
1:2 point	14.3(0.0)	20.0(11.1)	-	7.7(0.0)	30.6(17.7)	18.4(0.0)				
0:2 point	12.9(0.0)	20.0(11.1)	-	46.2(50.0)	4.1(0.0)	46.9(53.3)				

Appendice K-5: Fréquences des patrons d'erreurs aux post-tests en comparaison avec les pré-tests: addition et soustraction

Calcul	-x + y App. Vér.	x - y App. Vér.	-x - y App. Vér.	-x - y App. Vér.	Total App. Vér.	Pourcentage Application Vérification	
Niveau N(N)	G(A) G(A) 4(0) 2(0)	G(A) G(A) 1(0) 5(0)	G(A) G(A) 4(0) 3(0)	G(A) G(A) 4(0) 2(1)	G(A) G(A) 13(0) 12(1)	G (A) % (%)	G (A) % (%)
Régression stable	- - 1(0)	- - 3(0)	- - 1(0)	- - -	- - 5(0)	- - -	41.7(0.0)
Évolution stable	- - -	- - -	- - 1(0)	- - -	- - 1(0)	- - -	8.3(0.0)
Évolution instable	- - -	- - -	- - -	- - 1(0)	- - 1(0)	- - -	8.3(0.0)
Régression partielle	- - -	1(0) 2(0)	2(0) -	3(0) 0(1)	6(0) 2(1)	46.2(100.0)	16.7(100.0)
Évolution partielle	4(0) 1(0)	- - -	2(0) 1(0)	1(0) -	7(0) 2(0)	53.8(0.0)	16.7(0.0)
Incidente partielle	- - -	- - -	- - -	- - 1(0)	- - 1(0)	- - -	8.3(0.0)
Problème	-x + y App. Vér.	x + y App. Vér.	-x - y App. Vér.	-x - y App. Vér.	Total App. Vér.	Pourcentage Application Vérification	
Niveau N(N)	G(A) G(A) 4(1) 3(2)	G(A) G(A) 1(0) 1(0)	G(A) G(A) 8(1) 5(0)	G(A) G(A) 13(2) 9(2)	G (A) % (%)	G (A) % (%)	G (A) % (%)
Évolution stable	1(0) -	- - -	1(0) 2(0)	2(0) 2(0)	15.4(0.0)	22.2(0.0)	
Évolution instable	1(0) -	- - -	- - -	1(0) -	7.7(0.0)	11.1(0.0)	
Régression partielle	1(1) 1(2)	- - -	1(0) 1(0)	2(1) 2(2)	15.4(100.0)	22.2(100.0)	
Évolution partielle	1(0) 2(0)	1(0) 1(0)	5(1) 1(0)	7(1) 4(0)	53.8(0.0)	44.4(0.0)	
Incidente partielle	- - -	- - -	1(0) 1(0)	1(0) 1(0)	7.7(0.0)	11.1(0.0)	

... à suivre

Calcul	x - (-Y)		X - (-y)		-x - (-Y)		-X - (-y)		Total		Pourcentage		Grand total		Pourcentage total	
	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	Applicat.	Vérificat.	App.	Vér.	Applicat.	Vérificat.
Niveau	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G (A)	G (A)	G(A)	G(A)	G (A)	G (A)
N(N)	2(0)	8(0)	2(0)	9(0)	4(1)	9(1)	4(1)	9(0)	12(2)	35(1)	%	%	25(2)	47(2)	%	%
Rég. stable	-	2(0)	-	3(0)	-	2(0)	-	4(0)	-	11(0)	-	31.4(0.0)	-	16(0)	-	34.0(0.0)
Évol. stable	-	1(0)	-	1(0)	-	1(0)	-	-	-	3(0)	-	8.6(0.0)	-	4(0)	-	8.5(0.0)
Inc. stable	-	1(0)	-	1(0)	-	1(0)	-	-	1(0)	3(0)	8.3(0.0)	8.6(0.0)	1(0)	3(0)	4.0(0.0)	6.4(0.0)
Rég. instable	-	1(0)	-	-	-	-	-	-	-	1(0)	-	2.9(0.0)	-	1(0)	-	2.1(0.0)
Évol. instable	-	2(0)	-	2(0)	-	3(0)	-	1(0)	-	8(0)	-	22.9(0.0)	-	9(0)	-	19.1(0.0)
Rég. partielle	-	1(0)	1(0)	-	1(0)	-	1(0)	1(0)	3(0)	2(0)	25.0(0.0)	5.7(0.0)	9(0)	4(1)	36.0(0.0)	8.5(50.0)
Evol. partielle	2(0)	-	1(0)	1(0)	2(1)	2(1)	1(1)	3(0)	6(2)	6(1)	50.0(100.0)	17.1(100.0)	13(2)	8(1)	52.0(100.0)	17.0(50.0)
Inc. partielle	-	-	-	1(0)	-	-	2(0)	-	2(0)	1(0)	25.0(0.0)	2.9(0.0)	2(0)	2(0)	8.0(0.0)	4.3(0.0)
Problème	x - (-y)		-x - (-y)		Total		Pourcentage		Grand total		Pourcentage total					
	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	Applicat.	Vérificat.	App.	Vér.	Applicat.	Vérificat.				
Niveau	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G (A)	G (A)	G(A)	G(A)	G (A)	G (A)				
N(N)	17(8)	21(8)	11(5)	20(12)	28(13)	41(20)	%	%	41(15)	50(22)	%	%				
Régression stable	1(0)	3(2)	3(1)	3(1)	4(1)	6(3)	14.3(7.7)	14.6(15.0)	4(1)	6(3)	9.8(6.7)	12.0(13.6)				
Évolution stable	-	-	-	3(2)	-	3(2)	-	7.3(10.0)	2(0)	5(2)	4.9(0.0)	10.0(9.1)				
Incidentie stable	-	2(1)	-	2(2)	-	4(3)	-	9.8(15.0)	-	4(3)	-	8.0(13.6)				
Régression instable	1(0)	2(0)	-	2(1)	1(0)	4(1)	3.6(0.0)	9.8(5.0)	1(0)	4(1)	2.4(0.0)	8.0(4.5)				
Évolution instable	-	8(2)	-	4(1)	-	12(3)	-	29.3(15.0)	1(0)	12(3)	2.4(0.0)	24.0(13.6)				
Régression partielle	8(5)	3(1)	2(1)	2(2)	10(6)	5(3)	35.7(46.2)	12.2(15.0)	12(7)	7(5)	29.3(46.7)	14.0(22.7)				
Évolution partielle	2(1)	2(1)	5(1)	4(2)	7(2)	6(3)	25.0(15.4)	14.6(15.0)	14(3)	10(3)	34.1(20.0)	20.0(13.6)				
Incidentie partielle	5(2)	1(1)	1(2)	0(1)	6(4)	1(2)	21.4(30.8)	2.4(10.0)	7(4)	2(2)	17.1(26.7)	4.0(9.1)				

