

"MESURES DE HAUSDORFF"

par

Jacques MARION



Thèse présentée
à l'école des Etudes Supérieures
de l'Université d'Ottawa
pour l'obtention du doctorat en mathématiques

1977



UMI Number: DC53652

INFORMATION TO USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted. Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleed-through, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI Microform DC53652
Copyright 2011 by ProQuest LLC
All rights reserved. This microform edition is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.

ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

REMERCIEMENT

J'exprime à mon directeur de thèse, Monsieur Bahman SAFFARI, ma très vive reconnaissance pour l'aide qu'il m'a apportée*.

Je dois également un grand remerciement à mon épouse Nicole, pour avoir eu le courage de dactylographier le manuscrit de cette thèse dans de très courts délais.

*La majeure partie de ce travail a été effectuée de 1975 à 1977 sous les auspices de l'INSTITUT BABAR DES SCIENCES ARITHMETIQUES, dont les Q.G. sont sises aux ECRENNES (Seine et Marne), FRANCE.

RESUME

"MESURES DE HAUSDORFF"

Nous calculons la valeur exacte de la mesure de Hausdorff des parfaits homogènes linéaires. Les méthodes développées à cette fin sont ensuite utilisées pour la résolution d'un problème d'arithmétique.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	i
NOTATIONS ET CONVENTIONS	ii
CHAPITRE I <u>Généralités sur les parfaits de translation</u> . . .	p. 1
1.1 Parfaits de translation (linéaires) au sens large	p. 1
1.2 Dimension de Hausdorff des parfaits de translation au sens large	p. 4
1.3 Un théorème sur les ensembles parfaits de Cantor	p. 7
1.4 Mesure de Hausdorff de certains parfaits de translation au sens large	p. 12
CHAPITRE II <u>Calcul de la mesure de Hausdorff des parfaits homogènes linéaires de type $(3, \xi)$</u>	p. 22
2.1 Détermination des parfaits homogènes au sens large de type $(3, \xi)$ de diamètre donné, dont la mesure de Hausdorff est maximale	p. 22
2.2 Calcul de la mesure de Hausdorff des parfaits homogènes au sens large de type $(3, \xi)$ dans le cas général, (1 ^{ière} partie)p.	30
2.3 Calcul de la mesure de Hausdorff des parfaits homogènes au sens large de type $(3, \xi)$ dans le cas général, (2 ^{ième} partie)p.	39
CHAPITRE III <u>Mesure de Hausdorff maximale et minimale des parfaits homogènes linéaires de type (ν, ξ) et de diamètre donné</u>	p. 67
3.1 Les parfaits homogènes de type (ν, ξ) de diamètre donné, de mesure de Hausdorff maximale	p. 67
3.2 Application aux ensembles de Cantor considérés par BEST et WEGMANN	p. 78
3.3 Les parfaits homogènes au sens large de type (ν, ξ) de diamètre donné de mesure de Hausdorff minimale	p. 80
CHAPITRE IV <u>Un problème d'arithmétique</u>	p. 84
4.1 Le parfait homogène E_A associé à A	p. 84
4.2 Un cas particulier	p. 103
CHAPITRE V <u>Traitement du cas général (ν et ξ quelconques) et résultats sur les parfaits homogènes de $\mathbb{R}^N$</u>	p. 110
5.1 Calcul de la mesure de Hausdorff des parfaits homogènes linéaires	p. 110
5.2 Mesure de Hausdorff des parfaits homogènes de $\mathbb{R}^N$	p. 124
BIBLIOGRAPHIE	p. 139

INTRODUCTION

On sait que les ensembles parfaits homogènes de type (ν, ξ) ont une dimension de Hausdorff égale à $-\log \nu / \log \xi$ car, dans cette dimension, leur mesure de Hausdorff est finie et non-nulle.

La question de savoir quelle est la valeur exacte de cette mesure de Hausdorff a été posée par plusieurs auteurs (cf. HAUSDORFF [12], BEST [5], WEGMANN [27], GALAMBOS [11], etc), mais à notre connaissance le calcul de cette valeur exacte n'a été effectué que dans certains cas particuliers: dans le cas $\nu = 2$ (ξ quelconque) des parfaits symétriques, ce calcul fut effectué par HAUSDORFF lui-même [12]. Pour $\nu \geq 3$, les travaux de BEST [5] et WEGMANN [27] aboutirent à un résultat voisin de ce qui correspondrait au cas $\xi = \frac{1}{\nu+1}$.

L'objet de ce travail est d'effectuer le calcul explicite de la mesure de Hausdorff dans le cas général (ν et ξ quelconques). En fait, nous développons une méthode de calcul qui permet d'obtenir la mesure de Hausdorff pour des parfaits de translation plus généraux que les parfaits homogènes. D'autre part, la méthode nous permet de résoudre un problème d'arithmétique que B. SAFFARI nous avait posé il y a quelque temps.

NOTATIONS ET CONVENTIONS

1. $\mathbb{R}$ désigne la droite réelle.
2. $[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x .
3. $|I|$ désigne la longueur de l'intervalle I .
4. $\text{diam } S$ désigne le diamètre de l'ensemble $S \subset \mathbb{R}^N$.
5. $\text{mes } S$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble mesurable S .
6. Si E est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$, désignons par $H_\rho^s(E)$ la borne inférieure des nombres

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^s$$

pour tous les recouvrements dénombrables $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ de E par des intervalles de longueur $\leq \rho$.

7. La mesure de E dans la dimension s est définie par

$$H^s(E) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} H_\rho^s(E) .$$

8. La borne inférieure $\underline{\alpha}$ des nombres s pour lesquels $H^s(E) = 0$ est appelée la dimension de Hausdorff de E . On notera

$$\alpha = \dim E .$$

9. Nous appellerons mesure de Hausdorff de E , notée $H^\alpha(E)$, la mesure de E dans la dimension de Hausdorff de E .

10. Conformément à la définition 1.1.4 du chapitre I, nous emploierons le mot "partition" au lieu de "partition au sens large".
11. La numérotation des formules et inégalités est "locale", et varie d'une section de chapitre à l'autre: Par exemple dans la seconde section du chapitre II (section 2.2) les formules sont numérotées (1), (2), ... , (22) et (*), (**), tandis qu'à la section suivante 2.3, les formules sont renumérotées (1), (2), ...

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES PARFAITS DE TRANSLATION LINEAIRES

Rappelons que les parfaits de translation linéaires sont les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$ qui sont décomposables, d'une infinité de manières, en portions (deux à deux disjointes) superposables par translation. Une définition plus "constructive" est donnée, par exemple, dans KAHANE-SALEM [13]. Nous allons quelque peu étendre cette définition, et introduire la notion de parfait de translation au sens large que nous utiliserons par la suite.

Ce chapitre est en grande partie descriptif. Nous y démontrons cependant, pour nous en servir dans toute la suite, deux théorèmes généraux sur les densités exponentielles d'ensembles d'entiers et sur les dimensions et les mesures de Hausdorff.

1.1. Parfaits de translation (linéaires) au sens large

Reportons-nous à la définition, dans KAHANE-SALEM ([13], p. 18), des parfaits de translation de type $(v_k, \eta_{1,k}, \dots, \eta_{v_k,k}, \xi_k)$ construits sur un intervalle fondamental $[a, b]$.

Sur chacun des k -uples $(\eta_{1,k}, \dots, \eta_{v_k,k})$ nous conservons la condition

$$0 \leq \eta_{1,k} < \eta_{2,k} < \dots < \eta_{v_k,k} < 1 ,$$

mais sur chacun de ξ_k , nous imposons seulement la condition

$$\xi_k > 0, \quad \xi_k \leq \eta_{2,k} - \eta_{1,k} , \quad \dots , \quad \xi_k \leq 1 - \eta_{v_k,k} .$$

De plus, les dissections sont faites de façon à ce qu'à la $k^{\text{ième}}$ étape,

il ne reste sur $[a,b]$ que $v_1 v_2 \dots v_k$ intervalles blancs (fermés) de longueur $\ell \xi_1 \xi_2 \dots \xi_k$ (où $\ell = b-a$), deux à deux disjoints ou bout à bout, dont les extrémités gauches respectives sont les points

$$a + \ell(\eta(j_1,1) + \xi_1 \eta(j_2,2) + \dots + \xi_1 \dots \xi_{k-1} \eta(j_k,k))$$

où l'on écrit $\eta(j,\mu)$ pour $\eta_{j,\mu}$ et où j_n prend toutes les valeurs de 1 à v_n pour chaque $n \in \{1,2, \dots, k\}$.

Soit E_k la réunion de ces $v_1 v_2 \dots v_k$ intervalles blancs.

DEFINITION 1.1.1 Le parfait de translation au sens large E correspondant à la suite $(v_k, \eta_{1,k}, \dots, \eta_{v_k,k}, \xi_k)$ est défini par

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Comme pour les parfaits de translation au sens strict, les points de E s'écrivent

$$x = a + \ell(\eta(j_1,1) + \xi_1 \eta(j_2,2) + \dots + \xi_1 \dots \xi_{k-1} \eta(j_k,k) + \dots).$$

Remarque: L'ensemble des x ayant plusieurs telles représentations est dénombrable.

DEFINITION 1.1.2 On appelle portion de E au sens large l'intersection de E avec un intervalle fermé.

La fonction de Lebesgue L est définie sur $[a,b]$ de la même façon que pour le cas des parfaits de translation au sens strict, et la L -mesure dL , parmi les mesures de masse totale 1, possède la propriété caractéristique analogue suivante:

PROPOSITION 1.1.3 Deux portions au sens large de E égales par translation ont même L -mesure.

Démonstration: En effet, si une mesure jouit de cette propriété, elle affecte à chacune des portions portées par les intervalles blancs de la k -ième étape la masse $1/(v_1 v_2 \dots v_k)$, et cela caractérise dL .

D'autre part, on peut supposer sans perte de généralité que dans la construction de E , $\eta_{1,k} = 0$ et $\eta_{v_k,k} = 1 - \varepsilon_k$ pour tout $k \geq 1$. (En effet, en remplaçant $[a,b]$ par $[\inf E, \sup E]$ et tout intervalle blanc I par $[\inf(I \cap E), \sup(I \cap E)]$ on obtient le même parfait de translation au sens large E , ainsi que la même L -mesure sur l'enveloppe convexe de E .)

Soit $J_1 = [c_1, d_1]$ et $J_2 = [c_2, d_2]$ où $c_1, c_2, d_1, d_2 \in E$. Supposons que les portions au sens large $J_1 \cap E$ et $J_2 \cap E$ soient égales par translation, c'est à dire qu'il existe une translation T telle que

$$T(J_1 \cap E) = J_2 \cap E.$$

On remarque alors que $T(J_1 \cap E_k) = J_2 \cap E_k$ pour tout $k \geq 1$ car sinon, à une certaine étape k , il y aura une extrémité d'intervalle blanc contenue dans $J_1 \cap E$ dont l'image par T sera contenue dans un intervalle noir situé dans J_2 , donc dans le complémentaire de E . Par conséquent, pour tout $k \geq 1$

$$L_k(d_1) - L_k(c_1) = L_k(d_2) - L_k(c_2),$$

et puisque $L = \lim_{k \rightarrow \infty} L_k$ on a $L(d_1) - L(c_1) = L(d_2) - L(c_2)$, c'est à dire que $J_1 \cap E$ et $J_2 \cap E$ ont même L -mesure.

DEFINITION 1.1.4 On appellera partition (au sens large) d'un ensemble $E \subset [a,b]$ une réunion finie de portions (au sens large) de E qui sont deux à deux disjointes ou adjacentes. Dans toute la suite nous emploierons le mot "partition" au lieu de "partition au sens large".

Notation: Soit P_1 et P_2 deux partitions d'un ensemble $E \subset [a,b]$. On écrira $P_1 \prec P_2$ lorsque P_2 est un raffinement de P_1 , c'est à dire que P_2

est obtenu de P_1 en prenant une partition de chacune des portions de P_1 .

Une suite de partitions $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ sera dite croissante si $P_n \subset P_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

PROPOSITION 1.1.5 Les ensembles parfaits de translation au sens large sont caractérisés par la propriété suivante: il existe une suite infinie et croissante de partitions de l'ensemble en portions (au sens large) égales par translation.

Démonstration: En effet, si un parfait E possède cette propriété, les enveloppes convexes des portions de chacune des partitions de la suite $\{P_n\}$ constituent les intervalles blancs de chacune des étapes de dissection.

DEFINITION 1.1.6 Si la suite des types de dissection

$$(\nu_k, \eta_{1,k}, \dots, \eta_{\nu_k,k}, \xi_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

est la suite constante

$$(\nu, \eta_1, \dots, \eta_\nu, \xi),$$

on dira que E est un parfait homogène (au sens large) de type $(\nu, \eta_1, \dots, \eta_\nu, \xi)$ ou, plus simplement, un parfait homogène (au sens large) de type (ν, ξ) .

1.2 Dimension de Hausdorff des parfaits de translation au sens large

Considérons un parfait de translation au sens large $E \subset [a, b]$ de mesure de Lebesgue nulle, dont la suite des types de dissection est

$$(\nu_k, \eta_{1,k}, \dots, \eta_{\nu_k,k}, \xi_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

PROPOSITION 1.2.1 La dimension de Hausdorff $\alpha(E)$ du parfait E vérifie les inégalités

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_{k-1})}{-\log(\xi_1 \dots \xi_k)} \leq \alpha(E) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_k)}{-\log(\xi_1 \dots \xi_k)}.$$

Démonstration: Soit $H^\alpha(E)$ la mesure de Hausdorff de E dans la dimension α , où $\alpha \in (0, 1]$. D'après le lemme de KAHANE-SALEM ([13], p. 27), si $H^\alpha(E) > 0$, on a

$$\inf_{k \geq 1} (v_1 \dots v_k)(\xi_1 \dots \xi_k)^\alpha > 0,$$

c'est à dire,

$$\inf_{k \geq 1} \log(\xi_1 \dots \xi_k) \left(\frac{\log(v_1 \dots v_k)}{\log(\xi_1 \dots \xi_k)} + \alpha \right) > -\infty.$$

Donc

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\log(v_1 \dots v_k)}{\log(\xi_1 \dots \xi_k)} + \alpha \right) \leq 0,$$

d'où

$$\alpha \leq - \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_k)}{\log(\xi_1 \dots \xi_k)} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_k)}{-\log(\xi_1 \dots \xi_k)},$$

et par conséquent

$$\alpha(E) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_k)}{-\log(\xi_1 \dots \xi_k)}.$$

Soit L la fonction de Lebesgue associée à E et ω_L le module de continuité de L . Si $\xi_1 \dots \xi_k \leq t \leq \xi_1 \dots \xi_{k-1}$, on a pour tout $\alpha > 0$

$$(*) \quad \frac{1}{(v_1 \dots v_k)(\xi_1 \dots \xi_{k-1})^\alpha} \leq \frac{\omega_L(t)}{t^\alpha} \leq \frac{1}{(v_1 \dots v_{k-1})(\xi_1 \dots \xi_k)^\alpha}.$$

D'autre part, si

$$\alpha < \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_{k-1})}{-\log(\xi_1 \dots \xi_k)},$$

c'est à dire si

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\alpha + \frac{\log(v_1 \dots v_{k-1})}{\log(\xi_1 \dots \xi_k)} \right) < 0 ,$$

on a

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \log(\xi_1 \dots \xi_k) \left(\alpha + \frac{\log(v_1 \dots v_{k-1})}{\log(\xi_1 \dots \xi_k)} \right) \geq 0 .$$

D'où

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (v_1 \dots v_{k-1})(\xi_1 \dots \xi_k)^\alpha \geq 1 ,$$

et par conséquent, d'après (*), $\omega_L(t) = 0(t^\alpha)$ ($t \rightarrow 0$), ce qui signifie, d'après KAHANE-SALEM ([13], p. 27, théorème III), que $H^\alpha(E) > 0$. On a donc $\alpha \leq \alpha(E)$, et l'on peut donc conclure que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_{k-1})}{-\log(\xi_1 \dots \xi_k)} \leq \alpha(E) ,$$

ce qui complète la démonstration.

COROLLAIRE 1.2.2 Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log v_k}{\log(\xi_1 \dots \xi_k)} = 0$, alors

$$\alpha(E) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_k)}{-\log(\xi_1 \dots \xi_k)} .$$

Démonstration: On a

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_{k-1})}{-\log(\xi_1 \dots \xi_k)} &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\log(v_1 \dots v_k)}{-\log(\xi_1 \dots \xi_k)} + \frac{\log v_k}{\log(\xi_1 \dots \xi_k)} \right) \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_k)}{-\log(\xi_1 \dots \xi_k)} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log v_k}{\log(\xi_1 \dots \xi_k)} \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_k)}{-\log(\xi_1 \dots \xi_k)} . \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1.2.3 Si $v_k = v$ pour tout $k \geq 1$, on a

$$\alpha(E) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log v}{-\log(\xi_1 \dots \xi_k)} .$$

Remarque: Par exemple, on retrouve cette situation (avec $v = 2$) lorsque E est un parfait symétrique. (cf. KAHANE-SALEM ([13], p. 13))

COROLLAIRE 1.2.4 Si $v_k = v$ et $\xi_k = \xi$ pour tout $k \geq 1$, on a

$$\alpha(E) = \frac{\log v}{-\log \xi} .$$

Remarque: En particulier, on retrouve cette situation lorsque E est un parfait homogène au sens large.

1.3 Un théorème sur les ensembles parfaits de Cantor

Soit $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ une suite d'entiers telle que $q_0 = 1$ et $q_n \geq 2$ pour tout $n \geq 1$. Soit $F_n \subset \{0, 1, \dots, q_n - 1\}$ ($n \geq 1$), une suite d'ensembles pour lesquels $0 \in F_n$ ($n \geq 1$). Posons $v_n = \text{card } F_n$ et

$$A = A(F_1, F_2, \dots) = \left\{ \sum_{j=1}^k a_j q_0 q_1 \dots q_{j-1} : k \geq 1 \text{ et } a_j \in F_j, j = 1, 2, \dots \right\}.$$

Considérons également l'ensemble de nombres réels

$$E = \{x \in [0, 1] : x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{q_1 \dots q_j} \text{ avec } a_j \in F_j, j = 1, 2, \dots\} .$$

THEOREME 1.3.1 Si $\sigma(A)$ désigne la densité exponentielle de A et $\alpha(E)$ la dimension de Hausdorff de E , on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_{n-1})}{\log(q_1 \dots q_n)} \leq \alpha(E) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_n)}$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_n)} \leq \sigma(A) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_{n-1})}.$$

Démonstration: Soit $A(x)$ la fonction dénombrante de A (en anglais: "counting function") définie par

$$A(x) = \sum_{\substack{n \in A \\ n \leq x}} 1.$$

Il y a $v_1 \dots v_k$ éléments de A qui s'écrivent sous la forme

$$n = a_1 + a_2 q_1 + a_3 q_1 q_2 + \dots + a_k q_1 q_2 \dots q_{k-1}$$

et tous satisfont l'inégalité $n < q_1 q_2 \dots q_k$.

Réciproquement, tout entier $n \in A$ tel que $n < q_1 q_2 \dots q_k$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$n = a_1 + a_2 q_1 + \dots + a_k q_1 q_2 \dots q_{k-1}, \quad (a_j \in F_j).$$

par conséquent

$$A(q_1 \dots q_k) = v_1 \dots v_k.$$

Alors, si $x_0 \in \mathbb{R}$ vérifie l'inégalité

$$(1) \quad q_1 \dots q_{n-1} < x_0 < q_1 \dots q_n, \quad (n \geq 2)$$

on a

$$(2) \quad v_1 \dots v_{n-1} < A(x_0) \leq v_1 \dots v_n$$

car $A(x)$ est une fonction croissante au sens large. En combinant

(1) et (2), on obtient

$$(3) \quad \frac{\log(v_1 \dots v_{n-1})}{\log(q_1 \dots q_n)} < \frac{\log A(x_0)}{\log x_0} \leq \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_{n-1})}$$

et

$$(4) \quad \frac{v_1 \dots v_{n-1}}{(q_1 \dots q_n)^\alpha} < \frac{A(x_0)}{x_0^\alpha} \leq \frac{v_1 \dots v_n}{(q_1 \dots q_{n-1})^\alpha}, \text{ (pour tout } \alpha > 0 \text{).}$$

Soit $\sigma(A)$ la densité exponentielle de A , définie par

$$\sigma(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log A(n)}{\log n} = \inf \{ \alpha > 0 : A(x) = o(x^\alpha) \}.$$

Soit $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ une suite croissante d'entiers positifs telle que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_{n_j})}{\log(q_1 \dots q_{n_j})} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_n)}.$$

Si

$$\alpha < \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_{n_j})}{\log(q_1 \dots q_{n_j})},$$

on a

$$\inf_{j \geq 1} \left(\log(q_1 \dots q_{n_j}) \left(\frac{\log(v_1 \dots v_{n_j})}{\log(q_1 \dots q_{n_j})} - \alpha \right) \right) > -\infty,$$

c'est à dire

$$\inf_{j \geq 1} \frac{(v_1 \dots v_{n_j})}{(q_1 \dots q_{n_j})^\alpha} > 0.$$

D'où,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{A(q_1 \dots q_{n_j})}{(q_1 \dots q_{n_j})^\alpha} > 0,$$

et par conséquent, $\alpha \leq \sigma(A)$, ce qui justifie l'inégalité

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_n)} \leq \sigma(A).$$

D'autre part, si

$$\alpha > \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_{n-1})} ,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(q_1 \dots q_{n-1}) \left(\frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_{n-1})} - \alpha \right) = -\infty ,$$

c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_1 \dots v_n}{(q_1 \dots q_{n-1})^\alpha} = 0 .$$

Donc, compte tenu de (4),

$$A(x) = o(x^\alpha) \quad (x \rightarrow \infty) ,$$

d'où $\alpha \geq \sigma(A)$, et par conséquent,

$$\sigma(A) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_{n-1})} .$$

on a donc les inégalités

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_n)} \leq \sigma(A) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_{n-1})} .$$

Par ailleurs, E est un parfait de translation au sens large car

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k ,$$

où

$$E_k = (a_1, \dots, a_k)_{\in F_1 \times \dots \times F_k} \left[\sum_{j=1}^k \frac{a_j}{q_1 \dots q_j} , \frac{1}{q_1 \dots q_k} + \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{q_1 \dots q_j} \right] .$$

La suite des types de dissection qui correspond à E est

$$(v_k, \eta_{1,k}, \dots, \eta_{v_k,k}, 1/q_k) \quad k = 1, 2, \dots$$

où $\eta_{j,k} = a_{j,k}/q_k$, avec $F_k = \{a_{1,k}, \dots, a_{v_k,k}\}$.

Alors, d'après la proposition 1.2.1,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_{n-1})}{\log(q_1 \dots q_n)} \leq \alpha(E) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_n)},$$

ce qui termine la démonstration.

COROLLAIRE 1.3.2

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_n)}$ existe, et si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log v_n}{\log(q_1 \dots q_{n-1})} = 0$,

alors

$$\alpha(E) = \sigma(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_n)}.$$

N.B. On retrouve également l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log v_n}{\log(q_1 \dots q_{n-1})} = 0$ dans

l'énoncé d'un théorème plus général de J. PEYRIERE ([21], p. 7).

Démonstration: On a

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_{n-1})} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_{n-1})}{\log(q_1 \dots q_{n-1})} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log v_n}{\log(q_1 \dots q_{n-1})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_{n-1})}{\log(q_1 \dots q_{n-1})}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_{n-1})}{\log(q_1 \dots q_n)} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_n)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log v_n}{\log(q_1 \dots q_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(v_1 \dots v_n)}{\log(q_1 \dots q_n)}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 1.3.3 Si les suites q_n et v_n sont toutes deux constantes (de

valeurs respectives q et v), alors

$$\alpha(E) = \sigma(A) = \log v / \log q .$$

Remarque: Dans les hypothèses du corollaire 1.3.3, on a quelque chose de mieux que l'égalité $\sigma(E) = \log v / \log q$. En effet, compte tenu de ce corollaire et de la relation (4) ci-dessus, nous avons

$$\frac{1}{v} \leq \frac{A(x)}{x^{\sigma_0}} \leq v$$

(où $\sigma_0 = \log v / \log q$), ce qui est plus précis que la relation $\sigma(E) = \log v / \log q$, car cette dernière équivaut à dire que $\log v / \log q$ est la plus petite valeur de σ telle que la relation

$$A(x) = O_{\varepsilon}(x^{\sigma+\varepsilon})$$

ait lieu pour tout $\varepsilon > 0$. Au chapitre IV, nous préciserons ce point en calculant explicitement les valeurs de

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} x^{-\sigma_0} A(x) \text{ et de } \liminf_{x \rightarrow \infty} x^{-\sigma_0} A(x) .$$

1.4 Mesure de Hausdorff de certains parfaits de translation au sens large

Soit E un parfait de translation au sens large, de mesure de Lebesgue nulle, construit sur l'intervalle fondamental $[a, b]$, et dont la suite des types de dissection est de la forme

$$(v, \eta_{1,k}, \dots, \eta_{v,k}, \xi_k) , \quad k = 1, 2, \dots$$

où v est un entier ≥ 2 , indépendant de k . D'après le corollaire 1.2.3, la dimension de Hausdorff de E est donnée par

$$\alpha(E) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log v}{-\log(\xi_1 \dots \xi_k)} .$$

De plus, nous supposons que la suite des types de dissection satisfait à la condition suivante:

Condition C: Si un entier $m \geq 1$ vérifie l'inégalité

$$\eta(j_1, 1) + \sum_{s=2}^m \eta(j_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1} < \eta(\lambda_1, 1) + \sum_{s=2}^m \eta(\lambda_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1}$$

pour un certain choix d'indices $j_1, j_2, \dots, j_m$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$,

alors, pour tout $\ell \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} & (\xi_{\ell+1} \dots \xi_{\ell+m} + \eta(h_{\ell+1}, \ell+1) + \sum_{s=\ell+2}^{\ell+m} \eta(h_s, s) \xi_{\ell+1} \dots \xi_{s-1}) \\ & \quad - (\eta(i_{\ell+1}, \ell+1) + \sum_{s=\ell+2}^{\ell+m} \eta(i_s, s) \xi_{\ell+1} \dots \xi_{s-1}) \\ & \leq (\xi_1 \dots \xi_m + \eta(\lambda_1, 1) + \sum_{s=2}^m \eta(\lambda_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1}) \\ & \quad - (\eta(j_1, 1) + \sum_{s=2}^m \eta(j_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1}), \end{aligned}$$

où $h_{\ell+1} = \lambda_1, h_{\ell+2} = \lambda_2, \dots, h_{\ell+m} = \lambda_m$ et $i_{\ell+1} = j_1, i_{\ell+2} = j_2, \dots, i_{\ell+m} = j_m$.

Remarque: Les parfaits homogènes au sens large satisfont à cette condition (l'égalité ayant lieu), car pour eux, la suite $(v, \eta_{1,k}, \dots, \eta_{v,k}, \xi_k)$ est constante.

Soit $H^\alpha(E)$ la mesure de Hausdorff de E , ρ le diamètre de E , L la fonction de Cantor-Lebesgue associé à E , et ω_L le module de continuité de L .

THEOREME 1.4.1 Soit $K = \limsup_{k \rightarrow \infty} v^k(\xi_1 \dots \xi_k)^\alpha$, où $\alpha = \dim E = \alpha(E)$.

Si $0 < H^\alpha(E) < \infty$, on a

$$\inf_{0 < t \leq \rho} \frac{t^\alpha}{\omega_L(t)} \leq H^\alpha(E) \leq K \inf_{0 < t \leq \rho} \frac{t^\alpha}{\omega_L(t)}.$$

COROLLAIRE 1.4.2 Si $K = 1$ (par exemple, lorsque E est un parfait homogène au sens large),

$$H^\alpha(E) = \inf_{0 < t \leq \rho} \frac{t^\alpha}{\omega_L(t)}.$$

Si $K < 1$,

$$H^\alpha(E) = 0.$$

Pour la démonstration du théorème 1.4.1, on a recours au lemme suivant:

LEMME 1.4.3 Soit D_m l'ensemble des extrémités d'intervalles blancs de la $m^{\text{ième}}$ étape de dissection, et posons $D = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$. On a

$$\inf_{0 < t \leq \rho} \frac{t^\alpha}{\omega_L(t)} = \inf_{\substack{x_1, x_2 \in D \\ x_1 < x_2}} \frac{(x_2 - x_1)^\alpha}{L(x_2) - L(x_1)}.$$

Démonstration du lemme: Soit $t_{k,m}$ la longueur minimale d'un sous-intervalle de $[a, b]$ contenant k intervalles blancs de la $m^{\text{ième}}$ étape. Par définition,

$$\omega_L(t) = \sup_{|x-y|=t} |L(x) - L(y)|,$$

pour tout $t \in [0, b-a]$.

Si $x_1, x_2 \in D$ tels que $L(x_1) < L(x_2)$, alors $L(x_2) - L(x_1)$ est de la forme k/v^m (avec $0 \leq k \leq v^m$), où k est le nombre d'intervalles blancs de la $m^{\text{ième}}$ étape contenus dans l'intervalle $[x_1, x_2]$. Par conséquent,

$$t_{k,m} \leq x_2 - x_1.$$

En particulier, $t_{k,m}$ est la longueur d'un intervalle $[y_1, y_2]$, avec

$$y_1, y_2 \in D, \text{ tel que } L(y_2) - L(y_1) = k/v^m = L(x_2) - L(x_1).$$

Donc,

$$\frac{(y_2 - y_1)^\alpha}{L(y_2) - L(y_1)} \leq \frac{(x_2 - x_1)^\alpha}{L(x_2) - L(x_1)} ,$$

où

$$y_2 - y_1 = t_{k,m} .$$

De plus, il résulte facilement de la définition de $t_{k,m}$ que $\omega_L(t_{k,m}) = k/v^m$.

On peut donc conclure

$$\inf_{\substack{x_1, x_2 \in D \\ x_1 < x_2}} \frac{(x_2 - x_1)^\alpha}{L(x_2) - L(x_1)} = \inf_{\substack{m \geq 1 \\ 1 \leq k \leq v^m}} \frac{t_{k,m}^\alpha}{\omega_L(t_{k,m})} .$$

D'autre part, ω_L est une fonction croissante (au sens large) sur l'intervalle $[0, b-a]$ qui vérifie les égalités

$$\omega_L(0) = 0 \quad \text{et} \quad \omega_L(t) = 1 \quad \text{pour tout } t \in [\rho, b-a] .$$

Donc, quelque soit $t \in [0, b-a]$,

$$0 \leq \omega_L(t) \leq 1 .$$

Soient $t \in]0, b-a]$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Choisissons un entier $m \geq 1$ tel que

$$\frac{t^\alpha}{\omega_L(t) - \frac{1}{v^m}} < \frac{t^\alpha}{\omega_L(t)} + \varepsilon .$$

Pour ce choix de m , considérons l'unique entier k vérifiant

$$0 \leq k \leq v^m - 1 \quad \text{et} \quad \frac{k}{v^m} < \omega_L(t) \leq \frac{k+1}{v^m} .$$

On a l'inégalité

$$\omega_L(t_{k,m}) < \omega_L(t) \leq \omega_L(t_{k,m}) + \frac{1}{v^m} ,$$

ce qui entraîne

$$t_{k,m} < t \quad \text{et} \quad \omega_L(t) - \frac{1}{v^m} \leq \omega_L(t_{k,m}) ,$$

d'où

$$t_{k,m}^\alpha < t^\alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_L(t_{k,m})} \leq \frac{1}{\omega_L(t) - \frac{1}{v^m}} .$$

Par conséquent,

$$\frac{t_{k,m}^\alpha}{\omega_L(t_{k,m})} < \frac{t^\alpha}{\omega_L(t) - \frac{1}{v^m}} < \frac{t^\alpha}{\omega_L(t)} + \varepsilon ,$$

et puisque $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on obtient

$$\inf_{\substack{m \geq 1 \\ 1 \leq k \leq v^m}} \frac{t_{k,m}^\alpha}{\omega_L(t_{k,m})} = \inf_{0 < t \leq b-a} \frac{t^\alpha}{\omega_L(t)} = \inf_{0 < t \leq \rho} \frac{t^\alpha}{\omega_L(t)}$$

et le lemme est démontré.

Démonstration du théorème 1.4.1

Remarque: Sans perte de généralité, on peut supposer que $[a,b] = [0,1]$.

En effet, lorsque deux ensembles sont homothétiques dans un rapport r , le rapport de leurs mesures respectives dans la dimension β est r^β . Donc, si $\tilde{E}$ désigne l'homothétique de E dans le rapport $1/(b-a)$, on a

$$H^\alpha(E) = (b-a)^\alpha H^\alpha(\tilde{E}) , \text{ et, } \inf_{0 < t \leq b-a} \frac{t^\alpha}{\omega_L(t)} = (b-a)^\alpha \inf_{0 < u \leq 1} \frac{u^\alpha}{\omega_{\tilde{L}}(u)} ,$$

où $\tilde{L}(u) = L((b-a)u)$ est la fonction de Cantor-Lebesgue associée à $\tilde{E}$.

Pour tout borélien $B \subset [0,1]$, on définit

$$H(B) = \frac{H^\alpha(B \cap E)}{H^\alpha(E)} .$$

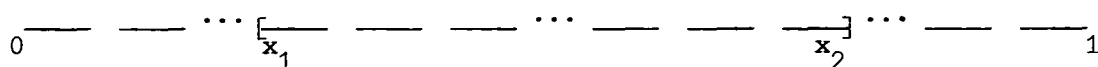
De cette façon, H est une mesure de probabilité sur la tribu des boréliens de $[0,1]$. Il y a v^m intervalles blancs après la $m^{\text{ième}}$ étape de dissection. La H -mesure de chacun d'entre eux est v^{-m} . Posons

$$h = H^\alpha(E) \quad \text{et} \quad h' = \inf_{\substack{x_1, x_2 \in D \\ x_1 < x_2}} \frac{(x_2 - x_1)^\alpha}{L(x_2) - L(x_1)},$$

et montrons en premier lieu que $h' \leq h$.

Considérons les intervalles notés $J(k, m)$ de la forme $[x_1, x_2]$ où x_1 est l'extrémité gauche d'un intervalle blanc de la $m^{\text{ième}}$ étape et x_2 l'extrémité droite d'un intervalle blanc de la $m^{\text{ième}}$ étape, pour lesquels le nombre d'intervalles blancs de la $m^{\text{ième}}$ étape contenus dans $[x_1, x_2]$ est k .

Pour m, k, x_1, x_2 variant de toutes les façons possibles, nous appellerons intervalle "de type J" tout intervalle de la forme $J(k, m) = [x_1, x_2]$.



Par définition de H , on a

$$H(J(k, m)) = \frac{k}{v^m} = L(x_2) - L(x_1),$$

d'où

$$H(J(k, m))h' \leq \frac{k}{v^m} \cdot \frac{(x_2 - x_1)^\alpha}{L(x_2) - L(x_1)} = (x_2 - x_1)^\alpha = |J(k, m)|^\alpha.$$

Donc si Ω est un recouvrement de E par des intervalles de type J, on obtient

$$\sum_{J \in \Omega} |J|^\alpha \geq h' \sum_{J \in \Omega} H(J) \geq h' H(E) = h'.$$

Vu que

$$h \geq \inf \left\{ \sum_{J \in \Omega} |J|^\alpha : \Omega \text{ parcourt les recouvrements de } E \text{ par des intervalles de type } J \right\},$$

on obtient

$$h \geq h'.$$

Montrons d'autre part que $h \leq Kh'$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un intervalle $J(k,m) = [x_1, x_2]$ (qui dépend de ε) de type J tel que si l'on pose

$$h'' = \frac{(x_2 - x_1)^2}{L(x_2) - L(x_1)},$$

on a

$$h'' < h' + \varepsilon.$$

Pour un certain choix d'indices $j_s, \lambda_s \in \{1, 2, \dots, v\}$, $s = 1, 2, \dots, m$

on a

$$J(k,m) = [x_1, x_2] = [\eta(j_1, 1) + \sum_{s=2}^m \eta(j_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1},$$

$$\eta(\lambda_1, 1) + \sum_{s=2}^m \eta(\lambda_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1} + \xi_1 \dots \xi_m].$$

Soit N un entier positif et Ω_N la famille des intervalles de la forme

$$J_\ell = [\eta(i_1, 1) + \sum_{s=2}^{\ell+m} \eta(i_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1},$$

$$\eta(h_1, 1) + \sum_{s=2}^{\ell+m} \eta(h_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1} + \xi_1 \dots \xi_{\ell+m}]$$

où $i_s = h_s$, $s=1, 2, \dots, \ell$, $i_{\ell+1} = j_1, i_{\ell+2} = j_2, \dots, i_{\ell+m} = j_m$

$h_{\ell+1} = \lambda_1, h_{\ell+2} = \lambda_2, \dots, h_{\ell+m} = \lambda_m$, et $\ell \geq N$ avec $\ell \equiv 0 \pmod{m}$.

Chaque intervalle J_ℓ contient k intervalles blancs de la $(m+\ell)$ ème étape.

Par conséquent

$$\begin{aligned} h'' H(J_\ell) &= h'' \cdot \frac{k}{v^{m+\ell}} = \frac{(x_2 - x_1)^\alpha}{(L(x_2) - L(x_1))} \cdot \frac{k}{v^{m+\ell}} = \frac{(x_2 - x_1)^\alpha}{k/v^m} \cdot \frac{k}{v^{m+\ell}} = \frac{(x_2 - x_1)^\alpha}{v^\ell} \\ &= \frac{((x_2 - x_1) \xi_1 \dots \xi_\ell)^\alpha}{v^\ell (\xi_1 \dots \xi_\ell)^\alpha}. \end{aligned}$$

Mais en vertu de la condition C, on a

$$\begin{aligned}
 |J_\ell| &= \xi_1 \dots \xi_\ell (\xi_{\ell+1} \dots \xi_{\ell+m} + \eta(h_{\ell+1}, \ell+1) + \sum_{s=\ell+2}^{\ell+m} \eta(h_s, s) \xi_{\ell+1} \dots \xi_{s-1} \\
 &\quad - \eta(i_{\ell+1}, \ell+1) - \sum_{s=\ell+2}^{\ell+m} \eta(i_s, s) \xi_{\ell+1} \dots \xi_{s-1}) \\
 &\leq \xi_1 \dots \xi_\ell (\xi_1 \dots \xi_m + \eta(\lambda_1, 1) + \sum_{s=2}^m \eta(\lambda_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1} \\
 &\quad - \eta(j_1, 1) - \sum_{s=2}^m \eta(j_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1}) \\
 &= \xi_1 \dots \xi_\ell (x_2 - x_1) .
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(*) \quad h^H(J_\ell) \geq \frac{|J_\ell|^\alpha}{v^\ell(\xi_1 \dots \xi_\ell)^\alpha} .$$

Soit $I \subset J(k, m)$ un intervalle blanc fixé de la $m^{\text{ième}}$ étape, ayant pour origine le point

$$\eta(\theta_1, 1) + \sum_{s=2}^m \eta(\theta_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1}$$

où $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ est un m -uplet d'indices fixé.