Appendice K-6: Fréquences des patrons d'erreurs aux post-tests en comparaison avec les pré-tests: multiplication

Calcul	x X (-Y)		(-x) X Y		(-X) X y		(-x) X (-Y)		(-X) X (-y)		Total		Pourcentage	
	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	Application	Vérification
Niveau	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G (A)	G (A)
N(N)	0(0)	1(0)	1(0)	1(0)	0(0)	1(0)	1(0)	2(1)	1(0)	2(1)	3(0)	7(2)	% (%)	% (%)
Régression stable	-	-	-	-	-	-	-	1(1)	-	1(0)	-	2(1)	-	28.6(50.0)
Évolution stable	-	-	-	-	-	1(0)	-	-	-	1(0)	-	2(0)	-	28.6(0.0)
Régression instable	-	1(0)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1(0)	-	14.3(0.0)
Évolution instable	-	-	-	1(0)	-	-	1(0)	1(0)	1(0)	0(1)	2(0)	2(1)	66.7(0.0)	28.6(50.0)
Régression partielle	-	-	1(0)	-	-	-	-	-	-	-	1(0)	-	33.3(0.0)	-

Problème	x X (-y)		(-x) X y		(-x) X (-y)		Total		Pourcentage	
	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	App.	Vér.	Application	Vérification
Niveau	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G (A)	G (A)
N(N)	3(2)	13(5)	6(2)	14(2)	16(13)	20(17)	25(17)	47(24)	% (%)	% (%)
Régression stable	0(1)	1(1)	-	1(0)	-	2(3)	0(1)	4(4)	0.0(5.9)	8.5(16.7)
Évolution stable	-	-	-	-	0(1)	2(2)	0(1)	2(2)	0.0(5.9)	4.3(8.3)
Incidente stable	-	1(0)	-	-	-	1(0)	-	2(0)	-	4.3(0.0)
Régression instable	-	2(0)	-	1(0)	3(0)	1(0)	3(0)	4(0)	12.0(0.0)	8.5(0.0)
Évolution instable	-	1(3)	1(0)	4(1)	1(2)	2(5)	2(2)	7(9)	8.0(11.8)	14.9(37.5)
Régression partielle	-	3(0)	0(1)	2(1)	4(2)	2(2)	4(3)	7(3)	16.0(17.6)	14.9(12.5)
Évolution partielle	2(0)	1(0)	5(1)	5(0)	5(7)	7(5)	12(8)	13(5)	48.0(47.1)	27.7(20.8)
Incidence partielle	1(1)	4(1)	-	1(0)	3(1)	3(0)	4(2)	8(1)	16.0(11.8)	17.0(4.2)

Appendice K-7: Fréquences des patrons d'erreurs aux post-tests en comparaison avec les pré-tests: division

Calcul		(-X) + y		X + (-y)		(-X) + (-y)		+ par 1/-1		Total		Pourcentage	
		App. Vér.	G(A)	App. Vér.	G(A)	App. Vér.	G(A)	App. Vér.	G(A)	App. Vér.	G(A)	App. Vér.	G (A) %
Niveau		G(A)		G(A)		G(A)		G(A)		G(A)		G (A) %	
N(N)		4(0)		1(0)		1(0)		3(0)		0(0)		2(1)	
Régression stable		-	-	0(1)	1(0)	-	-	1(0)	-	-	-	0(1)	2(0)
Évolution stable		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2(0)
Incidente stable		-	-	1(0)	-	-	-	1(0)	-	-	-	-	2(0)
Évolution instable		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0(1)
Régression partielle		4(0)	-	-	1(0)	-	-	1(0)	-	-	-	5(0)	1(0)
												100.0	0.0
Régression stable		-	-	0(1)	1(0)	-	-	1(0)	-	-	-	0.0	100.0
Évolution stable		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Incidente stable		-	-	1(0)	-	-	-	1(0)	-	-	-	-	-
Évolution instable		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Régression partielle		4(0)	-	-	1(0)	-	-	1(0)	-	-	-	5(0)	1(0)
												100.0	0.0
Problème		(-X) + y		X + (-y)		(-X) + (-y)		[X + 0]		Total		Pourcentage	
		App. Vér.	G(A)	App. Vér.	G(A)	App. Vér.	G(A)	App. Vér.	G(A)	App. Vér.	G(A)	App. Vér.	G (A) %
Niveau		G(A)		G(A)		G(A)		G(A)		G(A)		G (A) %	
N(N)		1(0)		17(11)		12(6)		20(13)		18(13)		21(12)	
Régression stable		-	-	1(1)	3(0)	6(6)	0(2)	3(4)	-	-	-	3(2)	10(11)
Évolution stable		1(0)	1(0)	1(0)	-	-	3(0)	5(2)	[-	-	3(0)]	5(0)	7(2)
Incidente stable		-	-	0(2)	-	0(1)	1(0)	2(1)	-	-	-	1(0)	2(4)
Régression instable		-	-	1(1)	-	0(1)	-	1(2)	-	-	-	-	2(4)
Évolution instable		-	-	0(2)	3(1)	-	10(1)	7(2)	-	-	-	3(4)	20(4)
Régression partielle		-	-	2(0)	7(4)	5(3)	1(1)	2(6)	1(1)	2(0)	11(5)]	9(9)	9(6)
Évolution partielle		-	-	11(2)	2(2)	3(0)	1(2)	6(2)	1(0)	1(0)	5(2)]	20(4)	4(4)
Incidente partielle		-	-	1(0)	2(0)	0(3)	2(1)	3(1)	1(0)	-	-	4(4)	5(1)
												8.9	17.4
												6.7	8.7
												11.1	0.0
												2.2	0.0
												-	-
												3.4	11.1
												3.4	11.1
												33.9	11.1
												20.0	39.1
												44.4	17.4
												8.9	17.4
												15.3	16.7
												6.8	11.1
												8.5	2.8

[] L'item "X + 0", ne comportant qu'un problème, n'est pas inclus dans le total. Les fréquences "partielles" concernant la réponse de cet item, alors que les évolutions stables concernent la solution erronée et la réponse qui s'en suit.

Appendice K-8: Fréquences des patrons d'erreurs aux post-tests en comparaison avec les pré-tests: calculs avec zéro (0)

Item	0 - Y		-X - 0		0 - (-Y)		Total		Pourcentage			
	App	Vér	App	Vér	App	Vér	App	Vér	Applicat.	Vérificat.		
Niveau	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G	(A)	G	(A)
N(N)	3(0)	4(1)	0(0)	2(0)	3(0)	8(1)	6(0)	14(2)	%	(%)	%	(%)
Rég. stable	-	-	0(1)	-	-	-	-	3(1)	-	-	21.4	(50.0)
Évol. stable	-	-	-	-	-	-	-	3(0)	-	-	21.4	(0.0)
Évol. instable	1(0)	-	-	-	-	-	1(0)	1(0)	16.7	(0.0)	7.1	(0.0)
Rég. partielle	1(0)	1(0)	-	-	1(0)	2(0)	3(0)	2(0)	50.0	(0.0)	14.3	(0.0)
Évol. partielle	1(0)	3(0)	-	-	1(0)	1(0)	2(0)	5(1)	33.3	(0.0)	35.7	(50.0)

	0 X Y		0 X (-Y)		(-X) X 0		Total		Pourcentage			
	App	Vér	App	Vér	App	Vér	App	Vér	Applicat.	Vérificat.		
Niveau	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G	(A)	G	(A)
N(N)	0(0)	1(1)	0(0)	1(0)	0(0)	5(0)	0(0)	7(1)	%	(%)	%	(%)
Rég. stable	-	-	-	-	-	-	-	3(0)	-	-	42.9	(0.0)
Évol. stable	-	-	1(1)	-	-	1(0)	-	3(1)	-	-	42.9	(100.0)
Évol. partielle	-	-	-	-	-	-	-	1(0)	-	-	14.3	(0.0)

	0 + Y		0 + (-Y)		(-X)/X + 0		0 + 0		Total		Pourcentage			
	App	Vér	App	Vér	App	Vér	App	Vér	App	Vér	Applicat.	Vérificat.		
Niveau	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G	(A)	G	(A)
N(N)	0(1)	0(2)	1(0)	3(1)	9(3)	15(8)	7(4)	14(13)	17(8)	32(24)	%	(%)	%	(%)
Rég. stable	-	-	-	-	-	2(0)	9(7)	-	9(12)	2(0)	11.8	(0.0)	56.3	(79.2)
Évol. stable	-	-	0(2)	-	2(1)	-	1(1)	-	0(1)	-	3(5)	-	9.4	(20.8)
Incid. stable	-	-	-	-	1(0)	-	1(0)	-	-	-	2(0)	-	6.3	(0.0)
Rég. partielle	-	-	-	-	-	5(3)	-	5(3)	1(0)	10(6)	58.8	(75.0)	3.1	(0.0)
Évol. partielle	0(1)	-	1(0)	-	2(0)	4(0)	2(1)	4(0)	5(2)	8(0)	29.4	(25.0)	25.0	(0.0)