Soit E^* l'ensemble des $x = \eta(j_1, 1) + \sum_{s=2}^{\infty} \eta(j_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1} \in E$ pour lesquels $j_{s+1} = \theta_1, j_{s+2} = \theta_2, \dots, j_{s+m} = \theta_m$ pour une infinité d'indices $s \equiv 0 \pmod{m}$. Ainsi chaque $x \in E^*$ appartient à une infinité de J_ℓ .

Montrons que $H(E^*) = 1$. Pour tout $\ell \geq 1$ avec $\ell \equiv 0 \pmod{m}$, posons $E(\ell) = \{x \in E : x = \eta(j_1, 1) + \sum_{s=2}^{\infty} \eta(j_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1} \text{ où le } m\text{-uplet } (j_{s+1}, j_{s+2}, \dots, j_{s+m}) \text{ est différent du } m\text{-uplet } (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \text{ pour tout } s \geq \ell \text{ tel que } s \equiv 0 \pmod{m}\}$.

On peut alors écrire

$$E(\ell) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(\ell, n) ,$$

où

$$E(\ell, n) = \{x \in E : x = \eta(j_1, 1) + \sum_{s=2}^{\infty} \eta(j_s, s) \xi_1 \dots \xi_{s-1} \text{ où le } m\text{-uplet} \\ (j_{\ell+(q-1)m+1}, \dots, j_{\ell+qm}) \text{ est différent du } m\text{-uplet } (\theta_1, \theta_1, \dots, \theta_m), \\ \text{pour tout } q = 1, 2, \dots, n\} .$$

De plus, $E(\ell, n)$ étant l'intersection de E avec la réunion de $v^{\ell}(v^m-1)^n$ intervalles blancs deux à deux disjoints ou bout à bout de la $(\ell+nm)^{\text{ième}}$ étape, on a

$$H(E(\ell, n)) = \frac{v^{\ell}(v^m-1)^n}{v^{\ell+nm}} = (1-v^{-m})^n .$$

Etant donné les inclusions

$$E(\ell, n+1) \subset E(\ell, n), \quad (n \geq 1)$$

on a

$$H(E(\ell)) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(E(\ell, n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-v^{-m})^n = 0 .$$

Puisque

$$E \setminus E^* = \bigcup_{\ell \equiv 0 \pmod{m}} E(\ell) ,$$

on obtient

$$(**) \quad H(E^*) = H(E) = 1 .$$

On extrait maintenant de Ω_N une sous-famille Ω_N' définie par récurrence de façon suivante: soit $I_1 \in \Omega_N$ un intervalle de longueur maximale; supposons $I_1, I_2, \dots, I_n$ déjà choisis, et choisissons, parmi les intervalles de Ω_N qui ont une intersection vide ou finie avec $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$, celui ou un de ceux qui sont de longueur maximale.

La famille $\Omega_N' = \{I_n\}_{n=1}^\infty$ ainsi construite est un recouvrement de E^* .

En fait, tout intervalle $I \in \Omega_N$ est contenu dans au moins un des $I_n \in \Omega_N'$.

D'autre part, pour tout $\delta > 0$, il existe un entier positif $N = N(\delta)$ tel que si $\ell \geq N$ on a

$$v^\ell(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\ell)^\alpha < K + \delta.$$

Par conséquent, d'après (*), on a pour tout $J_\ell \in \Omega_N'$

$$h'' H(J_\ell) > \frac{|J_\ell|^\alpha}{K + \delta},$$

d'où

$$h'' \sum_{I \in \Omega_N'} H(I) > \frac{1}{K + \delta} \cdot \sum_{I \in \Omega_N'} |I|^\alpha.$$

Puisque

$$\sum_{I \in \Omega_N'} H(I) = H(E^*) = 1$$

et que $\delta > 0$ est arbitrairement petit, on obtient

$$Kh'' \geq \limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{I \in \Omega_N'} |I|^\alpha.$$

Par ailleurs,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{I \in \Omega_N'} |I|^\alpha \geq H^\alpha(E^*) = H^\alpha(E) = h,$$

d'où

$$h \leq Kh'' \leq K(h' + \varepsilon).$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit,

$$h \leq Kh',$$

et le théorème est démontré.

CHAPITRE II

CALCUL DE LA MESURE DE HAUSDORFF DES PARFAITS HOMOGENES AU SENS LARGE DE TYPE $(3, \xi)$

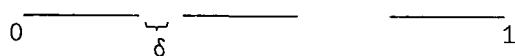
En nous basant sur le corollaire 1.4.2, nous effectuons le calcul explicite de $H^\alpha(E)$, pour tout parfait homogène au sens large E de type $(3, \xi)$. En particulier, nous exprimons $H^\alpha(E)$ comme une fonction de la position des intervalles blancs initiaux de la construction de E , et nous en décrivons le comportement.

2.1 Détermination des parfaits homogènes au sens large de type $(3, \xi)$ de diamètre donné, dont la mesure de Hausdorff est maximale

Pour tout parfait homogène de type (ν, ξ) (ν et ξ quelconques) de diamètre λ , on sait (KAHANE-SALEM [13], p. 25) que $H^\alpha(E) \leq \lambda^\alpha$, où $\alpha = \dim E = -\log \nu / \log \xi$. Nous démontrons, dans cette section, une condition nécessaire et suffisante sur la construction d'un parfait homogène E de type $(3, \xi)$ pour que $H^\alpha(E) = \lambda^\alpha$.

Lorsque deux ensembles sont homothétiques dans un rapport r , le rapport de leur mesure de Hausdorff respective dans une dimension donnée β est r^β . Par conséquent, nous pouvons restreindre notre étude au cas suivant:

Soit E un parfait homogène de type $(3, \xi)$ de diamètre 1 construit sur l'intervalle fondamental $[0, 1]$. Notons par δ la longueur du plus petit des deux intervalles noirs de la 1^{ière} étape de dissection.



PROPOSITION 2.1.1 $H^\alpha(E) = 1$ si et seulement si

$$\xi^{1-\log 2/\log 3} - 2\xi \leq \delta \leq (1-3\xi)/2 .$$

Démonstration: D'après le corollaire 1.4.2 et le lemme 1.4.3,

$$H^\alpha(E) = \inf_{\substack{n \geq 1 \\ 1 \leq k \leq 3^n}} 3^n t_{k,n}^\alpha / k ,$$

ce qui s'écrit également

$$H^\alpha(E) = \inf_{k \geq 1} \inf_{n \geq n(k)} 3^n t_{k,n}^\alpha / k ,$$

où $n(k)$ désigne le plus petit entier $\geq \log k / \log 3$, et $t_{k,n}$ désigne la longueur minimale d'un sous-intervalle de $[0,1]$ contenant k intervalles blancs de la $n^{\text{ième}}$ étape.

Notons par γ la longueur du plus grand des deux intervalles noirs de la $1^{\text{ière}}$ étape, et considérons la $n^{\text{ième}}$ étape de dissection (pour un certain entier $n \geq 1$).

Diagramme de la $2^{\text{ième}}$ étape:

$$0 \quad \overline{\delta\xi} \quad \overline{\gamma\xi} \quad \delta \quad \overline{\delta\xi} \quad \overline{\gamma\xi} \quad \gamma \quad \overline{\delta\xi} \quad \overline{\gamma\xi} \quad 1$$

Soit k un entier vérifiant $1 \leq k \leq 3^{n-1}$. Il existe une suite finie d'entiers $\{\epsilon_j\}_{j=0}^{n-1}$ telle que

$$0 \leq \epsilon_j \leq 2 \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

et

$$k = \epsilon_{n-1} 3^{n-1} + \epsilon_{n-2} 3^{n-2} + \dots + \epsilon_1 3 + \epsilon_0 .$$

Soit $J_{k,n}$ un intervalle de longueur $t_{k,n}$ contenant k intervalles blancs de la $n^{\text{ième}}$ étape. Posons, pour $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$,

$a_{n-j}(k)$ = nombre d'intervalles noirs de longueur $\delta \xi^j$ contenus dans $J_{k,n}$

$b_{n-j}(k)$ = nombre d'intervalles noirs de longueur $\gamma \xi^j$ contenus dans $J_{k,n}$

Pour le calcul des $t_{k,n}$, on doit vérifier, compte tenu de l'hypothèse $\delta \geq \xi^{1-\log 2/\log 3 - 2\xi}$, que $\delta \geq \gamma \xi$. Puisque $\gamma = 1-3\xi-\delta$, il nous faut donc vérifier l'inégalité

$$\xi(1-3\xi-\delta) \leq \delta ,$$

c'est à dire

$$\frac{\xi-3\xi^2}{1+\xi} \leq \delta .$$

Puisque $\delta \geq \xi^{1-\log 2/\log 3 - 2\xi}$, il suffit de vérifier que

$$\frac{\xi-3\xi^2}{1+\xi} < \xi^{1-\log 2/\log 3 - 2\xi} .$$

Cette dernière inégalité s'écrit également

$$(i) \quad 3 < \xi^{1-\log 2/\log 3 + \xi} - \log 2/\log 3 + \xi .$$

Pour vérifier (i), posons $x = 1/\xi$ (donc $x > 3$), et soit ϕ la fonction définie sur $[3, \infty[$ par

$$\phi(x) = x^{(\log 2/\log 3)-1} + x^{\log 2/\log 3} + x^{-1} .$$

On a $\phi(3) = 0$. On observe de plus que ϕ est strictement croissante sur $[3, \infty[$. En effet, $\phi'(x) > 0$ si et seulement si

$$(ii) \quad x \frac{\log 2}{\log 3} x^{\log 2/\log 3} + \frac{\log 2}{\log 3} x^{\log 2/\log 3} > 1 + x^{\log 2/\log 3} ,$$

et (ii) est satisfaite puisque

$$x \frac{\log 2}{\log 3} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\log 2}{\log 3} x^{\log 2/\log 3} > 1$$

lorsque $x > 3$.

Etant donné la relation $\delta \geq \gamma\xi$, à la $n^{\text{ième}}$ étape on observe que

$$a_n(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } \epsilon_{n-1}=0, \text{ ou si } \epsilon_{n-1}=1 \text{ avec } \epsilon_{n-2}=\dots=\epsilon_0=0 \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$b_n(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } \epsilon_{n-1}=0 \text{ ou } 1, \text{ ou si } \epsilon_{n-1}=2 \text{ avec } \epsilon_{n-2}=\dots=\epsilon_0=0 \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$a_{n-1}(k) = \begin{cases} \epsilon_{n-1}, & \text{si } \epsilon_{n-2}=0, \text{ ou si } \epsilon_{n-2}=1 \text{ avec } \epsilon_{n-3}=\dots=\epsilon_0=0 \\ \epsilon_{n-1}+1, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$b_{n-1}(k) = \begin{cases} \epsilon_{n-1}, & \text{si } \epsilon_{n-2}=0 \text{ ou } 1, \text{ ou si } \epsilon_{n-2}=2 \text{ avec } \epsilon_{n-3}=\dots=\epsilon_0=0 \\ \epsilon_{n-1}+1, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$a_{n-j}(k) = \begin{cases} 3^{j-1}\epsilon_{n-1} + 3^{j-2}\epsilon_{n-2} + \dots + \epsilon_{n-j}, & \text{si } \epsilon_{n-j-1}=0, \\ & \text{ou si } \epsilon_{n-j-1}=1 \text{ avec } \epsilon_{n-j-2}=\dots=\epsilon_0=0 \\ 3^{j-1}\epsilon_{n-1} + 3^{j-2}\epsilon_{n-2} + \dots + \epsilon_{n-j} + 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$b_{n-j}(k) = \begin{cases} 3^{j-1}\epsilon_{n-1} + 3^{j-2}\epsilon_{n-2} + \dots + \epsilon_{n-j}, & \text{si } \epsilon_{n-j-1}=0 \text{ ou } 1, \\ & \text{ou si } \epsilon_{n-j-1}=2 \text{ avec } \epsilon_{n-j-2}=\dots=\epsilon_0=0 \\ 3^{j-1}\epsilon_{n-1} + 3^{j-2}\epsilon_{n-2} + \dots + \epsilon_{n-j} + 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$a_1(k) = \begin{cases} 3^{n-2}\epsilon_{n-1} + 3^{n-3}\epsilon_{n-2} + \dots + \epsilon_1, & \text{si } \epsilon_0=0 \text{ ou } 1 \\ 3^{n-2}\epsilon_{n-1} + 3^{n-3}\epsilon_{n-2} + \dots + \epsilon_1 + 1, & \text{si } \epsilon_0=2 \end{cases}$$

$$b_1(k) = 3^{n-2}\epsilon_{n-1} + 3^{n-3}\epsilon_{n-2} + \dots + \epsilon_1$$

L'intervalle $J_{k,n}$ contient k intervalles blancs de longueur ξ^n , ainsi que

(pour chaque $m = 1, 2, \dots, n$) $a_m(k)$ intervalles noirs de longueur $\delta\xi^{n-m}$ et

$b_m(k)$ intervalles noirs de longueur $\gamma\xi^{n-m}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} t_{k,n} &= k\xi^n + a_1(k)\delta\xi^{n-1} + b_1(k)\gamma\xi^{n-1} + a_2(k)\delta\xi^{n-2} + b_2(k)\gamma\xi^{n-2} + \dots + a_n(k)\delta + b_n(k)\gamma \\ &= \xi^n \left(k + \sum_{j=1}^n \xi^{-j} (a_j(k)\delta + b_j(k)\gamma) \right) \\ &= \xi^n (k + P_k(\xi^{-1})) \end{aligned}$$

où $P_k(X) = c_1(k)X + \dots + c_n(k)X^n$, avec $c_m(k) = a_m(k)\delta + b_m(k)\gamma$.

On a donc

$$3^n t_{k,n}^\alpha / k = (k + P_k(\xi^{-1}))^\alpha / k,$$

et en posant $x = \xi^{-1}$, on doit alors démontrer que

$$(*) \quad (k + P_k(x))^\alpha / k \geq 1 \quad (\text{pour tout } k \geq 1)$$

lorsque $x^{-1}(x^{\log 2 / \log 3} - 2) \leq \delta \leq \frac{1}{2}(1 - 3x^{-1})$.

L'inégalité (*) s'écrit également sous la forme

$$(**) \quad P_k(x) \geq x^{\log k / \log 3 - k}$$

Pour démontrer (**), on procède par récurrence sur l'entier $n = n(k) = \text{degré de } P_k$. Premièrement, pour $k = 1$ et $n = 0$, (**) est une égalité puisque $P_1 = 0 = x^0 - 1$. Supposons l'inégalité

$$P_q(x) \geq x^{\log q / \log 3 - q}$$

satisfaite pour q vérifiant $1 \leq q \leq 3^{n-1}$ pour un certain $n \geq 1$, et posons

$$k = i3^{n-1} + q, \quad \text{où } i = 1 \text{ ou } 2.$$

Si $q = 3^{n-1}$ et $i = 2$ (c'est à dire si $k = 3^n$), on a

$$P_k(x) = (\delta + \gamma) 3^n \sum_{m=1}^n (x/3)^m = (1 - 3x^{-1})x(x^n - 3^n)/(x - 3) = x^n - 3^n,$$

et (**) est donc une égalité dans ce cas.

Supposons maintenant que $k \leq 3^{n-1}$. En écrivant k sous la forme

$$k = \varepsilon_{n-1} 3^{n-1} + \varepsilon_{n-2} 3^{n-2} + \dots + \varepsilon_1 3 + \varepsilon_0$$

on a

$$q = \varepsilon_{n-2} 3^{n-2} + \varepsilon_{n-3} 3^{n-3} + \dots + \varepsilon_1 3 + \varepsilon_0$$

où $0 \leq \varepsilon_j \leq 2$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ et $\varepsilon_{n-1} = i$. On a par conséquent,

$$a_{n-j}(k) = 3^{j-1}i + a_{n-j}(q) \text{ et } b_{n-j}(k) = 3^{j-1}i + b_{n-j}(q),$$

$$a_n(k) = 1 \quad \text{et } b_n(k) = i-1,$$

pour $j = 1, 2, \dots, n-1$. Donc,

$$c_{n-j}(k) = a_{n-j}(k)\delta + b_{n-j}(k)\gamma = 3^{j-1}i(\delta+\gamma) + c_{n-j}(q), \quad j=1, \dots, n-1$$

$$c_n(k) = \delta + (i-1)\gamma$$

et

$$\begin{aligned} P_k(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} c_{n-j}(k)x^{n-j} + c_n(k)x^n \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} c_{n-j}(q)x^{n-j} + \sum_{j=1}^{n-1} i(\delta+\gamma)3^{j-1}x^{n-j} + (\delta+(i-1)\gamma)x^n \\ &= P_q(x) + iP_{3^{n-1}}(x) + (\delta+(i-1)\gamma)x^n. \end{aligned}$$

Il nous faut considérer également le cas $i = 1$ et $q = 3^{n-1}$. Alors,

$$k = i3^{n-1} + q = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Par conséquent,

$$a_n(k) = 1, \quad b_n(k) = 0, \quad a_{n-j}(k) = 3^{j-1} \cdot 2 = b_{n-j}(k), \quad j=1, 2, \dots, n-1$$

et

$$\begin{aligned}
P_k(x) &= \sum_{m=1}^n (a_m(k)\delta + b_m(k)\gamma)x^m \\
&= 2(\delta+\gamma)\sum_{m=1}^{n-1} 3^{n-m-1}x^m + \delta x^n \\
&= 2(x^{n-1}-3^{n-1}) + \delta x^n \quad (\text{car } \delta+\gamma = 1-3x^{-1}) \\
&= (x^{n-1}-3^{n-1}) + P_q(x) + \delta x^n \\
&= P_q(x) + P_{3^{n-1}}(x) + \delta x^n.
\end{aligned}$$

Etant donné l'hypothèse $P_q(x) \geq x^{\log q/\log 3 - q}$, on a donc

$$\begin{aligned}
P_k(x) &\geq x^{\log q/\log 3 - q} + i(x^{n-1}-3^{n-1}) + (\delta+(i-1)\gamma)x^n \\
&= x^{\log q/\log 3 + ix^{n-1}} + (\delta+(i-1)\gamma)x^n - k.
\end{aligned}$$

Il suffit donc, pour vérifier (**), de démontrer l'inégalité

$$x^{\log q/\log 3 + ix^{n-1}} + (\delta+(i-1)\gamma)x^n - k \geq x^{\log k/\log 3 - k}$$

c'est à dire

$$(iii) \quad x^{\log q/\log 3 + ix^{n-1}} + (\delta+(i-1)\gamma)x^n \geq x^{\log(q+i3^{n-1})/\log 3}.$$

Lorsque $i = 2$, (iii) devient

$$(iv) \quad x^n - x^{n-1} \geq x^{\log(q+2 \cdot 3^{n-1})/\log 3 - x^{\log q/\log 3}}$$

où $x > 3$ et $n \geq 1$. Lorsque $i = 1$, (iii) devient

$$(v) \quad x^{n-1} + \delta x^n \geq x^{\log(q+3^{n-1})/\log 3 - x^{\log q/\log 3}}$$

où $x > 3$ et $n \geq 1$. Puisque $\delta \geq x^{-1}(x^{\log 2/\log 3} - 2)$, pour vérifier (v),

il suffit de démontrer l'inégalité

$$(vi) \quad x^{n-1+\log 2/\log 3 - x^{n-1}} \geq x^{\log(q+3^{n-1})/\log 3 - x^{\log q/\log 3}},$$

où $x > 3$ et $n \geq 1$.

Pour $x > 3$ (fixé), et pour toute constante $K > 0$, la fonction

$$\Psi(t) = x^{\log(t+K)/\log 3} - x^{\log t/\log 3}$$

est croissante sur $[1, \infty[$ car $\Psi'(t) > 0$ si et seulement si

$$x^{\log(1+Kt^{-1})/\log 3} > 1+Kt^{-1},$$

et cette dernière inégalité est visiblement satisfaite. Par conséquent, pour vérifier (iv) et (vi), il suffit d'observer que si l'on pose $q = 3^{n-1}$, (iv) et (vi) deviennent respectivement

$$x^n - x^{n-1} = x^n - x^{n-1}$$

et

$$x^{n-1+\log 2/\log 3} - x^{n-1} = x^{n-1+\log 2/\log 3} - x^{n-1}.$$

Pour terminer la démonstration de la proposition 2.1.1, il suffit de noter que pour $\delta < \xi^{1-\log 2/\log 3} - 2\xi$, on a

$$\frac{3}{2}t_{2,1}^\alpha < 1.$$

En effet, $t_{2,1} = 2\xi + \delta$, et

$$\frac{3}{2}(2\xi + \delta)^\alpha < 1$$

si et seulement si

$$\alpha \log(2\xi + \delta) < \log 2 - \log 3,$$

c'est à dire,

$$2\xi + \delta < \xi^{1-\log 2/\log 3}, \quad (\text{car } \alpha = -\log 3/\log \xi)$$

ce qui termine la démonstration.

COROLLAIRE 2.1.2 Soit E un parfait homogène de type $(3, \xi)$ et de diamètre λ construit sur l'intervalle fondamental $[0, \lambda]$, et soit δ la

longueur du plus petit des deux intervalles noirs de la 1^{ière} étape de dissection. Alors

$$H^\alpha(E) = \ell^\alpha$$

si et seulement si

$$\ell(\xi^{1-\log 2/\log 3 - 2\xi}) \leq \delta \leq (1-3\xi)\ell/2 .$$

2.2 Calcul de la mesure de Hausdorff des parfaits homogènes au sens large de type $(3,\xi)$ dans le cas général, (1^{ière} partie)

Soit E un parfait homogène de type $(3,\xi)$ de diamètre 1 construit sur l'intervalle fondamental $[0,1]$. Notons toujours par δ la longueur du plus petit des deux intervalles noirs de la 1^{ière} étape de dissection.

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & \\ 0 & & \delta & & \gamma & & 1 \end{array}$$

Notons également par γ la longueur du plus grand des deux intervalles noirs de la 1^{ière} étape de dissection.

PROPOSITION 2.2.1 Si $\gamma\xi \leq \delta < \xi^{1-\log 2/\log 3 - 2\xi}$, on a (en posant $x = \xi^{-1}$)

$$H^\alpha(E) = \min ((2+\delta x)^\alpha/2 , (x+2+\delta x+\delta x^2)^\alpha/5) .$$

Démonstration: En conservant les notations de la proposition 2.1.1, on a de nouveau les équations suivantes:

$$(1) \quad t_{k,n} = \xi^n (k + P_k(x)), \quad k \geq 1, n \geq 1.$$

De plus, puisque $\delta \geq \gamma\xi$, on a

$$(2) \quad t_{k,n+\ell} = \xi^\ell t_{k,n}, \quad n \geq n(k) \text{ et } \ell \geq 1 ,$$

d'où

$$(3) \quad H^\alpha(E) = \inf_{k \geq 1} 3^{n(k)} t_{k,n(k)}^\alpha / k = \inf_{k \geq 1} (k + P_k(x))^\alpha / k .$$

Tel que précisé dans la démonstration de la proposition 2.1.1, la condition $\delta < \xi^{1-\log 2/\log 3} - 2\xi$ équivaut à $(2+\delta x)^\alpha/2 < 1$. Calculons en premier lieu $\min_{1 \leq k \leq 9} (k + P_k(x))^\alpha/k$. On a

$$P_1(x) = 0, \text{ d'où } (1+P_1(x))^\alpha/1 = 1$$

$$P_2(x) = \delta x, \text{ d'où } (2+P_2(x))^\alpha/2 = (2+\delta x)^\alpha/2$$

$$P_3(x) = x-3, \text{ d'où } (3+P_3(x))^\alpha/3 = x^\alpha/3 = 3/3 = 1$$

$$P_4(x) = x-3+\delta x^2, \text{ d'où } (4+P_4(x))^\alpha/4 = (x+1+\delta x^2)^\alpha/4$$

$$P_5(x) = (x-3)+\delta x+\delta x^2, \text{ d'où } (5+P_5(x))^\alpha/5 = (x+2+\delta x+\delta x^2)^\alpha/5$$

$$P_6(x) = 2(x-3)+\delta x^2, \text{ d'où } (6+P_6(x))^\alpha/6 = (2x+\delta x^2)^\alpha/6 = (2+\delta x)^\alpha/2.$$

Si $k = 3i + q$ avec i et $q \in \{1,2\}$, alors

$$(*) \quad (k + P_k(x))^\alpha/k \geq (2+\delta x)^\alpha/2$$

si et seulement si

$$(**) \quad P_k(x) \geq (2+\delta x)x^{\log(k/2)/\log 3} - k.$$

Nous allons prouver (**) [et donc (*)] pour $k \neq 5$. Puisque $q = 1$ ou 2 , on a

$$P_q(x) \geq (2+\delta x)x^{\log(q/2)/\log 3} - q.$$

De plus, comme à la proposition 2.1.1 (p. 27), on a

$$P_k(x) = P_q(x) + iP_3(x) + (\delta+(i-1)\gamma)x^2 = P_q(x) + i(x-3) + (\delta+(i-1)\gamma)x^2.$$

D'où

$$P_k(x) \geq (2+\delta x)x^{\log(q/2)/\log 3} - q + i(x-3) + (\delta+(i-1)\gamma)x^2.$$

Vérifions l'inégalité

$$(2+\delta x)x^{\log(q/2)/\log 3} - q + i(x-3) + (\delta+(i-1)\gamma)x^2 \geq (2+\delta x)x^{\log(k/2)/\log 3} - k,$$

qui s'écrit également sous la forme

$$ix + (\delta+\gamma(i-1))x^2 \geq (2+\delta x)x^{-\log 2/\log 3} (x^{\log(3i+q)/\log 3} - x^{\log q/\log 3}).$$

Le membre droit étant croissant avec q , il suffit de vérifier cette

dernière inégalité avec $q = 3$, c'est à dire de vérifier

$$(4) \quad i + (\delta+(i-1)\gamma)x \geq (2+\delta x)x^{-\log 2/\log 3} (x^{\log(i+1)/\log 3} - 1).$$

Si $i = 2$, (4) devient

$$2 + (1-3\xi)x \geq (2+\delta x)x^{-\log 2/\log 3} (x-1),$$

ce qui équivaut à

$$1 \geq (2+\delta x)x^{-\log 2/\log 3},$$

c'est à dire,

$$(2+\delta x)^{\alpha/2} \leq 1, \quad (\text{car } \alpha = \log 3/\log x)$$

et par conséquent, (4) est vérifiée. Ceci démontre, que pour $k = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

et pour $k = 2 \cdot 3 + 2 = 8$, on a

$$(k + P_k(x))^{\alpha/k} \geq (2+\delta x)^{\alpha/2}.$$

D'autre part, puisque $P_{3^n}(x) = x^n - 3^n$ ($n \geq 1$), on a

$$(3^n + P_{3^n}(x))^{\alpha/3^n} = x^{n\alpha}/3^n = 3^n/3^n = 1,$$

d'où, en particulier,

$$(9 + P_9(x))^{\alpha/9} = 1.$$

Montrons que $(4 + P_4(x))^{\alpha/4} \geq (2+\delta x)^{\alpha/2}$, c'est à dire que

$$(x+1+\delta x^2)^{\alpha/4} \geq (2+\delta x)^{\alpha/2},$$

ce qu'on écrit également sous la forme

$$(5) \quad (x+1+\delta x^2)x^{\log 2/\log 3} \geq (2+\delta x)x^{\log 4/\log 3}, \quad (\text{car } \alpha = \log 3/\log x),$$

ou encore

$$\delta(x^2 - x^{1+\log 2/\log 3}) \geq 2x^{\log 2/\log 3} - (x+1).$$

Puisque le membre gauche est positif, et que

$$2x^{\log 2/\log 3} \leq x + 1, \quad (\text{pour tout } x \geq 3),$$

(5) est vérifiée. Ainsi (**) [et donc (*)] se trouvent prouvés.

Par ailleurs, $(x+2+\delta x+\delta x^2)^{\alpha/5} \geq (2+\delta x)^{\alpha/2}$ si et seulement si

$$2x^{\log 5/\log 3} - (x+2)x^{\log 2/\log 3} \leq \delta((x^2+x)x^{\log 2/\log 3} - x^{1+\log 5/\log 3}).$$

Considérons le cas particulier où $\delta = \gamma\xi = (x-3)/(x^2+x)$. La dernière inégalité devient alors

$$(6) \quad x^{\log 2/\log 3}(2x^2+x-1) - (3x-1)x^{\log 5/\log 3} \geq 0.$$

Si l'on dénote par $g(x)$ le membre gauche de (6), on a $g(3) = 0$ et $g'(3) < 0$. Par conséquent, l'inégalité (6) n'est pas satisfaite pour x dans un certain intervalle de la forme $]3, 3+\epsilon[$. On aura donc pour ces valeurs de x , l'inégalité $(x+2+\delta x+\delta x^2)^{\alpha/5} < (2+\delta x)^{\alpha/2}$ lorsque $\delta = \gamma\xi = (x-3)/(x^2+x)$.

Considérons également le cas particulier où $\delta = \xi^{1-\log 2/\log 3} - 2\xi$. On remarque que l'inégalité $(5 + P_5(x))^{\alpha/5} \geq (2+\delta x)^{\alpha/2}$ sera vérifiée pour tout $x > 3$ si (4) est satisfaite lorsqu'on y substitue $i = 1$, ce qui est bien le cas, puisque (4) s'écrit alors

$$1+\delta x \geq (2+\delta x)x^{-\log 2/\log 3}(x^{\log 2/\log 3} - 1),$$

inégalité qui équivaut à

$$(2+\delta x)^{\alpha/2} \geq 1.$$

Cette dernière inégalité est satisfaite car $(2+\delta x)^{\alpha/2} = 1$ lorsque

$$\delta = \xi^{1-\log 2/\log 3} - 2\xi.$$

Jusqu'ici, nous avons donc démontré que

$$\min_{1 \leq k \leq 9} (k + P_k(x))^{\alpha/k} = \min ((2+\delta x)^{\alpha/2}, (x+2+\delta x^2+\delta x)^{\alpha/5}) .$$

Montrons par récurrence sur k , que pour tout $k > 9$,

$$(7) \quad (k + P_k(x))^{\alpha/k} \geq \min ((2+\delta x)^{\alpha/2}, (x+2+\delta x^2+\delta x)^{\alpha/5}) .$$

Hypothèse de récurrence: L'inégalité (7) est satisfaite lorsque

$k = q$ avec $1 \leq q \leq 3^{n-1}$ et n un certain entier $n \geq 3$.

Etape de récurrence: Posons

$$q = \epsilon_{n-2} 3^{n-2} + \epsilon_{n-3} 3^{n-3} + \dots + \epsilon_1 3 + \epsilon_0 .$$

Alors,

$$3q = \epsilon'_{n-1} 3^{n-1} + \epsilon'_{n-2} 3^{n-2} + \dots + \epsilon'_1 3 ,$$

où $\epsilon'_{n-j} = \epsilon_{n-j-1}$, $j=1,2,\dots,n-1$. Par conséquent, (en conservant

toujours les notations de la proposition 2.1.1), on a

$$a_{n-j}(3q) = a_{n-j-1}(q) \text{ et } b_{n-j}(3q) = b_{n-j-1}(q) \text{ pour } j=0,1,\dots,n-2$$

et

$$a_1(3q) = b_1(3q) = q .$$

D'où

$$\begin{aligned} t_{3q,n} &= \xi^n(3q + q(x-3) + c_1(q)x^2 + c_2(q)x^3 + \dots + c_{n-1}(q)x^n) \\ &= \xi^{n-1}(q + c_1(q)x + c_2(q)x^2 + \dots + c_{n-1}(q)x^{n-1}) \\ &= t_{q,n-1} \end{aligned}$$

pour tout $n \geq n(3q)$. On a donc $3q + P_{3q}(x) = x(q + P_q(x))$, d'où

$$(3q + P_{3q}(x))^{\alpha/3q} = (q + P_q(x))^{\alpha/q} .$$

D'autre part, posons

$$k = 3(q-1) + 2 ,$$

que l'on écrit également sous la forme

$$k = \epsilon_{n-1} 3^{n-1} + \epsilon_{n-2} 3^{n-2} + \dots + \epsilon_{n-r} 3^{n-r} + 2 \cdot 3^{n-r-1} + 2 \cdot 3^{n-r-2} + \dots + 2 ,$$

pour un certain r vérifiant $0 \leq r \leq n-1$, avec $\epsilon_{n-r} = 0$ ou 1 . Alors,

$$k + 1 = 3q = \epsilon_{n-1} 3^{n-1} + \epsilon_{n-2} 3^{n-2} + \dots + \epsilon_{n-r+1} 3^{n-r+1} + \epsilon'_{n-r} 3^{n-r} ,$$

où $\epsilon'_{n-r} = 1$ ou 2 , et l'on a

$$\begin{aligned} a_{n-j}(k) &= a_{n-j}(k+1) \text{ pour } j = 0, 1, \dots, n-1 \\ b_{n-j}(k) &= b_{n-j}(k+1) \text{ pour } j = 0, 1, \dots, n-2 \\ 1 + b_1(k) &= b_1(k+1) . \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $n = n(k)$, on a

$$\begin{aligned} t_{k+1,n} &= (k+1)\xi^n + (a_1(k)\delta + b_1(k)\gamma)\xi^{n-1} + \dots + a_n(k)\delta + b_n(k)\gamma + \gamma\xi^{n-1} \\ &= \xi^n(k + 1 + P_k(x) + \gamma x) \\ &= \xi^n(k + P_k(x) + x \delta x - 2) . \quad (\text{car } \gamma = 1 - 3\xi - \delta) \end{aligned}$$

Puisque $k + 1 = 3q$, on a par hypothèse de récurrence

$$(k+1+P_{k+1}(x))^\alpha / (k+1) = (q+P_q(x))^\alpha / q \geq \min((2+\delta x)^\alpha / 2, (x+2+\delta x^2+\delta x)^\alpha / 5) .$$

Posons

$$A_2(x, \delta) = 2 + \delta x \quad \text{et} \quad A_5(x, \delta) = x + 2 + \delta x^2 + \delta x .$$

Pour $j = 2$ ou 5 ,

$$(k + P_k(k))^\alpha / k \geq A_j(x, \delta)^\alpha / j$$

si et seulement si

$$(8) \quad (k + P_k(x))x^{\log j / \log 3} \geq A_j(x, \delta)x^{\log k / \log 3} .$$

Puisque

$$k + 1 + P_{k+1}(x) = k + P_k(x) + x - \delta x^2,$$

l'inégalité (8) s'écrit pour $j = 2$ ou 5 ,

$$(k + 1 + P_{k+1}(x)) - (x - \delta x^2) \geq A_j(x, \delta) x^{\log(k/j)/\log 3}.$$

Mais puisque, pour $j = 2$ et 5 ,

$$(k + 1 + P_{k+1}(x)) \geq A_j(x, \delta) x^{\log((k+1)/j)/\log 3},$$

il suffit, pour vérifier (8), de démontrer l'inégalité

$$A_j(x, \delta) x^{\log((k+1)/j)/\log 3} - (x - \delta x^2) \geq A_j(x, \delta) x^{\log(k/j)/\log 3},$$

c'est à dire,

$$(9) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} \geq x^{\log k/\log 3} + (x - \delta x^2) x^{\log j/\log 3} / A_j(x, \delta).$$

Puisque les expressions $(x - \delta x^2) / A_j(x, \delta)$ ($j = 2$ et 5) sont

décroissantes dans la variable δ , il suffit de vérifier (9) pour

$\delta = \gamma\xi = (x-3)/(x^2+x)$. Il nous reste donc à démontrer les deux inégalités suivantes:

$$(10) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} \geq x^{\log k/\log 3} + (x-1)^2 x^{\log 2/\log 3} / (3x-1), \quad (x > 3)$$

$$(11) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} \geq x^{\log k/\log 3} + (x-1)^2 x^{\log 5/\log 3} / (2x-1)(x+1), \quad (x > 3)$$

Vu que l'expression $x^{\log(k+1)/\log 3} - x^{\log k/\log 3}$ est croissante avec k ,

il est suffisant de vérifier (10) et (11) pour $k = 11$. Ces deux

inégalités s'écrivent alors

$$(12) \quad x^{\log(12/11)/\log 3} \geq 1 + (x-1)^2 x^{\log(2/11)/\log 3} / (3x-1), \quad (x > 3)$$

$$(13) \quad x^{\log(12/11)/\log 3} \geq 1 + (x-1)^2 x^{\log(5/11)/\log 3} / (2x-1)(x+1), \quad (x > 3).$$

Dans les deux cas, l'égalité a lieu pour $x = 3$. Posons

$$g_1(x) = x^{\log(12/11)/\log 3} - (x-1)^2 x^{\log(2/11)/\log 3} / (3x-1)$$

et

$$g_2(x) = x^{\log(12/11)/\log 3} - (x-1)^2 x^{\log(5/11)/\log 3} / (2x-1)(x+1) .$$

On a $g_1'(x) > 0$ si et seulement si

$$(14) \quad \frac{\log(12/11)}{\log 3} > \frac{(x-1)x^{-\log 2/\log 3}}{(3x-1)} \left(\frac{3x+1}{3x-1} + \frac{(x-1)\log(2/11)}{x\log 3} \right) .$$

De même, $g_2'(x) > 0$ si et seulement si

$$(15) \quad \frac{\log(12/11)}{\log 3} > \frac{(x-1)x^{1-\log(12/5)/\log 3}}{(2x^2+x-1)} \left(\frac{5x-1}{2x^2+x-1} + \frac{(x-1)\log(5/11)}{x\log 3} \right) .$$

Les membres droits de (14) et (15) respectivement sont décroissants en x et deviennent négatifs lorsque x est suffisamment grand. De plus, un calcul numérique montre que pour $x = 3$, (14) et (15) sont satisfaites. Par conséquent, (12) et (13) sont vérifiées.