Appendice K-9: Ordre ascendant de difficulté des opérations selon la moyenne d'erreurs
aux tests de calcul

	Pré-test	Applicat.	Vérificat.	Moyenne	Rang
Niveau	G (A) % (%)	G (A) % (%)	G (A) % (%)	G (A) % (%)	
ADDITION/ SOUSTRACTION					
$x + y$	0.0(0.0)*	0.0(0.0)	0.0(0.0)	0.0(0.0)	1(1)
$X - y$	4.5(0.0)*	0.0(0.0)	0.0(0.0)	1.5(0.0)	2(1)
$-X + y$	33.3(4.8)	0.0(0.0)	0.0(0.0)	11.1(1.6)	3(5)
$-X - 0$	40.9(4.8)	0.0(0.0)	4.5(0.0)	15.1(1.6)	4(6)**
$-x + Y$	50.0(0.0)	9.1(0.0)	6.8(0.0)	22.0(0.0)	5(1)
$x - Y$	56.1(15.9)	2.3(0.0)	18.2(0.0)	25.5(5.3)	6(11)
$0 - Y$	63.6(19.0)	9.1(0.0)	9.1(4.8)	27.2(7.9)	7(14)
$-x - Y$	63.6(3.2)	9.1(0.0)	11.4(0.0)	28.0(1.1)	8(4)
$-X - y$	72.7(4.8)	9.1(0.0)	6.8(2.4)	29.5(2.4)	9(7)
$x - (-Y)$	54.5(11.1)	4.5(0.0)	34.1(0.0)	31.0(3.7)	10(9)
$0 - (-Y)$	54.5(19.0)	6.8(0.0)	34.1(2.4)	31.8(7.1)	11(12)
$X - (-y)$	60.6(9.5)	4.5(0.0)	36.4(0.0)	33.8(3.2)	12(8)
$-X - (-y)$	65.2(19.0)	9.1(2.4)	31.8(0.0)	35.4(7.1)	13(12)
$-x - (-Y)$	74.2(9.5)	11.4(2.4)	36.4(2.4)	40.7(4.8)	14(10)
MULTIPLICATION					
$x \times y$	0.0(0.0)	0.0(0.0)	0.0(0.0)	0.0(0.0)	1(1)
0×0	4.5(0.0)	- - - -	- - - -	- - - -	2(1)
$(-x) \times Y$	6.1(7.9)	0.0(0.0)	0.0(0.0)	2.0(2.6)	3(8)
$0 \times (-Y)$	9.1(0.0)	0.0(0.0)	4.5(0.0)	4.5(0.0)	4(1)
$x \times (-Y)$	10.6(3.2)	0.0(0.0)	4.5(0.0)	5.0(1.1)	5(5)
$(-X) \times y$	12.1(6.3)	0.0(0.0)	4.5(0.0)	5.5(2.1)	6(7)
$0 \times Y$	13.6(4.8)	0.0(0.0)	4.5(4.8)	6.0(3.2)	7(10)
$X \times (-y)$	16.7(9.5)	2.3(0.0)	4.5(0.0)	7.8(3.2)	8(11)**
$(-x) \times (-Y)$	21.2(6.3)	2.3(0.0)	6.8(4.8)	10.1(3.7)	9(12)
$(-X) \times (-y)$	22.7(6.3)	2.3(0.0)	9.1(2.4)	11.4(2.9)	10(9)
$X \times 0$	22.7(0.0)	- - - -	- - - -	- - - -	11(1)
$(-X) \times 0$	31.8(4.8)	0.0(0.0)	20.5(0.0)	17.4(1.6)	12(6)

... à suivre

	Pré-test	Applicat.	Vérificat.	Moyenne	Rang
Niveau	G (A) % (%)	G (A) % (%)	G (A) % (%)	G (A) % (%)	
DIVISION					
X + y	*0.0(0.0)	0.0(0.0)	0.0(0.0)	0.0 (0.0)	1(1)
0 + Y	4.5(9.5)	0.0(2.4)	0.0(9.5)	1.5(7.1)	2(7)
X + (-y)	15.2(9.5)	2.3(4.8)	4.5(0.0)	7.3(4.8)	3(6)**
+ 1 et - 1	18.2(11.1)	0.0(0.0)	8.0(3.2)	8.7(4.8)	4(5)
(-X) + (-y)	15.2(6.3)	0.0(0.0)	11.4(0.0)	9.9(2.1)	5(3)
(-X) + y	18.2(0.0)	9.1(0.0)	4.5(0.0)	10.6(0.0)	6(1)
0 + (-Y)	27.3(4.8)	2.3(0.0)	13.6(4.8)	14.4(3.2)	7(4)
0 + 0	100.0(100.0)	15.9(9.5)	52.3(61.9)	56.1(57.1)	8(9)
(-X)/X + 0	100.0(100.0)	14.8(3.6)	60.2(20.2)	58.3(41.3)	9(8)

* Item ne présentant qu'une erreur isolée à ce niveau et auquel a été attribué un pourcentage nul.