Posons maintenant $k = 3(q-1) + 1$. Nous avons démontré que

$$(16) \quad (k+1 + P_{k+1}(x))^\alpha / (k+1) \geq A_j(x, \delta)^\alpha / j, \quad (\text{pour } j = 2 \text{ et } 5) .$$

On peut écrire k sous la forme

$$k = 3(q-1)+1 = \epsilon_{n-1}3^{n-1} + \epsilon_{n-2}3^{n-2} + \dots + \epsilon_1 3+1 \quad (0 \leq \epsilon_j \leq 2)$$

d'où

$$k+1 = 3(q-1)+2 = \epsilon_{n-1}3^{n-1} + \epsilon_{n-2}3^{n-2} + \dots + \epsilon_1 3+2 \quad (0 \leq \epsilon_j \leq 2) .$$

Par conséquent,

$$a_{n-j}(k+1) = a_{n-j}(k), \quad j=0,1,\dots,n-2$$

$$a_1(k+1) = 1+a_1(k)$$

$$b_{n-j}(k+1) = b_{n-j}(k), \quad j=0,1,\dots,n-1$$

d'où

$$\begin{aligned} t_{k+1,n} &= (k+1)\xi^n + (a_1(k)\delta + b_1(k)\gamma)\xi^{n-1} + \dots + a_n(k)\delta + b_n(k)\gamma + \delta\xi^{n-1} \\ &= \xi^n(k+1+P_k(x)+\delta x) \end{aligned}$$

pour $n = n(k)$. On a donc

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + \delta x .$$

L'inégalité (16) s'écrit également sous la forme

$$(17) \quad (k+1+P_k(x)+\delta x)x^{\log j/\log 3} \geq A_j(x,\delta)x^{\log(k+1)/\log 3} .$$

On a donc

$$(18) \quad (k+P_k(x))x^{\log j/\log 3} \geq A_j(x,\delta)x^{\log(k+1)/\log 3} - (1+\delta x)x^{\log j/\log 3} .$$

Pour montrer que

$$(19) \quad (k+P_k(x))x^{\log j/\log 3} \geq A_j(x,\delta)x^{\log k/\log 3} ,$$

il suffit de vérifier que

$$A_j(x,\delta)x^{\log(k+1)/\log 3} - (1+\delta x)x^{\log j/\log 3} \geq A_j(x,\delta)x^{\log k/\log 3} ,$$

c'est à dire,

$$(20) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} \geq x^{\log k/\log 3} + (1+\delta x)x^{\log j/\log 3}/A_j(x,\delta), \quad (j=2 \text{ et } 5) .$$

Puisque les expressions $(1+\delta x)/A_j(x,\delta)$ ($j = 2$ et 5) sont croissantes dans la variable δ , il suffit de vérifier (20) pour

$\delta = \xi^{1-\log 2/\log 3} - 2\xi$. On a déjà démontré (p. 33) que l'inégalité

$$(5 + P_5(x))^{\alpha/5} \geq (2 + \delta x)^{\alpha/2} ,$$

qui équivaut à l'inégalité

$$A_5(x,\delta)x^{-\log 5/\log 3} \geq A_2(x,\delta)x^{-\log 2/\log 3} ,$$

est satisfaite lorsque $(2+\delta x)^\alpha \geq 1$, c'est à dire lorsque

$\delta \geq \xi^{1-\log 2/\log 3} - 2\xi$. Il nous reste donc à vérifier (20) seulement pour $j = 2$ et $\delta = (1-3\xi)/2$ (la valeur maximale de δ). Cette inégalité devient alors

$$(21) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} \geq x^{\log k/\log 3} + (x-1)x^{\log 2/\log 3/(x+1)}.$$

L'expression $x^{\log(k+1)/\log 3} - x^{\log k/\log 3}$ étant croissante avec k , on n'a qu'à vérifier (21) pour $k = 10$, ce qui s'écrit

$$(22) \quad x^{\log(11/10)/\log 3} \geq 1 + (x-1)x^{\log(2/10)/\log 3/(x+1)},$$

l'égalité ayant lieu pour $x = 3$. Le membre gauche est croissant en x sur l'intervalle $[3, \infty[$ et celui de droite est décroissant sur $[3, \infty[$.

L'inégalité (22) est par conséquent vérifiée. On a donc, pour tout $k \geq 10$,

$$(k + P_k(x))^\alpha/k \geq A_j(x, \delta)^\alpha/j, \quad (j = 2 \text{ et } 5)$$

ce qui complète l'étape de récurrence et termine la démonstration.

2.3 Calcul de la mesure de Hausdorff des parfaits homogènes au sens large de type $(3, \xi)$ dans le cas général, (2^{ième} partie)

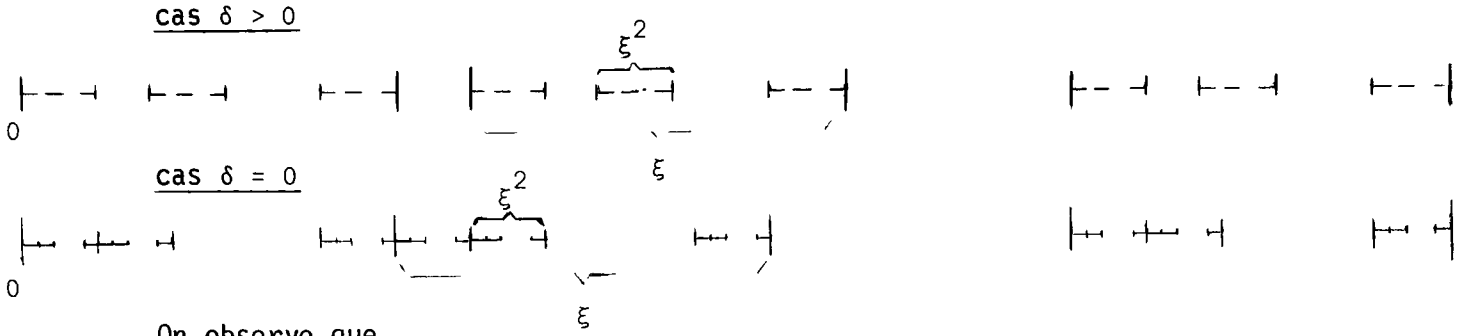
Nous démontrons une formule plus générale qui donne la mesure de Hausdorff d'un parfait homogène au sens large E de type $(3, \xi)$, quelque soit $\delta \in [0, (1-3\xi)/2]$. On conserve les notations de la section 2.2.

LEMME 2.3.1 Si $\delta = 0$ (et par conséquent $\gamma = 1-3\xi$), on a (en posant $x = \xi^{-1}$)

$$\min_{1 \leq k \leq 27} 3^{n(k)+1} t_{k, n(k)+1}^\alpha / k = \min \left(3^{\alpha-1}, \frac{(2x+2)^\alpha}{8}, \frac{(x^2+2x+2)^\alpha}{17}, \frac{(2x^2+x+2)^\alpha}{23} \right).$$

Démonstration: On doit considérer les 4 premières étapes de dissection.

Le diagramme suivant représente la 3^{ième} étape:



On observe que

$$t_{1,2} = \xi^2$$

$$t_{2,2} = 2\xi^2$$

$$t_{3,2} = 3\xi^2$$

$$t_{4,3} = 4\xi^3 + \gamma\xi^2 = \xi^3(4 + \gamma x)$$

$$t_{5,3} = 5\xi^3 + \gamma\xi^2 = \xi^3(5 + \gamma x)$$

$$t_{6,3} = 6\xi^3 + \gamma\xi^2 = \xi^3(6 + \gamma x)$$

$$t_{7,3} = 7\xi^3 + 2\gamma\xi^2 = \xi^3(7 + 2\gamma x)$$

$$t_{8,3} = 8\xi^3 + 2\gamma\xi^2 = \xi^3(8 + 2\gamma x)$$

$$t_{9,3} = 9\xi^3 + 3\gamma\xi^2 = \xi^3(9 + 3\gamma x)$$

$$t_{10,4} = 10\xi^4 + 3\gamma\xi^3 + \gamma\xi^2 = \xi^4(10 + 3\gamma x + \gamma x^2)$$

$$t_{11,4} = 11\xi^4 + 3\gamma\xi^3 + \gamma\xi^2 = \xi^4(11 + 3\gamma x + \gamma x^2)$$

$$t_{12,4} = 12\xi^4 + 3\gamma\xi^3 + \gamma\xi^2 = \xi^4(12 + 3\gamma x + \gamma x^2)$$

$$t_{13,4} = 13\xi^4 + 4\gamma\xi^3 + \gamma\xi^2 = \xi^4(13 + 4\gamma x + \gamma x^2)$$

$$t_{14,4} = 14\xi^4 + 4\gamma\xi^3 + \gamma\xi^2 = \xi^4(14 + 4\gamma x + \gamma x^2)$$

$$t_{15,4} = 15\xi^4 + 4\gamma\xi^3 + \gamma\xi^2 = \xi^4(15 + 4\gamma x + \gamma x^2)$$

$$t_{16,4} = 16\xi^4 + 5\gamma\xi^3 + \gamma\xi^2 = \xi^4(16 + 5\gamma x + \gamma x^2)$$

$$\begin{aligned}
t_{17,4} &= 17\xi^4 + 5\gamma\xi^3 + \gamma\xi^2 = \xi^4(17 + 5\gamma x + \gamma x^2) \\
t_{18,4} &= 18\xi^4 + 6\gamma\xi^3 + \gamma\xi^2 = \xi^4(18 + 6\gamma x + \gamma x^2) \\
t_{19,4} &= 19\xi^4 + 6\gamma\xi^3 + 2\gamma\xi^2 = \xi^4(19 + 6\gamma x + 2\gamma x^2) \\
t_{20,4} &= 20\xi^4 + 6\gamma\xi^3 + 2\gamma\xi^2 = \xi^4(20 + 6\gamma x + 2\gamma x^2) \\
t_{21,4} &= 21\xi^4 + 6\gamma\xi^3 + 2\gamma\xi^2 = \xi^4(21 + 6\gamma x + 2\gamma x^2) \\
t_{22,4} &= 22\xi^4 + 7\gamma\xi^3 + 2\gamma\xi^2 = \xi^4(22 + 7\gamma x + 2\gamma x^2) \\
t_{23,4} &= 23\xi^4 + 7\gamma\xi^3 + 2\gamma\xi^2 = \xi^4(23 + 7\gamma x + 2\gamma x^2) \\
t_{24,4} &= 24\xi^4 + 8\gamma\xi^3 + 2\gamma\xi^2 = \xi^4(24 + 8\gamma x + 2\gamma x^2) \\
t_{25,4} &= 25\xi^4 + 8\gamma\xi^3 + 3\gamma\xi^2 = \xi^4(25 + 8\gamma x + 3\gamma x^2) \\
t_{26,4} &= 26\xi^4 + 8\gamma\xi^3 + 3\gamma\xi^2 = \xi^4(26 + 8\gamma x + 3\gamma x^2) \\
t_{27,4} &= 27\xi^4 + 9\gamma\xi^3 + 3\gamma\xi^2 = \xi^4(27 + 9\gamma x + 3\gamma x^2) .
\end{aligned}$$

Posons

$$A_k(x, 0) = \xi^{-n(k)-1} t_{k, n(k)+1} . \quad (k \geq 1)$$

Alors

$$3^{n(k)+1} t_{k, n(k)+1}^\alpha / k = A_k(x, 0)^\alpha / k . \quad (k \geq 1)$$

Pour toute constante $K \geq 0$, la fonction

$$\psi(t) = (t + K)^\alpha / t$$

est décroissante au sens strict sur l'intervalle $]0, \infty[$. Par conséquent,

on a

$$A_1(x, 0)^\alpha > A_2(x, 0)^\alpha / 2 > A_3(x, 0)^\alpha / 3 ,$$

$$A_4(x, 0)^\alpha / 4 > A_5(x, 0)^\alpha / 5 > A_6(x, 0)^\alpha / 6 ,$$

$$A_7(x, 0)^\alpha / 7 > A_8(x, 0)^\alpha / 8 ,$$

$$A_{10}(x,0)^{\alpha/10} > A_{11}(x,0)^{\alpha/11} > A_{12}(x,0)^{\alpha/12} ,$$

$$A_{13}(x,0)^{\alpha/13} > A_{14}(x,0)^{\alpha/14} > A_{15}(x,0)^{\alpha/15} ,$$

$$A_{16}(x,0)^{\alpha/16} > A_{17}(x,0)^{\alpha/17} ,$$

$$A_{19}(x,0)^{\alpha/19} > A_{20}(x,0)^{\alpha/20} > A_{21}(x,0)^{\alpha/21} ,$$

$$A_{22}(x,0)^{\alpha/22} > A_{23}(x,0)^{\alpha/23} ,$$

$$A_{25}(x,0)^{\alpha/25} > A_{26}(x,0)^{\alpha/26} .$$

D'autre part, puisque $6\xi^3 = 18\xi^4 + 6\gamma\xi^3$, on a

$$t_{18,4} = t_{6,3} .$$

De même,

$$t_{24,4} = t_{8,3} \quad \text{et} \quad t_{27,4} = t_{9,3} = t_{3,2} .$$

Puisque $\gamma = 1 - 3x^{-1}$, on a $3 + \gamma x = x$. Par conséquent,

$$A_{15}(x,0) = A_{12}(x,0) + 3 + \gamma x = A_{12}(x,0) + x .$$

D'où

$$\begin{aligned} A_{15}(x,0)^{\alpha/15} &= (A_{12}(x,0)+x)^{\alpha/15} \\ &= (x^{-1}A_{12}(x,0)+1)^{\alpha/5} \quad (\text{car } x^{\alpha} = 3) \\ &< (x^{-1}A_{12}(x,0))^{\alpha/4} \\ &= A_{12}(x,0)^{\alpha/12} . \end{aligned}$$

Montrons que $A_{15}(x,0)^{\alpha/15} > A_8(x,0)^{\alpha/8}$. On a

$$A_{15}(x,0) = 15+4\gamma x+\gamma x^2 = x^2+x+3 \quad \text{et} \quad A_8(x,0) = 8+2\gamma x = 2x+2 .$$

Alors, puisque $\alpha = \log 3/\log x$, on a $A_{15}(x,0)^{\alpha/15} > A_8(x,0)^{\alpha/8}$ si et

seulement si

$$(x^2+x+3)x^{\log 8/\log 3} > (2x+2)x^{\log 15/\log 3},$$

c'est à dire

$$(1) \quad (x^2+x+3)x^{\log(8/5)/\log 3} - (2x^2+2x) > 0.$$

Soit $g_1(x)$ le membre gauche de (1). On a $g_1(3) = 0$,

$$g_1'(x) = (2x+1)x^{\log(8/5)/\log 3} + (x^2+x+3)\frac{\log(8/5)x^{\log(8/5)/\log 3}}{x\log 3} - 4x - 2,$$

et $g_1'(3) = 56/5 + \frac{8\log(8/5)}{\log 3} - 14 > 0$. De plus,

$$g_1''(x) > 2x^{\log(8/5)/\log 3} + (2x+1)\frac{\log(8/5)x^{\log(8/5)/\log 3}}{x\log 3} - 4 > 0 \quad (x \geq 3).$$

Par conséquent, $g_1(x) > 0$ sur $]3, \infty[$, et (1) est vérifiée.

Montrons que $A_6(x,0)^{\alpha/6} > A_8(x,0)^{\alpha/8}$. On a $A_6(x,0) = x+3$ et

$A_8(x,0) = 2x+2$. Il faut donc vérifier l'inégalité

$$(x+3)x^{\log 8/\log 3} > (2x+2)x^{\log 6/\log 3},$$

c'est à dire

$$(2) \quad (x+3)x^{(\log 4/\log 3)-1} - (2x+2) > 0.$$

Soit $g_2(x)$ le membre gauche de (2). On a $g_2(3) = 0$,

$$g_2'(x) = x^{(\log 4/\log 3)-1} + (x+3)((\log 4/\log 3)-1)x^{(\log 4/\log 3)-2} - 2,$$

et $g_2'(3) = 4/3 + \frac{24(\log 4 - 1)}{9 \log 3} - 2 > 0$. De plus,

$$g_2''(x) = (\frac{\log 4}{\log 3} - 1)x^{(\log 4/\log 3)-3}(2x + (x+3)(\frac{\log 4}{\log 3} - 2)) > 0 \quad (x \geq 3).$$

Par conséquent, $g_2(x) > 0$ sur $]3, \infty[$, et (2) est vérifiée.

Montrons que $A_{21}(x,0)^{\alpha}/21 > A_8(x,0)^{\alpha}/8$. On a $A_{21}(x,0) = 2x^2+3$. Il

faut donc vérifier l'inégalité

$$(2x^2+3)x^{\log 8/\log 3} > (2x+2)x^{\log 21/\log 3},$$

c'est à dire

$$(3) \quad (2x^2+3)x^{\log(8/7)/\log 3} - (2x^2+2x) > 0.$$

Soit $g_3(x)$ le membre gauche de (3). On a $g_3(3) = 0$,

$$g_3'(x) = 4x^{1+\log(8/7)/\log 3} + (2x^2+3)\frac{\log(8/7)}{\log 3}x^{(\log(8/7)/\log 3)-1} - 4x - 2,$$

et $g_3'(3) = 96/7 + 8\log(8/7)/\log 3 - 14 > 0$. De plus,

$$g_3''(x) > 4(1+\log(8/7)/\log 3)x^{\log(8/7)/\log 3} - 4 > 0 \quad (x \geq 3).$$

par conséquent, $g_3(x) > 0$ sur $]3, \infty[$, et (3) est vérifiée.

Montrons que $A_{26}(x,0)^{\alpha}/26 > \min(A_8(x,0)^{\alpha}/8, A_3(x,0)^{\alpha}/3)$.

On a $A_{26}(x,0) = A_{27}(x,0) - (\gamma x+1) = 3x^2 - (x-2)$, d'où

$$A_{26}(x,0)^{\alpha}/26 = (3x^2-(x-2))^{\alpha}/3^{3-1}.$$

Pour $x > 3$ fixé, la fonction

$$\phi(s) = (3x^s-(x-2))^{\alpha}/3^{s+1-1},$$

définie sur $[1, \infty[$ est croissante si $(x/3)^s < x-2$ et décroissante si

$(x/3)^s > x-2$. En effet, $\phi'(s) > 0$ si et seulement si

$$\alpha(3x^s-(x-2))^{\alpha-1}3x^s \log x > (3x^s-(x-2))^{\alpha}3^{s+1} \log 3,$$

c'est à dire

$$x^s(3^{s+1}-1) > 3^s(3x^s-(x-2)), \quad (\text{car } \alpha = \log 3/\log x)$$

ou encore

$$x-2 > (x/3)^s.$$

Puisque $\lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s) = 3^{\alpha-1}$ et que $\phi(1) = (2x+2)^\alpha/8$, on a

$$\begin{aligned} A_{26}(x,0)^\alpha/26 &= \phi(2) > \min(3^{\alpha-1}, (2x+2)^\alpha/8) \\ &= \min(A_3(x,0)^\alpha/3, A_8(x,0)^\alpha/8) \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du lemme 2.3.1 (compte tenu de la notation

$$A_{17}(x,0) = x^2+2x+2 \text{ et } A_{23}(x,0) = 2x^2+x+2).$$

LEMME 2.3.2 Pour $j = 3, 8$ et 23 et tout $k \geq 35$, ainsi que pour $j = 17$ et tout $k \geq 36$, on a

$$(1) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} > x^{\log k/\log 3} + \frac{(x-2)x^{\log j/\log 3}}{A_j(x,0)}, \quad (x > 3).$$

Démonstration: Posons $j = 23$ dans (1) qui devient alors

$$(2) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} > x^{\log k/\log 3} + \frac{(x-2)x^{\log 23/\log 3}}{(2x^2+x+2)}, \quad (x > 3).$$

Montrons que (2) est satisfaite pour tout $k \geq 35$. Vu que

$x^{\log(k+1)/\log 3} - x^{\log k/\log 3}$ est croissant avec k (pour x fixé), il suffit de prendre $k = 35$. L'inégalité (2) (avec $k = 35$) s'écrit également sous la forme

$$(3) \quad x^{\log(36/35)/\log 3} - \left(1 + \frac{(x-2)x^{\log(23/35)/\log 3}}{(2x^2+x+2)}\right) > 0, \quad (x > 3).$$

Soit $g_1(x)$ le membre gauche de (3). On a $g_1(3) = 0$,

$$g_1'(x) = \frac{\log(36/35)x}{x \log 3} - \frac{\log(23/35)}{(2x^2+x+2)} \left(\frac{-2x^2+8x+4}{2x^2+x+2} + \frac{(x-2)}{x} \frac{\log(23/35)}{\log 3} \right),$$

$$\text{et } g_1'(3) = \frac{36}{35} \cdot \frac{\log(36/35)}{3 \log 3} - \frac{1}{35} \left(\frac{10}{23} + \frac{\log(23/35)}{3 \log 3} \right) > 0. \text{ D'autre part, on}$$

remarque que $xg_1'(x) > 0$ sur $[3, \infty[$ car $\frac{x^{1+\log(23/35)/\log 3}}{2x^2+x+2}$ est décroissant,

et $(\frac{-2x^2+8x+4}{2x^2+x+2} + \frac{(x-2)\log(23/35)}{x \log 3})$ est décroissant, puis négatif pour x

assez grand. Par conséquent, $g_1(x) > 0$ sur $]3, \infty[$ et (2) est vérifiée.

Posons $j = 17$ dans (1), qui devient alors

$$(4) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} > x^{\log k/\log 3} + \frac{(x-2)x^{\log 17/\log 3}}{(x^2+2x+2)}, \quad (x > 3).$$

Montrons que (4) est satisfaite pour tout $k \geq 36$. Pour ce faire, il suffit de prendre $k = 36$. L'inégalité (4) s'écrit alors sous la forme

$$(5) \quad x^{\log(37/36)/\log 3} - (1 + \frac{(x-2)x^{\log(17/36)/\log 3}}{(x^2+2x+2)}) > 0, \quad (x > 3).$$

Soit $g_2(x)$ le membre gauche de (5). On a $g_2(3) = 0$,

$$g_2'(x) = \frac{\log(37/36)x}{x \log 3} - \frac{\frac{\log(17/36)}{\log 3}}{(x^2+2x+2)} (\frac{-x^2+4x+6}{x^2+2x+2} + \frac{(x-2)\log(17/36)}{x \log 3}),$$

et $g_2'(3) = \frac{37}{36} \cdot \frac{\log(37/36)}{3 \log 3} - \frac{1}{36} (\frac{9}{17} + \frac{\log(17/36)}{3 \log 3}) > 0$. D'autre part, on

remarque que $xg_2'(x) > 0$ sur $[3, \infty[$ car $\frac{x^{1+\log(17/36)/\log 3}}{x^2+2x+2}$ est décroissant,

et $(\frac{-x^2+4x+6}{x^2+2x+2} + \frac{(x-2)\log(17/36)}{x \log 3})$ est décroissant, puis négatif pour x

assez grand. Par conséquent, $g_2(x) > 0$ sur $]3, \infty[$ et (4) est vérifiée.

Posons $j = 8$ dans (1) qui devient alors

$$(6) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} > x^{\log k/\log 3} + \frac{(x-2)x^{\log 8/\log 3}}{2x+2}, \quad (x > 3).$$

Montrons que (6) est satisfaite pour tout $k \geq 35$. Il est suffisant de poser $k = 35$. L'inégalité (6) s'écrit alors

$$(7) \quad x^{\log(36/35)/\log 3} - \left(1 + \frac{(x-2)x}{(2x+2)} \log(8/35)/\log 3\right) > 0, \quad (x > 3).$$

Soit $g_3(x)$ le membre gauche de (7). On a $g_3(3) = 0$,

$$g'_3(x) = \frac{\log(36/35)x}{x \log 3} \frac{\log(36/35)}{\log 3} - \frac{x}{(2x+2)} \frac{\log(8/35)}{\log 3} \left(\frac{3}{x+1} + \frac{(x-2)}{x} \frac{\log(8/35)}{\log 3}\right),$$

$$\text{et } g'_3(3) = \frac{36}{35} \cdot \frac{\log(36/35)}{3 \log 3} - \frac{1}{35} \left(\frac{3}{4} + \frac{\log(8/35)}{3 \log 3}\right) > 0. \text{ D'autre part, on note}$$

que $xg'_3(x) > 0$ sur $[3, \infty[$ car $\frac{x^{1+\log(8/35)/\log 3}}{2x+2}$ est décroissant, et

$\left(\frac{3}{x+1} + \frac{(x-2)}{x} \frac{\log(8/35)}{\log 3}\right)$ est décroissant, puis négatif pour x assez grand.

Par conséquent, $g_3(x) > 0$ sur $]3, \infty[$ et (6) est vérifiée.

Finalement, posons $j = 3$ dans (1) qui devient

$$(8) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} > x^{\log k/\log 3} + (x-2)x/3, \quad (x > 3).$$

Montrons que (8) est satisfaite pour tout $k \geq 35$. Il est suffisant de poser $k = 35$. L'inégalité (8) s'écrit alors

$$(9) \quad x^{\log(36/35)/\log 3} - \left(1 + \frac{1}{3}(x-2)x^{\log(3/35)/\log 3}\right) > 0, \quad (x > 3).$$

Soit $g_4(x)$ le membre gauche de (9). On a $g_4(3) = 0$,

$$g'_4(x) = \frac{\log(36/35)x}{x \log 3} \frac{\log(36/35)}{\log 3} - \frac{x}{3} \frac{\log(3/35)}{\log 3} \left(1 + \frac{(x-2)}{x} \frac{\log(3/35)}{\log 3}\right),$$

$$\text{et } g'_4(3) = \frac{36}{35} \cdot \frac{\log(36/35)}{3 \log 3} - \frac{1}{35} \left(1 + \frac{\log(3/35)}{3 \log 3}\right) > 0. \text{ Par ailleurs, on a}$$

$xg'_4(x) > 0$ sur $[3, \infty[$ car $x^{1+\log(3/35)/\log 3}$ est décroissant, et

$\left(1 + \frac{(x-2)}{x} \frac{\log(3/35)}{\log 3}\right)$ est décroissant, puis négatif pour x suffisamment

grand. Par conséquent, $g_4(x) > 0$ sur $]3, \infty[$ et (8) est vérifiée, ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 2.3.3 Pour $j = 3, 8, 17$ et 23 et tout $k \geq 10$, on a

$$(1) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} > x^{\log k/\log 3} + \frac{(x-1)x^{\log j/\log 3}}{2A_j(x,0)}, \quad (x > 3).$$

Démonstration: Puisque $x^{\log(k+1)/\log 3} - x^{\log k/\log 3}$ est croissant avec k , il suffit de prendre $k = 10$. L'inégalité (1) s'écrit également (pour $k = 10$) sous la forme

$$(2) \quad x^{\log(11/10)/\log 3} \left(1 + \frac{(x-1)x^{\log(j/10)/\log 3}}{2A_j(x,0)} \right) > 0, \quad (x > 3).$$

Soit $g_j(x)$ le membre gauche de (2). On a $g_j(3) = 0$,

$$g'_j(x) = \frac{\log(11/10)x}{x \log 3} - \frac{\log(j/10)}{2A_j(x,0)} \left(\frac{A_j(x,0) - (x-1)A'_j(x,0)}{A_j(x,0)} + \frac{x-1}{x} \cdot \frac{\log(j/10)}{\log 3} \right),$$

$$\text{et } g'_j(3) = \frac{11}{10} \cdot \frac{\log(11/10)}{3 \log 3} - \frac{1}{20} \left(1 - 2A'_j(3,0)/j + 2 \log(j/10)/3 \log 3 \right).$$

Pour $j = 23, 17, 8$ et 3 , les valeurs respectives de $1 - 2A'_j(3,0)/j$ sont $-3/23$, $1/17$, $1/2$ et 1 . Dans chacun de ces cas, on vérifie par un calcul numérique que $g'_j(3) > 0$. De plus, $g'_{23}(x) > 0$ sur $[3, \infty[$ car

$\frac{x^{\log(23/10)/\log 3}}{A_{23}(x,0)}$ est décroissant (puisque $A_{23}(x,0) = 2x^2 + x + 2$), et

$$\frac{x(A_{23}(x,0) - (x-1)A'_{23}(x,0))}{A_{23}(x,0)} + (x-1) \frac{\log(23/10)}{\log 3} = \frac{x(-2x^2 + 4x + 3)}{2x^2 + x + 2} + (x-1) \frac{\log(23/10)}{\log 3},$$

ce qui est décroissant en x , puis négatif pour x suffisamment grand.

D'autre part, $xg'_{17}(x) > 0$ sur $[3, \infty[$ car $\frac{x \log(17/10)/\log 3}{A_{17}(x,0)}$ est décroissant

(puisque $A_{17}(x,0) = x^2 + 2x + 2$), et

$$\frac{x(A_{17}(x,0) - (x-1)A'_{17}(x,0))}{A_{17}(x,0)} + (x-1)\frac{\log(17/10)}{\log 3} = \frac{x(-x^2 + 2x + 4)}{(x^2 + 2x + 2)} + (x-1)\frac{\log(17/10)}{\log 3},$$

ce qui est décroissant en x , puis négatif pour x suffisamment grand.

On a également, $xg'_8(x) > 0$ sur $[3, \infty[$ car

$$\begin{aligned} \frac{x^{1+\log(8/10)/\log 3}}{2A_8(x,0)} \left(\frac{A_8(x,0) - (x-1)A'_8(x,0)}{A_8(x,0)} + \frac{(x-1)\log(8/10)}{x \log 3} \right) \\ = \frac{x^{1+\log(8/10)/\log 3}}{(2x+2)^2} \left(2 + \frac{(x^2-1)\log(8/10)}{x \log 3} \right), \end{aligned}$$

ce qui est décroissant en x , puis négatif pour x suffisamment grand.

De même, $xg'_3(x) > 0$ sur $[3, \infty[$ car

$$\begin{aligned} \frac{x^{1+\log(3/10)/\log 3}}{2A_3(x,0)} \left(\frac{A_3(x,0) - (x-1)A'_3(x,0)}{A_3(x,0)} + \frac{(x-1)\log(3/10)}{x \log 3} \right) \\ = \frac{x^{1+\log(3/10)/\log 3}}{6} \left(1 + \frac{(x-1)\log(3/10)}{x \log 3} \right), \end{aligned}$$

ce qui est décroissant en x , puis négatif pour x suffisamment grand.

On a donc

$$g_j(x) > 0 \quad (j = 3, 8, 17 \text{ et } 23, \text{ et } x > 3),$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 2.3.4 Pour $k \geq 29$, on a

$$(1) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} > x^{\log k/\log 3} + \frac{(x-2)x^{\log 11/\log 3}}{(x^2+2)}, \quad (x > 3).$$

Démonstration: L'expression $x^{\log(k+1)/\log 3} - x^{\log k/\log 3}$ étant croissante avec k (pour x fixé), il suffit de vérifier (1) avec $k = 29$. Cette inégalité devient alors

$$(2) \quad x^{\log(30/29)/\log 3} - \left(1 + \frac{(x-1)x}{(x^2+2)} \log(11/29)/\log 3\right) > 0.$$

Soit $g(x)$ le membre gauche de (2). On a $g(3) = 0$,

$$xg'(x) = \frac{\log(30/29)x}{\log 3} - \frac{\log(11/29)}{\log 3} + \frac{1}{(x^2+2)} \left(\frac{-x^2+4x+2}{x^2+2} + \frac{(x-2)\log(11/29)}{x \log 3} \right)$$

$$\text{et } 3g'(3) = \frac{30 \cdot \log(30/29)}{29 \log 3} - \frac{3}{29} \left(\frac{5}{11} + \frac{\log(11/29)}{3 \log 3} \right) > 0. \text{ De plus,}$$

$$xg'(x) > 0 \text{ sur } [3, \infty[\text{ car } \frac{x^{1+\log(11/29)/\log 3}}{(x^2+2)} \text{ est décroissant, et}$$

$$\left(\frac{-x^2+4x+2}{x^2+2} + \frac{(x-2)\log(11/29)}{x \log 3} \right) \text{ est décroissant, puis négatif pour } x$$

suffisamment grand.

Par conséquent, $g(x) > 0$ sur $]3, \infty[$, et (1) est vérifiée.

PROPOSITION 2.3.5 Pour tout parfait homogène au sens large E , de type $(3, \xi)$, de diamètre 1 construit sur l'intervalle fondamental $[0, 1]$, la mesure de Hausdorff de E (dans la dimension $\alpha = -\log 3 / \log \xi$) est donnée par la formule

$$H^\alpha(E) = \min_{1 \leq k \leq 27} 3^{n(k)+1} t_{k, n(k)+1}^\alpha / k.$$

Démonstration: D'après le corollaire 1.4.2 et le lemme 1.4.3, on a

$$H^\alpha(E) = \inf_{\substack{n \geq 1 \\ 1 \leq k \leq 3^n}} 3^n t_{k, n}^\alpha / k,$$

que l'on écrit aussi sous la forme

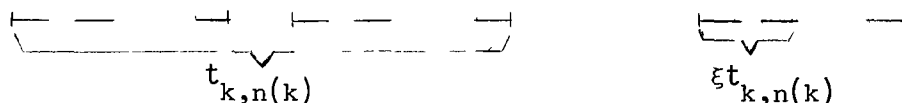
$$(1) \quad H^\alpha(E) = \inf_{k \geq 1} \inf_{n \geq n(k)} 3^n t_{k,n}^\alpha / k .$$

Montrons en premier lieu que pour tous entiers $k \geq 1$ et $\ell \geq 1$,

$$t_{k,n(k)+1} \leq \xi t_{k,n(k)} \quad \text{et} \quad t_{k,n(k)+1+\ell} = \xi^\ell t_{k,n(k)+1} .$$

On a $3^{n(k)-1} + 1 \leq k \leq 3^{n(k)}$. Pour chaque entier $n \geq 1$, notons par $J_{k,n}$ un intervalle de longueur $t_{k,n}$ contenant k intervalles blancs de la $n^{\text{ième}}$ étape.

Il y a, à la $(n(k)+1)^{\text{ième}}$ étape, au moins 3 intervalles de longueur $\xi t_{k,n(k)}$ (1 situé dans chaque intervalle blanc de la $1^{\text{ière}}$ étape) contenant k intervalles blancs de cette $(n(k)+1)^{\text{ième}}$ étape.



Par conséquent,

$$t_{k,n(k)+1} \leq \xi t_{k,n(k)} .$$

Par le même raisonnement

$$t_{k,n+1} \leq \xi t_{k,n} , \quad (n \geq n(k)) .$$

D'autre part, si $t_{k,n(k)+1} < \xi t_{k,n(k)}$, alors $J_{k,n(k)+1}$ contient

l'intervalle noir initial de longueur δ , et doit être contenu dans la réunion de cet intervalle noir avec les deux intervalles blancs initiaux (c'est à dire de la $1^{\text{ière}}$ étape) qui sont contigus à cet intervalle noir initial.



Ceci dit, $J_{k,n(k)+2}$ doit être situé, soit dans un intervalle blanc de la 2^{ième} étape, soit dans la réunion de l'intervalle noir de longueur $\delta\xi$ (de la 2^{ième} étape) avec les deux intervalles blancs de la 2^{ième} étape qui lui sont contigus. La première des deux possibilités doit être exclue car alors on aurait $t_{k,n(k)+2} = \xi^2 t_{k,n(k)} > \xi t_{k,n(k)+1}$. Par conséquent, $J_{k,n(k)+2}$ est l'image par une homothétie de rapport ξ de $J_{k,n(k)+1}$, d'où

$$t_{k,n(k)+2} = \xi t_{k,n(k)+1}.$$

Le même raisonnement montre que pour tout $\ell \geq 1$,

$$t_{k,n(k)+1+\ell} = \xi^\ell t_{k,n(k)+1}.$$

La formule (1) s'écrit alors plus simplement

$$(2) \quad H^\alpha(E) = \inf_{k \geq 1} 3^{n(k)+1} t_{k,n(k)+1}^\alpha / k.$$

Démontrons la proposition 2.3.5 par récurrence sur k . Nous pouvons faire l'hypothèse suivante:

Hypothèse de récurrence: Soit $n \geq 4$ un entier fixé. Pour tout entier q tel que $1 \leq q \leq 3^{n-1}$, on a

$$3^{n(q)+1} t_{q,n(q)+1}^\alpha / q \geq \min_{1 \leq k \leq 27} 3^{n(k)+1} t_{k,n(k)+1}^\alpha / k.$$

Pour passer à l'étape de récurrence, nous aurons besoin des quelques observations suivantes:

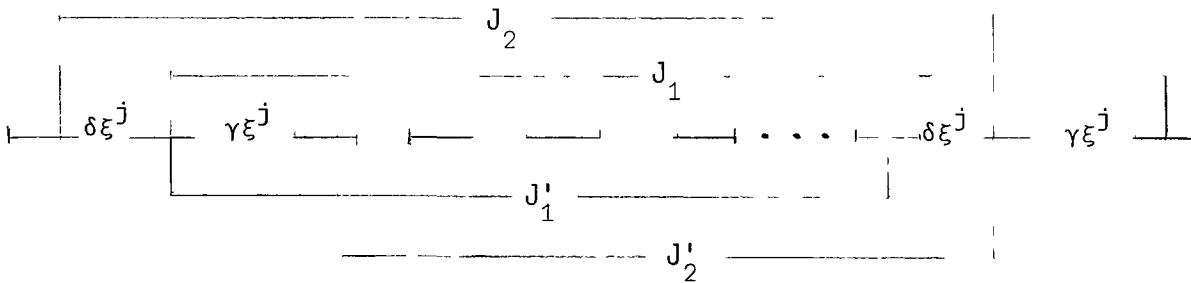
Remarque I: Les intervalles noirs de la n ^{ième} étape ont pour longueur des nombres de la forme $\delta\xi^j$ et $\gamma\xi^j$, où $j \geq 0$. Par conséquent,

$$t_{k,n(k)+1} = k\xi^{n(k)+1} + p_k(\xi, \delta, \gamma)$$

où $p_k(\xi, \delta, \gamma)$ est un polynôme (à coefficients entiers qui dépendent de δ) en ξ, δ et γ . Alors, en posant $x = \xi^{-1}$ et compte tenu de la relation $\gamma = 1-3\xi-\delta$, on a

$$\xi^{-n(k)-1} t_{k, n(k)+1} = A_k(x, \delta),$$

où $A_k(x, \delta)$ est un polynôme (à coefficients entiers qui dépendent de δ) en x et δ . En particulier, on remarque que pour chaque δ fixé, le coefficient de $\delta \xi^j$ dans $p_k(\xi, \delta, \gamma)$ est supérieur ou égal à celui de $\gamma \xi^j$. En effet, les intervalles noirs de longueur $\delta \xi^j$ et $\gamma \xi^j$ se trouvent dans des intervalles blancs de la $j^{\text{ième}}$ étape. Si les nombres respectifs d'intervalles noirs de longueur $\delta \xi^j$ et $\gamma \xi^j$ dans $J_{k, n(k)+1}$ ne sont pas identiques, alors $J_{k, n(k)+1}$ occupe les positions J_1, J'_1, J_2 ou J'_2 du diagramme suivant:



On observe que

$$|J_1| = |J_2| + (\gamma - \delta) \xi^j$$

$$|J'_1| = |J'_2| + (\gamma - \delta) \xi^j.$$

Par conséquent, seules les positions J_2 et J'_2 sont possibles pour $J_{k, n(k)+1}$ et l'on peut conclure que le coefficient de $\delta \xi^j$ sera supérieur ou égal à celui de $\gamma \xi^j$. Puisque $\delta + \gamma = 1-3\xi$, on a que pour tout $j \geq 0$ les

coefficients de $\delta \xi^j$ (après substitutions de tous les $\gamma \xi^j$ par des $(1-3\xi-\delta)\xi^j$) dans $p_k(\xi, \delta, \gamma)$ sont positifs. Donc les coefficients de δx^j dans $A_k(x, \delta)$ sont positifs ou nuls pour tout $j \geq 0$.