** Rang de difficulté attribué à cet item à cause d'un nombre supérieur de difficultés majeures.

Appendice K-10: Ordre ascendant de difficulté des opérations selon la moyenne d'erreurs aux tests de résolution de problèmes

	Pré-test	Applicat.	Vérificat.	Moyenne	Rang
	G (A) % (%)	G (A) % (%)	G (A) % (%)	G (A) % (%)	
ADDITION/ SOUSTRACTION					
X - y	4.5(3.2)	* *(0.0)	* *(0.0)	* *(1.1)	1(1)
x + y	13.6(11.1)	2.3(0.0)	2.3(0.0)	6.1(3.7)	2(2)
-x + y	31.1(16.7)	11.4(2.4)	6.8(3.6)	16.4(7.6)	3(4)
-x - y	47.0(9.5)	15.9(2.4)	14.8(0.0)	25.9(4.0)	4(3)
-x - (-y)	79.5(80.2)	27.3(11.4)	68.2(31.0)	58.3(40.9)	5(5)
x - (-y)	88.6(81.0)	38.6(17.9)	70.5(25.0)	65.9(41.3)	6(6)
MULTIPLICATION					
x X y	3.0(0.0)	0.0(0.0)	0.0(0.0)	1.0(0.0)	1(1)
x X (-y)	74.2(33.3)	6.8(7.1)	42.0(21.4)	41.0(20.6)	2(3)
(-x) X y	75.8(25.4)	12.5(4.8)	44.3(7.1)	44.2(12.4)	3(2)
(-x) X (-y)	97.0(87.3)	45.5(33.3)	64.8(64.3)	69.1(61.6)	4(4)
DIVISION					
X + y	14.4(0.8)	4.5(0.0)	4.5(0.0)	7.8(0.3)	1(1)
X + 0	40.9(9.1)	0.0(0.0)	13.6(0.0)	18.2(3.0)	2(2)
(-X) + y	77.3(46.8)	23.9(9.5)	52.3(36.9)	51.2(31.1)	3(3)
X + (-y)	97.0(78.6)	34.1(14.3)	78.4(50.0)	69.8(47.6)	4(4)
(-X) + (-y)	90.2(73.0)	55.7(36.9)	83.0(53.6)	76.3(54.5)	5(5)

* * Données disponibles pour le pré-test seulement

Appendice L-1: Raisons des degrés de certitude en rapport avec le statut des analogies correspondantes

Item	RAISON APPROPRIÉE										RAISON INAPPROPRIÉE						Aucune analogie degré
	Préc.	Imp.	Conc.	Math.	Form.	Indét.	Autres	Préc.	Imp.	Conc.	Math.	Form.	Indét.	Autres			
	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	
x + y	1(0)	15(14)	-	-	4(5)	1(0)	0(1)	1(1)	-	-	-	-	-	-	-	-	
-X + y	-	11(12)	-	-	5(3)	0(2)	1(4)	-	-	3(0)	-	-	1(0)	-	-	-	
X - y	-	4(11)	0(1)	-	0(3)	2(0)	4(2)	12(4)	-	-	-	-	-	-	-	-	
-x - Y	-	2(11)	-	-	0(2)	0(4)	7(1)	2(2)	-	3(1)	-	-	1(0)	1(0)	-	-	
x - (-Y)	-	8(12)	1(3)	-	1(3)	-	0(1)	3(1)	-	1(0)	-	-	2(0)	-	1(1)	1(0)E	
-x - (-Y)	1(3)	4(6)	0(1)	-	2(4)	0(1)	5(1)	1(1)	-	1(1)	-	-	1(0)	-	2(2)	2(0)E	
x X Y	0(1)	4(11)	-	-	2(4)	5(1)	4(2)	6(2)	-	-	-	-	-	-	-	1(0)A	
x X (-Y)	1(3)	7(5)	3(1)	-	1(0)	1(4)	2(4)	2(3)	1(0)	1(0)	-	-	1(0)	1(1)	-	1(0)E	
(-x) X Y	1(3)	5(2)	1(0)	-	0(1)	1(4)	6(7)	4(2)	-	0(1)	-	-	1(0)	0(1)	-	2(0)	
(-x) X (-Y)	0(3)	8(7)	1(1)	-	3(4)	-	3(0)	3(1)	-	0(1)	-	1(0)	-	-	2(1)	1(1)E	
X + y	1(1)	6(11)	1(0)	-	-	0(2)	6(5)	6(2)	-	2(0)	-	-	-	-	-	-	
(-X) + y	0(2)	8(7)	0(2)	-	2(3)	0(3)	2(2)	2(0)	-	2(0)	-	-	1(0)	-	5(1)	-	
X + (-y)	-	8(15)	-	-	2(2)	-	4(0)	0(1)	1(0)	1(2)	-	1(0)	-	-	4(1)	1(0)E	
(-X) + (-y)	-	3(15)	-	-	1(1)	-	4(2)	1(1)	-	3(1)	-	-	1(1)	-	8(0)	1(0)E	
X x 0/0 x X	0(2)	3(7)	-	-	4(2)	1(2)	4(4)	4(0)	-	1(0)	-	-	-	-	1(0)	0(2)E + 4(1)B	
0 + Y	-	11(13)	-	-	-	-	1(4)	4(2)	-	3(2)	-	1(0)	-	-	2(0)	-	
X + 0	-	6(15)	-	-	-	-	3(0)	-	-	2(2)	-	5(3)	-	1(1)	1(0)	-	
0 + 0	0(1)	5(5)	-	-	-	-	1(2)	2(0)	-	5(10)	0(1)	6(1)	1(0)	1(1)	1(0)	-	
Total	5(19)	118(179)	7(9)	27(37)	11(23)	57(42)	53(23)	2(0)	28(21)	0(1)	24(4)	3(0)	12(8)	3(2)	33(6)	13(4)	

Appendice L-2: Correspondances entre les analogies, dont les degrés de certitude sont supportés par des raisons inappropriées, et les résultats aux pré-tests

Item	Raison inappropriée	Calcul erroné	Problème erroné	Cal.&Prob. erronés	Aucune erreur
	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)
$-x + Y$	5(0)	2(0)	1(0)	2(0)	- -
$-x - Y$	10(1)	6(0)	0(1)	3(0)	1(0)
$x - (-Y)$	7(0)	- -	- -	7(0)	- -
$-x - (-Y)$	5(2)	1(0)	0(2)	4(0)	
$x \times X (-Y)$	4(1)	- -	3(0)	0(1)	1(0)
$(-x) \times Y$	1(2)	- -	- -	1(1)	0(1)
$(-x) \times (-Y)$	1(3)	- -	0(3)	1(0)	- -
$X + y$	2(0)	- -	- -	- -	2(0)
$(-X) + y$	3(1)	- -	2(1)	- -	1(0)
$X + (-y)$	3(2)	- -	3(1)	0(1)	- -
$(-X) + (-y)$	4(2)	- -	3(1)	1(1)	- -
$0 \times X/X \times 0$	1(1)	- -	# #	# #	1(1)
$0 + Y$	4(2)	2(1)	# #	# #	2(1)
$X + 0$	9(6)	6(5)	- -	3(1)	- -
$0 + 0$	13(13)	13(13)	# #	# #	- -
TOTAL	72(36)	30(19)	12(9)	22(5)	8(3)
POURCENTAGE					
Niveau général	100.0 %	41.6 %	16.7 %	30.6 %	11.1%
Niveau avancé	100.0 %	52.8 %	25.0 %	13.9 %	8.3%

ne s'applique pas

Appendice L-3: Correspondances entre l'évaluation des analogies erronées et les erreurs aux post-tests d'application

Item	SUREVALUATION					ÉVALUATION JUSTE				
	N. d'Items	Calcul	Problème	Cal.& Prob.	Aucune	N. d'Items	Calcul	Problème	Cal.% Prob.	Aucune
'x + y	- -	- -	G(A)	G(A)	G(A)	G (A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)
x + y	2(0)	1(0)	- -	- -	- -	1(1)	- -	- -	- -	1(1)
-x - y.	3(1)	1(0)	- -	- -	1(0)	2(1)	- -	- -	- -	2(1)
x - (-y)	9(2)	4(0)	0(1)	- -	2(0)	1(1)	- -	- -	- -	1(1)
-x - (-y)	5(5)	1(0)	6(1)	2(0)	1(1)	11(17)	1(0)	5(6)	- -	5(11)
			1(1)	- -	3(4)	12(14)	2(1)	4(2)	2(1)	8(12)
x X Y	- -	- -	- -	- -	- -	2(1)	- -	- -	- -	2(1)
x X (-Y)	4(1)	- -	1(1)	- -	3(0)	7(3)	- -	0(2)	- -	7(1)
(-x) X Y	3(1)	- -	- -	- -	3(1)	7(6)	- -	2(1)	- -	5(5)
(-x) x (-Y)	3(4)	- -	2(1)	- -	1(3)	16(14)	2(0)	11(9)	1(0)	4(5)
0 X Y	4(3)	- -	# #	# #	4(3)	6(5)	- -	# #	# #	6(5)
X + y	- -	- -	- -	- -	- -	5(3)	- -	1(0)	- -	3(3)
(-X) + y	4(1)	1(0)	1(1)	- -	2(1)	9(8)	2(0)	3(0)	- -	4(8)
X + (-y)	4(3)	0(1)	1(1)	0(1)	3(2)	13(16)	1(0)	11(4)	1(0)	2(12)
(-X) + (-y)	4(2)	- -	3(1)	- -	1(1)	9(15)	- -	8(9)	- -	1(6)
0 + Y	3(2)	0(1)	# #	# #	3(1)	7(4)	- -	# #	# #	7(4)
X + 0	9(4)	2(0)	1(0)	- -	6(4)	9(17)	6(3)	2(0)	- -	1(13)
0 + 0	16(16)	7(3)	# #	# #	9(13)	5(5)	0(1)	# #	# #	5(4)
Total	73(45)	17(5)	16(8)	2(1)	42(34)	122(131)	14(5)	47(33)	4(1)	65(93)
Niveau général	100.0 %	23.3 %	32.0 %	4.0 %	57.5 %	100.0 %	11.5 %	45.2 %	3.8 %	53.3 %
Niveau avancé	100.0 %	11.1 %	33.3 %	4.2 %	75.6 %	100.0 %	3.8 %	28.2 %	0.9 %	71.0 %
Analogie sans degré	8(3)	2(0)	6(1)	1(0)	1(2)	Aucune analogie	3(0)	15(1)	1(0)	16(5)
Niveau général	100.0 %	25.0 %	75.0 %	12.5 %	12.5 %	100.0 %	9.1 %	50.0 %	3.3 %	48.5 %
Niveau avancé	100.0 %	0.0 %	100.0 %	0.0 %	66.7 %	100.0 %	0.0 %	16.7 %	0.0 %	83.3 %

Appendice L-4: Correspondances entre l'évaluation des analogies erronées et les erreurs systématiques aux post-tests de vérification