Soit $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ k intervalles blancs consécutifs de la $(n(k)+1)$ ^{ième} étape, dont les positions relatives sont fixées. Soit $I(\delta)$ l'enveloppe convexe de $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_k$. Si pour tout $j \geq 0$, le nombre d'intervalles noirs de longueur $\delta \xi^j$ situés dans $I(\delta)$ est au moins égal au nombre d'intervalles noirs de longueur $\gamma \xi^j$ situés dans $I(\delta)$, alors $|I(\delta)|$ est visiblement une fonction monotone croissante et continue de δ .

Par conséquent, $t_{k, n(k)+1}(\delta)$ étant le minimum d'une famille finie de telles fonctions de δ , on a que $t_{k, n(k)+1}(\delta)$ est également une fonction monotone croissante et continue de δ . Il en est ainsi de $A_k(x, \delta)$. (Plus précisément, on note que $|I(\delta)|$ est croissante au sens strict, sinon constante sur l'intervalle $[0, (1-3\xi)/2]$).

Remarque II: Montrons que si k est de la forme $k = 3q$, alors

$$t_{3k, n(k)+2} = t_{k, n(k)+1}.$$

En effet, l'enveloppe convexe I de la réunion de k intervalles blancs consécutifs de la $(n(k)+1)$ ^{ième} étape se trouve toujours dans l'une des 3 situations suivantes:

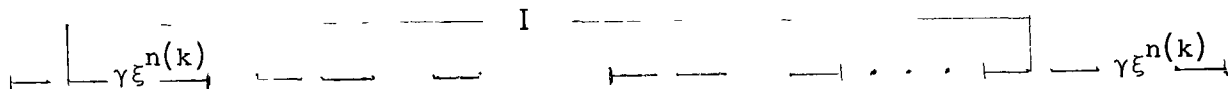
1°) Les extrémités de I sont des extrémités d'intervalles blancs de la $n(k)$ ^{ième} étape, c'est à dire de la $(n(q)+1)$ ^{ième} étape, et I est également l'enveloppe convexe de q intervalles blancs consécutifs de la $(n(q)+1)$ ^{ième} étape.



2°) I ne contient que $q-1$ intervalles blancs de la $(n(q)+1)$ ième étape, et est de la forme



3°) I contient les mêmes $q-1$ intervalles blancs de la $(n(q)+1)$ ième étape qu'en situation 2°) ci-dessus, mais, est de la forme



$J_{k,n(k)+1}$ est un des intervalles I se trouvant en situation 1°) ou 2°).

Alors, pour montrer que

$$J_{3k,n(k)+2} = J_{k,n(k)+1},$$

il faut vérifier qu'après une nouvelle dissection, un intervalle I de la situation 3°) ne donnera pas naissance par la substitution d'un $\gamma\xi^{n(k)+1}$ par un $\delta\xi^{n(k)}$ (dans l'éventualité où $\delta < \gamma\xi$) à un intervalle I' contenant $3k$ intervalles blancs de la $(n(k)+2)$ ième étape, et de longueur (celle de I') inférieure à celle du plus court des intervalles I de la situation 2°).

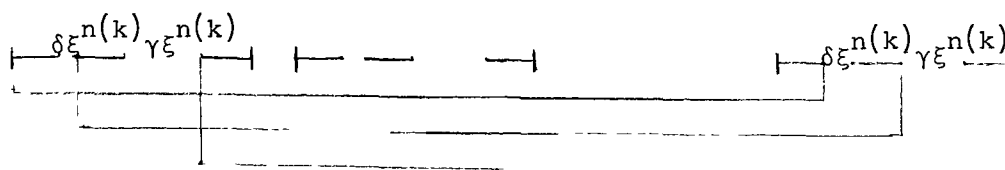
Mais ceci est immédiat, car

$$\gamma\xi^{n+1} \quad \delta\xi^n < \gamma\xi^n - \delta\xi^n$$

où $\gamma\xi^n - \delta\xi^n$ est la différence de longueur entre un intervalle I de la situation 2°) et l'intervalle I correspondant de la situation 3°).

Remarque III: Soit k un entier de la forme $k = 3q+1$, avec $q \geq 0$.

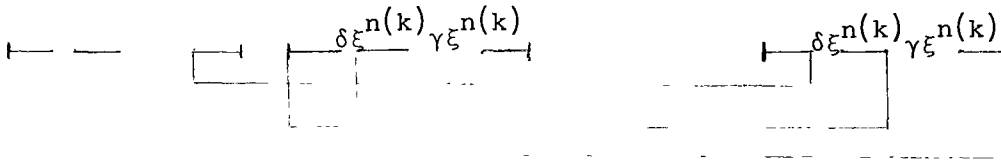
L'enveloppe convexe I_k d'une réunion de k intervalles blancs consécutifs de la $(n(k)+1)$ ième étape se trouve dans l'une des trois positions illustrées ci-dessous



Par conséquent,

$$t_{k+1, n(k)+1} = t_{k, n(k)+1} + \delta \xi^{n(k)} + \xi^{n(k)+1}.$$

Remarque IV: Soit k un entier de la forme $k = 3q+2$, avec $q \geq 0$. Toute enveloppe convexe I_k contient q intervalles blancs de la $n(k)$ ^{ième} étape et se trouve dans l'une des trois positions illustrées ci-dessous.



La position correspondant à $J_{k, n(k)+1}$ doit être la deuxième, pour que sa longueur soit minimale. Par conséquent,

$$t_{k+1, n(k)+1} \leq t_{k, n(k)+1} + \gamma \xi^{n(k)} + \xi^{n(k)+1},$$

ce qu'on reformule

$$t_{k+1, n(k)+1} = t_{k, n(k)+1} + \bar{\gamma} \xi^{n(k)} + \xi^{n(k)+1}$$

pour un certain $\bar{\gamma}$ (qui dépend de k) vérifiant $0 < \bar{\gamma} \leq \gamma$.

Remarque V: Soit k un entier de la forme $k = 3q$ avec $q \not\equiv 0 \pmod{3}$.

On a mentionné que $J_{k, n(k)+1}$ est un intervalle se trouvant en situation 1°) ou 2°) de la remarque II. Dans la première de ces deux éventualités, on a

$$t_{k, n(k)+1} = t_{q, n(q)+1}.$$

Dans la seconde, on observe que

$$t_{k+3, n(k)+1} \leq t_{k, n(k)+1} + \xi^{n(k)} + \gamma \xi^{n(k)},$$

c'est à dire

$$t_{k+3, n(k)+1} = t_{k, n(k)+1} + \xi^{n(k)} + \bar{\gamma} \xi^{n(k)}$$

pour un certain $\bar{\gamma}$ (qui dépend de k) vérifiant $0 < \bar{\gamma} \leq \gamma$.

Etape de récurrence: Soit k un entier tel que $3^{n-1}+1 \leq k \leq 3^n$.

Montrons que

$$(3) \quad 3^{n(k)+1} t_{k,n(k)+1}^\alpha / k \geq \min_{1 \leq j \leq 27} 3^{n(j)+1} t_{j,n(j)+1}^\alpha / j$$

La démonstration est divisée en 5 étapes.

(i) Premièrement, si k est de la forme

$$k = 3q \quad \text{avec} \quad q \equiv 0 \pmod{3}$$

on a, d'après la remarque II,

$$t_{k,n(k)+1} = t_{q,n(q)+1}$$

et par conséquent

$$3^{n(k)+1} t_{k,n(k)+1}^\alpha / k = 3^{n(q)+1} t_{q,n(q)+1}^\alpha / q$$

et (3) est satisfaite par hypothèse de récurrence.

(ii) Si k est de la forme

$$k = 3q \quad \text{avec} \quad q \equiv 2 \pmod{3},$$

on a, d'après la remarque V,

$$t_{k,n(k)+1} = t_{q,n(q)+1}$$

lorsque $J_{k,n(k)+1}$ est en situation 1^o) et dans ce cas (3) est vérifiée

par hypothèse de récurrence. D'autre part, lorsque $J_{k,n(k)+1}$ est en situation 2^o), on a

$$(4) \quad t_{k+3,n(k)+1} = t_{k,n(k)+1} + \xi^{n(k)} + \overline{\gamma} \xi^{n(k)}.$$

Alors (4) s'écrit aussi sous la forme

$$(5) \quad A_{k+3}(x, \delta) = A_k(x, \delta) + x + \overline{\gamma} x.$$

Puisque $k+3 \equiv 0 \pmod{9}$, on a, selon l'étape précédente

$$A_{k+3}(x, \delta)^\alpha / (k+3) \geq \min_{1 \leq j \leq 27} A_j(x, \delta)^\alpha / j,$$

car $3^{n(j)+1} t_{j,n(j)+1}^\alpha = A_j(x, \delta)^\alpha$ pour tout j . Donc, pour un certain j qui dépend de δ et qui vérifie $1 \leq j \leq 27$, on a

$$A_{k+3}(x, \delta)^\alpha / (k+3) \geq A_j(x, \delta)^\alpha / j ,$$

c'est à dire,

$$A_{k+3}(x, \delta) x^{\log j / \log 3} \geq A_j(x, \delta) x^{\log(k+3) / \log 3}$$

car $\alpha = \log 3 / \log x$. De (5) on obtient donc,

$$(6) \quad A_k(x, \delta) x^{\log j / \log 3} \geq A_j(x, \delta) x^{\log(k+3) / \log 3} - (x + \bar{\gamma}x) x^{\log j / \log 3} .$$

Pour montrer que

$$A_k(x, \delta)^\alpha / k \geq A_j(x, \delta)^\alpha / j ,$$

il suffit donc de vérifier

$$(7) \quad A_j(x, \delta) x^{\log(k+3) / \log 3} - (x + \bar{\gamma}x) x^{\log j / \log 3} \geq A_j(x, \delta) x^{\log k / \log 3} ,$$

ce qui s'écrit également

$$(8) \quad x^{\log(k+3) / \log 3} \geq x^{\log k / \log 3} + \frac{(x + \bar{\gamma}x) x^{\log j / \log 3}}{A_j(x, \delta)} .$$

Mais puisque $k = 3q$, et que $\bar{\gamma} \leq \gamma = 1 - 3\xi - \delta$ (d'où $1 + \bar{\gamma} \leq 2 - 3x^{-1} - \delta < 2 - 3x^{-1}$)

(8) sera satisfaite si l'inégalité

$$(9) \quad x^{\log(q+1) / \log 3} \geq x^{\log q / \log 3} + \frac{(2 - 3x^{-1}) x^{\log j / \log 3}}{A_j(x, \delta)}$$

est satisfaite. $A_j(x, \delta)$ étant une fonction croissante de δ (pour x fixé),

il suffit de démontrer (9) pour $\delta = 0$. Mais d'après le lemme 2.3.1

$$\min_{1 \leq j \leq 27} A_j(x, 0)^\alpha / j = \min_{j \in \{3, 8, 17, 23\}} A_j(x, 0)^\alpha / j$$

ce que l'on peut reformuler par

$$\min_{1 \leq j \leq 27} A_j(x, 0) x^{-\log j / \log 3} = \min_{j \in \{3, 8, 17, 23\}} A_j(x, 0) x^{-\log j / \log 3}$$

Il suffit donc de vérifier (9) avec $\delta = 0$ et $j = 3, 8, 17$ et 23 . Puisque $2-3x^{-1} \leq (x-1)/2$ pour tout $x \geq 3$, le lemme 2.3.3 montre que (9) est vérifié pour tout $q \geq 10$.

En résumé, si $J_{k,n(k)+1}$ est en situation 2°) on a

$$(10) \quad A_k(x, \delta)^\alpha / k \geq \min_{1 \leq j \leq 27} A_j(x, \delta)^\alpha / j, \quad \text{pour } k \geq 30.$$

(iii) Si k est de la forme $k = 3q$, avec $q \equiv 1 \pmod{3}$, on a, lorsque $J_{k,n(k)+1}$ est en situation 1°)

$$t_{k,n(k)+1} = t_{q,n(q)+1}$$

et (3) est vérifiée par hypothèse de récurrence. D'autre part, si

$J_{k,n(k)+1}$ est en situation 2°), on a, d'après l'étape (ii) ci dessus,

$$A_{k+3}(x, \delta)^\alpha / (k+3) \geq \min_{1 \leq j \leq 27} A_j(x, \delta)^\alpha / j$$

pour $k+3 \geq 30$. De plus, la démonstration de (ii) nous permet de conclure que

$$A_k(x, \delta)^\alpha / k \geq \min_{1 \leq j \leq 27} A_j(x, \delta)^\alpha / j, \quad \text{pour } k \geq 30.$$

(iv) Si k est de la forme $k = 3q+2$ avec $q \geq 0$, on a, d'après (iii) ci-dessus,

$$(11) \quad A_{k+1}(x, \delta)^\alpha / (k+1) \geq \min_{1 \leq j \leq 27} A_j(x, \delta)^\alpha / j, \quad \text{pour } k+1 \geq 30.$$

A la remarque IV, on a montré que pour un certain $\bar{\gamma} \leq \gamma$,

$$t_{k+1,n(k)+1} = t_{k,n(k)+1} + \bar{\gamma} \xi^{n(k)} + \xi^{n(k)+1}.$$

On a donc,

$$(12) \quad A_{k+1}(x, \delta) = A_k(x, \delta) + 1 + \bar{\gamma}x.$$

D'après (11), on a, pour un certain j qui dépend de δ et tel que $1 \leq j \leq 27$,

$$A_{k+1}(x, \delta)^\alpha / (k+1) \geq A_j(x, \delta)^\alpha / j$$

c'est à dire

$$(13) \quad A_{k+1}(x, \delta) x^{\log j / \log 3} \geq A_j(x, \delta) x^{\log(k+1) / \log 3}$$

En combinant (12) et (13) on obtient

$$(14) \quad A_k(x, \delta) x^{\log j / \log 3} \geq A_j(x, \delta) x^{\log(k+1) / \log 3} - (1 + \bar{\gamma}x) x^{\log j / \log 3}$$

Par conséquent, pour démontrer que

$$A_k(x, \delta) x^{\log j / \log 3} \geq A_j(x, \delta) x^{\log k / \log 3}$$

il suffit de vérifier que

$$A_j(x, \delta) x^{\log(k+1) / \log 3} - (1 + \bar{\gamma}x) x^{\log j / \log 3} \geq A_j(x, \delta) x^{\log k / \log 3},$$

c'est à dire

$$(15) \quad x^{\log(k+1) / \log 3} \geq x^{\log k / \log 3} + \frac{(1 + \bar{\gamma}x)x}{A_j(x, \delta)} x^{\log j / \log 3}.$$

Puisque $1 + \bar{\gamma}x \leq 1 + \gamma x = 1 + (1 - 3\xi - \delta)x = x - \delta x - 2 \leq x - 2$, et que $A_j(x, \delta) \geq A_j(x, 0)$,

il suffit de vérifier

$$(16) \quad x^{\log(k+1) / \log 3} \geq x^{\log k / \log 3} + \frac{(x-2)x}{A_j(x, 0)} x^{\log j / \log 3}.$$

De nouveau, selon le lemme 2.3.1, il suffit de vérifier (16) avec

$j = 3, 8, 17$ et 23 , ce qui a été fait au lemme 2.3.3 pour tout $k \geq 35$ et

$j = 3, 8$ et 23 ainsi que pour $k \geq 36$ et $j = 17$.

(v) Si k est de la forme $k = 3q+1$, avec $q \geq 0$, d'après (iv) ci-dessus, on a, lorsque $k+1 \geq 36$

$$A_{k+1}(x, \delta)^\alpha / (k+1) \geq A_j(x, \delta)^\alpha / j$$

pour un certain j qui dépend de δ . A la remarque III, on a observé que

$$t_{k+1, n(k)+1} = t_{k, n(k)+1} + \delta \xi^{n(k)} + \xi^{n(k)+1}.$$

On a donc

$$A_{k+1}(x, \delta) = A_k(x, \delta) + 1 + \delta x .$$

Le même raisonnement qu'en (iv) ci-dessus montre que

$$A_k(x, \delta)^{\alpha/k} = A_j(x, \delta)^{\alpha/j}$$

lorsque l'inégalité

$$(17) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} \geq x^{\log k/\log 3} + \frac{(1+\delta x)x}{A_j(x, \delta)} \log j/\log 3$$

est satisfaite. Puisque $\frac{1+\delta x}{A_j(x, \delta)} \leq \frac{1+x(1-3\xi)/2}{A_j(x, 0)} = \frac{x-1}{2A_j(x, 0)}$,

il suffit de vérifier l'inégalité

$$(18) \quad x^{\log(k+1)/\log 3} \geq x^{\log k/\log 3} + \frac{(x-1)x}{2A_j(x, 0)} \log j/\log 3$$

De nouveau, d'après le lemme 2.3.1, il suffit de vérifier (18) avec

$j = 3, 8, 17$ et 23 , ce qui a été fait au lemme 2.3.3 pour tout $k \geq 10$.

Il nous reste à démontrer (3) pour les valeurs de k entre 27 et 36 .

Pour $k = 35 = 3(11)+2$, on a

$$A_{35}(x, \delta)^{\alpha/35} \geq A_{12}(x, \delta)^{\alpha/12}$$

car $A_{12}(x, 0)x^{-\log 12/\log 3} \geq A_8(x, 0)x^{-\log 8/\log 3}$ et (16) est vérifiée

pour $j = 8$ et $k = 35$. D'autre part, d'après (v) (et puisque $34 > 10$), on a

$$A_{34}(x, \delta)^{\alpha/34} \geq A_{12}(x, \delta)^{\alpha/12} .$$

Pour $k = 33$, on remarque que $J_{33,5}$ est en situation $1''$) et par conséquent

$$A_{33}(x, \delta)^{\alpha/33} = A_{11}(x, \delta)^{\alpha/11} .$$

Par ailleurs, les raisonnements faits en (ii) et (iii) montrent que

$$A_{30}(x, \delta)^\alpha / 30 \geq A_{11}(x, \delta)^\alpha / 11 .$$

Montrons simultanément que $A_{29}(x, \delta)^\alpha / 29 \geq A_{11}(x, \delta)^\alpha / 11$ et que

$A_{32}(x, \delta)^\alpha / 32 \geq A_{11}(x, \delta)^\alpha / 11$. Il suffit pour cela de vérifier l'inégalité

$$x^{\log(k+1)/\log 3} \geq x^{\log k/\log 3} + \frac{(x-2)x^{\log 11/\log 3}}{A_{11}(x, 0)}$$

pour $k = 29$ et 32 , ce qui a été vérifié au lemme 2.3.4.

Finalement, d'après l'étape (v) on a

$$A_{28}(x, \delta)^\alpha / 28 \geq A_{11}(x, \delta)^\alpha / 11 \quad \text{et} \quad A_{31}(x, \delta)^\alpha / 31 \geq A_{11}(x, \delta)^\alpha / 11 .$$

L'étape de récurrence est complétée, et la proposition 2.3.5 est démontrée.

COROLLAIRE 2.3.6 Notons par $H^\alpha(E)(\delta)$ la mesure de Hausdorff de E en fonction du paramètre δ . Alors, $H^\alpha(E)(\delta)$ est une fonction monotone croissante au sens large, continue et analytique par morceaux définie sur l'intervalle $[0, (1-3\xi)/2]$. Plus précisément,

$$H^\alpha(E)(\delta) = 1 \text{ sur } [\delta_0, (1-3\xi)/2] ,$$

et $H^\alpha(E)(\delta)$ est croissante au sens strict sur $[0, \delta_0]$, où $\delta_0 = \xi^{1-(\log 2/\log 3)-2\xi}$.

Démonstration: A la remarque I de la démonstration de la proposition 2.3.5, la fonction de δ définie par $|I(\delta)|$ est une similitude ou une constante, et par conséquent une fonction analytique de δ . De plus, $|I(\delta)|$ est constante si et seulement si, pour tout $j \geq 0$, les nombres d'intervalles noirs de longueur $\delta \xi^j$ et $\gamma \xi^j$ dans $I(\delta)$ coïncident.

Autrement, $|I(\delta)|$ est croissante au sens strict. En particulier, si

$|J_{k, n(k)+1}(\delta)|$ est constante, $J_{k, n(k)+1}$ est un intervalle blanc de

longueur ξ .

On a démontré à la proposition 2.1.1 que

$$H^\alpha(E)(\delta) = 1 \text{ sur } [\delta_0, (1-3\xi)/2]$$

et que

$$H^\alpha(E)(\delta) < 1 \text{ sur } [0, \delta_0[.$$

Supposons que $0 < \delta < \delta_0$. Alors, si $J_{k,n(k)+1}$ coïncide avec un intervalle blanc de la 1^{ière} étape, on a

$$k = 3^{n(k)}, J_{k,n(k)+1} = J_{3,2}, t_{k,n(k)+1} = t_{3,2} = \xi$$

et

$$3^{n(k)+1} t_{k,n(k)+1}^\alpha / k = 3^2 t_{3,2}^2 / 3 = 3\xi^\alpha = 1 .$$

Par conséquent,

$$H^\alpha(E)(\delta) = \min_{\substack{2 \leq j \leq 26 \\ j \neq 3,9}} 3^{n(j)+1} t_{j,n(j)+1}^\alpha / j .$$

D'autre part, pour chaque $k \neq 3^{n(k)}$, la fonction $t_{k,n(k)+1}$ est croissante au sens strict sur $[0, \delta_0]$. Donc, pour chaque $k \neq 3^{n(k)}$ la fonction de δ définie par $k^{-1} 3^{n(k)+1} t_{k,n(k)+1}^\alpha(\delta)$ est croissante au sens strict sur $[0, \delta_0]$, en plus d'être continue et analytique par morceaux. Puisque $H^\alpha(E)(\delta)$ est défini comme le minimum d'une famille finie de telles fonctions, le corollaire est démontré.

COROLLAIRE 2.3.7 Lorsque $\xi = 1/4$ et $\delta = 0$, E est alors un parfait de Cantor, défini comme l'ensemble des nombres réels de l'intervalle $[0,1]$ pour lesquels le chiffre 2 n'apparaît pas dans leur développement en base 4.

On retrouve, en posant $x = 4$ dans la formule

$$H^\alpha(E)(0) = \min_{j \in \{3,8,17,23\}} A_j(x,0)^{\alpha/j} ,$$

le résultat des calculs de BEST [5] et WEGMANN [27] sur la mesure de Hausdorff de cet ensemble, soit

$$H^\alpha(E) = 10^\alpha/8$$

Démonstration: Par un calcul numérique, on vérifie que

$$\min_{j \in \{3,8,17,23\}} A_j(4,0)^{\alpha/j} = A_8(4,0)^{\alpha/8} = 10^\alpha/8$$

COROLLAIRE 2.3.8 On a, en posant $x = \xi^{-1}$

$$\min_{0 \leq \delta \leq (1-3\xi)/2} H^\alpha(E)(\delta) = \min \left(3^{\alpha-1}, \frac{(2x+2)^\alpha}{8}, \frac{(x^2+2x+2)^\alpha}{17}, \frac{(2x^2+x+2)^\alpha}{23} \right)$$

Démonstration: Ceci est une conséquence immédiate du lemme 2.3.1 et du corollaire 2.3.6.

Remarque sur la proposition 2.3.5: En étudiant la position des 81 intervalles blancs de la 4^{ième} étape, on obtient les formules explicites pour les $t_{k,n(k)+1}$ ($1 \leq k \leq 27$) lorsque $0 \leq \delta \leq \gamma\xi$, c'est à dire

$$t_{1,2} = \xi^2$$

$$t_{2,2} = 2\xi^2 + \delta\xi$$

$$t_{3,2} = 3\xi^2 + \delta\xi + \delta$$

$$t_{4,3} = 4\xi^3 + \delta\xi^2 + \gamma\xi^2 + \delta\xi$$

$$t_{5,3} = 5\xi^3 + 2\delta\xi^2 + \gamma\xi^2 + \delta\xi$$

$$t_{6,3} = \begin{cases} 6\xi^3 + 2\delta\xi^2 + 2\gamma\xi^2 + \delta\xi, & \gamma\xi^2 \leq \delta \leq \gamma\xi \\ 6\xi^3 + 2\delta\xi^2 + \gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta, & 0 \leq \delta \leq \gamma\xi^2 \end{cases}$$

$$t_{7,3} = 7\xi^3 + 2\delta\xi^2 + 2\gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta$$

$$t_{8,3} = 8\xi^3 + 3\delta\xi^2 + 2\gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta$$

$$t_{9,3} = 9\xi^3 + 3\delta\xi^2 + 3\gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta$$

$$t_{10,4} = 10\xi^4 + 3\delta\xi^3 + 3\gamma\xi^3 + \delta\xi^2 + \gamma\xi^2 + \delta\xi$$

$$t_{11,4} = 11\xi^4 + 4\delta\xi^3 + 3\gamma\xi^3 + \delta\xi^2 + \gamma\xi^2 + \delta\xi$$

$$t_{12,4} = 12\xi^4 + 4\delta\xi^3 + 3\gamma\xi^3 + 2\delta\xi^2 + \gamma\xi^2 + \delta\xi$$

$$t_{13,4} = 13\xi^4 + 4\delta\xi^3 + 4\gamma\xi^3 + 2\delta\xi^2 + \gamma\xi^2 + \delta\xi$$

$$t_{14,4} = 14\xi^4 + 5\delta\xi^3 + 4\gamma\xi^3 + 2\delta\xi^2 + \gamma\xi^2 + \delta\xi$$

$$t_{15,4} = \begin{cases} 15\xi^4 + 5\delta\xi^3 + 5\gamma\xi^3 + 2\delta\xi^2 + \gamma\xi^2 + \delta\xi, & \gamma\xi^3 \leq \delta \leq \gamma\xi \\ 15\xi^4 + 5\delta\xi^3 + 4\gamma\xi^3 + 2\delta\xi^2 + \gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta, & 0 \leq \delta \leq \gamma\xi^3 \end{cases}$$

$$t_{16,4} = \begin{cases} 16\xi^4 + 5\delta\xi^3 + 5\gamma\xi^3 + 2\delta\xi^2 + 2\gamma\xi^2 + \delta\xi, & \gamma\xi^2 \leq \delta \leq \gamma\xi \\ 16\xi^4 + 5\delta\xi^3 + 5\gamma\xi^3 + 2\delta\xi^2 + \gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta, & 0 \leq \delta \leq \gamma\xi^2 \end{cases}$$

$$t_{17,4} = \begin{cases} 17\xi^4 + 6\delta\xi^3 + 5\gamma\xi^3 + 2\delta\xi^2 + 2\gamma\xi^2 + \delta\xi, & \gamma\xi^2 \leq \delta \leq \gamma\xi \\ 17\xi^4 + 6\delta\xi^3 + 5\gamma\xi^3 + 2\delta\xi^2 + \gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta, & 0 \leq \delta \leq \gamma\xi^2 \end{cases}$$

$$t_{18,4} = \begin{cases} 18\xi^4 + 6\delta\xi^3 + 6\gamma\xi^3 + 2\delta\xi^2 + 2\gamma\xi^2 + \delta\xi, & \gamma\xi^2 \leq \delta \leq \gamma\xi \\ 18\xi^4 + 6\delta\xi^3 + 6\gamma\xi^3 + 2\delta\xi^2 + \gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta, & 0 \leq \delta \leq \gamma\xi^2 \end{cases}$$

$$t_{19,4} = 19\xi^4 + 6\delta\xi^3 + 6\gamma\xi^3 + 2\delta\xi^2 + 2\gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta$$

$$t_{20,4} = 20\xi^4 + 7\delta\xi^3 + 6\gamma\xi^3 + 2\delta\xi^2 + 2\gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta$$

$$t_{21,4} = 21\xi^4 + 7\delta\xi^3 + 6\gamma\xi^3 + 3\delta\xi^2 + 2\gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta$$

$$t_{22,4} = 22\xi^4 + 7\delta\xi^3 + 7\gamma\xi^3 + 3\delta\xi^2 + 2\gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta$$

$$t_{23,4} = 23\xi^4 + 8\delta\xi^3 + 7\gamma\xi^3 + 3\delta\xi^2 + 2\gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta$$

$$t_{24,4} = 24\xi^4 + 8\delta\xi^3 + 8\gamma\xi^3 + 3\delta\xi^2 + 2\gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta$$

$$t_{25,4} = 25\xi^4 + 8\delta\xi^3 + 8\gamma\xi^3 + 3\delta\xi^2 + 3\gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta$$

$$t_{26,4} = 26\xi^4 + 9\delta\xi^3 + 8\gamma\xi^3 + 3\delta\xi^2 + 3\gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta$$

$$t_{27,4} = 27\xi^4 + 9\delta\xi^3 + 9\gamma\xi^3 + 3\delta\xi^2 + 3\gamma\xi^2 + \delta\xi + \delta .$$

CHAPITRE III

MESURE DE HAUSDORFF MAXIMALE ET MINIMALE DES PARFAITS HOMOGÈNES AU SENS LARGE DE TYPE (ν, ξ) DE DIAMÈTRE DONNÉ

Nous démontrons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parfait linéaire homogène de type (ν, ξ) de diamètre ℓ soit de mesure de Hausdorff maximale, cette valeur maximale étant ℓ^α , tel que précisé à la section 2.1. D'autre part, nous déterminons les parfaits linéaires homogènes au sens large de type (ν, ξ) de diamètre ℓ de mesure de Hausdorff minimale.

3.1 Les parfaits homogènes de type (ν, ξ) de diamètre donné, de mesure de Hausdorff maximale

Soit E un parfait homogène au sens strict de type (ν, ξ) , $(\nu \geq 2)$, de diamètre ℓ construit sur l'intervalle fondamental $[0, \ell]$ et soient $I_1, \dots, I_{\nu-1}$ les $\nu-1$ intervalles noirs initiaux, énumérés de gauche à droite.



Pour $j = 1, 2, \dots, \nu-1$, notons par δ_j la longueur de I_j .

Pour $k = 1, 2, \dots, \nu-1$, posons

$$\tau_k = \min_{0 \leq i \leq \nu-k-1} \delta_{i+1} + \delta_{i+2} + \dots + \delta_{i+k}.$$

PROPOSITION 3.1.1 Pour $\alpha = -\log \nu / \log \xi$, on a $H^\alpha(E) = \ell^\alpha$ si et seulement si

$$(*) \quad \tau_k \geq \ell(\xi^{1-\log(k+1)/\log \nu} - (k+1)\xi) \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, \nu-1.$$

Pour la démonstration, nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME 3.1.2 Pour toute constante $c \geq 3$, la fonction

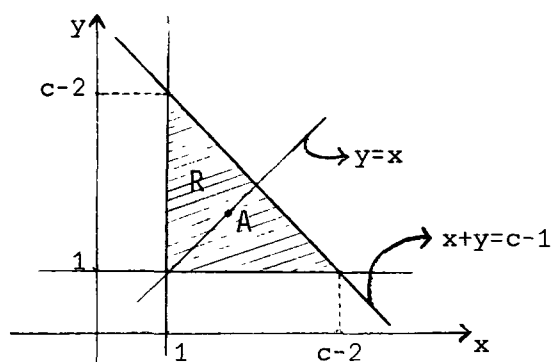
$$f(x,y) = x^x y^y (c-x-y)^{c-x-y}$$

atteint son minimum dans la région

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1 \text{ et } x+y \leq c-1\}$$

au point $A = (c/3, c/3)$, et ce minimum vaut donc $c^c 3^{-c}$.

Démonstration du lemme: Le cas $c = 3$ est trivial. Soit $c > 0$.



Déterminons les points critiques de f dans R . On a

$$f_x(x,y) = f(x,y) (\log x - \log(c-x-y))$$

$$f_y(x,y) = f(x,y) (\log y - \log(c-x-y))$$

Puisque $f \neq 0$ sur R , le seul point critique A de f dans R a pour coordonnées la solution du système

$$x = c - x - y$$

$$y = c - x - y,$$

c'est à dire

$$A = (c/3, c/3).$$

Vérifions que $f(A)$ est le minimum absolu de f sur R . On a

$$f_{xx}(x,y) = f_x(x,y)(\log x - \log(c-x-y)) + f(x,y)(x^{-1} + (c-x-y)^{-1})$$

$$f_{yy}(x,y) = f_y(x,y)(\log y - \log(c-x-y)) + f(x,y)(y^{-1} + (c-x-y)^{-1})$$

$$f_{xy}(x,y) = f_y(x,y)(\log x - \log(c-x-y)) + f(x,y)/(c-x-y) ,$$

d'où

$$f_{xx}(A) = 6c^{-1}f(A) > 0 \quad \text{et} \quad f_{xx}(A)f_{yy}(A) - f_{xy}(A)^2 = 27c^{-2}f(A)^2 > 0 .$$

Par conséquent $f(A)$ est un minimum relatif. Etudions maintenant la restriction de f à la frontière de R .

Sur la droite d'équation $x+y = c-1$, on a

$$f(x,y) = g(x) = x^x(c-x-1)^{c-x-1}, \quad \text{pour } 1 \leq x \leq c-2$$

et

$$g'(x) = g(x) (\log x - \log(c-x-1)),$$

d'où

$$g'(x) = 0 \text{ si et seulement si } x = (c-1)/2 .$$

De plus,

$$g''(\frac{c-1}{2}) = g(\frac{c-1}{2})\left(\frac{4}{c-1}\right) > 0 .$$

Donc, $g(\frac{c-1}{2})$ est la valeur minimale de g sur l'intervalle $[1, c-2]$, c'est

à dire que $f(\frac{c-1}{2}, \frac{c-1}{2})$ est le minimum de f sur $R \cap \{(x,y) : x+y = c-1\}$.

Sur la droite d'équation $x = 1$, on a

$$f(x,y) = y^y(c-y-1)^{c-y-1}, \quad \text{pour } 1 \leq y \leq c-2$$

et sur la droite d'équation $y = 1$, on a

$$f(x,y) = x^x(c-x-1)^{c-x-1}, \quad \text{pour } 1 \leq x \leq c-2$$

Pour démontrer que $f(A)$ est le minimum absolu de f sur R , il nous

reste donc à vérifier que

$$f\left(\frac{c-1}{2}, \frac{c-1}{2}\right) > f\left(\frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right).$$

Posons

$$\Psi(x) = f(x, x) = x^{2x}(c-2x)^{c-2x}, \quad 1 \leq x \leq \frac{c-1}{2}.$$

Alors,

$$\Psi'(x) = 2\Psi(x)(\log x - \log(c-2x)),$$

d'où

$$\Psi'\left(\frac{c}{3}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi'(x) > 0 \quad \text{pour tout } x > \frac{c}{3},$$

ce qui démontre le lemme.

Démonstration de la proposition 3.1.1: Lorsque deux parfaits homogènes au sens large de type (ν, ξ) sont homothétiques dans un rapport ℓ , le rapport de leur mesure de Hausdorff est ℓ^α . On peut donc, sans perte de généralité, se restreindre au cas $\ell = 1$.

D'après le corollaire 1.4.2 et le lemme 1.4.3, on a

$$H^\alpha(E) = \inf_{n \geq 1} \min_{1 \leq k \leq \nu^n} \nu^n t_{k,n}^\alpha / k = \inf_{k \geq 1} \inf_{n \geq n(k)} \nu^n t_{k,n}^\alpha / k,$$

où $n(k)$ désigne le plus petit entier $\geq \log k / \log \nu$, et $t_{k,n}$ est la

longueur minimale d'un sous-intervalle de $[0,1]$ contenant k intervalles blancs de la $n^{\text{ième}}$ étape. Supposons les inégalités (*) vérifiées. Dans ces conditions, démontrons la formule

$$(1) \quad t_{k, n(k)+\ell} = \xi^\ell t_{k, n(k)}$$

pour tout $k \geq 1$ et tout $\ell \geq 1$, qui a pour conséquence (puisque $\nu \xi^\alpha = 1$) la relation particulièrement simple

$$(2) \quad H^\alpha(E) = \inf_{k \geq 1} \nu^{n(k)} t_{k, n(k)}^\alpha / k.$$

Nous dirons qu'un sous-intervalle fermé de $[0,1]$ est de type $J_{k,n}$ s'il est de longueur $t_{k,n}$ et contient k intervalles blancs de la $n^{\text{ième}}$ étape. Il nous suffit donc de montrer que tout intervalle de type $J_{k,n(k)+\ell}$ est contenu dans un intervalle blanc de la $\ell^{\text{ième}}$ étape, ce qui équivaut à démontrer que

$$(3) \quad \begin{cases} \delta_j + \xi(\delta_1 + \dots + \delta_{s-1}) \geq \xi(\delta_{i+1} + \dots + \delta_{i+s}) \\ \delta_j + \xi(\delta_{v-1} + \dots + \delta_{v-s+1}) \geq \xi(\delta_{i+1} + \dots + \delta_{i+s}) \end{cases}$$

pour tous i et s tels que $i+s \leq v-1$ et tout $j = 1, \dots, v-1$. Puisque $\tau_{s-1} \leq \min(\delta_1 + \dots + \delta_{s-1}, \delta_{v-1} + \dots + \delta_{v-s+1})$, et que (en raison de l'égalité $\sum_{i=1}^{v-1} \delta_i = 1-v\xi$) on a

$$\begin{aligned} \delta_{i+1} + \dots + \delta_{i+s} &= (1-v\xi) - (\delta_1 + \dots + \delta_i) - (\delta_{i+s+1} + \dots + \delta_{v-1}) \\ &\leq (1-v\xi) - \tau_i - \tau_{v-i-s-1}, \end{aligned}$$

pour avoir (3) il suffit de vérifier l'inégalité

$$\tau_1 + \xi\tau_{s-1} \geq \xi(1-v\xi) - \xi\tau_i - \xi\tau_{v-i-s-1}$$

c'est à dire

$$\tau_1 + \xi(\tau_{s-1} + \tau_i + \tau_{v-i-s-1}) \geq \xi(1-v\xi).$$

Par hypothèse, on a

$$\tau_{s-1} \geq \xi^{1-\log s/\log v} - s\xi$$

$$\tau_i \geq \xi^{1-\log(i+1)/\log v} - (i+1)\xi$$

$$\tau_{v-s-i-1} \geq \xi^{1-\log(v-s-i)/\log v} - (v-s-i)\xi$$

$$\tau_1 \geq \xi^{1-\log 2/\log v} - 2\xi,$$

et par conséquent, il suffit de vérifier l'inégalité

$$\xi^{1-\log 2/\log v} - 2\xi + \xi(\xi^{1-\log s/\log v} + \xi^{1-\log(i+1)/\log v} + \xi^{1-\log(v-s-i)/\log v}) - s\xi^2 - (i+1)\xi^2 - (v-s-i)\xi^2 \geq \xi - v\xi^2$$

ce qui, en posant $x = \xi^{-1}$, équivaut à

$$x^{\log 2/\log v} + x^{-1+\log s/\log v} + x^{-1+\log(i+1)/\log v} + x^{-1+\log(v-s-i)/\log v} \geq 3 + 1/x.$$

On remarque que l'égalité a lieu pour $x = v$. Il suffit donc de montrer

que la fonction

$$g(x) = x^{\log 2/\log v} + x^{-1+\log s/\log v} + x^{-1+\log(i+1)/\log v} + x^{-1+\log(v-s-i)/\log v}$$

est croissante sur $[v, \infty[$. On a

$$g'(x) = \frac{\log 2}{\log v} x^{-1+\log 2/\log v} - \left(\frac{1-\log s}{\log v}\right) x^{-2+\log s/\log v} - \left(\frac{1-\log(i+1)}{\log v}\right) x^{-2+\log(i+1)/\log v} - \left(\frac{1-\log(v-s-i)}{\log v}\right) x^{-2+\log(v-s-i)/\log v},$$

et $g'(x) > 0$ si et seulement si

$$(4) \quad \frac{\log 2}{\log v} x^{\log 2/\log v} > \left(\frac{1-\log s}{\log v}\right) x^{-1+\log s/\log v} + \left(\frac{1-\log(i+1)}{\log v}\right) x^{-1+\log(i+1)/\log v} + \left(\frac{1-\log(v-s-i)}{\log v}\right) x^{-1+\log(v-s-i)/\log v},$$

inégalité qu'il suffit de vérifier pour $x = v$ car le premier membre de (4)

est en fonction croissante de x , tandis que le second membre est une

fonction décroissante de x . Pour $x = v$, (4) devient alors

$$\frac{2\log 2}{\log v} > \left(\frac{1-\log s}{\log v}\right) \frac{s}{v} + \left(\frac{1-\log(i+1)}{\log v}\right) \frac{(i+1)}{v} + \left(\frac{1-\log(v-s-i)}{\log v}\right) \frac{(v-s-i)}{v}$$

c'est à dire

$$2v\log 2 > s\log\left(\frac{v}{s}\right) + (i+1)\log\left(\frac{v}{i+1}\right) + (v-s-i)\log\left(\frac{v}{v-s-i}\right),$$

ce qui équivaut à

$$4^v > \left(\frac{v}{s}\right)^s \left(\frac{v}{i+1}\right)^{i+1} \left(\frac{v}{v-s-i}\right)^{v-s-i},$$

ce qui s'écrit également

$$(5) \quad s^s (i+1)^{i+1} (v-s-i)^{v-s-i} > v^{v+1} 4^{-v}$$

D'après le lemme 3.1.2, pour obtenir (5), il suffit de vérifier que

$$(v+1)^{v+1} 3^{-(v+1)} > v^{v+1} 4^{-v}, \text{ c'est à dire que } (v+1)^{v+1} > 3 \left(\frac{3}{4}\right)^v v^{v+1}, \text{ ce qui}$$

est immédiat pour $v \geq 4$ (car alors $(3/4)^v < 1/3$), et le cas $v = 3$ se réduit à l'inégalité $4^7 > 3^8$. Ceci démontre les inégalités (3).

Montrons par récurrence sur k que, pour tout $k \geq 1$,

$$v^{n(k)} t_{k,n(k)}^\alpha / k \geq 1$$

c'est à dire que

$$(6) \quad t_{k,n(k)} \geq x^{(\log k / \log v) - n(k)}.$$

On conserve ici les notations précédentes $x = \xi^{-1}$ et $\alpha = -\log v / \log \xi$.

Premièrement, pour k vérifiant $1 \leq k \leq v$, on a $n(k) = 1$, et

$$t_{k,n(k)} = t_{k,1} = k\xi + \tau_{k-1} \geq k\xi + \xi^{1-\log k / \log v} - k\xi = x^{(\log k / \log v) - 1}$$

d'après les inégalités (*), de sorte que (6) est vraie lorsque $1 \leq k \leq v$.

On peut donc faire l'hypothèse de récurrence suivante:

Hypothèse de récurrence:

L'inégalité (6) est vraie pour tout k vérifiant $1 \leq k \leq v^{n-1}$ pour un certain $n \geq 2$.

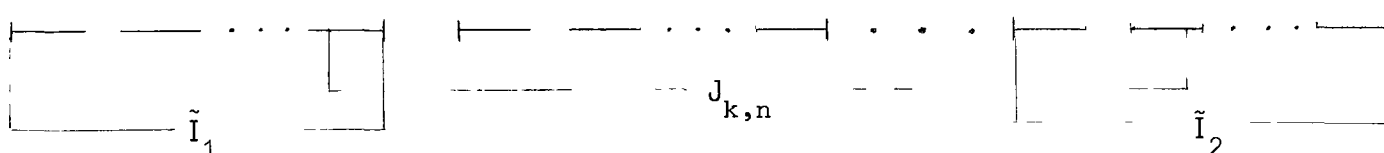
Etape de récurrence:

Montrons que (6) est également vraie pour tout k vérifiant $v^{n-1} + 1 \leq k \leq v^n$. Soit k un entier tel que $v^{n-1} + 1 \leq k \leq v^n$. Alors

$n(k) = n$, et l'on peut écrire k sous la forme

$$k = iv^{n-1} + q$$

avec $i \in \{1, 2, \dots, v-1\}$ et q vérifiant $1 \leq q \leq v^{n-1}$. D'autre part, tout intervalle de type $J_{k,n}$ contient entièrement au moins $i-1$ intervalles blancs de la $i^{\text{ième}}$ étape.



Soient $\tilde{I}_1$ et $\tilde{I}_2$ les intervalles blancs de la $i^{\text{ième}}$ étape contenant les extrémités gauche et droite respectivement de l'intervalle $J_{k,n}$, et soient q_1 et q_2 les nombres respectifs d'intervalles blancs de la $n^{\text{ième}}$ étape situés dans $\tilde{I}_1 \cap J_{k,n}$ et $\tilde{I}_2 \cap J_{k,n}$. Alors, on a

$$(7) \quad k = jv^{n-1} + q_1 + q_2 \quad (\text{où } j = i \text{ ou } i-1)$$

avec $1 \leq q_1, q_2 \leq v^{n-1}$. De plus,

$$t_{k,n} = |J_{k,n}| = jv^{n-1}\xi^n + \tau_{j+1} + j(\xi - v^{n-1}\xi^n) + \sum_{r=1}^2 |\tilde{I}_r \cap J_{k,n}|.$$

Mais $|\tilde{I}_r \cap J_{k,n}| \geq t_{q_r,n} = \xi t_{q_r,n-1}$, et par hypothèse de récurrence

$$t_{q_r,n-1} \geq x^{(\log q_r / \log v) - (n-1)} \text{ pour } r = 1 \text{ et } 2. \text{ Par conséquent,}$$

$$|\tilde{I}_r \cap J_{k,n}| \geq x^{(\log q_r / \log v) - n} \text{ pour } r = 1 \text{ et } 2, \text{ et}$$

$$t_{k,n} \geq jv^{n-1}\xi^n + \tau_{j+1} + j(\xi - v^{n-1}\xi^n) + \sum_{r=1}^2 x^{(\log q_r / \log v) - n},$$

c'est à dire

$$t_{k,n} \geq x^{-n} \left(jv^{n-1} + \tau_{j+1}x^n + j(x^{n-1} - v^{n-1}) + \sum_{r=1}^2 x^{\log q_r / \log v} \right).$$

Puisque

$$\tau_{j+1} \geq \xi^{1-\log(j+2)/\log v} - (j+2)\xi = x^{-1+\log(j+2)/\log v} - (j+2)x^{-1},$$

on a

$$(8) \quad t_{k,n} \geq x^{-n}(-2x^{n-1} + x^{n-1+\log(j+2)/\log v} + \sum_{r=1}^2 x^{\log q_r/\log v}) .$$

Compte tenu de (7) et (8), il suffit donc de vérifier l'inégalité

$$-2x^{n-1} + x^{n-1+\log(j+2)/\log v} + \sum_{r=1}^2 x^{\log q_r/\log v} \geq x^{\log(j v^{n-1} + q_1 + q_2)/\log v}$$

que l'on écrit

$$(9) \quad -2x^{n-1} + x^{n-1+\log(j+2)/\log v} \geq x^{\log(j v^{n-1} + q_1 + q_2)/\log v} - \sum_{r=1}^2 x^{\log q_r/\log v} .$$

Pour toute constante $a > 0$, la fonction

$$\psi(t) = x^{\log(a+t)/\log v} - x^{\log t/\log v}$$

est croissante sur $[1, \infty[$ lorsque $x > v$. Par conséquent, le second membre de (9) est croissant dans la variable q_1 ainsi que dans la variable q_2 .

Il suffit donc de vérifier (9) pour $q_1 = q_2 = v^{n-1}$. Cette vérification est immédiate, et c'est l'égalité qui a lieu dans ce cas.

Ceci termine l'étape de récurrence, et (16) est donc démontrée pour tout $k \geq 1$.

Il ne reste plus qu'à démontrer que si les inégalités (*) ne sont pas toutes satisfaites, alors $H^\alpha(E) < 1$

Supposons que pour un certain $k \in \{1, 2, \dots, v-1\}$

$$\tau_k < \xi^{1-\log(k+1)/\log v} - (k+1)\xi .$$

Puisque $t_{k+1,1} = (k+1)\xi + \tau_k$, on aurait

$$t_{k+1,1} < \xi^{1-\log(k+1)/\log v},$$

d'où

$$\frac{v}{k+1} t_{k+1,1}^\alpha < 1$$

et par conséquent

$$H^\alpha(E) < 1$$

compte tenu du corollaire 1.4.2 et du lemme 1.4.3.

COROLLAIRE 3.1.3 Soit E un parfait homogène de type (v, ξ) de diamètre λ .

Si les intervalles noirs de la $j^{\text{ième}}$ étape de dissection sont tous de même longueur, on a

$$H^\alpha(E) = \lambda^\alpha$$

où $\alpha = \dim E = -\log v / \log \xi$.

Démonstration: On peut sans perte de généralité, supposer que le parfait homogène E est construit sur l'intervalle fondamental $[0,1]$ et qu'il est de diamètre 1.

Soit $\delta = (1-v\xi)/(v-1)$ la longueur commune des intervalles noirs initiaux.

$$0 \xleftarrow{\delta} \xrightarrow{\delta} \xleftarrow{\delta} \xrightarrow{\delta} \dots \xleftarrow{\delta} \xrightarrow{\delta} 1$$

Montrons que les inégalités (*) de la proposition 3.1.1 sont toutes satisfaites. On a

$$\tau_k = \frac{k}{(v-1)} (1-v\xi),$$

et

$$\frac{k}{(v-1)} (1-v\xi) \geq \xi^{1-\log(k+1)/\log v} - (k+1)\xi$$

si et seulement si

$$k(1-\xi) \geq (v-1)\xi(\xi^{-\log(k+1)/\log v} - 1) .$$

En posant $x = \xi^{-1}$, cette dernière inégalité s'écrit

$$(i) \quad k(x-1) \geq (v-1)(x^{\log(k+1)/\log v} - 1)$$

l'égalité ayant lieu pour tout $x \geq v$ lorsque $k = v-1$.

Pour vérifier (i), montrons que la fonction

$$h(x) = k(x-1) - (v-1)(x^{\log(k+1)/\log v} - 1)$$

est croissante sur $[v, \infty[$. On a $h(v) = 0$ et

$$h'(x) = k - (v-1) \frac{\log(k+1)}{\log v} x^{\frac{\log(k+1)}{\log v} - 1} .$$

De plus, h' est visiblement croissante car $\frac{\log(k+1)}{\log v} - 1 \leq 0$.

Pour montrer que h est croissante, il suffit donc de vérifier que $h'(v) \geq 0$.

On a

$$h'(v) = k - (v-1) \frac{\log(k+1)}{\log v} \left(\frac{k+1}{v} \right) ,$$

d'où $h'(v) \geq 0$ si et seulement si

$$(ii) \quad v \log v \geq (v-1) \frac{(k+1)}{k} \log(k+1) .$$

Mais puisque $\frac{(k+1)}{k} \log(k+1)$ est croissante avec k , et que $k \leq v-1$, il suffit de vérifier (ii) pour $k = v-1$, ce qui se réduit à

$$v \log v = (v-1) \frac{v}{(v-1)} \log v ,$$

et le corollaire est démontré.

3.2 Application aux ensembles de Cantor considérés par BEST et WEGMANN

Soit q un entier ≥ 3 , v un entier vérifiant $1 \leq v \leq q-1$, et r, s et p des éléments de $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ tels que $v+r+s+(v-1)p = q$.

Posons

$$F = \{r+k(p+1) : k = 0, 1, 2, \dots, v-1\}$$

et

$$E_k = \bigcup_{(a_1, \dots, a_k) \in F^k} \left[\sum_{j=1}^k a_j / q^j, \sum_{j=1}^k a_j / q^j + 1/q^k \right], \quad (k \geq 1)$$

où $F^k = F \times F \times \dots \times F$ (le produit cartésien de k copies de F). E_k est alors une réunion de v^k intervalles blancs (fermés) deux à deux disjoints ou contigus, de longueur commune $1/q^k$. Posons également,

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

et, puisque $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ et que les E_k sont fermés, $E \neq \emptyset$.

L'ensemble E est un parfait de Cantor. Son diamètre est donné par

$$d = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} r/q^k - \sum_{k=1}^{\infty} s/q^k = (1 - (r+s)/(q-1))$$

et sa dimension de Hausdorff par

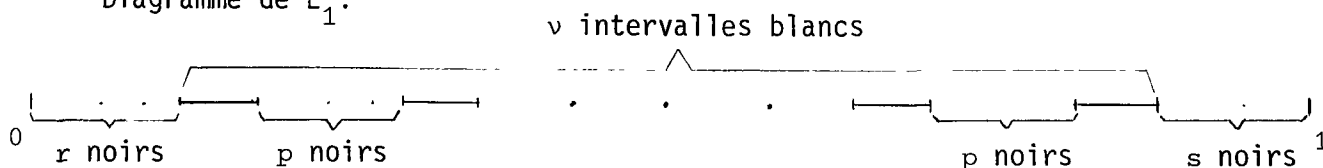
$$\alpha = \log v / \log q.$$

PROPOSITION 3.2.1

$$H^\alpha(E) = (1 - (r+s)/(q-1))^\alpha$$

Démonstration:

Diagramme de E_1 :



A chacun de v^k intervalles blancs $I_{j,k}$, $1 \leq j \leq v^k$, dont la réunion est E_k on fait correspondre l'intervalle fermé

$$\tilde{I}_{j,k} = [\inf(E \cap I_{j,k}), \sup(E \cap I_{j,k})]$$

de longueur d/q^k . Appelons $\tilde{E}_k$ la réunion disjointe $\bigcup_{j=1}^{v^k} \tilde{I}_{j,k}$. Pour tout

$k \geq 1$, $\tilde{E}_k$ est de diamètre d , et l'on a

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k, \quad \text{où} \quad \tilde{E}_1 \supset \tilde{E}_2 \supset \dots$$

De plus, les $v-1$ intervalles noirs contigus aux v intervalles blancs constituant $\tilde{E}_1$ sont tous de longueur

$$\delta = p/q + (r+s)/(q(q-1)).$$

E étant un parfait homogène de type $(v, \eta_1, \dots, \eta_v, 1/q)$ où

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 1/q + \delta/d, \quad \dots, \quad \eta_i = (i-1)(1/q + \delta/d), \quad \dots, \quad \eta_v = (v-1)(1/q + \delta/d) = 1 - 1/q,$$

construit sur l'intervalle $[r/(q-1), 1 - s/(q-1)]$, on a donc, d'après le corollaire 3.1.3

$$H^\alpha(E) = d^\alpha = (1 - (r+s)/(q-1))^\alpha.$$

Remarque 1

En posant simultanément dans cette construction $p = 0$, $r = 1$ et $s = 0$, ou bien en posant les trois autres valeurs simultanées suivantes

$$p = 0, \quad r = 0 \quad \text{et} \quad s = 1$$

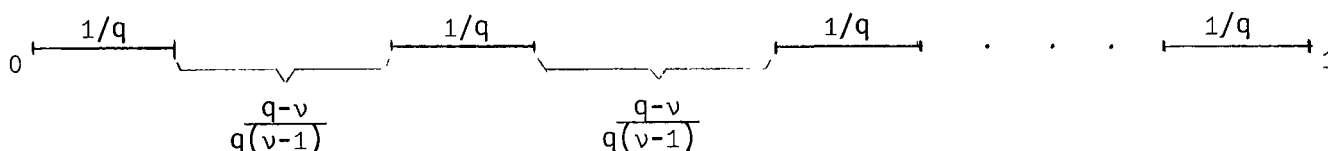
on retrouve une formule de BEST [5] et WEGMANN [27], à savoir

$$H^\alpha(E) = ((q-2)/(q-1))^\alpha$$

Remarque 2

Soit q un entier ≥ 3 et v un entier $\leq q-1$ positif tel que $v-1$ divise $q-v$. Si E est un parfait homogène de type $(v, 1/q)$ à centre de symétrie, de diamètre 1, construit sur l'intervalle fondamental $[0,1]$, alors E est

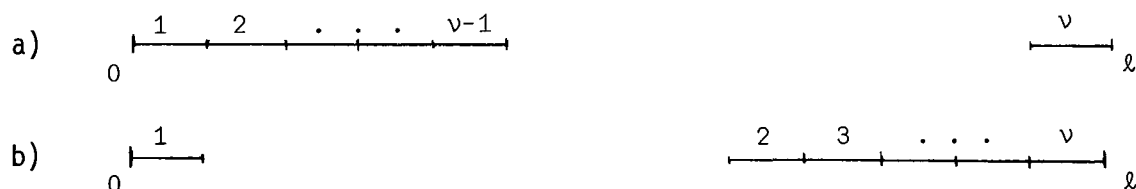
un ensemble de Cantor; plus exactement, c'est l'ensemble des nombres réels de $[0,1]$ dont le développement q -adique ne contient que des chiffres appartenant à un certain sous-ensemble propre $F \subset \{0,1,2,\dots,q-1\}$ de cardinalité v . Les intervalles blancs de la 1^{ière} étape de dissection ont la disposition suivante:



3.3 Les parfaits homogènes au sens large de type (v,ξ) de diamètre donné de mesure de Hausdorff minimale

Soit Λ la famille des parfaits homogènes au sens large de type (v,ξ) et de diamètre ℓ construits sur l'intervalle fondamental $[0,\ell]$.

PROPOSITION 3.3.1 Soit E_0 le parfait homogène au sens large de type (v,ξ) dont la 1^{ière} étape de construction correspond à l'un ou l'autre des deux diagrammes suivants:



Pour $\alpha = -\log v / \log \xi$, on a

$$H^\alpha(E_0) = \min_{E \in \Lambda} H^\alpha(E) .$$

Démonstration: De nouveau, sans perdre de la généralité, on suppose $\ell = 1$.

Etant donné la symétrie des diagrammes a) et b), on peut se restreindre au

cas illustré par le diagramme a). D'après le corollaire 1.4.2 et le lemme 1.4.3, il suffit de montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout k vérifiant $1 \leq k \leq v^n$,

$$(*) \quad t_{k,n}(E_0) \leq t_{k,n}(E)$$

quelque soit $E \in \Lambda$. ($t_{k,n}(E)$ désigne la longueur minimale d'un sous-intervalle de $[0,1]$ contenant k intervalles blancs de la $n^{\text{ième}}$ étape de la construction de E .)

On procède par récurrence sur n . Au départ, l'inégalité (*) est immédiate pour $n = 1$. On remarque aussi que $t_{v^n,n}(E) = 1$ pour tout $n \geq 1$ et $E \in \Lambda$.

Hypothèse de récurrence:

Supposons que pour un certain entier $n \geq 2$, et pour tout $k \leq v^{n-1}$, l'on ait

$$t_{k,n-1}(E_0) \leq t_{k,n-1}(E)$$

quelque soit $E \in \Lambda$.

Etape de récurrence:

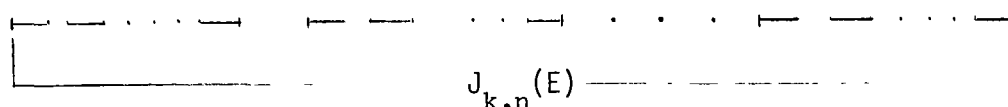
Soit k un entier vérifiant $1 \leq k \leq v^n$. On peut écrire k sous la forme

$$k = qv + j$$

avec $j \in \{0,1,\dots,v-1\}$ et $q \in \{0,1,\dots,v^{n-1}-1\}$.

Etant donné $E \in \Lambda$ fixé une fois pour toutes, tout intervalle de type $J_{k,n}(E)$ (c'est à dire de longueur $t_{k,n}(E)$ et contenant k intervalles blancs de la $n^{\text{ième}}$ étape de la construction de E) se trouve toujours dans une des 3 situations suivantes:

Situation 1: Les deux extrémités de $J_{k,n}(E)$ sont aussi des extrémités d'intervalles blancs de la $(n-1)^{\text{ième}}$ étape.

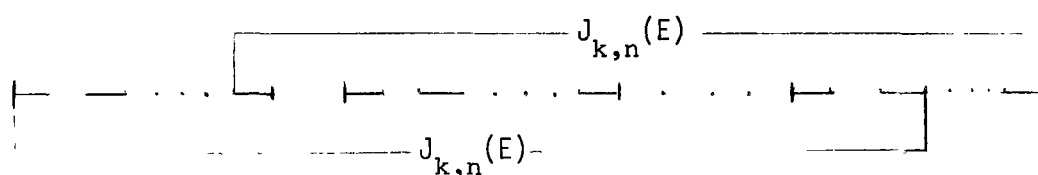


Dans ce cas, on a forcément $j = 0$, et

$$t_{k,n}(E) = t_{q,n-1}(E) .$$

Puisque, par hypothèse de récurrence $t_{q,n-1}(E) \geq t_{q,n-1}(E_0)$, (*) est donc vérifiée.

Situation 2: Une seule des deux extrémités de $J_{k,n}(E)$ coïncide avec une extrémité d'intervalle blanc de la $(n-1)^{\text{ième}}$ étape.



Alors $k = qv + j$ avec $1 \leq j \leq v - 1$, et

$$t_{k,n}(E) \geq t_{q+1,n-1}(E) - \xi^{n-1} + j\xi^n .$$

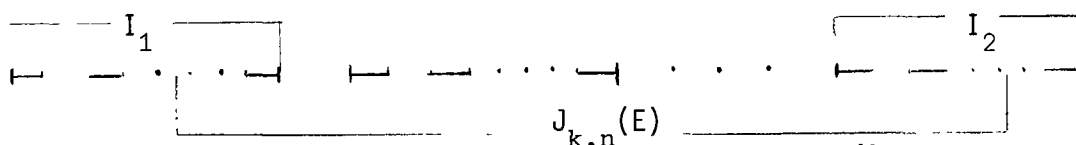
Par hypothèse de récurrence

$$t_{q+1,n-1}(E) \geq t_{q+1,n-1}(E_0) ,$$

d'où

$$t_{k,n}(E) \geq t_{q+1,n-1}(E_0) - \xi^{n-1} + j\xi^n \geq t_{k,n}(E_0) .$$

Situation 3: Aucune des deux extrémités de $J_{k,n}(E)$ ne coïncide avec une extrémité d'intervalle blanc de la $(n-1)^{\text{ième}}$ étape.



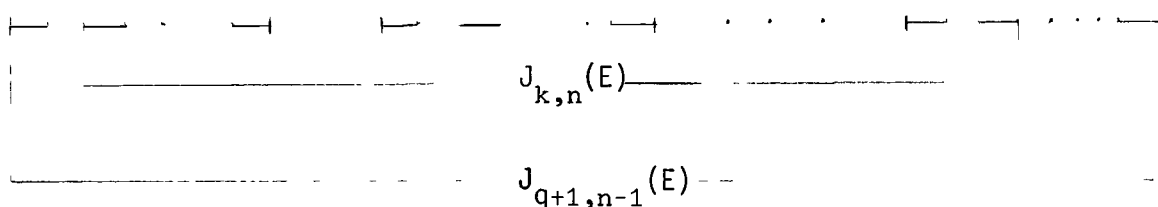
Soient I_1 et I_2 les deux intervalles blancs de la $(n-1)^{\text{ième}}$ étape qui

contiennent les extrémités de $J_{k,n}(E)$, et soient j_1 et j_2 les nombres respectifs d'intervalles blancs de la $n^{\text{ième}}$ étape situés dans $I_1 \cap J_{k,n}(E)$ et $I_2 \cap J_{k,n}(E)$.

Distinguons 2 cas:

a) Supposons que $j_1 + j_2 > v$. Alors

$$t_{k,n}(E) \geq t_{q+1,n-1}(E) - \xi^{n-1} + j\xi^n.$$



Par hypothèse de récurrence, on a

$$t_{q+1,n-1}(E) \geq t_{q+1,n-1}(E_0),$$

d'où

$$t_{k,n}(E) \geq t_{q+1,n-1}(E_0) - \xi^{n-1} + j\xi^n \geq t_{k,n}(E_0).$$

b) Supposons que $j_1 + j_2 \leq v$. Alors, on a

$$t_{k,n}(E) \geq t_{q+2,n-1}(E) - 2\xi^{n-1} + j\xi^n.$$

Par hypothèse de récurrence

$$t_{q+2,n-1}(E) \geq t_{q+2,n-1}(E_0),$$

d'où

$$t_{k,n}(E) \geq t_{q+2,n-1}(E_0) - 2\xi^{n-1} + j\xi^n \geq t_{k,n}(E_0),$$

ce qui termine la démonstration.

CHAPITRE IV

UN PROBLEME D'ARITHMETIQUE

Soit q un entier ≥ 3 , et $D \subset \{0, 1, \dots, q-1\}$ un sous-ensemble fixé de v chiffres (de la représentation en base q). Posons

$$A = \left\{ \sum_{j=0}^{\ell} a_j q^j : \ell \geq 1 \text{ et } a_j \in D \text{ pour tout } j \geq 0 \right\}.$$

Soit σ la densité exponentielle de A , de sorte que $\sigma = \alpha = \log v / \log q$ d'après le corollaire 1.3.3 (ce corollaire était démontré sous l'hypothèse $0 \in D$; toutefois, par une légère modification de l'argumentation on obtient le même résultat lorsque $0 \notin D$).

Soit $A(x)$ la fonction dénombrante de A (en anglais: counting function) définie par

$$A(x) = \text{card}\{a \in A : a = \sum_{j=0}^r b_j q^j < x \text{ où } r = [\log x / \log q] \text{ et } b_j \in D, j \geq 0\}.$$

(En particulier, cette fonction se définit plus simplement par $A(x) = \sum_{\substack{a < x \\ a \in A}} 1$ lorsque $0 \in D$.)

Conformément à la remarque qui suit le corollaire 1.3.3, nous allons préciser le corollaire 1.3.3 en calculant explicitement les quantités

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} x^\alpha / A(x) \quad \text{et} \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} x^\alpha / A(x).$$

Ce sera l'objet de ce chapitre.

4.1 Le parfait homogène E_A associé à A

Associions à A un parfait homogène au sens large de type $(v, 1/q)$, à savoir l'ensemble $E_A \subset [0, 1]$ défini par

$$E_A = \{ \sum_{j=0}^{\infty} b_j / q^{j+1} : b_j \in D \text{ pour tout } j \geq 0 \} .$$

Les intervalles blancs $I_1, I_2, \dots, I_v$ de la 1^{ière} étape de construction de E_A sont donnés par

$$[i/q, (i+1)/q], \quad \text{où } i \text{ parcourt } D .$$

Posons

$$r = \min D \quad \text{et} \quad s = q - \max D .$$

Soit L la fonction de Cantor-Lebesgue sur E . On observe que pour tout entier $m = b_0 + b_1 q + \dots + b_\ell q^\ell$ (où $0 \leq b_j \leq q-1$, $b_\ell \neq 0$)

$$L(m/q^{\ell+1}) = L\left(\frac{b_\ell}{q} + \frac{b_{\ell-1}}{q^2} + \dots + \frac{b_0}{q^{\ell+1}}\right) = A(m)/v^{\ell+1} .$$

Par conséquent,

$$\frac{(m/q^{\ell+1})^\alpha}{L(m/q^{\ell+1})} = \frac{m^\alpha / q^{\alpha(\ell+1)}}{A(m)/v^{\ell+1}} = \frac{m^\alpha}{A(m)} .$$

Puisque les rationnels q -adiques sont denses dans $[0,1]$, on a

$$\sup_{m > r} \frac{m^\alpha}{A(m)} = \sup_{\frac{r}{q-1} < t \leq 1} \frac{t^\alpha}{L(t)} ,$$

et

$$\inf_{m > r} \frac{m^\alpha}{A(m)} = \inf_{\frac{r}{q-1} < t \leq 1} \frac{t^\alpha}{L(t)} .$$

D'autre part, E_A a pour enveloppe convexe l'intervalle

$[r/(q-1), 1 - s/(q-1)]$. De plus, E_A est également le parfait homogène au sens large de type $(v, 1/q)$ dont les intervalles blancs de la 1^{ière} étape de construction sont

$$\tilde{I}_i = \left[\frac{i}{q} + \frac{r}{q(q-1)}, \frac{(i+1)}{q} - \frac{s}{q(q-1)} \right], \quad \text{où } i \text{ parcourt } D .$$

La fonction de Cantor-Lebesgue L sur E_A est donc complètement déterminée par les v intervalles blancs $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_v$.

De façon plus générale, démontrons l'énoncé suivant:

PROPOSITION 4.1.1 Soit E un parfait homogène au sens large de type (v, ξ) , construit sur l'intervalle fondamental $[a, b] \subseteq [0, 1]$ et de diamètre $b-a$. Soit $d_{k,n}$ l'extrémité droite du $k^{\text{ième}}$ (à partir de la gauche) intervalle blanc de la $n^{\text{ième}}$ étape, et soit $g_{k,n}$ l'extrémité gauche du $(k+1)^{\text{ième}}$ intervalle blanc de cette $n^{\text{ième}}$ étape. Convenons que $g_{v^n, n} = 1$ pour tout $n \geq 1$. Soit L la fonction de Cantor-Lebesgue de E prolongée sur $[0, 1]$. (On pose, $L(t) = 0$ sur $[0, a]$ et $L(t) = 1$ sur $[b, 1]$). Notons par $n(k)$ le plus petit entier $\geq \log k / \log v$. Alors

$$\inf_{a < t \leq 1} \frac{t^\alpha}{L(t)} = \min_{1 \leq k \leq v^m} \frac{v^{n(k)}}{k} d_{k, n(k)}^\alpha$$

$$\sup_{a < t \leq 1} \frac{t^\alpha}{L(t)} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a \neq 0 \\ \max_{1 \leq k \leq v^m} \frac{v^{n(k)}}{k} g_{k, n(k)}^\alpha, & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

où $\alpha = -\log v / \log \xi$, et

$$m = \begin{cases} v-1, & \text{si } \xi^{-1} \geq v+1 \text{ et } v = 2, v \geq 5 \\ v, & \text{si } \xi^{-1} > v \text{ et } v = 2, 3, 4 \text{ et } 5 \\ v+1, & \text{si } \xi^{-1} > v \text{ et } v \geq 6 \end{cases}$$

COROLLAIRE 4.1.2 Si $E = E_A$, alors

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{m^\alpha}{A(m)} = \inf_{m > r} \frac{m^\alpha}{A(m)} = \min_{1 \leq k \leq v^v} \frac{v^{n(k)}}{k} d_{k, n(k)}^\alpha$$

où, pour tout $n \leq v$ on a

$$\{d_{k,n} : 1 \leq k \leq v^n\} = \{(\sum_{j=1}^{n-1} a_j/q^j) + (a_n+1)/q^n - s/(q^n(q-1)) : a_j \in D, j = 1, 2, \dots, n\}$$

et

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{m^\alpha}{A(m)} = \sup_{m > r} \frac{m^\alpha}{A(m)} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } r \neq 0 \\ \max_{1 \leq k \leq v} \frac{v^{n(k)}}{k} g_{k,n(k)}^\alpha, & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

où, pour tout $n \leq v$ on a

$$\{g_{k,n} : 1 \leq k \leq v^{n-1}\} = \{(\sum_{j=1}^n a_j/q^j) + r/(q^n(q-1)) : a_j \in D, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Démonstration du corollaire: Le parfait homogène E_A est de type $(v, 1/q)$

où $v \leq q-1$. On a donc $q = \xi^{-1} \geq v+1$. Les formules ci-dessus qui expriment $g_{k,n}$ et $d_{k,n}$ en fonction de la base q et de l'ensemble D sont obtenues

directement de la définition de E_A .

De plus, on remarque que pour tout $m_0 > r$, $m_0^\alpha/A(m_0)$ est un point d'accumulation de l'ensemble $\{m^\alpha/A(m) : m > r\}$. En effet, posons $m_0 = b_0 + b_1 q + \dots + b_\ell q^\ell$. On a

$$A(q^n m_0) = v^n A(m_0)$$

pour tout $n \geq 1$. Par ailleurs, puisque

$$q^n m_0 - 1 = q^{-1} + (q-1)q + \dots + (q-1)q^{n-1} + (b_0-1)q^n + b_1 q^{n+1} + \dots + b_\ell q^{n+\ell}$$

on a

$$A(q^n m_0 - 1) = \begin{cases} A(q^n m_0) - 1, & \text{si } q^{-1}, b_0 - 1, b_1, \dots, b_\ell \in D \\ A(q^n m_0), & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent, ou bien $A(q^n m_0 - 1) = v^n A(m_0)$ pour tout $n \geq 1$, ou bien

$A(q^n m_0 - 1) = v^n A(m_0) - 1$ pour tout $n \geq 1$. Dans le premier de ces deux cas,

on a

$$(q^{nm_0}-1)^\alpha/A(q^{nm_0}-1) = (m_0-1/q^n)^\alpha/A(m_0)$$

ce qui croît strictement vers $m_0^\alpha/A(m_0)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Dans le second cas, on a

$$(q^{nm_0}-1)^\alpha/A(q^{nm_0}-1) = (m_0-1/q^n)^\alpha/(A(m_0)-1/v^n)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (m_0-1/q^n)^\alpha/(A(m_0)-1/v^n) = m_0^\alpha/A(m_0) .$$

De plus, pour tout $n \geq 1$

$$\frac{(q^{nm_0}-1)^\alpha}{A(q^{nm_0})-1} > \frac{(q^{nm_0})^\alpha}{A(q^{nm_0})} = \frac{m_0^\alpha}{A(m_0)}$$

car la fonction

$$\psi(t) = \frac{(q^{nm_0}+t)^\alpha}{A(q^{nm_0})+t}$$

est décroissante sur $[-1, \infty[$, par conséquent $m_0^\alpha/A(m_0)$ est un point d'accumulation, ce qui termine la démonstration du corollaire.