Item	SURÉVALUATION				ÉVALUATION JUSTE					
	N. d'Items	Calcul	Problème	Cal.& Prob.	Aucune	N. d'Items	Calcul	Problème	Cal.% Prob.	Aucune
$x + y$	-	-	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)
$-x + y$	2(0)	1(0)	-	-	-	1(1)	-	-	-	1(1)
$-x - y$	3(1)	-	-	-	1(0)	2(1)	-	-	-	2(1)
$x - (-y)$	9(2)	6(0)	-	-	3(1)	1(1)	-	-	-	1(1)
$-x - (-y)$	5(5)	3(0)	7(1)	6(0)	2(1)	11(17)	2(0)	4(4)	1(0)	6(13)
			4(0)	2(0)	0(5)	12(14)	3(0)	5(3)	1(0)	5(11)
$x X Y$	-	-	-	-	-	2(1)	-	-	-	2(1)
$x X (-Y)$	4(1)	-	1(0)	-	3(1)	7(3)	-	2(2)	-	5(1)
$(-x) X Y$	3(1)	1(0)	2(0)	1(0)	1(1)	7(6)	-	3(1)	-	4(5)
$(-x) x (-Y)$	3(4)	-	1(2)	-	2(2)	16(14)	1(1)	6(7)	1(1)	10(7)
$0 X Y$	4(3)	-	#	#	4(3)	6(5)	1(0)	#	#	5(5)
$X + y$	-	-	-	-	-	5(3)	-	1(0)	-	3(3)
$(-X) + y$	4(1)	-	2(0)	-	2(1)	9(8)	1(0)	3(3)	1(0)	6(5)
$X + (-y)$	4(3)	-	1(2)	-	3(1)	13(16)	-	11(5)	-	2(11)
$(-X) + (-y)$	4(2)	1(0)	4(1)	1(0)	0(1)	9(15)	-	7(7)	-	2(8)
$0 + Y$	3(2)	0(1)	#	#	3(1)	7(4)	1(0)	#	#	6(4)
$X + 0$	9(4)	5(3)	9(3)	5(3)	0(1)	9(17)	5(5)	7(4)	5(4)	2(12)
$0 + 0$	16(16)	6(12)	#	#	10(4)	5(5)	3(1)	#	#	2(4)
Total	73(45)	23(16)	31(9)	15(3)	34(23)	122(131)	17(7)	49(36)	9(5)	65(93)
Niveau général	100.0 %	31.5 %	62.0 %	30.0 %	46.6 %	100.0 %	13.9 %	47.1 %	8.7 %	53.3 %
Niveau avancé	100.0 %	35.6 %	37.5 %	12.5 %	51.1 %	100.0 %	5.3 %	30.8 %	4.3 %	71.0 %
Analogie sans degré	8(3)	4(1)	7(0)	4(0)	1(2)	Aucune analogie	33(6)	18(3)	2(0)	15(4)
Niveau général	100.0 %	50.0 %	87.5 %	57.2 %	12.5 %	100.0 %	9.1 %	62.1 %	6.9 %	45.5 %
Niveau avancé	100.0 %	33.3 %	0.0 %	0.0 %	66.7 %	100.0 %	0.0 %	50.0 %	0.0 %	66.7 %

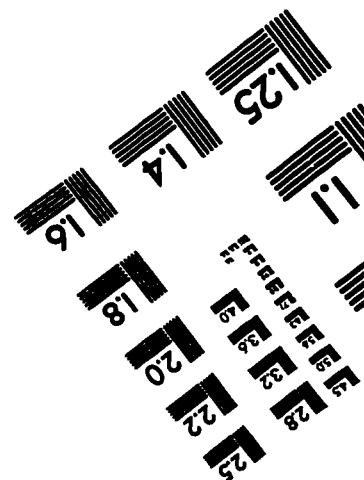
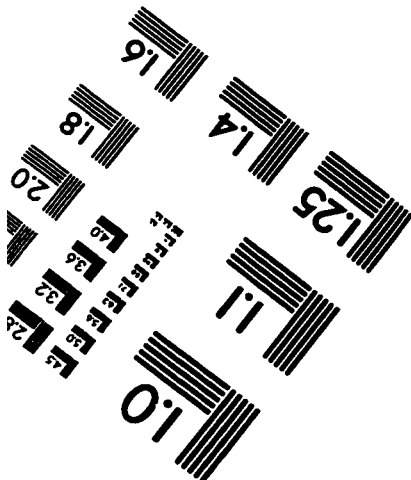
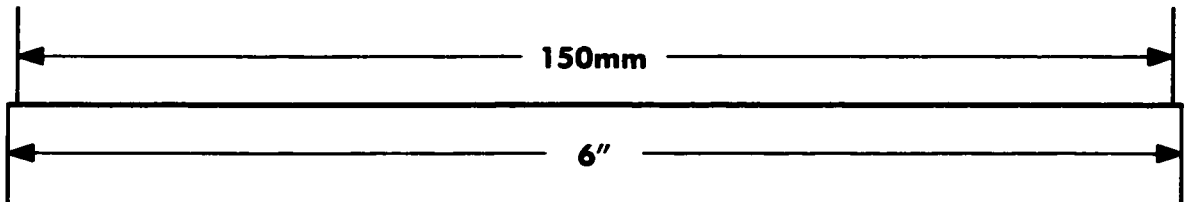
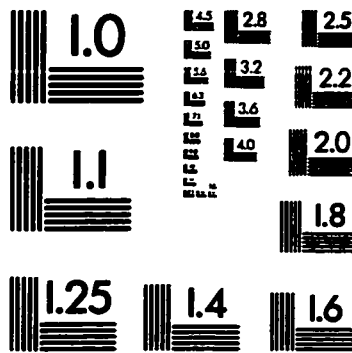
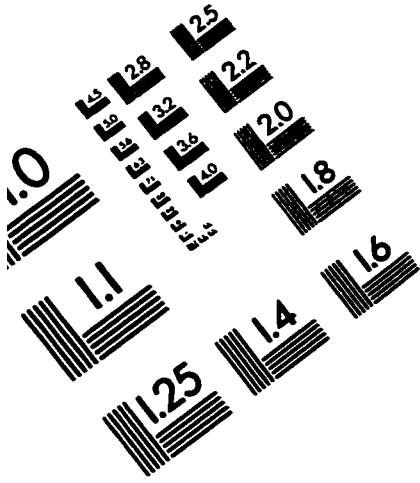
Appendice L-5: Statut des analogies parfaites, bonnes et approximatives en rapport avec les erreurs correspondantes aux post-tests (calculs et problèmes)