Démonstration de la proposition 4.1.1 Pour $k = 1, 2, \dots, v-1$ posons

$$\delta_k = g_{k,1} - d_{k,1} .$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} | & & | & & | & & | & & | & & | \\ 0 & a & \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_{v-1} & b & 1 \end{array}$$

Par construction de L , on a

$$\inf_{a < t \leq 1} \frac{t^\alpha}{L(t)} = \inf_{n \geq 1} \inf_{1 \leq k \leq v^n} \frac{d_{k,n}^\alpha}{L(d_{k,n})} = \inf_{k \geq 1} \inf_{n \geq n(k)} \frac{v^n d_{k,n}^\alpha}{k}$$

et

$$\sup_{a < t \leq 1} \frac{t^\alpha}{L(t)} = \sup_{n \geq 1} \sup_{1 \leq k \leq v^n} \frac{g_{k,n}^\alpha}{L(g_{k,n})} = \sup_{k \geq 1} \sup_{n \geq n(k)} \frac{v^n g_{k,n}^\alpha}{k} .$$

De plus, pour tout $k, \ell \geq 1$, on a les relations

$$d_{k,n(k)+\ell} = a + q^{-\ell}(d_{k,n(k)} - a) \text{ et } g_{k,n(k)+\ell} = a + q^{-\ell}(g_{k,n(k)} - a),$$

d'où

$$\frac{v^{n(k)+\ell}}{k} d_{k,n(k)+\ell}^\alpha = \frac{v^{n(k)}}{k} (d_{k,n(k)} + (q^\ell - 1)a)^\alpha \geq \frac{v^{n(k)}}{k} d_{k,n(k)}^\alpha$$

et

$$\frac{v^{n(k)+\ell}}{k} g_{k,n(k)+\ell}^\alpha = \frac{v^{n(k)}}{k} (g_{k,n(k)} + (q^\ell - 1)a) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{si } a \neq 0.$$

On a donc

$$\inf_{a < t \leq 1} \frac{t^\alpha}{L(t)} = \inf_{k \geq 1} \frac{v^{n(k)}}{k} d_{k,n(k)}^\alpha$$

ainsi que

$$\sup_{a < t \leq 1} \frac{t^\alpha}{L(t)} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a \neq 0 \\ \sup_{k \geq 1} \frac{v^{n(k)}}{k} g_{k,n(k)}^\alpha, & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Montrons par récurrence sur k que

$$\inf_{k \geq 1} \frac{v^{n(k)}}{k} d_{k,n(k)}^\alpha = \min_{1 \leq j \leq v^m} \frac{v^{n(j)}}{j} d_{j,n(j)}^\alpha$$

et

$$\sup_{k \geq 1} \frac{v^{n(k)}}{k} g_{k,n(k)}^\alpha = \max_{1 \leq j \leq v^m} \frac{v^{n(j)}}{j} g_{j,n(j)}^\alpha$$

où

$$m = \begin{cases} v-1, & \text{si } \xi^{-1} \geq v+1 \text{ et } v = 2, v \geq 5 \\ v, & \text{si } \xi^{-1} > v \text{ et } v = 2, 3, 4 \text{ et } 5 \\ v+1, & \text{si } \xi^{-1} > v \text{ et } v \geq 6. \end{cases}$$

Hypothèse de récurrence:

Soit $n \geq m$. Pour tout entier p vérifiant $1 \leq p \leq v^n$ il existe deux

entiers j_p et h_p vérifiant $1 \leq j_p \leq v^m$ et $1 \leq h_p \leq v^m$ tels que

$$\text{et} \quad (*) \quad \begin{cases} \frac{v^{n(p)}}{p} d_{p,n(p)}^\alpha \geq \frac{v^{n(j_p)}}{j_p} d_{j_p,n(j_p)}^\alpha \\ \frac{v^{n(p)}}{p} g_{p,n(p)}^\alpha \leq \frac{v^{n(h_p)}}{h_p} g_{h_p,n(h_p)}^\alpha \end{cases}$$

Etape de récurrence:

Soit k un entier tel que

$$v^n + 1 \leq k \leq v^{n+1}.$$

Alors $k = v^{n+1}$, ou bien

$$k = \varepsilon_n v^n + \varepsilon_{n-1} v^{n-1} + \dots + \varepsilon_1 v + \varepsilon_0$$

avec $\varepsilon_n \in \{1, 2, \dots, v-1\}$ et $\varepsilon_\ell \in \{0, 1, \dots, v-1\}$ pour $\ell = 0, 1, \dots, n-1$.

(i) Premièrement, si $k = v_p$ pour un certain entier $p \geq 1$ (c'est à dire si $\varepsilon_0 = 0$), alors

$$d_{k,n(k)} = d_{p,n(p)} \quad \text{et} \quad g_{k,n(k)} = g_{p,n(p)}$$

d'où

$$\frac{v^{n(k)}}{k} d_{k,n(k)}^\alpha = \frac{v^{n(p)}}{p} d_{p,n(p)}^\alpha \quad \text{et} \quad \frac{v^{n(k)}}{k} g_{k,n(k)}^\alpha = \frac{v^{n(p)}}{p} g_{p,n(p)}^\alpha.$$

Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$\frac{v^{n(k)}}{k} d_{k,n(k)}^\alpha \geq \min_{1 \leq j \leq v^m} \frac{v^{n(j)}}{j} d_{j,n(j)}^\alpha \quad \text{et} \quad \frac{v^{n(k)}}{k} g_{k,n(k)}^\alpha \leq \max_{1 \leq j \leq v^m} \frac{v^{n(j)}}{j} g_{j,n(j)}^\alpha.$$

(ii) Si $k \not\equiv 0 \pmod{v}$, alors montrons que

$$(1) \quad \frac{v^{n(k)}}{k} d_{k,n(k)}^\alpha \geq \frac{v^{n(k)}}{j_k} d_{j_k,n}^\alpha$$

et

$$(2) \quad \frac{v^{n(k)}}{k} g_{k,n(k)}^\alpha \leq \frac{v^n}{j_k^{-1}} g_{j_k^{-1},n}^\alpha$$

où $j_k = \varepsilon_n v^{n-1} + \varepsilon_{n-1} v^{n-2} + \dots + \varepsilon_2 v + \varepsilon_1 + 1$. Puisque $\varepsilon_0 \neq 0$, on a $\varepsilon_0 = v-i$ pour un certain i vérifiant $1 \leq i \leq v-1$.

Posons $\rho = \text{diam } E = b-a$, et $i' = v-i = \varepsilon_0$. Par construction de E , on a

$$(3) \quad d_{k+i,n(k)} = d_{k,n(k)} + i\rho \xi^{n(k)} + (\delta_{v-1} + \delta_{v-2} + \dots + \delta_{v-i}) \xi^{n(k)-1}$$

et

$$(4) \quad g_{k,n(k)} = g_{k-i',n(k)} + i'\rho \xi^{n(k)} + (\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{i'}) \xi^{n(k)-1}.$$

Par conséquent, si l'on pose $x = \xi^{-1}$ on a

$$(5) \quad x^{n(k)} d_{k+i,n(k)} = x^{n(k)} d_{k,n(k)} + i\rho + x (\delta_{v-1} + \delta_{v-2} + \dots + \delta_{v-i})$$

et

$$(6) \quad x^{n(k)} g_{k,n(k)} = x^{n(k)} g_{k-i',n(k)} + i'\rho + x(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{i'}).$$

De plus, puisque

$$\delta_{v-1} + \delta_{v-2} + \dots + \delta_{v-i} \leq \rho(1 - v\xi)$$

et

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{i'} \leq \rho(1 - v\xi)$$

on a

$$(7) \quad x^{n(k)} d_{k,n(k)} \geq x^{n(k)} d_{k+i,n(k)} - \rho(i+x-v)$$

et

$$(8) \quad x^{n(k)} g_{k,n(k)} \leq x^{n(k)} g_{k-i',n(k)} + \rho(i'+x-v).$$

Vu que $k+i \equiv 0 \pmod{v}$ et $k-i' \equiv 0 \pmod{v}$ on a d'après (i)

$$\frac{v^{n(k)}}{k+i} d_{k+i,n(k)}^\alpha = \frac{v^n}{j_k} d_{j_k,n}^\alpha \quad \text{et} \quad \frac{v^{n(k)}}{(k-i')} g_{k-i',n(k)}^\alpha = \frac{v^n}{(j_k^{-1})} g_{j_k^{-1},n}^\alpha$$

ce qui s'écrit également sous la forme

$$(9) \quad (x^{n(k)} d_{k+i, n(k)}) x^{\log j_k / \log v} = (x^n d_{j_k, n}) x^{\log(k+i) / \log v}$$

$$(10) \quad (x^{n(k)} g_{k-i', n(k)}) x^{\log(j_k-1) / \log v} = (x^n g_{j_k-1, n}) x^{\log(k-i') / \log v},$$

car $\alpha = \log x / \log v$. Pour démontrer (1) et (2), qui s'écrivent également sous la forme

$$(11) \quad (x^{n(k)} d_{k, n(k)}) x^{\log j_k / \log v} \geq (x^n d_{j_k, n}) x^{\log k / \log v}$$

et

$$(12) \quad (x^{n(k)} g_{k, n(k)}) x^{\log(j_k-1) / \log v} \leq (x^n g_{j_k-1, n}) x^{\log k / \log v},$$

il suffit, compte tenu de (7) et (8), de vérifier les inégalités

$$x^n d_{j_k, n} x^{\log(k+i) / \log v} - \rho(i+x-v) x^{\log j_k / \log v} \geq x^n d_{j_k, n} x^{\log k / \log v}$$

et

$$x^n g_{j_k-1, n} x^{\log(k-i') / \log v} + \rho(i'+x-v) x^{\log(j_k-1) / \log v} \leq x^n g_{j_k-1, n} x^{\log k / \log v}$$

c'est à dire

$$(13) \quad x^{\log(k+i) / \log v} \geq x^{\log k / \log v} + \frac{(i+x-v)x^{\log j_k / \log v}}{x^n d_{j_k, n} / \rho}$$

et

$$(14) \quad x^{\log(k-i') / \log v} + \frac{(i'+x-v)x^{\log(j_k-1) / \log v}}{x^n g_{j_k-1, n} / \rho} \leq x^{\log k / \log v}.$$

Par définition de $d_{j_k, n}$ et $g_{j_k-1, n}$, on a

$$d_{j_k, n} \geq \varepsilon_n \rho \xi + \varepsilon_{n-1} \rho \xi^2 + \dots + (\varepsilon_1 + 1) \rho \xi^n$$

$$g_{j_k-1, n} \geq \varepsilon_n \rho \xi + \varepsilon_{n-1} \rho \xi^2 + \dots + \varepsilon_1 \rho \xi^n$$

d'où

$$x^n d_{j_k, n} / \rho \geq \varepsilon_n x^{n-1} + \varepsilon_{n-1} x^{n-2} + \dots + \varepsilon_1 + 1$$

et

$$x^n g_{j_k-1, n} / \rho \geq \varepsilon_n x^{n-1} + \varepsilon_{n-1} x^{n-2} + \dots + \varepsilon_1 .$$

Posons

$$j_k(x) = \varepsilon_n x^{n-1} + \varepsilon_{n-1} x^{n-2} + \dots + \varepsilon_2 x + \varepsilon_1 + 1 .$$

Pour démontrer (13) et (14), il suffit donc de vérifier les inégalités

$$(15) \quad x^{\log(k+i)/\log v} \geq x^{\log k/\log v} + \frac{(i+x-v)x}{j_k(x)} \log j_k / \log v$$

et

$$(16) \quad x^{\log k/\log v} \geq x^{\log(k-i')/\log v} + \frac{(i'+x-v)x}{j_k(x)-1} \log(j_k-1) / \log v .$$

Puisque $k+i = v j_k$ et que $k-i' = v(j_k-1)$, les inégalités (15) et (16)

s'écrivent également

$$(17) \quad x^{\log(v j_k)/\log v} \geq x^{\log(v j_k - i)/\log v} + \frac{(i+x-v)x}{j_k(x)} \log j_k / \log v$$

$$(18) \quad x^{\log(v j_k - v + i')/\log v} \geq x^{\log(v j_k - v)/\log v} + \frac{(i'+x-v)x}{j_k(x)-1} \log(j_k-1) / \log v .$$

Il est suffisant de vérifier (17) et (18) pour $i = 1$ et $i' = 1$ respectivement car les fonctions

$$\Phi(t) = x^{\frac{\log(vj_k - t)/\log v}{}} + t \frac{x^{\frac{\log j_k/\log v}{j_k(x)}}}{j_k(x)}$$

et

$$\Psi(t) = x^{\frac{\log(vj_k - v + t)/\log v}{}} - t \frac{x^{\frac{\log(j_k - 1)/\log v}{(j_k(x) - 1)}}}{(j_k(x) - 1)}$$

sont décroissantes et croissantes en t respectivement sur l'intervalle $[1, v - 1]$. En effet,

$$\Phi'(t) = -\frac{(\log x)x^{\frac{\log(vj_k - t)/\log v}{}}}{(\log v)(vj_k - t)} + \frac{x^{\frac{\log j_k/\log v}{j_k(x)}}}{j_k(x)} < 0$$

si et seulement si

$$\frac{vj_k - t}{j_k(x)} < x^{\frac{\log(v - t/j_k)/\log v}{}} \frac{\log x}{\log v}$$

et

$$\Psi'(t) = \frac{(\log x)x^{\frac{\log(vj_k - v + t)/\log v}{}}}{(\log v)(vj_k - v + t)} - \frac{x^{\frac{\log(j_k - 1)/\log v}{(j_k(x) - 1)}}}{(j_k(x) - 1)} > 0$$

si et seulement si

$$\frac{(\log x)x^{\frac{\log((vj_k - v + t)/(j_k - 1))/\log v}{}}}{(\log v)} > \frac{(vj_k - v + t)}{(j_k(x) - 1)}$$

ce qui est vérifié pour tout $x > v$. Les deux inégalités à vérifier sont donc

$$(19) \quad x^{\frac{\log(vj_k)/\log v}{}} \geq x^{\frac{\log(vj_k - 1)/\log v}{}} + \frac{(x - v + 1)x^{\frac{\log j_k/\log v}{j_k(x)}}}{j_k(x)}$$

$$(20) \quad x^{\frac{\log(vj_k - v + 1)/\log v}{}} \geq x^{\frac{\log(vj_k - v)/\log v}{}} + \frac{(x - v + 1)x^{\frac{\log(j_k - 1)/\log v}{(j_k(x) - 1)}}}{j_k(x) - 1}.$$

Elles s'écrivent également sous la forme

$$(21) \quad 1 - \frac{(x-(v-1))}{xj_k(x)} \geq x^{\log(1-1/vj_k)/\log v}$$

et

$$(22) \quad x^{\log(1+1/(vj_k-v))/\log v} \geq 1 + \frac{x-(v-1)}{xj_k(x)-x}$$

Puisque $\log(1-1/vj_k) = -\log(1+1/(vj_k-1))$, (21) s'écrit

$$(23) \quad x^{\log(1+1/(vj_k-1))/\log v} \geq 1 + \frac{x-(v-1)}{xj_k(x)-x+v-1}$$

Montrons que (22) est vérifiée lorsque (23) est satisfaite. (Notons que (22) se vérifie directement si $v = 2$ avec $n = 1$.) Montrons que la fonction

$$\psi(t) = x^{\log(1+1/(vj_k-1-t))/\log v} - \frac{(x-(v-1))}{xj_k(x)-x-t+(v-1)}$$

est croissante sur $[0, v-1]$. On a $\psi'(t) > 0$ si et seulement si

$$(24) \quad \frac{(\log x)x^{\log(1+1/(vj_k-1-t))/\log v}}{(\log v)(vj_k-1-t)(vj_k-t)} > \frac{(x-(v-1))}{(xj_k(x)-x-t+(v-1))^2},$$

l'égalité ayant lieu seulement à $x = v$. De plus, pour t fixé, le membre gauche de (24) est visiblement croissant en x sur $[v, \infty[$. Soit $g(x)$ le membre droit de (24). Alors $g'(x) < 0$ si et seulement si

$$xj_k(x) - x - t + (v-1) < 2(x-(v-1))(xj'_k(x) + j_k(x) - 1)$$

c'est à dire

$$(25) \quad (2(v-1)-x)(j_k(x)-1) < 2(x-(v-1))xj'_k(x) + t - (v-1).$$

Puisque $j_k(x) = \varepsilon_n x^{n-1} + \varepsilon_{n-1} x^{n-2} + \dots + \varepsilon_2 x + \varepsilon_1 + 1$,

(25) sera démontré si l'on vérifie que

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(\dots)x^{n-1} &= \varepsilon_{n-1}(v-1)x^{n-1} + \dots + \varepsilon_2(v-2)x - \varepsilon_1(v-2) + v-1-t \\ &< 2\varepsilon_n(n-1)x^{n-1} + 2\varepsilon_{n-1}(n-1)x^{n-1} + \dots + 2\varepsilon_2x, \end{aligned}$$

ce qui est vérifié pour tout $x > v$ et tout $n \geq v-1$ où $v \geq 2$ et tout $n \geq v$ où $v \geq 2$.

Il nous suffit donc de vérifier l'inégalité (23), inégalité que l'on écrit sous la forme

$$(26) \quad x - \frac{(x-(v-1))}{j_k(x)} - x^{\frac{\log(v-1/j_k)/\log v}{x}} \geq 0.$$

Soit $f(x)$ le membre gauche de (26). On a $f(v) = 0$, et

$$f'(x) = 1 - \frac{(j'_k(x)(x-(v-1)) - j_k(x))}{j_k(x)^2} - \frac{\log(v-1/j_k)}{x \log v} x^{\frac{\log(v-1/j_k)/\log v}{x}}.$$

Si $j'_k(x)(x-(v-1)) - j_k(x) > 0$, alors on a $f'(x) > 0$. D'autre part, si

$j'_k(x)(x-(v-1)) - j_k(x) < 0$, alors on a $f''(x) > 0$ car

$$f''(x) \geq \frac{2j'_k(x)}{j_k(x)^2} - \frac{(x-(v-1))j''_k(x)}{j_k(x)^2} - \frac{(x-(v-1))2(j'_k(x))^2}{j_k(x)^3} > 0.$$

Par conséquent, ou bien $f'(x) > 0$ sur $[v, \infty[$, ou bien $f'(x) < 0$ sur un intervalle de la forme $[v, x_0[$ et $f'(x) > 0$ sur $]x_0, \infty[$. Puisque $f(v) = 0$, il suffit, pour montrer que $f(x) > 0$ sur $[v+1, \infty[$, de vérifier que $f(v-1) > 0$. En posant $x = v-1$ dans (26) on obtient l'inégalité

$$(27) \quad (v+1)^{\frac{\log(1/(vj_k-1))/\log v}{(v+1)}} \left(1 - \frac{2}{(v+1)j_k(v+1)}\right) \geq 1.$$

Vérifions (27) lorsque $v = 2$ et $n = v-1 = 1$. On a alors $j_k = \varepsilon_1 + 1 = 2$

et (27) devient

$${}_3 \log(1+1/3)/\log 2 (1-2/6) \approx 1.05 > 1 .$$

Supposons que $v \geq 3$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\log(1+1/(vj_k-1))/\log v}{(v+1)} &= e^{\frac{\log(1+1/(vj_k-1))\log(v+1)/\log v}{(v+1)}} \\ &> 1 + \frac{\log(v+1)}{\log v} \log(1+ \frac{1}{vj_k-1}) \end{aligned}$$

et par conséquent, pour vérifier (27), il suffit de démontrer l'inégalité

$$(1+ \frac{\log(v+1)}{\log v} \log(1+ \frac{1}{vj_k-1})) (1- \frac{2}{(v+1)j_k(v+1)}) \geq 1$$

c'est à dire

$$(28) \quad \frac{\log(v+1)}{\log v} \log(1+ \frac{1}{vj_k-1}) (v+1)j_k(v+1) \geq 2 (1+ \frac{\log(v+1)}{\log v} \log(1+ \frac{1}{vj_k-1})) .$$

Il est donc suffisant de vérifier l'inégalité

$$(29) \quad \frac{\log(v+1)}{\log v} (v+1)j_k(v+1)\log(1+ \frac{1}{vj_k-1}) \geq 2 (1+ \frac{\log(v+1)}{\log v} \log(1+ \frac{1}{v^{n+v-1}}))$$

Montrons qu'il suffit de vérifier (29) lorsque

$$j_k(x) = x^{n-1} + (v-1)x^{n-2} + (v-1)x^{n-3} + \dots + (v-1) + 1$$

$$j_k = v^{n-1} + (v-1)v^{n-2} + (v-1)v^{n-3} + \dots + (v-1) + 1$$

A cet effet, posons

$$g(t_1, \dots, t_n) = (t_n(v+1)^{n-1} + \dots + t_2(v+1) + t_1 + 1) \log(1+ \frac{1}{t_n v^n + \dots + t_2 v^2 + t_1 v + v-1})$$

où $t_n \in [1, v-1]$ et $t_\ell \in [0, v-1]$ pour $\ell = 1, 2, \dots, n-1$. On a

$$\frac{\partial g}{\partial t_\ell} = (v+1)^{\ell-1} \log(1+ \frac{1}{vj_k-1}) - \frac{j_k(v+1)v^\ell}{(vj_k-1)^2 + vj_k-1} < 0$$

si et seulement si

$$(30) \quad \log\left(1 + \frac{1}{vj_k^{-1}}\right) < \frac{v^{\ell-1}}{(v+1)^{\ell-1}} \frac{j_k(v+1)}{j_k} \frac{1}{(vj_k^{-1})}.$$

De plus, pour $\ell = 1, 2, \dots, n-1$, on a

$$\frac{v^{\ell-1} j_k(v+1)}{(v+1)^{\ell-1} j_k} = \frac{t_n v^{\ell-1} (v+1)^{n-1} + \dots + t_2 v^{\ell-1} (v+1) + (t_1 + 1) v^{\ell-1}}{t_n v^{n-1} (v+1)^{\ell-1} + \dots + t_2 v (v+1)^{\ell-1} + (t_1 + 1) (v+1)^{\ell-1}} > 1.$$

En effet, puisque $\left(\frac{v}{v+1}\right)^{\ell-1}$ décroît en ℓ , il suffit de vérifier cette

dernière inégalité pour $\ell = n-1$, ce qui est immédiat, car

$$(v(v+1))^{n-2} > (v-1)((v+1)v)^{n-3} + (v-1)((v+1)^2 - v^2)((v+1)v)^{n-4} + \dots + (v-1)((v+1)^{n-3} - v^{n-3})((v+1)v) + v((v+1)^{n-2} - v^{n-2}).$$

On a donc $\partial g / \partial t_\ell < 0$ pour $\ell = 1, 2, \dots, n-1$.

Montrons, d'autre part, que $g((v-1), \dots, (v-1), t_n)$ est une fonction croissante de t_n sur $[1, v-1]$. On a, pour $\ell = n$ et

$$t_1 = \dots = t_{n-1} = v-1,$$

$$\begin{aligned} \frac{v^{\ell-1} j_k(v+1)}{(v+1)^{\ell-1} j_k} &= \frac{v^{n-1} (t_n (v+1)^{n-1} + (v-1)((v+1)^{n-2} + \dots + (v+1) + 1))}{(v+1)^{n-1} (t_n v^{n-1} + (v-1)(v^{n-2} + \dots + v + 1) + 1)} \\ &= 1 - \frac{((v+1)^{n-1} - 1)}{v(v+1)^{n-1} (t_n + 1)}. \end{aligned}$$

Puisque $\log\left(1 + \frac{1}{vj_k^{-1}}\right) > \frac{1}{(vj_k^{-1})} \left(1 - \frac{1}{2(vj_k^{-1})}\right)$, il suffit, pour montrer que

$\partial g / \partial t_n \Big|_{t_1 = \dots = t_{n-1} = v-1} > 0$, d'observer que

$$\frac{1}{vj_k^{-1}} \left(1 - \frac{1}{2(vj_k^{-1})}\right) > \frac{1}{vj_k^{-1}} \left(1 - \frac{((v+1)^{n-1} - 1)}{v(v+1)^{n-1} (t_n + 1)}\right)$$

c'est à dire que

$$\frac{(v+1)^{n-1}-1}{v(v+1)^{n-1}(t_n+1)} > \frac{1}{2(vj_k-1)} .$$

Il suffit donc de vérifier (29) lorsque $t_n=1$ et $t_1=\dots=t_{n-1}=v-1$, c'est à dire lorsque

$$j_k = v^{n-1} + (v-1)v^{n-2} + \dots + (v-1)v + (v-1) + 1 = 2v^{n-1}$$

et

$$\begin{aligned} j_k(v+1) &= (v+1)^{n-1} + (v-1)((v+1)^{n-2} + \dots + (v+1) + 1) + 1 \\ &= (v+1)^{n-1} + \frac{(v-1)}{v}((v+1)^{n-1} - 1) + 1 . \end{aligned}$$

L'inégalité (29) devient alors

$$(31) \quad \frac{\log(v+1)}{\log v} \left((v+1)^n + \frac{(v^2-1)}{v} ((v+1)^{n-1}-1) + (v+1) \right) \log \left(1 + \frac{1}{2v^{n-1}} \right) \geq$$

$$1 + \frac{\log(v+1)}{\log v} \log \left(1 + \frac{1}{v^{n+v-1}} \right) .$$

En posant $v = 5$ et $n = v-1 = 4$ dans (31) on obtient

$$2.07955 > 2.003537 .$$

En posant $v = 5$ et $n = v = 5$ dans (31) on obtient

$$2.493603 > 2.000711 .$$

De même, on vérifie directement (31) pour $v = 6$ et $n = 5$ et 6 .

Supposons maintenant que $v \geq 7$. Puisque $\log(1 + \frac{1}{vj_k-1}) > \frac{1}{vj_k}$, pour

démontrer (29) il suffit de vérifier que

$$\frac{(v+1)}{v} \frac{j_k(v+1)}{j_k(v)} \geq 2 \left(1 + \frac{\log(v+1)}{\log v} \log \left(1 + \frac{1}{v^{n+v-1}} \right) \right) ,$$

c'est à dire,

$$\frac{(v+1)}{v} \frac{((v+1)^{n-1} + (v-1)((v+1)^{n-1}-1)/v + 1)}{2v^{n-1}} \geq 2 \left(1 + \frac{\log(v+1)\log(1 + \frac{1}{v^{n+v-1}})}{\log v}\right)$$

ce qu'on écrit plus simplement

$$(32) \quad (1 - 1/(2v))((v+1)/v)^n + (v+1)/(2v^{n+1}) \geq 2 \left(1 + \frac{\log(v+1)\log(1 + \frac{1}{v^{n+v-1}})}{\log v}\right).$$

Pour $n = v-1$ et pour $n = v$, l'expression $(1 - 1/(2v))((v+1)/v)^n$ croît vers e lorsque $v \rightarrow \infty$. De plus,

$$(1 - 1/(2(7))) (8/7)^6 = 2.06903 > 2 \left(1 + \frac{\log 8 \log(1 + 1/(7^{6+7-1}))}{\log 7}\right).$$

Par conséquent, (32) est vérifiée pour tout $v \geq 7$ avec $n = v-1$ et $n = v$.

Considérons de nouveau $f(x)$, le membre gauche de (26). Si $f'(v) > 0$, alors $f(x) > 0$ sur $]v, \infty[$. Montrons que pour $v = 2, 3, 4$ et 5 et $n = v$ on a $f'(v) > 0$. On a $f'(v) > 0$ si et seulement si

$$1 + (j'_k(v) - j_k)/j_k^2 > v^{-1}(v - 1/j_k) \log(v - 1/j_k) / \log v,$$

c'est à dire

$$1 > (vj_k - 1) \log(1 - 1/vj_k) / \log v + v(j_k - j'_k(v)) / j_k,$$

que l'on écrit également

$$(33) \quad 1 + (vj_k - 1) \log(1 + 1/(vj_k - 1)) / \log v > v(1 - j'_k(v)/j_k).$$

Puisque $\log(1 + 1/(vj_k - 1)) > (1 - 1/(2(vj_k - 1))) / (vj_k - 1)$, il suffit, pour démontrer (33), de vérifier l'inégalité

$$1 + (1 - 1/(2(vj_k - 1))) / \log v > v(1 - j'_k(v)/j_k)$$

c'est à dire

$$(34) \quad (\log v)(vj'_k(v)) > j_k((v-1)\log v - 1) + j_k/(2(vj_k - 1)).$$

Vérifions (33) pour $v = 2$ et (34) pour $v = 3, 4$ et 5 . On a

$$j_k = \varepsilon_v v^{v-1} + \varepsilon_{v-1} v^{v-2} + \dots + \varepsilon_2 v + \varepsilon_1 + 1$$

et

$$vj'_k(v) = \varepsilon_v(v-1)v^{v-1} + \varepsilon_{v-1}(v-2)v^{v-2} + \dots + \varepsilon_2 v.$$

Si $v = 2$, $j_k = \varepsilon_2 \cdot 2 + \varepsilon_1 + 1 = 3 + \varepsilon_1$ (car $1 \leq \varepsilon_2 \leq v-1=1$) et $j'_k(v) = \varepsilon_2 = 1$.

Alors, (33) devient

$$1 + (2(3+\varepsilon_1)-1)\log(1+1/(2(3+\varepsilon_1)-1))/\log 2 \geq 2(1-1/(3+\varepsilon_1)),$$

c'est à dire

$$1 + 5\log(1+1/5)/\log 2 \approx 2.315 > 2(1-1/3)$$

si $\varepsilon_1 = 0$, et

$$1 + 7\log(1+1/7)/\log 2 = 2.349 > 2(1-1/4)$$

si $\varepsilon_1 = 1$.

Si $v = 3$,

$$\begin{aligned} (\log v)(vj'_k(v)) - ((v-1)\log v - 1)j_k &= 9\varepsilon_3 - 3(\log 3 - 1)\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - 1 \\ &> 9 - 6(\log 3 - 1) - 3 \\ &> 5. \end{aligned}$$

Si $v = 4$,

$$\begin{aligned} (\log v)(vj'_k(v)) - ((v-1)\log v - 1)j_k &= 4^3\varepsilon_4 - ((\log 4 - 1)\varepsilon_3 4^2 + (2\log 4 - 1)\varepsilon_2 4 + \varepsilon_1 + 1) \\ &> 4^3 - ((\log 4 - 1)3 \cdot 4^2 + (2\log 4 - 1)3 \cdot 4 + 3 + 1) \\ &> 20. \end{aligned}$$

Si $v = 5$,

$$\begin{aligned} (\log v)(vj'_k(v)) - ((v-1)\log v - 1)j_k &= \\ \varepsilon_5 5^4 - ((\log 5 - 1)\varepsilon_4 5^3 + (2\log 5 - 1)\varepsilon_3 5^2 + (3\log 5 - 1)\varepsilon_2 5 + \varepsilon_1 + 1) \\ &> 5^4 - ((\log 5 - 1)4 \cdot 5^3 + (2\log 5 - 1)4 \cdot 5^2 + (3\log 5 - 1)4 \cdot 5 + 4 + 1) > 16. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{j_k}{2(vj_k-1)} < 1$, (34) est vérifiée pour $v = 3, 4$ et 5 . (On observe

que (33) n'est plus satisfait lorsque $v \geq 6$).

Supposons maintenant que $n \geq v+1$ pour tout $v \geq 2$. Pour compléter la démonstration de la proposition 4.1.1, il suffit de vérifier l'inégalité (21) pour tout $x > v$. Posons $\phi(x) = 1 - 1/j_k(x) + (v-1)/(xj_k(x))$. Alors (21) s'écrit

$$(35) \quad \phi(x) \geq x^{\log(1-1/vj_k)/\log v},$$

l'égalité ayant lieu à $x = v$. Le membre droit de (35) est une fonction décroissante de x sur $[v, \infty[$. D'autre part,

$\phi'(x) = j'_k(x)/j_k(x)^2 - (v-1)(j_k(x) + xj'_k(x))/(x^2 j_k(x)^2) > 0$ si et seulement si $(x-(v-1))xj'_k(x) > (v-1)j_k(x)$. Montrons que $xj'_k(x) > (v-1)j_k(x)$.

On a

$$xj'_k(x) = \varepsilon_n(n-1)x^{n-1} + \varepsilon_{n-1}(n-2)x^{n-2} + \dots + \varepsilon_2 x$$

et

$$(v-1)j_k(x) = \varepsilon_n(v-1)x^{n-1} + \varepsilon_{n-1}(v-1)x^{n-2} + \dots + (v-1)\varepsilon_2 x + (v-1)(\varepsilon_1 + 1),$$

d'où

$$\begin{aligned} xj'_k(x) - (v-1)j_k(x) &= \varepsilon_n(n-v)x^{n-1} + \varepsilon_{n-1}(n-v-1)x^{n-2} \\ &\quad - (\varepsilon_{n-2}(v-n+2)x^{n-3} + \dots + (v-2)\varepsilon_2 x + (v-1)(\varepsilon_1 + 1)) \\ &> (n-v)x^{n-1} + (n-v-1)x^{n-2} - (v-1)((v-n+2)x^{n-3} + \dots + (v-2)x + v) > 0. \end{aligned}$$

$\phi(x)$ est donc croissant en x sur $[v, \infty[$, et par conséquent l'inégalité (35) est vérifiée pour tout $x > v$.

Ceci termine la démonstration de la proposition 4.1.1

4.2 Un cas particulier

Nous considérons maintenant un cas particulier du corollaire 4.1.2.

PROPOSITION 4.2.1 Soient r, s et p trois entiers ≥ 0 tels que

$$r + s + v + (v-1)p = q.$$

Lorsque l'ensemble D est de la forme

$$D = \{r + k(p+1) : k = 0, 1, \dots, v-1\},$$

on a

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{A(x)} = \left(1 - \frac{s}{q-1}\right)^\alpha \text{ et } \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{A(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{si } r > 0 \\ (\rho + \delta q)^\alpha, & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

$$\text{où } \rho = 1 - \frac{r+s}{(q-1)} \text{ et } \delta = \frac{p}{q} + \frac{r+s}{q(q-1)}.$$

Si en plus, $p = 0$, on a donc

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{A(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{si } r > 0 \\ 1, & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

Démonstration: Considérons le cas $r = 0$: d'après le corollaire 4.1.2

on a

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{A(x)} = \inf_{0 < t \leq 1} \frac{t^\alpha}{L(t)}.$$

D'autre part, selon le corollaire 1.4.2, on a

$$H^\alpha(E_A) = \inf_{0 < t \leq \rho} \frac{t^\alpha}{\omega_L(t)}$$

où $\omega_L(t) = \sup_{0 < x-y=t} (L(x) - L(y))$. Par conséquent,

$$H^\alpha(E_A) \leq \inf_{0 < t \leq \rho} \frac{t^\alpha}{L(t)} = \inf_{0 \leq t \leq 1} \frac{t^\alpha}{L(t)}.$$

De plus,

$$\left(1 - \frac{s}{q-1}\right)^\alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m^\alpha}{L(t_m)},$$

où $t_m = 1 - \sum_{r=1}^m \frac{s}{q^r}$, d'où

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{A(x)} \leq \left(1 - \frac{s}{q-1}\right)^\alpha.$$

D'autre part, d'après la proposition 3.2.1, on a

$$H(E_A) = \left(1 - \frac{s}{q-1}\right)^\alpha.$$

Par conséquent,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{A(x)} = \left(1 - \frac{s}{q-1}\right)^\alpha.$$

Par ailleurs, on a selon la proposition 4.1.1

$$\sup_{0 < t \leq 1} \frac{t^\alpha}{L(t)} = \max_{1 \leq k \leq v} \frac{v^{n(k)}}{k} g_{k,n(k)}^\alpha.$$



D'après le diagramme ci-haut de la 1^{ière} étape de dissection de

l'intervalle fondamental $[0, 1 - \frac{s}{q-1}]$, on a

$$g_{k,1} = k(\rho\xi + \delta), \quad k = 1, 2, \dots, v-1$$

où $\xi = 1/q$. Par convention, on a toujours $g_{v,1} = 1$.

Par conséquent,

$$v g_{k,1}^\alpha / k = k^{\alpha-1} v(\rho\xi + \delta)^\alpha \leq v(\rho\xi + \delta)^\alpha = v g_{1,1}^\alpha.$$

Mais,

$$\rho\xi+\delta = \xi \text{ si } p = 0, \text{ et } \rho\xi+\delta > \xi \text{ si } p > 0 ,$$

d'où

$$vg_{1,1}^\alpha = 1 \text{ si } p = 0, \text{ et } vg_{1,1}^\alpha > 1 \text{ si } p > 0.$$

De plus, si k est de la forme

$$k = \varepsilon_{n-1}v^{n-1} + \varepsilon_{n-2}v^{n-2} + \dots + \varepsilon_1v + i, \quad n \geq 2$$

avec $0 \leq \varepsilon_j \leq v-1$ pour $j = 0, 1, \dots, n-2$, $1 \leq \varepsilon_{n-1} \leq v-1$ et $0 \leq i \leq v-1$, on a par

construction de E_A ,

$$g_{k,n} = \varepsilon_{n-1}(\rho\xi+\delta) + \varepsilon_{n-2}(\rho\xi^2+\delta\xi) + \dots + \varepsilon_1(\rho\xi^{n-1}+\delta\xi^{n-2}) + i(\rho\xi^n+\delta\xi^{n-1}) .$$

D'où

$$q^n g_{k,n} = \rho(P(q)+i) + \delta q(P(q)+i) = (P(q)+i)(\rho+\delta q)$$

où $q = \xi^{-1}$ et $P(q) = \varepsilon_{n-1}q^{n-1} + \varepsilon_{n-2}q^{n-2} + \dots + \varepsilon_1q$. Par conséquent,

$$v^n g_{k,n}^\alpha / k = \frac{(P(q)+i)^\alpha}{(P(v)+i)^\alpha} (\rho+\delta q)^\alpha .$$

Mais la fonction

$$\psi(t) = (K_1+t)^\alpha / (K_2+t)$$

où $K_1 \geq K_2$ sont deux constantes positives, est décroissante en t sur $[0, \infty[$

car $\psi'(t) < 0$ si et seulement si $\alpha(K_2+t) < K_1+t$, ce qui est toujours vrai

puisque $\alpha < 1$. On a donc,

$$v^n g_{k,n}^\alpha / k \leq \frac{P(q)^\alpha}{P(v)^\alpha} (\rho+\delta q)^\alpha .$$

Mais puisque $q^\alpha = v$, on a

$$\frac{p(q)^2}{P(\cdot)} = \frac{(\varepsilon_{n-1} q^{r-2} - \varepsilon_{n-2} q^{r-3} - \dots - \varepsilon_2 q - \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_{n-1} q^{r-2} - \varepsilon_{n-2} q^{r-3} - \dots - \varepsilon_2 q - \varepsilon_1}.$$

Par récurrence, on a donc

$$r g_{k,n}^2/k \leq \varepsilon_n^2 (c - \delta q)^2 / \varepsilon_n \leq (c - \delta q)^2 = (c \xi - \delta)^2,$$

et par conséquent,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{A(x)} = (c - \delta q)^2.$$

Supposons maintenant que $x \geq 1$: considérons la 1^{ère} étape de dissection dans la construction du parfait homogène E_A de diamètre $c = b-a$ sur

l'intervalle fondamental $[a, b] = [\frac{r}{q-1}, \frac{s}{q-1}]$.

$$\begin{array}{ccccccc} & \overline{\quad} & \delta & \overline{\quad} & \delta & \overline{\quad} & \dots & \overline{\quad} & \delta & \overline{\quad} & \\ \text{c} & a & & & & & & & & & b & \text{c} \end{array}$$

En conservant la notation de la proposition 4.1.1, on a

$$\inf_{a < t \leq 1} \frac{t^2}{L(t)} = \min_{1 \leq k < v} v^{n(k)} d_{k,n(k)}^\alpha / k.$$

De plus,

$$d_{k,1} = a - k\xi\rho + (k-1)\delta, \quad k = 1, 2, \dots, v$$

et par conséquent

$$v d_{k,1}^\alpha / k = (a q - k\rho + (k-1)\delta q)^\alpha / k.$$

Montrons que cette dernière expression est minimale lorsque $k = v$.

Pour ce faire, posons

$$\phi(t) = (a q + t(\rho + \delta q) - \delta q)^\alpha / t,$$

où $t \in [1, v]$. Alors $\phi'(t) < 0$ si et seulement si

$$(i) \quad \alpha(\rho + \delta q)t < a q + t\rho + (t-1)\delta q.$$

Montrons que (i) est vérifiée lorsque $t = v$. On a $(v-1)\delta = \rho - v\xi\rho$,

c'est à dire $\delta q = \rho(q-v)/(v-1)$. D'où $\rho + \delta q = \rho(q-1)/(v-1)$. De plus $\alpha = \log v / \log q$. L'inégalité (i) sera vérifiée pour $t = v$ si l'on démontre que

$$\frac{\log v}{\log q} \frac{\rho(q-1)v}{(v-1)} < bq .$$

Puisque $b > \rho$, il suffit alors de vérifier l'inégalité

$$(ii) \quad (\log v)v(q-1) < (\log q)q(v-1) .$$

Plus généralement, pour tout $x > v$, l'inégalité

$$v(\log v)(x-1) < (v-1)x \log x$$

est satisfaite car l'égalité a lieu pour $x = v$, et

$$\frac{d}{dx}(v(\log v)(x-1)) = v \log v < (v-1)(1+\log x) = \frac{d}{dx}((v-1)x \log x) .$$

Par conséquent, (ii) est aussi satisfaite. On a donc

$$\min_{1 \leq j \leq v} \frac{v d_{j,1}^\alpha}{j} = b^\alpha = \left(1 - \frac{s}{q-1}\right)^\alpha .$$

Supposons $k > v$.

Si $k \equiv 0 \pmod{v}$, on a

$$\frac{v}{k} d_{k,n}^\alpha = \frac{v^{n-1}}{(k/v)} d_{k/v,n-1}^\alpha .$$

D'autre part, si k est de la forme

$$k = \varepsilon_{n-1} v^{n-1} + \varepsilon_{n-2} v^{n-2} + \dots + \varepsilon_1 v + i, \quad n \geq 2$$

avec $0 \leq \varepsilon_j \leq v-1$ pour $j = 0, 1, \dots, n-2$, $1 \leq \varepsilon_{n-1} \leq v-1$ et $1 \leq i \leq v-1$, on a, par construction de E_A ,

$$d_{k,n} = a + \varepsilon_{n-1} \rho \xi + \bar{\varepsilon}_{n-1} \delta + \varepsilon_{n-2} \rho \xi^2 + \bar{\varepsilon}_{n-2} \delta \xi + \dots + \varepsilon_1 \rho \xi^{n-1} + \bar{\varepsilon}_1 \delta \xi^{n-2} + i \rho \xi^n + (i-1) \delta \xi^{n-1}$$

où $\bar{\varepsilon}_j = \varepsilon_j$ ou $\varepsilon_j - 1$ (avec $\bar{\varepsilon}_j \geq 0$), $j = 1, 2, \dots, n-1$. D'où,

$$v^n d_{k,n}^\alpha / k = (q^n d_{k,n})^\alpha / k = (aq^{n+\sum_{j=1}^{n-1} (\epsilon_{n-j} \rho q^{n-j} + \bar{\epsilon}_{n-j} \delta q^{n-j+1}) + i\rho + (i-1)\delta q})^\alpha / k .$$

Posons

$$f(t) = (aq^{n+\sum_{j=1}^{n-1} (\epsilon_{n-j} \rho q^{n-j} + \bar{\epsilon}_{n-j} \delta q^{n-j+1}) + t\rho + (t-1)\delta q})^\alpha / (\epsilon_{n-1} v^{n-1} + \epsilon_{n-2} v^{n-2} + \dots + \epsilon_1 v + t),$$

où $t \in [0, v]$. Alors $f'(t) < 0$ si et seulement si

$$\alpha(\rho + \delta q)(\epsilon_{n-1} v^{n-1} + \dots + \epsilon_1 v + t) < aq^{n+\sum_{j=1}^{n-1} (\epsilon_{n-j} \rho q^{n-j} + \bar{\epsilon}_{n-j} \delta q^{n-j+1}) + t\rho + (t-1)q} .$$

Pour démontrer cette dernière inégalité, il suffit de vérifier que

$$(iii) \quad \alpha(\rho + \delta q)(\epsilon_{n-1} v^{n-1} + \dots + \epsilon_1 v + t) < aq^{n+\rho}(\epsilon_{n-1} q^{n-1} + \dots + \epsilon_1 q) + t(\rho + \delta q) - \delta q .$$

Puisque $\alpha < 1$ et que $\rho + \delta q = \rho(q-1)/(v-1)$, il suffit de vérifier (iii) pour $t = 0$, inégalité qui devient alors

$$(iv) \quad \alpha(v-1)^{-1}(q-1)(\epsilon_{n-1} v^{n-1} + \dots + \epsilon_1 v) < \rho^{-1}(aq^{n-\delta q} + \epsilon_{n-1} q^{n-1} + \dots + \epsilon_1 q) .$$

Vu que $a = r/(q-1)$, $\alpha < 1$, $\delta < 1$ et $\rho < 1$, on a $(aq^{n-\delta q})/\rho > q^{n-1}$ pour $n \geq 3$.

Donc, pour démontrer (iv) lorsque $n \geq 3$, il suffit de vérifier

$$(v) \quad (q-1)(\epsilon_{n-1} v^{n-1} + \dots + \epsilon_1 v) < (v-1)((\epsilon_{n-1} + 1)q^{n-1} + \epsilon_{n-2} q^{n-2} + \dots + \epsilon_1 q) .$$

Plus généralement, lorsque $n \geq 3$, l'inégalité

$$(x-1)(\epsilon_{n-1} v^{n-1} + \dots + \epsilon_1 v) < (v-1)((\epsilon_{n-1} + 1)x^{n-1} + \epsilon_{n-2} x^{n-2} + \dots + \epsilon_1 x)$$

est satisfaite pour tout $x \geq v$ car

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} ((x-1)(\epsilon_{n-1} v^{n-1} + \dots + \epsilon_1 v)) &= (\epsilon_{n-1} v^{n-1} + \dots + \epsilon_1 v) \\ &< (v-1)((n-1)(\epsilon_{n-1} + 1)x^{n-2} + (n-2)\epsilon_{n-2} x^{n-3} + \dots + \epsilon_1 x) \\ &= \frac{d}{dx} ((v-1)((\epsilon_{n-1} + 1)x^{n-1} + \epsilon_{n-2} x^{n-2} + \dots + \epsilon_1 x)) \end{aligned}$$

quelque soient les choix de $\epsilon_{n-1}, \epsilon_{n-2}, \dots, \epsilon_1$. Pour $n \geq 3$, l'inégalité (iv)

est donc satisfaite.

Considérons le cas $n = 2$. On observe que $\bar{\epsilon}_1 = \epsilon_1$ car $i \geq 1$. Par conséquent, $f'(t) < 0$, car on a

$$\alpha(\rho + \delta q)(\epsilon_1 v + t) < aq^2 - \delta q + (\rho + \delta q)(\epsilon_1 q + t) ,$$

et

$$aq = rq/(q-1) > 1 > \delta .$$

On a donc montré que

$$\min_{0 \leq t \leq v} f(t) = f(v) ,$$

c'est à dire

$$v^n d_{k,n}^\alpha / k \geq v^n d_{k',n}^\alpha / k'$$

où

$$k' = \epsilon_{n-1} v^{n-1} + \dots + \epsilon_1 v + v .$$

De plus,

$$\frac{v}{k} d_{k',n}^\alpha = \frac{v^{n-1}}{(k'/v)} d_{k'/v,n-1}^\alpha .$$

Par récurrence, on a donc

$$v^n d_{k,n}^\alpha / k \geq \min_{1 \leq j \leq v} v d_{j,1}^\alpha / j = b^\alpha ,$$

ce qui termine la démonstration.

CHAPITRE V

TRAITEMENT DU CAS GENERAL (v ET ξ QUELCONQUES) ET RESULTATS SUR LES PARFAITS HOMOGENES DE $\mathbb{R}^N$

Dans ce dernier chapitre, nous calculons la mesure de Hausdorff des parfaits linéaires homogènes au sens large de type (v, ξ) , quelque soit la position des intervalles blancs de la 1^{ière} étape de leur construction.

De plus, nous définissons une classe d'ensembles parfaits homogènes dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$, et nous démontrons un théorème (analogue à celui de la section 1.4) sur leurs mesures de Hausdorff.

5.1 Calcul de la mesure de Hausdorff des parfaits homogènes linéaires

Soit E un parfait homogène au sens large de type (v, ξ) (avec $v \geq 3$), de diamètre ℓ , construit sur l'intervalle fondamental $[0, \ell]$. Rappelons que $t_{k,n}$ désigne la longueur minimale d'un sous-intervalle de $[0, \ell]$ contenant k intervalles blancs de la n ^{ième} étape de dissection, et que $n(k)$ désigne le plus petit entier $\geq \log k / \log v$.

PROPOSITION 5.1.1 La mesure de Hausdorff de E (dans la dimension $\alpha = -\log v / \log \xi$) est donnée par la formule

$$H^\alpha(E) = \min_{1 \leq k \leq v^m} v^{n(k)+1} t_{k, n(k)+1}^\alpha / k$$

où

$$m = \begin{cases} v-1, & \text{si } \xi^{-1} \geq v+1 \text{ et } v \geq 5 \\ v, & \text{si } \xi^{-1} > v \text{ et } v = 3, 4, \text{ et } 5 \\ v+1, & \text{si } \xi^{-1} > v \text{ et } v \geq 6. \end{cases}$$

Démonstration: Comme on l'a déjà souligné à quelques reprises, on peut se restreindre, sans perte de généralité, au parfaits homogènes de diamètre 1. On supposera donc que $\lambda = 1$.

D'après le corollaire 1.4.2 et le lemme 1.4.3, on a

$$H^1(E) = \inf_{\substack{n \geq 1 \\ 1 \leq k \leq v^n}} v^n t_{k,n}^\alpha / k ,$$

que l'on écrit également

$$(1) \quad H^1(E) = \inf_{k \geq 1} \inf_{n \geq n(k)} v^n t_{k,n}^\alpha / k .$$

Montrons en premier lieu que pour tous entiers $k \geq 1$ et $\ell \geq 1$ on a

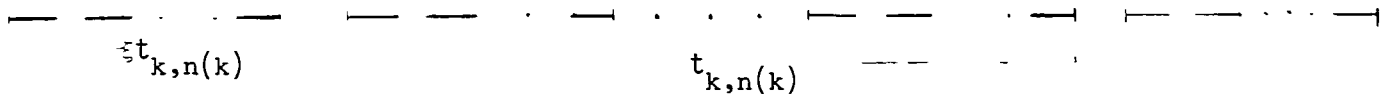
$$t_{k,n(k)-1} \leq \xi t_{k,n(k)} \text{ et } t_{k,n(k)+1+\ell} = \xi^\ell t_{k,n(k)+1} .$$

Pour chaque entier $n \geq 1$, notons par $J_{k,n}$ un intervalle de longueur minimale contenant k intervalles blancs de la $n^{\text{ième}}$ étape. Alors,

$$t_{k,n(k)} = |J_{k,n(k)}| .$$

A la $(n(k)-1)^{\text{ième}}$ étape, il y a au moins v intervalles de longueur $\xi t_{k,n(k)}$

(un situé dans chacun des v intervalles blancs initiaux) contenant k intervalles blancs de cette $(n(k)-1)^{\text{ième}}$ étape.



Par conséquent,

$$t_{k,n(k)+1} \leq \xi t_{k,n(k)} .$$

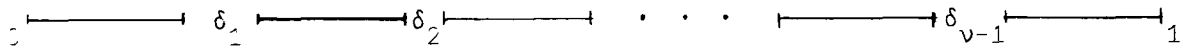
Le même raisonnement montre que pour tout $n \geq n(k)$, on a

$$t_{k,n+1} \leq \xi t_{k,n} .$$

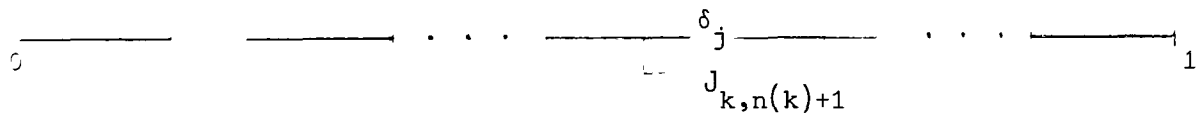
Supposons que

$$t_{k,n(k)+1} < \xi t_{k,n(k)} .$$

Soient $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{v-1}$ les longueurs respectives des $v-1$ intervalles noirs initiaux.



Alors, $J_{k,n(k)+1}$ contient un certain intervalle noir initial de longueur δ_j , et doit être contenu dans la réunion de cet intervalle noir avec les deux intervalles blancs initiaux qui lui sont contigus.



D'autre part, $J_{k,n(k)+2}$ ne peut être contenu dans un intervalle blanc de la 2^{ième} étape, car $t_{k,n(k)+2} \leq \xi t_{k,n(k)+1}$. Alors, $J_{k,n(k)+2}$ rencontre deux intervalles blancs consécutifs de la 2^{ième} étape séparés par le plus court intervalle noir possible, soit celui de longueur $\xi \delta_j$, et $J_{k,n(k)+2}$ est l'image par une homothétie de rapport ξ de l'intervalle $J_{k,n(k)+1}$.

D'où $t_{k,n(k)+2} = \xi t_{k,n(k)+1}$. Le même raisonnement montre que pour tout $\ell \geq 1$, on a

$$t_{k,n(k)+1+\ell} = \xi^\ell t_{k,n(k)+1} .$$

La formule (1) s'écrit alors plus simplement

$$(2) \quad H^\alpha(E) = \inf_{k \geq 1} v^{n(k)+1} t_{k,n(k)+1}^\alpha / k .$$

Démontrons la proposition 5.1.1 par récurrence sur k . Nous pouvons faire l'hypothèse suivante:

Hypothèse de récurrence:

Soit $n \geq m$. Pour tout entier p vérifiant

$$1 \leq p \leq v^n,$$

il existe un entier j_p tel que $1 \leq j_p \leq v^m$ et

$$v^{n(p)-1} t_{p, n(p)-1}^\alpha / p \geq v^{n(j_p)-1} t_{j_p, n(j_p)-1}^\alpha / j_p.$$

Remarque:

Au cours de l'étape de récurrence, nous ferons appel à la remarque suivante: pour tout $n \geq 1$, on a

$$t_{v^n, n-1} = t_{v, 2}.$$

En effet, si $t_{v, 2} = \xi$, alors $\delta_i > \xi \delta_j$ pour tout $i = 1, \dots, v-1$ et

$j = 1, \dots, v-1$, et par conséquent $t_{v^n, n-1} = \xi$ pour tout $n \geq 1$.

D'autre part, si $t_{v, 2} < \xi$, alors

$$\xi \delta_{j_0} > \delta_{i_0}$$

où $\delta_{j_0} = \max_{1 \leq j \leq v-1} \delta_j$ et $\delta_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq v-1} \delta_i$, et

$$t_{v, 2} = \xi - (\xi \delta_{j_0} - \delta_{i_0}).$$

2^{ième} étape:

$$\begin{array}{ccccccc} | & \cdots & | & \cdots & | & \cdots & | \\ & & & & \xi \delta_{j_0} & \cdots & \delta_{i_0} \\ & & & & \text{---} j_{v,2} \text{---} & & \xi \delta_{j_0} \text{---} \cdots \end{array}$$

Tout intervalle qui constitue l'enveloppe convexe de la réunion de v^2 intervalles blancs consécutifs de la 3^{ième} étape est, soit de longueur ξ , soit de longueur $\xi - (\xi \delta_j - \delta_i)$ pour un certain δ_j et un certain δ_i vérifiant $\xi \delta_j > \delta_i$, soit de longueur $\xi - (\xi^2 \delta_j - \delta_i)$ pour un certain δ_j et un certain δ_i

vérifiant $\xi^2 \delta_j > \delta_i$. Par conséquent,

$$t_{v^2,3} = \xi - (\xi \delta_{j_0} - \delta_{i_0}) = t_{v,2}.$$

Le même raisonnement montre que

$$t_{v^n, n+1} = t_{v,2}$$

pour tout $n \geq 1$.

Etape de récurrence:

Soit k un entier tel que

$$v^n + 1 \leq k \leq v^{n+1}.$$

D'après la remarque ci-haut, on a, pour $k = v^{n+1}$

$$v^{n(k)+1} t_{k, n(k)+1}^\alpha / k = v t_{v,2}^\alpha.$$

D'autre part, si $v^{n+1} \leq k \leq v^{n+1}-1$, alors on peut écrire

$$k = \varepsilon_n v^n + \varepsilon_{n-1} v^{n-1} + \dots + \varepsilon_1 v + \varepsilon_0$$

avec $\varepsilon_n \in \{1, 2, \dots, v-1\}$ et $\varepsilon_\ell \in \{0, 1, \dots, v-1\}$ pour $\ell = 0, 1, \dots, n-1$.

Les extrémités de l'intervalle $J_{k, n+2}$ sont situées dans des intervalles

blancs de la $(n+1)$ ^{ième} étape. Trois situations sont possibles:

1°) Dans la première situation, les deux extrémités de $J_{k, n+2}$ sont aussi des extrémités d'intervalles blancs de la $(n+1)$ ^{ième} étape.

$$\begin{array}{c} \xi^{n+1} \\ \cdot \cdot \cdot \quad \text{---} \quad \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \quad \text{---} \quad \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \end{array}$$

$J_{k, n+2}$

Par conséquent,

$$k = vp$$

où

$$p = \epsilon_n v^{n-1} + \epsilon_{n-1} v^{n-2} + \dots + \epsilon_2 v + \epsilon_1$$

et

$$t_{k,n(k)+1} = t_{p,n(p)+1} ,$$

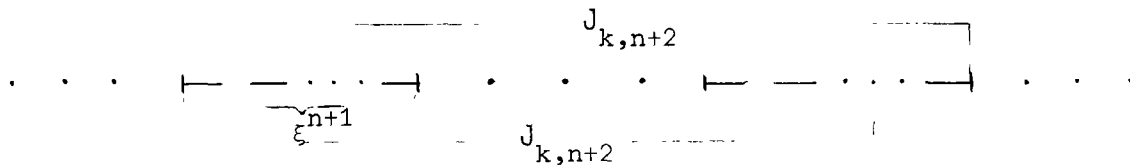
d'où

$$v^{n(k)+1} t_{k,n(k)+1}^\alpha / k = v^{n(p)+1} t_{p,n(p)+1}^\alpha / p .$$

Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$v^{n(k)+1} t_{k,n(k)+1}^\alpha / k \geq \min_{1 \leq j \leq v} v^{n(j)+1} t_{j,n(j)+1}^\alpha / j .$$

2°) Dans la deuxième situation, une seule des deux extrémités de $J_{k,n+2}$ est une extrémité d'intervalle blanc de la $(n+1)$ ^{ième} étape.



Par conséquent,

$$k + i \equiv 0 \pmod{v} ,$$

c'est à dire $\epsilon_0 = v - i$, pour un certain i vérifiant $1 \leq i \leq v-1$. Posons

$$j_k = \epsilon_n v^{n-1} + \epsilon_{n-1} v^{n-2} + \dots + \epsilon_2 v + \epsilon_1 + 1 = (k+i)/v .$$

Montrons que

$$(3) \quad v^{n(k)+1} t_{k,n(k)+1}^\alpha / k \geq v^{n(j_k)+1} t_{j_k,n(j_k)+1}^\alpha / j_k .$$

Etant donné la position de l'intervalle $J_{k,n+2}$, on observe que

$$(4) \quad t_{j_k,n+1} \leq t_{k,n+2+i\xi^{n+2}+\xi^{n+1}(\delta_{\ell_1}+\delta_{\ell_2}+\dots+\delta_{\ell_i})}$$

où la suite finie d'indices $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i$ est l'une ou l'autre des deux

suites $1, 2, \dots, i$ et $v-1, v-2, \dots, v-i$. De plus, puisque

$$\delta_{\ell_1} + \delta_{\ell_2} + \dots + \delta_{\ell_i} < \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{v-1} = 1 - v\xi,$$

on a

$$t_{j_k, n+1} \leq t_{k, n+2} + i\xi^{n+2} + \xi^{n+2}(\xi^{-1} - v),$$

d'où

$$(5) \quad \xi^{-n-2} t_{k, n+2} \geq \xi^{-n-2} t_{j_k, n+1} - (i + \xi^{-1} - v).$$

En employant la notation $A_j = \xi^{-n(j)-1} t_{j, n(j)+1}$ pour $j \geq 1$, (5) s'écrit également

$$(6) \quad A_k \geq x A_{j_k} - (i + x - v)$$

où $x = \xi^{-1}$. De plus, l'inégalité (3) que l'on veut vérifier s'écrit aussi sous la forme

$$A_k^\alpha / k \geq A_{j_k}^\alpha / j_k,$$

ainsi que sous la forme

$$(7) \quad A_k x^{\log j_k / \log v} \geq A_{j_k} x^{\log k / \log v}$$

car $\alpha = \log v / \log x$. De (6) on obtient

$$A_k x^{\log j_k / \log v} \geq A_{j_k} x^{\log(vj_k) / \log v} - (i + x - v)x^{\log j_k / \log v}.$$

Donc, puisque $vj_k = k + i$, il suffit, pour démontrer (7), de vérifier

$$A_{j_k} x^{\log(vj_k) / \log v} - (i + x - v)x^{\log j_k / \log v} \geq A_{j_k} x^{\log k / \log v},$$

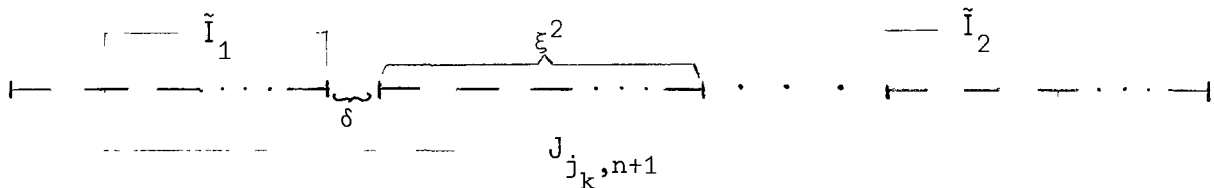
c'est à dire

$$(8) \quad x^{\log(vj_k) / \log v} \geq x^{\log(vj_k - i) / \log v} + (i + x - v)x^{\log j_k / \log v} / A_{j_k}.$$

Le nombre d'intervalles blancs de la 2^{ième} étape contenus dans $J_{j_k, n+1}$ est ϵ_n ou $\epsilon_n - 1$. Si ce nombre est ϵ_n , alors $J_{j_k, n+1}$ contient ϵ_n intervalles blancs de longueur ξ^2 . Si ce nombre est $\epsilon_n - 1$, alors $J_{j_k, n+1}$ contient $\epsilon_n - 1$ intervalles blancs de longueur ξ^2 , dont la réunion a pour enveloppe convexe un intervalle noté I . En plus, $J_{j_k, n+1}$ contient $v^{n-1} + \epsilon_{n-1} v^{n-2} + \dots + \epsilon_2 v + \epsilon_1 + 1$ intervalles blancs de la $(n+1)$ ^{ième} étape, distribués dans deux sous-intervalles $\tilde{I}_1$ et $\tilde{I}_2$ de $J_{j_k, n+1}$ situés de part et d'autre de I , et tels que

$$|\tilde{I}_1| + |\tilde{I}_2| > \xi^2 + t_{q, n+1},$$

où $q = \epsilon_{n-1} v^{n-2} + \dots + \epsilon_2 v + \epsilon_1 + 1$.



On a donc

$$t_{j_k, n+1} > |I| + |\tilde{I}_1| + |\tilde{I}_2| + \delta > \epsilon_n \xi^2 + t_{q, n+1}.$$

En reprenant ce raisonnement pour les intervalles blancs de la 3^{ième} étape, de la 4^{ième} étape et ainsi de suite, on obtient

$$t_{j_k, n+1} \geq \epsilon_n \xi^2 + \epsilon_{n-1} \xi^3 + \dots + \epsilon_2 \xi^n + (\epsilon_1 + 1) \xi^{n+1}.$$

Par conséquent,

$$A_{j_k} = \xi^{-n-1} t_{j_k, n+1} \geq \epsilon_n x^{n-1} + \epsilon_{n-1} x^{n-2} + \dots + \epsilon_2 x + \epsilon_1 + 1.$$

Posons

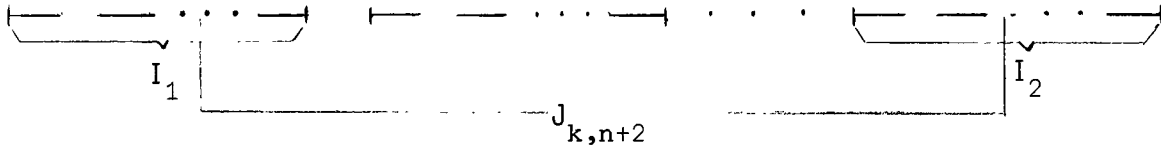
$$j_k(x) = \varepsilon_n x^{n-1} + \varepsilon_{n-1} x^{n-2} + \dots + \varepsilon_2 x + \varepsilon_1 + 1.$$

Pour démontrer (8), il suffit donc de vérifier

$$(9) \quad \frac{\log(vj_k)/\log v}{x} \geq \frac{\log(vj_k - i)/\log v}{x} + \frac{\log j_k/\log v}{(x - v + i)x} \quad /j_k(x),$$

ce qui a déjà été fait à la proposition 4.1.1, (p. 93, inégalité (17)).

3°) Dans la troisième situation, aucune des deux extrémités de $J_{k,n+2}$ n'est une extrémité d'intervalle blanc de la $(n+1)^{\text{ième}}$ étape.



Soient I_1 et I_2 les deux intervalles blancs de la $(n+1)^{\text{ième}}$ étape qui contiennent les extrémités de $J_{k,n+2}$. Distinguons 2 cas:

a) Si le nombre d'intervalles blancs de longueur ξ^{n+2} situés dans $(I_1 \cup I_2) \cap J_{k,n+2}$ est supérieur à v , alors

$$k+i \equiv 0 \pmod{v},$$

c'est à dire $\varepsilon_0 = v - i$, pour un certain i vérifiant $1 \leq i \leq v-1$, et comme à la situation 2°), on a

$$t_{j_k, n+1} \leq t_{k, n+2} + i \xi^{n+2} + \xi^{n+1} (\delta_{\ell_1} + \delta_{\ell_2} + \dots + \delta_{\ell_i})$$

pour certains indices $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i$ deux à deux distincts, et $j_k = (k+i)/v$.

Par conséquent, on a, comme à la situation 2°)

$$v^{n(k)+1} t_{k, n(k)+1}^\alpha / k \geq v^{n(j_k)+1} t_{j_k, n(j_k)+1}^\alpha / j_k.$$

b) Si le nombre d'intervalles blancs de longueur ξ^{n+2} situés dans $(I_1 \cup I_2) \cap J_{k,n+2}$ est inférieur ou égal à v , alors

$$k+v+i \equiv 0 \pmod{v}$$

pour un certain i vérifiant $0 \leq i \leq v-2$. De plus, si $k \equiv 0 \pmod{v}$, c'est à dire si $\varepsilon_0 = 0$, alors $k < v^{n+1}$ d'après la remarque qui suit l'hypothèse de récurrence. Donc, dans toute éventualité on a $k+v+i \leq v^{n+1}$, ou bien $k+v+i = v^{n+1}+v$. Dans le premier cas, on a d'après la position de $J_{k,n+2}$,

$$(10) \quad t_{(k+v+i)/v, n+1} \leq t_{k, n+2} + \xi^{n+1} + i \xi^{n+2} + \xi^{n+1} (\delta_{\ell_1} + \delta_{\ell_2} + \dots + \delta_{\ell_i})$$

pour un certain choix d'indices $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i$ deux à deux distincts. Posons

$h_k = (k+v+i)/v$. Montrons que

$$(11) \quad v^{n(k)+1} t_{k, n(k)+1}^\alpha / k \geq v^{n+1} t_{h_k, n+1}^\alpha / h_k.$$

Puisque $\delta_{\ell_1} + \delta_{\ell_2} + \dots + \delta_{\ell_i} < 1 - v\xi$, de l'inégalité (10) on obtient

$$\xi^{-n-2} t_{k, n+2} \geq \xi^{-n-2} t_{h_k, n+1}^{-(i+2x-v)},$$

c'est à dire

$$(12) \quad A_k \geq x A_{h_k}^{-(i+2x-v)}.$$

L'inégalité (11) s'écrit également sous la forme

$$(13) \quad A_k x^{\log h_k / \log v} \geq A_{h_k} x^{\log k / \log v}.$$

De (12) on obtient

$$A_k x^{\log h_k / \log v} \geq A_{h_k} x^{\log(vh_k) / \log v}^{-(i+2x-v)x} \log h_k / \log v.$$

Il suffit donc pour démontrer (13) de vérifier

$$A_{h_k}^x \frac{\log(vh_k)/\log v}{-(i+2x-v)x} \frac{\log h_k/\log v}{\log k/\log v} \geq A_{h_k}^x ,$$

c'est à dire

$$(14) \quad x \frac{\log(vh_k)/\log v}{\geq x} \frac{\log(vh_k-v-i)/\log v}{+(i+2x-v)x} \frac{\log h_k/\log v}{/A_{h_k}}$$

De plus, on a

$$h_k = \begin{cases} j_k, & \text{si } i = 0 \\ j_k+1 & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

où $j_k = \epsilon_n v^{n-1} + \epsilon_{n-1} v^{n-2} + \dots + \epsilon_2 v + \epsilon_1 + 1$. On peut écrire

$$j_k+1 = \tilde{j}_k = \tilde{\epsilon}_n v^{n-1} + \tilde{\epsilon}_{n-1} v^{n-2} + \dots + \tilde{\epsilon}_2 v + \tilde{\epsilon}_1 + 1 ,$$

avec $\tilde{\epsilon}_n \in \{1, 2, \dots, v-1\}$ et $\tilde{\epsilon}_\ell \in \{0, 1, \dots, v-1\}$ pour $\ell = 1, 2, \dots, n-1$.

Alors,

$$A_{h_k} > \begin{cases} j_k(x), & \text{si } i = 0 \\ \tilde{j}_k(x), & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

où $j_k(x) = \epsilon_n x^{n-1} + \epsilon_{n-1} x^{n-2} + \dots + \epsilon_2 x + \epsilon_1 + 1$ et $\tilde{j}_k(x) = \tilde{\epsilon}_n x^{n-1} + \dots + \tilde{\epsilon}_2 x + \tilde{\epsilon}_1 + 1$.

Lorsque $i = 0$, il suffit pour démontrer (14), de vérifier

$$(15) \quad x \frac{\log(vj_k)/\log v}{\geq x} \frac{\log(vj_k-v)/\log v}{+(2x-v)x} \frac{\log j_k/\log v}{/j_k(x)} .$$

Lorsque $1 \leq i \leq v-2$, il suffit pour démontrer (14), de vérifier

$$(16) \quad x \frac{\log(v\tilde{j}_k)/\log v}{\geq x} \frac{\log(v\tilde{j}_k-v-i)/\log v}{+(i+2x-v)x} \frac{\log(\tilde{j}_k)/\log v}{/\tilde{j}_k(x)} .$$

Le cas $k+v+i = v^{n+1}+v$: Posons $h_k = (k+v+i)/v = v^n + 1$. Alors, on a toujours

l'inégalité (10) de la page 119, c'est-à-dire

$$(10) \quad t_{h_k, n+1} \leq t_{k, n+2} + \xi^{n+1} + i\xi^{n+2} + \xi^{n+1} (\delta_{\ell_1} + \delta_{\ell_2} + \dots + \delta_{\ell_i})$$

D'autre part, on observe que $n(h_k) = n+1$. Mais on a déjà démontré (au bas de la page 111) que $\xi t_{k,n(k)} \geq t_{k,n(k)+1}$ pour tout $k \geq 1$. On a par conséquent l'inégalité

$$\frac{\nu}{h_k} t_{h_k, n+1}^{\alpha} \geq \frac{\nu}{h_k} t_{h_k, n+2}^{\alpha}.$$

De plus, puisque $h_k = \nu^{n+1}$, l'intervalle $J_{h_k, n+2}$ doit se trouver, soit en situation 2°) (décrite à la page 115), soit en situation 3°a) (décrite à la page 118). Il ne peut pas être en situation 3°b) car les intervalles I_1 et I_2 (voir dessin de la page 118) doivent contenir chacun au moins un intervalle blanc de la $(n+2)^{\text{ième}}$ étape qui appartient à $J_{h_k, n+2}$. Par conséquent, les situations 2°) et 3°a) ayant déjà été traitées, on a

$$\frac{\nu}{h_k} t_{h_k, n+2}^{\alpha} \geq \min_{1 \leq j \leq \nu} \frac{\nu}{j} t_{j, n(j)+1}^{\alpha}.$$

Il nous est donc suffisant de démontrer l'inégalité (11), soit

$$(11) \quad \frac{\nu}{k} t_{k, n+2}^{\alpha} \geq \frac{\nu}{h_k} t_{h_k, n+1}^{\alpha}.$$

Cette inégalité s'écrit également sous la forme

$$(13') \quad A_k x^{\log h_k / \log \nu} \geq A_{h_k}^* x^{\log k / \log \nu}$$

$$\text{où } A_k = \xi^{-n-2} t_{k, n+2} \text{ et } A_{h_k}^* = \xi^{-n-1} t_{h_k, n+1}.$$

Puisque $\delta_{\ell_1} + \delta_{\ell_2} + \dots + \delta_{\ell_i} \leq 1 - \nu \xi$, de (10) on obtient

$$\xi^{-n-2} t_{k, n+2} \geq \xi^{-n-2} t_{h_k, n+1} - (i+2x-\nu)$$

c'est à dire,

$$(12') \quad A_k \geq x A_{h_k}^* - (i+2x-\nu).$$

De (12') on obtient (en multipliant toute l'inégalité par $x^{\log h_k / \log v}$)

$$A_{h_k}^* x^{\log h_k / \log v} \geq A_{h_k}^* x^{\log(vh_k)/\log v} - (i+2x-v)x^{\log h_k / \log v}.$$

Il suffit donc, pour démontrer (13'), de vérifier l'inégalité

$$A_{h_k}^* x^{\log(vh_k)/\log v} - (i+2x-v)x^{\log h_k / \log v} \geq A_{h_k}^* x^{\log k / \log v},$$

c'est à dire,

$$(14') \quad x^{\log(vh_k)/\log v} \geq x^{\log(vh_k-v-i)/\log v} + \frac{(i+2x-v)x^{\log h_k / \log v}}{A_{h_k}^*}.$$

De plus, puisque $h_k = v^{n+1}$, on a

$$t_{h_k, n+1} \geq \xi + \xi^{n+1},$$

d'où

$$A_{h_k}^* = \xi^{-n-1} t_{h_k, n+1} \geq \xi^{-n-1} (\xi + \xi^{n+1}) = x^{n+1},$$

où $x = \xi^{-1}$.

Pour démontrer (14'), il est donc suffisant de vérifier l'inégalité

$$(*) \quad x^{\log(vh_k)/\log v} \geq x^{\log(vh_k-v-i)/\log v} + \frac{(i+2x-v)x^{\log h_k / \log v}}{x^{n+1}}$$

où $h_k = v^{n+1}$ et $1 \leq i \leq v-2$.

Il sera donc suffisant de démontrer l'inégalité (16) de la page 120 quelque soient les choix des coefficients $\tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\varepsilon}_{n-1}, \dots, \tilde{\varepsilon}_1$ dans $\tilde{j}_k(x)$,

et pour tout $x \geq v+1$ lorsque $n \geq v$, ainsi que pour tout $x \geq v$ lorsque $n \geq v+1$, car alors en particulier notre inégalité (*) ci-dessus sera vérifiée pour tout $x \geq v+1$ lorsque $n \geq v-1$, et pour tout $x \geq v$ lorsque $n \geq v$.

Il est suffisant de vérifier (16) avec $i = 1$ car la fonction

$$g(t) = x^{\log(v\tilde{j}_k-v-t)/\log v} + tx^{\log(\tilde{j}_k)/\log v} / \tilde{j}_k(x)$$

est décroissante en t sur $[1, v-2]$. En effet, $g'(t) < 0$ si et seulement si

$$(v\tilde{j}_k - v - t)/\tilde{j}_k(x) < (\log x / \log v)^x \frac{\log((v\tilde{j}_k - v - t)/\tilde{j}_k)/\log v}{\log v},$$

ce qui est bien vérifié pour tout $x > v$.

Les deux inégalités à vérifier sont donc (15) et

$$(17) \quad \frac{\log(v\tilde{j}_k)/\log v}{x} \geq \frac{\log(v\tilde{j}_k - v - 1)/\log v}{x} + \frac{\log(\tilde{j}_k)/\log v}{(2x - v + 1)x} \frac{1}{\tilde{j}_k(x)}.$$

Démontrons d'abord (17). Posons

$$\phi(t) = \frac{\log(v\tilde{j}_k - tv - 1)/\log v}{x} + \frac{\log(\tilde{j}_k)/\log v}{((t+1)x - v + 1)x} \frac{1}{\tilde{j}_k(x)}$$

où $t \in [0, 1]$. Montrons que ϕ est une fonction décroissante de t . On a

$\phi'(t) < 0$ si et seulement si

$$(18) \quad x/\tilde{j}_k(x) < v(\log x / \log v)^x \frac{\log((v\tilde{j}_k - tv - 1)/\tilde{j}_k)/\log v}{(v\tilde{j}_k - tv - 1)}.$$

L'égalité a lieu lorsque $x = v$, et le membre droit est croissant en x

sur $[v, \infty[$ car $v\tilde{j}_k - tv - 1 > \tilde{j}_k$. Le membre gauche $x/\tilde{j}_k(x)$ est décroissant

en x si et seulement si

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\tilde{j}_k(x)} \right) = (\tilde{j}_k(x) - x\tilde{j}_k'(x)) / (\tilde{j}_k(x))^2 < 0$$

pour tout $x \geq v$. Puisque $\tilde{j}_k(x) = \tilde{\epsilon}_n x^{n-1} + \tilde{\epsilon}_{n-1} x^{n-2} + \dots + \tilde{\epsilon}_2 x + \tilde{\epsilon}_1 + 1$, dès que

$n \geq 3$ on a bien $\tilde{j}_k(x) < x\tilde{j}_k'(x)$. Il reste à démontrer (18) lorsque $v = 3$

et $n = 2$. On a alors,

$$\tilde{j}_k(x) = \tilde{\epsilon}_2 x + \tilde{\epsilon}_1 + 1 \quad \text{et} \quad \tilde{j}_k = 3\tilde{\epsilon}_2 + \tilde{\epsilon}_1 + 1$$

où $\tilde{\epsilon}_2 = 1$ ou 2 et $\tilde{\epsilon}_1 = 0, 1$ ou 2 , d'où $\tilde{j}_k > 5$. Alors,

$$\log((v\tilde{j}_k - tv - 1)/\tilde{j}_k)/\log v \geq \log(3 - 4/5)/\log 3 > 7/10.$$

Par conséquent, pour vérifier (18) avec $v = 3$ et $n = 2$, il suffit de

constater que la fonction

$$\psi(x) = x/(x^{7/10} j_k(x)) = x^{3/10}/(\tilde{\epsilon}_2 x + \tilde{\epsilon}_1 + 1)$$

est décroissante en x sur $[3, \infty[$, quelque soient $\tilde{\epsilon}_2 \in \{1, 2\}$ et $\tilde{\epsilon}_1 \in \{0, 1, 2\}$ vérifiant $3\tilde{\epsilon}_2 + \tilde{\epsilon}_1 + 1 \leq 9$.

Alors, puisque ϕ est une fonction décroissante de t sur $[0, 1]$, (17) est vérifiée car (9) a été démontrée.

Démontrons maintenant l'inégalité (15). Posons

$$h(t) = x^{\frac{\log(vj_k - tv + t - 1)/\log v}{+(x-v+t(x-1)+1)x} \frac{\log j_k/\log v}{j_k(x)}}$$

où $t \in [0, 1]$. Montrons que h est décroissante sur $[0, 1]$. On a $h'(t) < 0$ si et seulement si

$$(19) \quad (x-1)/j_k(x) < (v-1)(\log x/\log v)x^{\frac{\log((vj_k - tv + t - 1)/j_k)/\log v}{/(vj_k - tv + t - 1)}}.$$

L'égalité a lieu lorsque $x = v$, et le membre droit est croissant en x sur $[v, \infty[$ car $vj_k - t(v-1) - 1 > j_k$. Le membre gauche $(x-1)/j_k(x)$ est décroissant en x sur $[v, \infty[$ si et seulement si

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{j_k(x)} \right) = (j_k(x) - (x-1)j'_k(x))/(j_k(x))^2 < 0$$

pour tout $x \geq v$. Puisque $j_k(x) = \epsilon_n x^{n-1} + \epsilon_{n-1} x^{n-2} + \dots + \epsilon_2 x + \epsilon_1 + 1$, on a

$j_k(x) < (x-1)j'_k(x)$ dès que $n \geq 3$. Il reste à démontrer (19) pour $v = 3$

et $n = 2$. L'inégalité (19) s'écrit alors

$$(20) \quad x-1 < \frac{2(\log x)(\epsilon_2 x + \epsilon_1 + 1)x^{\frac{\log(3 - (2t+1)/(3\epsilon_2 + \epsilon_1 + 1))/\log 3}{(1 \log 3)(3(3\epsilon_2 + \epsilon_1 + 1) - (2t+1))}}}{(1 \log 3)(3(3\epsilon_2 + \epsilon_1 + 1) - (2t+1))}.$$

Soit $f(x)$ le membre droit de (20). La fonction $f(x)$ est définie sur $[3, \infty[$.

On a $f(3) = 0$. Alors pour vérifier (20), montrons que $f'(x) > 1$ sur $[3, \infty[$. Posons

$$g(x) = (\log x)^{(\varepsilon_2 x + \varepsilon_1 + 1)x} \frac{\log(3 - (2t+1)/(3\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + 1))}{\log 3}.$$

On a

$$g'(x) = ((\varepsilon_2 x + \varepsilon_1 + 1)/x + \varepsilon_2 \log x)^x \frac{\log(3 - (2t+1)/(3\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + 1))}{\log 3} \\ + (\log x)^{(\varepsilon_2 x + \varepsilon_1 + 1)x} \left(\log(3 - (2t+1)/(3\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + 1)) \right) \frac{-1 + \log(3 - \frac{2t+1}{3\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + 1})}{\log 3} x$$

d'où

$$g'(3) > (3(\varepsilon_2 3 + \varepsilon_1 + 1) - (2t+1)) \frac{\log(3 - (2t+1)/(3\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + 1))}{\log 3} \\ > (3(\varepsilon_2 3 + \varepsilon_1 + 1) - (2t+1)) \frac{\log(3 - 3/4)}{\log 3},$$

c'est à dire

$$g'(3) > (\log 3)(3(\varepsilon_2 3 + \varepsilon_1 + 1) - (2t+1))/2.$$

De plus, $g'(x)$ est croissante en x sur $[3, \infty[$ puisque

$$\frac{\log(3 - (2t+1)/(3\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + 1))}{\log 3} > \frac{\log(3 - 3/4)}{\log 3} \geq 7/10$$

et que par conséquent la fonction (de x)

$$(\varepsilon_2 x + \varepsilon_1 + 1)^x \frac{-1 + \log(3 - (2t+1)/(3\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + 1))}{\log 3}$$

est croissante en x sur $[3, \infty[$, quelque soient $\varepsilon_2 \in \{1, 2\}$ et $\varepsilon_1 \in \{0, 1, 2\}$

vérifiant $3\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + 1 \leq 9$. D'autre part,

$$f'(x) = \frac{2}{\log 3} \cdot \frac{g'(x)}{(3(\varepsilon_2 3 + \varepsilon_1 + 1) - (2t+1))} > 1$$

si et seulement si

$$g'(x) > \frac{\log 3}{2} (3(\varepsilon_2 3 + \varepsilon_1 + 1) - (2t+1)),$$

inégalité que l'on a démontrée. L'inégalité (20) est donc satisfaite. Alors, puisque h est décroissante en t sur $[0,1]$, (15) est vérifiée car (9) a été démontrée.

Ceci termine l'étape de récurrence et la démonstration de la proposition 5.1.1.

COROLLAIRE 5.1.2 $H^\alpha(E)(\delta_1, \dots, \delta_{v-1})$ est une fonction continue et analytique par morceaux de $v-1$ variables liées par la relation $\delta_1 + \dots + \delta_{v-1} = 1 - v\xi$.

Démonstration: Par définition, les $t_{k,n}$ sont des fonctions de $\delta_1, \dots, \delta_{v-1}$ analytiques par morceaux. Le corollaire résulte alors directement de la proposition 5.1.1.

5.2 Mesure de Hausdorff des parfaits homogènes de $\mathbb{R}^N$

I. Introduction

Soit S un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$. Soient s et ρ deux nombres réels positifs, et désignons par $H_\rho^s(S)$ la borne inférieure des nombres $\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } S_i)^s$ (où $\text{diam } S_i$ dénote le diamètre de S_i) pour tous les recouvrements dénombrables $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ de S par des ensembles de diamètre $\leq \rho$.

DEFINITION 5.2.1 La mesure de S dans la dimension s (ou s -mesure de S) est définie par

$$H^s(S) = \lim_{\rho \rightarrow 0} H_\rho^s(S) .$$

DEFINITION 5.2.2 La borne inférieure $\underline{\alpha}$ des nombres s pour lesquels

$H^s(S) = 0$ est appelée la dimension de Hausdorff de l'ensemble S , et sera notée $\dim S$. Nous appellerons mesure de Hausdorff de S , notée $H^s(S)$, la mesure de S dans la dimension de Hausdorff de S .

DEFINITION 5.2.3 Soit $K \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble parfait et compact. Soient $\phi_1, \dots, \phi_\nu$ ν similitudes ou antisimilitudes fixées (de centres quelconques) de $\mathbb{R}^N$ de même rapport $\xi < 1$, qui transforment K en compacts $K_i = \phi_i(K) \subset K$ tels que $H^s(K_i \cap K_j) = 0$ pour tout $i \neq j$ et $s = -\log \nu / \log \xi$. Pour tout entier $n \geq 1$, les ν^n compacts $\phi_{a_1} \circ \phi_{a_2} \circ \dots \circ \phi_{a_n}(K) = K_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ ($a_i = 1, 2, \dots, \nu$) ont des intersections deux à deux d' s -mesure nulle. Soit $E_n = K_{a_1, a_2, \dots, a_n} \cup \dots \cup K_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ la réunion de ces ν^n compacts. On a $E_{n+1} \subset E_n$, et l'intersection

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

est un ensemble parfait que l'on qualifie de parfait homogène au sens large de type (ν, ξ) . Si les ν compacts $K_i \cap E$ sont deux à deux disjoints, le parfait E sera dit homogène au sens strict de type (ν, ξ) .

Pour établir une méthode pratique de calcul de la s -mesure des parfaits homogènes de type (ν, ξ) lorsque $s = -\log \nu / \log \xi$, nous aurons recours aux propriétés suivantes des s -mesures:

Propriété 1: Les boréliens de $\mathbb{R}^N$ sont des ensembles s -mesurables quelque soit $s > 0$.

Propriété 2: Dans la définition 5.2.1 ci-dessus, il est suffisant de ne considérer que des recouvrements ouverts.

Propriété 3: Soient $E \subseteq \mathbb{R}^N$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application lipschitzienne d'exposant $s > 0$. On suppose donc l'existence d'une constante universelle $C > 0$ telle que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^s$ pour tout x et $y \in E$. Alors

$$H^s(E) \geq C^{-1} H^1(f(E)) = C^{-1} \text{mes } f(E) ,$$

où $\text{mes } f(E)$ désigne la mesure de Lebesgue de $f(E)$.

Propriété 4: Si E est un parfait homogène au sens large de type (ν, ξ) , alors pour $s = -\log \nu / \log \xi$ et pour tout $\rho > 0$ on a

$$H^s(E) = H_\rho^s(E) \leq (\text{diam } E)^s .$$

Propriété 5: Si E est un parfait homogène au sens strict de type (ν, ξ) , et si τ désigne la plus petite distance entre deux des portions $K_1 \cap E, \dots, K_\nu \cap E$, alors pour $s = -\log \nu / \log \xi$ on a

$$\tau^s \leq H^s(E) \leq (\text{diam } E)^s .$$

Les propriétés 1, 2 et 3 sont démontrées dans un cadre plus général dans ROGERS [22], (p. 50-54, théorèmes 27, 28 et 29). Une démonstration des propriétés 4 et 5 est donnée dans KAHANE-SALEM [13], (p. 24-25) pour le cas particulier des parfaits homogènes de $\mathbb{R}$. Le même raisonnement s'applique aux parfaits homogènes de $\mathbb{R}^N$ tels que définis ci-haut.

a) Le cas homogène au sens strict: Si $s = -\log \nu / \log \xi$, on a, d'après la propriété 5,

$$0 < H^s(E) < \infty$$

et par conséquent,

$$\dim E = \alpha = -\log \nu / \log \xi .$$

b) Le cas homogène au sens large: Si $s = -\log \nu / \log \xi$, on a, selon la propriété 4.

$$H^s(E) < \infty .$$

D'autre part, la propriété 3 nous fournit une condition suffisante pour que $H^s(E) > 0$. Plus précisément, s'il existe une application lipschitzienne d'exposant s ,

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que $\text{mes } f(E) > 0$, alors $H^s(E) > 0$. Avec cette hypothèse supplémentaire, on aura donc, comme dans le cas homogène au sens strict,

$$\dim E = \alpha = -\log v / \log \xi .$$

Remarque:

Dans le cas homogène au sens strict, une deuxième façon de montrer que $H^\alpha(E) > 0$ est de construire de manière "canonique" une telle fonction lipschitzienne d'exposant $\alpha = -\log v / \log \xi$. En effet, pour toute suite infinie $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ($a_n = 1, 2, \dots, v$) les compacts $K_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ forment une suite décroissante ayant pour intersection un point de E . On établit ainsi une bijection b entre l'ensemble parfait E et l'ensemble de ces suites. Définissons la fonction $f : E \longrightarrow [0, 1]$ comme suit: si $b(x)$ est la suite $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ alors

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j / v^j \quad (\text{où } b_j = a_j - 1) .$$

Vérifions que f est lipschitzienne d'exposant $-\log v / \log \xi$. Soit τ la distance minimale entre deux compacts de la forme $K_i \cap E$ et soient $x, y \in E$ tels que

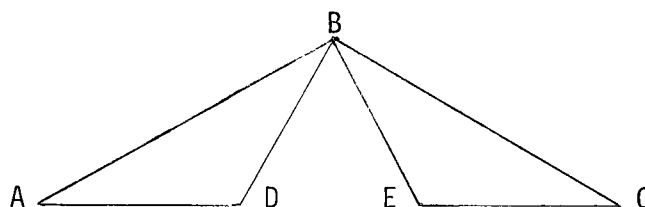
$$\tau \xi^n \leq |x-y| < \tau \xi^{n-1} .$$

Alors x et y appartiennent à un même compact $K_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ et par conséquent

$$|f(x) - f(y)| \leq 1/v^{n-1} = v \xi^{\alpha n} \leq v \tau^{-\alpha} |x-y|^\alpha .$$

Exemples:1°) La courbe de Von Koch:

On prend pour K la région de $\mathbb{R}^2$ bornée par un triangle isocèle ABC dont les angles intérieurs sont $\pi/6$, $\pi/6$ et $2\pi/3$ radians respectivement. Soit ϕ_1 et ϕ_2 les similitudes de rapport $\xi = 1/\sqrt{3}$ qui transforment respectivement le triangle ABC en les triangles ADB et BEC .



Le parfait homogène au sens large obtenu par le procédé décrit plus haut est une courbe du plan, qui peut s'obtenir comme l'image d'une application continue et bijective définie sur l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$. Cette application ψ est construite de la façon suivante: on pose $\psi(0)=A$, $\psi(1/2)=B$, $\psi(1)=C$, $\psi(1/4)=D$, $\psi(3/4)=E$ et ainsi de suite. Les rationnels dyadiques formant un sous-ensemble dense de $[0,1]$, on prolonge ψ par continuité sur $[0,1]$. Pour montrer que $H^s(E) > 0$ lorsque $s = -\log v / \log \xi$, il suffit de vérifier que ψ^{-1} est lipschitzienne d'exposant $\log 4 / \log 3$. Posons $f = \psi^{-1}$. Par construction de ψ , si $x_1, x_2 \in E$ vérifient

$$3^{-n/2} < |x_1 - x_2| \leq 3^{-(n-1)/2}$$

alors

$$2^{-n-1} < |f(x_1) - f(x_2)| \leq 2^{-n+1},$$

et par conséquent

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (1/3^{(n-1)/2})^s = 2(1/3^{n/2})^s < 2|x_1 - x_2|^s .$$

Compte tenu des propriétés 3 et 4 énoncées plus haut, on a

$$0 < H^s(E) < \infty$$

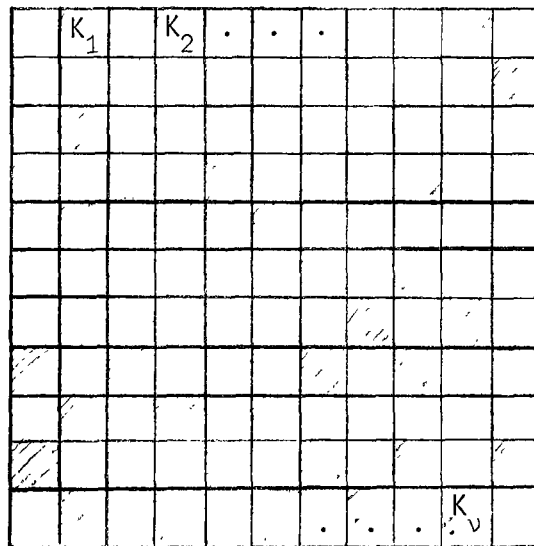
d'où

$$\dim E = \alpha = \log 4 / \log 3 .$$

2°) Le quadrillage "jeux d'échecs":

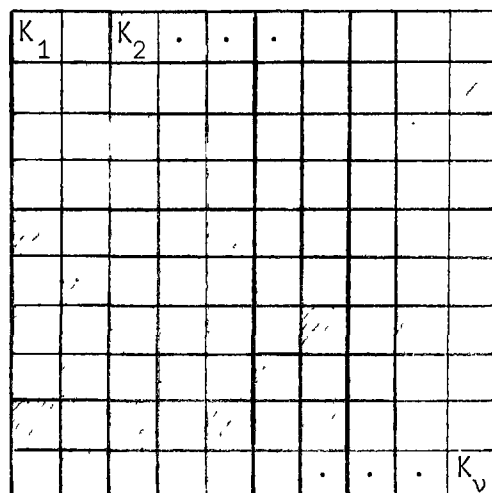
K est la région bornée par un carré de côté 1, et les similitudes $\phi_1, \dots, \phi_v$ sont celles qui transforment K en les carrés $K_i = \phi_i(K)$ de côté $1/n$ dont la disposition est illustrée par le diagramme suivant:

cas n impair:



Alors $v = n(n-1)/2$ et E est un parfait homogène au sens strict de dimension $\alpha = \log v / \log n$.

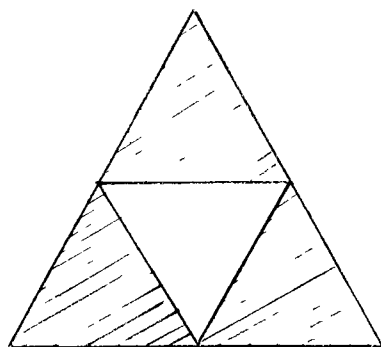
cas n pair:



Alors $v = n^2/2$ et E est un parfait homogène au sens large. Il semble naturel de faire la conjecture suivante: Pour $s = \log v / \log n$, $H^s(E) > 0$ et $\dim E = \alpha = \log v / \log n$.

3°) Les triangles équilatéraux d'Eggleston:

K est la région bornée par un triangle équilatéral de côté 1, et les similitudes ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sont celles qui transforment K en les triangles équilatéraux de côté $1/2$, dont la disposition est illustrée ci-dessous:



Dans cet exemple, $v = 3$ et $\xi = 1/2$. E est un parfait homogène au sens large. Eggleston a démontré (EGGLESTON [10]) que la mesure de Hausdorff

de E dans la dimension $\log 3/\log 2$ est supérieure ou égale à $1/3$, et par conséquent que $\dim E = \alpha = \log 3/\log 2$.

II. Une seconde version du théorème 1.4.1

Nous donnons maintenant une généralisation à $\mathbb{R}^N$ du théorème 1.4.1 sur la mesure de Hausdorff dans la dimension $s = -\log v/\log \xi$ des parfaits homogènes de type (v, ξ) .

Soit E un parfait homogène (sens strict ou sens large) de type (v, ξ) dans $\mathbb{R}^N$, tel que décrit à la définition 5.2.3. Appelons partie simple de E_n toute réunion de compacts de la forme $K_{a_1, a_2, \dots, a_n}$. Notons par $\Lambda_{k,n}$ la famille des parties simples de E_n qui sont chacune réunion de k compacts de la forme $K_{a_1, a_2, \dots, a_n}$, et posons $t_{k,n} = \min_{P \in \Lambda_{k,n}} \text{diam } P$ pour $n \geq 1$ et $k = 1, 2, \dots, v^n$.

THEOREME 5.2.4 Pour $s = -\log v/\log \xi$, on a

$$(*) \quad H^s(E) = \inf_{n \geq 1} \min_{1 \leq k \leq v^n} v^n t_{k,n}^s / k .$$

Démonstration: Nous la divisons en 3 étapes.

1°) Montrons que

$$H^s(E) = \inf \{ \sum_{P \in \Omega} (\text{diam } P)^s, \Omega \text{ décrivant les recouvrements finis de } E \text{ par des parties simples} \} .$$

Etant donnée la propriété 4, on a

$$H^s(E) = \inf \{ \sum_{S \in \Omega} (\text{diam } S)^s, \Omega \text{ décrivant les recouvrements de } E \text{ par des ensembles quelconques} \} .$$

De plus, la propriété 2 nous permet d'écrire

$$H^s(E) = \inf \{ \sum_{G \in \Gamma} (\text{diam } G)^s, \Gamma \text{ décrivant les recouvrements ouverts de } E \} .$$

E étant compact, on a plus spécifiquement

$$H^S(E) = \inf \{ \sum_{G \in \Gamma} (\text{diam } G)^S, \Gamma \text{ décrivant les recouvrements ouverts finis de } E \}.$$

Soit Γ un recouvrement ouvert et fini de E . Il existe un nombre réel $\delta > 0$ (qui dépend de Γ) tel que tout ensemble de diamètre $\leq \delta$ recouvert par Γ est contenu dans au moins un des ouverts de Γ . D'autre part, il existe un entier positif n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, E_n est recouvert par Γ car $\{E_n\}$ est une suite décroissante de compacts. En prenant n_0 suffisamment grand, le diamètre de chacun des compacts $K_{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}}$

est inférieur à δ . Par conséquent, si l'on fait correspondre à chaque ouvert $G \in \Gamma$ la plus grande (celle qui contient le plus de compacts $K_{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}}$) partie simple de E_{n_0} qu'il contient, on obtient un recouvrement fini Ω de E par des parties simples de E_{n_0} tel que

$$\sum_{P \in \Omega} (\text{diam } P)^S \leq \sum_{G \in \Gamma} (\text{diam } G)^S,$$

ce qui complète la première étape.

2°) Démontrons (*) sous l'hypothèse $H^S(E) > 0$. Posons, pour tout borélien $B \subset K$,

$$H(B) = H^S(B \cap E) / H^S(E)$$

obtenant ainsi une mesure de probabilité sur la tribu borélienne de K .

La H -mesure de chacun des compacts $K_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ est $1/v^n$. Posons

$$h = H^S(E) \quad \text{et} \quad h' = \inf_{n \geq 1} \min_{1 \leq k \leq v^n} v^{nt_{k,n}^S} / k.$$

Par définition de la mesure H , on a pour toute partie simple $P \in \Lambda_{k,n}$

$$H(P) = k/v^n ,$$

d'où

$$h' H(P) \leq t_{k,n}^s \leq (\text{diam } P)^s .$$

Donc si Ω est un recouvrement de E par des parties simples on obtient

$$p_{\Sigma \Omega}^{\Sigma} (\text{diam } P)^s \geq h' p_{\Sigma \Omega}^{\Sigma} H(P) \geq h' H(E) = h' ,$$

et d'après la 1^{ière} étape ci-haut, on a bien

$$h \geq h' .$$

Montrons d'autre part que $h \leq h'$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux entiers > 0 $k = k(\varepsilon)$ et $m = m(\varepsilon)$, et une partie simple $Q \in \Lambda_{k,m}$ tels que si l'on pose

$$h'' = v^m (\text{diam } Q)^s / k$$

on ait

$$h'' < h' + \varepsilon .$$

De plus, on a

$$Q = \bigcup_{(a_1, \dots, a_m) \in \Xi} K_{a_1, \dots, a_m}$$

pour un certain ensemble Ξ de k m -uples $(a_1, \dots, a_m)$ où $a_j \in \{1, \dots, v\}$.

Soient N un entier > 0 et Ω_N la famille des parties simples $P_\ell \in \Lambda_{k, \ell+m}$

qui s'écrivent

$$P_\ell = \bigcup_{(a_{\ell+1}, \dots, a_{\ell+m}) \in \Xi} K_{a_1, \dots, a_\ell, a_{\ell+1}, \dots, a_{\ell+m}}$$

avec $\ell \geq N$ et $\ell \equiv 0 \pmod{m}$. Alors $H(P_\ell) = k/v^{m+\ell}$, et par conséquent,

$$(**) \quad h'' H(P_\ell) = (\text{diam } Q)^s / v^\ell = (\xi^\ell \text{diam } Q)^s = (\text{diam } P_\ell)^s .$$

Appelons R , et fixons-le une fois pour toutes, un compact $\subset Q$ de la

forme $K_{r_1, r_2, \dots, r_m}$ pour un certain m -uplet $(r_1, r_2, \dots, r_m) \in \Xi$. Pour toute

suite infinie $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, les compacts $K_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ ($n=1, 2, \dots$) forment une suite décroissante ayant pour intersection un point de E . Soit $E^* \subset E$ l'ensemble des points de E qui correspondent à des suites $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ telles que $a_{i+1} = r_1, a_{i+2} = r_2, \dots, a_{i+m} = r_m$ pour une infinité d'indices $i \equiv 0 \pmod{m}$. Ainsi chaque $x \in E^*$ appartient à une infinité de $P(\ell)$. Vérifions que $H(E^*) = 1$.

Pour $\ell \equiv 0 \pmod{m}$, notons par $E(\ell)$ l'ensemble des $x \in E$ auxquels correspondent des suites $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ dans lesquelles le m -uplet $(a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+m})$ est différent du m -uplet $(r_1, r_2, \dots, r_m)$ pour tout $i \geq \ell$ et $i \equiv 0 \pmod{m}$. On peut alors écrire

$$E(\ell) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(\ell, n),$$

où $E(\ell, n)$ est l'ensemble des $x \in E$ auxquels correspondent des suites $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ pour lesquelles le m -uplet

$$(a_{\ell+(q-1)m+1}, a_{\ell+(q-1)m+2}, \dots, a_{\ell+qm}) \neq (r_1, r_2, \dots, r_m)$$

pour chaque $q = 1, 2, \dots, n$. De plus, $E(\ell, n)$ étant l'intersection avec E d'une partie simple $\in \Lambda_{p, \ell+nm}$ où $p = v^{\ell}(v^m-1)^n$, on a

$$H(E(\ell, n)) = \frac{v^{\ell}(v^m-1)^n}{v^{\ell+nm}} = \left(\frac{v^m-1}{v^m}\right)^n.$$

D'autre part, puisque $E(\ell, n+1) \subset E(\ell, n)$ pour tout $n \geq 1$, $E(\ell)$ est limite décroissante de la famille de $E(\ell, n)$, donc

$$H(E(\ell)) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(E(\ell, n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{v^m-1}{v^m}\right)^n = 0.$$

Puisque $E \setminus E^* = \bigcup_{\ell \equiv 0 \pmod{m}} E(\ell)$, on a

$$H(E^*) = 1.$$

On extrait maintenant de Ω_N une sous-famille Ω'_N , construite par récurrence de la façon suivante: soit $P_1 \in \Omega_N$ une partie simple de diamètre maximum; supposons $P_1, \dots, P_n$ déjà choisis, et choisissons parmi les parties simples de la famille Ω_N qui ont une intersection de H -mesure nulle

avec $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ celle ou une de celles qui sont de diamètre maximum. La famille $\Omega'_N = \{P_n\}_{n=1}^\infty$ ainsi construite est un recouvrement de E^* . En fait, toute partie simple $P \in \Omega_N$ est contenue dans au moins une des parties simples $P_n \in \Omega'_N$.

Pour tout $N \geq 1$, on a donc d'après (**)

$$\sum_{P \in \Omega'_N} (\text{diam } P)^S = h'' \sum_{P \in \Omega'_N} H(P) = h'' H(E^*) = h'' .$$

D'autre part,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{P \in \Omega'_N} (\text{diam } P)^S \geq H^S(E^*) = H^S(E) = h .$$

Par conséquent,

$$h \leq h'' < h' + \varepsilon ,$$

et ε étant arbitrairement petit, on a

$$h \leq h' ,$$

d'où finalement

$$h = h' .$$

3°) Démontrons (*) avec l'hypothèse $H^S(E) = 0$. Si

$$\inf_{n \geq 1} \min_{1 \leq k \leq v^n} v^n t_{k,n}^S / k = M > 0 ,$$

alors pour tout recouvrement Ω de E par des parties simples appartenant

à la famille $\Lambda_n = \bigcup_{1 \leq k \leq v^n} \Lambda_{k,n}$, on a

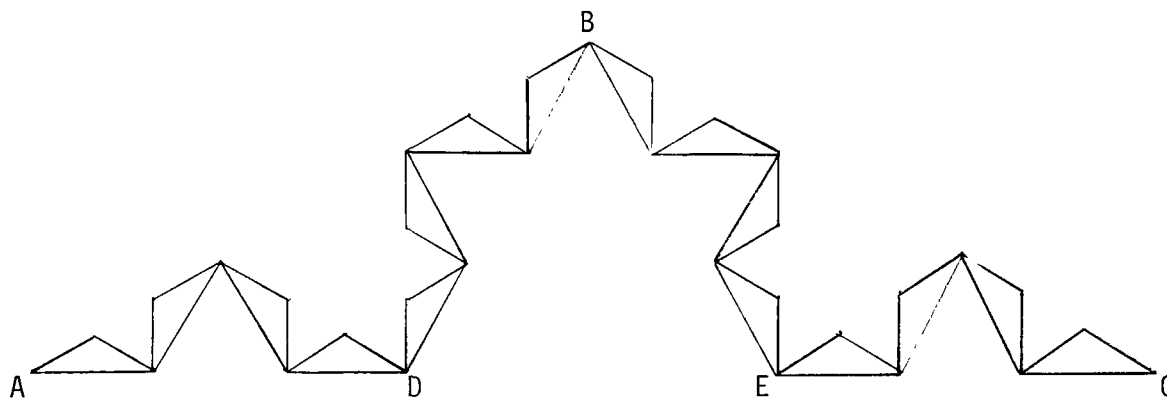
$$p_{\Sigma \Omega}(\text{diam } P)^S \geq M \quad p_{\Sigma \Omega} k(P)/v^n \geq M,$$

où $k(P)$ est l'unique entier ≥ 1 tel que $P \in \Lambda_{k(P),n}$. Par conséquent, on aurait $H^S(E) \geq M > 0$, en contradiction avec l'hypothèse $H^S(E) = 0$. Donc $M = 0$, et (*) est démontrée.

Revoyons maintenant les exemples 1°) et 3°) décrits plus haut.

1°) Courbe de Von Koch:

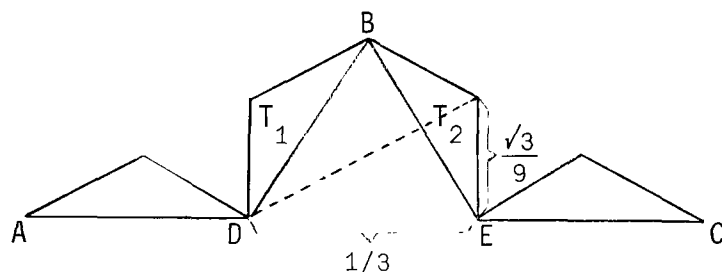
L'ensemble E_4 dans la suite emboîtée $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ est constitué par 16 triangles semblables disposés comme suit:



En calculant le diamètre des diverses parties simples de E_1, E_2, E_3 et E_4 , et à la lumière du théorème 5.2.4, nous sommes portés à faire la conjecture suivante:

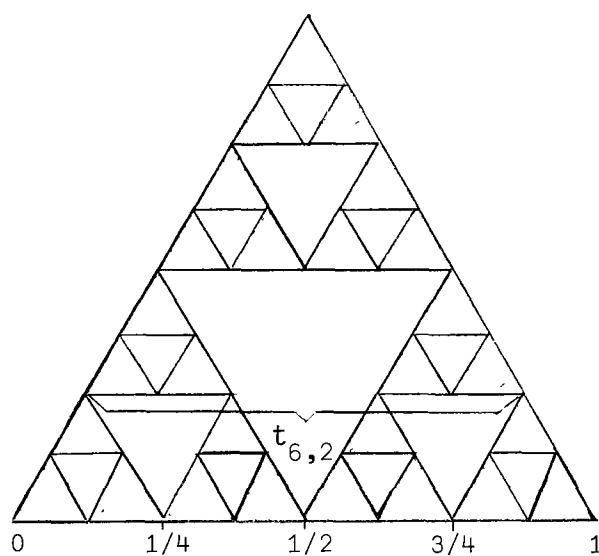
$$H^\alpha(E) = \inf_{k \geq 1} 2^{n(k)+1} t_{k, n(k)+1}^\alpha / k = 2^2 t_{2,2}^\alpha / 2 = 2^{\alpha-2},$$

où $\alpha = \dim E = \log 4 / \log 3$ et $t_{2,2} = 2\sqrt{3}/9$ est diamètre de la partie simple de E_2 formée par la réunion des triangles T_1 et T_2 .



3°) Triangles équilatéraux d'Eggleston:

L'ensemble E_3 dans la suite emboîtée $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ est constitué par 27 triangles équilatéraux disposés comme suit:



En calculant le diamètre des diverses parties simples de E_1, E_2 et E_3 , et à la lumière du théorème 5.2.4, nous faisons la conjecture suivante:

$$H^\alpha(E) = \inf_{k \geq 1} 3^{n(k)} t_{k,n(k)}^\alpha / k = 3^2 t_{6,2}^\alpha / 6 = 3^\alpha / 6$$

où $\alpha = \dim E = \log 3 / \log 2$ et $t_{6,2} = 3/4$.

Questions à l'étude:*

Existe-t-il des parfaits homogènes au sens large de type (ν, ξ) , non-linéaires, tels que $H^s(E) = 0$ pour $s = -\log \nu / \log \xi$?

Si oui, sont-ils quand-même de dimension $\alpha = -\log \nu / \log \xi$?

*Par la suite, une réponse (du moins partielle) à ces questions a été obtenue par l'auteur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEARDON, A.F.
On the Hausdorff dimension of general Cantor sets,
 Proc. Camb. phil. Soc. [61], 679-94; 1965.
- [2] BESICOVITCH, A.S.
On linear sets of fractional dimensions,
 Math. Annln, [101], 161-93; 1929.
- [3] On linear sets of points of fractional dimension II,
 J. Lond. math. Soc. [43], 548-50; 1967.
- [4] BESICOVITCH, A.S. et H.D. Ursell
Sets of fractional dimensions V: On dimensional numbers of
some continuous curves,
 J. Lond. math. Soc. [12], 18-25; 1937.
- [5] BEST, E.
On sets of fractional dimensions III,
 Proc. Lond. math. Soc. (2), [47], 436-54; 1942.
- [6] BILLINGSLEY, P.
Hausdorff dimension in probability theory,
 Illinois J. Math. [4], 187-209; 1960.
- [7] Hausdorff dimension in probability theory II,
 J. Math. [5], 291-8; 1961.
- [8] EGGLESTON, H.G.
The fractional dimension of a set defined by decimal properties,
 Q.J. Math. Oxford, [20], 31-6; 1949.
- [9] Sets of fractional dimension which occur in some problems of
number theory,
 Proc. Lond. math. Soc. (2), [54], 42-93; 1952.
- [10] On closest packing by equilateral triangles,
 Proc. Camb. phil. Soc. [49], 26-30; 1953.
- [11] GALAMBOS, J.
Representations of Real Numbers by Infinite Series,
 Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [12] HAUSDORFF, F.
Dimension und äusseres Mass,
 Math. Ann. [79], 157-79; 1919.

- [13] KAHANE, J.P. et R. SALEM
Ensembles parfaits et séries trigonométriques,
 Paris, Hermann, 1963.
- [14] KLINE, S.A.
On curves of fractional dimensions,
 J. Lond. math. Soc. [20], 79-86; 1945.
- [15] LARMAN, D.G.
A note on the Besicovitch dimension of the closest packing
of spheres in R_n ,
 Proc. Camb. phil. Soc. [62], 193-5; 1966.
- [16] On the Besicovitch dimension of the residual set of arbitrarily
packed disks in the plane,
 J. Lond. math. Soc. [42], 292-302; 1967.
- [17] MARSTRAND, J.M.
Some fundamental geometrical properties of plane sets of
fractional dimensions,
 Proc. Lond. math. Soc. [4], 257-302; 1954.
- [18] MELZAK, Z.A.
On infinite packings of disks,
 Can. J. Math. [18], 838-52; 1966.
- [19] MORAN, P.A.P.
On plane sets of fractional dimensions,
 Proc. Lond. math. Soc. (2), [51], 415-23; 1949.
- [20] The translations of linear sets of fractional dimensions,
 Proc. Camb. phil. Soc. [50], 634-6; 1954.
- [21] PEYRIERE, J.
Calculs de dimension de Hausdorff,
 Publications d'Analyse Harmonique d'Orsay, n° 188, 1976.
- [22] ROGERS, C.A.
Hausdorff Measures,
 Cambridge University Press, 1970.
- [23] ROGERS, C.A. et M. SION
On Hausdorff measures in topological spaces,
 Monat. Math. [67], 269-78; 1963.
- [24] SION, M. et D. SJERVE
Approximation properties of measures generated by continuous
set functions,
 Mathematika, [9], 145-56; 1962.

- [25] SION, M. et R.C. WILLMOTT
Hausdorff measures on abstract spaces,
 Trans. Am. math. Soc. [123], 275-309; 1966.
- [26] VOLKMANN, B.
Über die Hausdorffsche Dimension von Mengen, die durch
Zifferneigenschaften charakterisiert sind (V),
 Math. Zeitschrift [65], 389-413; 1956.
- [27] WEGMANN, H.
Das Hausdorff-Maß von Cantormengen,
 Math. Ann. [193], 1971.
- [28] Die Hausdorff-Dimension von kartesischen Produktmengen in
metrischen Räumen,
 J. reine angew. Math. [234], 163-71; 1969.
- [29] Die Hausdorff-Dimension von Mengen reeller Zahlenfolgen,
 J. reine angew. Math. [235], 20-8; 1969.
- [30] WILLMOTT, R.C.
Some properties of Hausdorff measures on uniform spaces,
 Proc. Lond. math. Soc. [17], 513-29; 1967.

Complément de bibliographie

- [i] MANDELBROT, B.
Les objets fractals, Flammarion, 1975.
- [ii] MORAN, P.A.P.
Additive functions of intervals and Hausdorff measure,
 Proc. Camb. phil. Soc. [42], 1946
- [iii] GIERL, A.
Über das Hausdorffsche Mass gewisser Punktmengen in der Zifferntheorie,
 J. reine angew. Math. [202], 1959