Item	P-4	P-3	P-2	B-4	B-3	B-2&-	A-4	A-3	A-2&-
	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)
ADD/SOUST.									
Calcul									
Nombre d'items	43(66)	4(0)	1(0)	18(8)	- -	2(1)	8(5)	2(0)	1(1)
Application	2(0)	2(0)	- -	1(0)	- -	- -	2(0)	2(0)	1(0)
Vérification	- -	- -	- -	2(0)	- -	- -	- -	- -	- -
Problème									
Nombre d'items	43(66)	4(0)	1(0)	18(8)	- -	2(1)	8(5)	2(0)	1(1)
Application	4(0)	1(0)	- -	1(0)	- -	1(0)	0(1)	- -	- -
Vérification	1(0)	- -	- -	1(0)	- -	- -	- -	1(0)	- -
Calcul et problème									
Application	1(0)	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
MULTIPLICATION									
Calcul									
Nombre d'items	2(8)	- -	- -	19(29)	1(2)	1(0)	16(16)	6(6)	0(1)
Vérification	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	1(0)	- -
Problème									
Nombre d'items	2(7)	- -	- -	16(23)	- -	- -	16(15)	4(6)	0(1)
Application	- -	- -	- -	- -	- -	- -	1(0)	1(0)	0(1)
Vérification	- -	- -	- -	0(1)	- -	- -	1(1)	- -	0(1)
Aucun degré									
Nombre d'items				4(1) bonnes			1(0) approximative		
Application				- -			- -		
Vérification				- -			- -		
DIVISION									
Calcul									
Nombre d'items	1(7)	- -	1(0)	11(20)	3(8)	3(3)	5(8)	2(0)	5(3)
Application	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	1(0)
Vérification	- -	- -	- -	- -	- -	- -	0(1)	- -	1(0)
Problème									
Nombre d'items	0(5)	- -	1(0)	10(17)	1(6)	2(1)	3(3)	2(0)	2(2)
Application	- -	- -	- -	- -	- -	0(1)	0(1)	- -	0(1)
Vérification	- -	- -	- -	0(1)	- -	0(1)	0(2)	- -	0(1)

... à suivre

Item	P-4	P-3	P-2	B-4	B-3	B-2&-	A-4	A-3	A-2&-
	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)	G(A)
CALCUL									
N. total d'items	46(81)	4(0)	2(0)	48(57)	4(10)	6(4)	29(29)	10(6)	6(5)
Application	2(0)	2(0)	- -	1(0)	- -	- -	2(0)	2(0)	2(0)
Niveau général	4.3 %	50.0 %	0.0 %	2.1 %	0.0 %	0.0 %	6.9 %	20.0 %	33.3 %
Niveau avancé	0.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %
Vérification	- -	- -	- -	2(0)	- -	- -	0(1)	1(0)	1(0)
Niveau général	0.0 %	0.0 %	0.0 %	4.2 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	10.0 %	16.7%
Niveau avancé	0.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	3.4 %	0 0 %	0.0 %
PROBLÈME									
N. total d'items	45(78)	4(0)	2(0)	44(48)	1(6)	4(2)	27(23)	8(6)	3(4)
Application	4(0)	1(0)	- -	1(0)	- -	1(1)	1(2)	1(0)	0(2)
Niveau général	8.9 %	25.0 %	0.0 %	2.3 %	0.0 %	25.0 %	3.7 %	12.5 %	0.0 %
Niveau avancé	0.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	50.0 %	8.7 %	0.0 %	50.0 %
Vérification	1(0)	- -	- -	1(2)	- -	0(1)	1(3)	1(0)	0(2)
Niveau général	2.2 %	0.0 %	0.0 %	2.3 %	0.0 %	0.0 %	3.7 %	12.5 %	0.0 %
Niveau avancé	0.0 %	0.0 %	0.0 %	4.2 %	0.0 %	50.0 %	13.0 %	0.0 %	50.0 %
CALCUL ET PROBLÈME									
Application	1(0)	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
Niveau général	2.2 %	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
AUCUN DEGRÉ									
Nombre d'items				4(1) bonnes			1(0) approximative		
Application				- -			- -		
Vérification				- -			- -		

IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE . Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved