APPLICATION DE L'ANALYSE FONCTIONNELLE
A LA THEORIE CLASSIQUE DU POTENTIEL

par

Rémi VAILLANCOURT

Thèse présentée
à la Faculté des Sciences pures et appliquées
de l'Université d'Ottawa
pour l'obtention de la maîtrise ès sciences
en mathématiques

Ottawa, Canada, 1964

RESUME

APPLICATION DE L'ANALYSE FONCTIONNELLE A LA THEORIE CLASSIQUE DU POTENTIEL

Les problèmes de Robin-Poincaré et de Neumann-Poincaré sont posés par rapport à une surface, ou une courbe, régulière S de classe C^2 dans l'espace E^3, ou dans le plan E^2. Si H, $H \subset L^2$, est l'espace préhilbertin des fonctions continues sur S, les noyaux K en E^2 et K^2 en E^3 des équations de Fredholm-Poincaré sont des transformations complètement continues de H en H, et pleinement symétrisables par la transformation $G \gg 0$ associée au potentiel de simple couche. Alors, par REID (Duke Math. J. 18 (1951), 41-56), on obtient le spectre complet de K et K*. Ensuite on exprime GKf, $K^{*2}f$ en E^2 et $K^{*3}f$ en E^3 en séries selon les fonctions propres de K*. Ces séries convergent uniformément et absolument sur S. Enfin la solution des problèmes posés est données en séries, uniformément convergentes en E^2 ou E^3.

TABLE DES MATIERES

Je remercie le professeur James Lucien HOWLAND, de l'Université d'Ottawa, de m'avoir suggéré le sujet de cette thèse et d'en avoir soigneusement dirigé l'élaboration.

Je remercie aussi le professeur Garrett BIRKHOFF, de l'Université Harvard, qui, sur l'invitation du professeur HOWLAND, a bien voulu considérer avec moi les problèmes relatifs à cette thèse et qui m'a fortement encouragé dans mon travail de recherche.

Rémi VAILLANCOURT, O.M.I.

Ottawa, le 31 mars, 1964.

INTRODUCTION

Il est souvent très avantageux d'exprimer la solution des problèmes du potentiel en séries, partout uniformément et absolument convergentes, suivant une suite de fonctions propres.

Dans sa dissertation doctorale, J. L. HOWLAND[1], à la suite de BLUMENFELD et MAYER[2], résout les problèmes généralisés de Robin-Poincaré et de Neumann-Poincaré au moyen des fonctions fondamentales de Poincaré. Dans ces travaux, on se base sur les théorèmes de FREDHOLM[3] et de MARTY[4] pour étudier le spectre des opérateurs en question. Ensuite on étudie la convergence des solutions.

Le présent travail définit un espace préhilbertin H[S] dans l'ensemble des fonctions continues sur une surface régulière S de classe C^2. Puis on considère les opérateurs K et G de la théorie du potentiel comme des transformations de H en H. K, dans le plan, et K^2, dans l'espace, sont complètement continues et K est pleinement symétrisable par la transformation G symétrique et positive. Appliquant les résultats de REID[5], on obtient aussitôt les spectres $\{\lambda_i , u_i\}$ de K et $\{\lambda_i , Gu_i\}$ de K^*, l'inégalité de Bessel, $\sum (f,Gu_i)^2 \leqslant (f,Gf)$, et l'expansion bilinéaire de Hilbert, $(GKf,g) = \sum (Kf,Gu_i)(g,Gu_i)$.

BLUMENFELD et MAYER[6] affirment que la série $\sum (\lambda_i^{\,2} Gu_i)^2$ est bornée, en substituant $f(q) = K^{*2}(p,q)$ dans l'inégalité de Bessel; mais

1) Howland.
2) Blumenfeld et Mayer.
3) Fredholm [1]-[2].
4) Marty [1]-[4].
5) Reid, p. 41-50.
6) Blumenfeld et Mayer, p. 2034.

INTRODUCTION

Il est souvent très avantageux d'exprimer la solution des problèmes du potentiel en séries, partout uniformément et absolument convergentes, suivant une suite de fonctions propres.

Dans sa dissertation doctorale, J. L. HOWLAND[1)], à la suite de BLUMENFELD et MAYER[2)], résout les problèmes généralisés de Robin-Poincaré et de Neumann-Poincaré au moyen des fonctions fondamentales de Poincaré. Dans ces travaux, on se base sur les théorèmes de FREDHOLM[3)] et de MARTY[4)] pour étudier le spectre des opérateurs en question. Ensuite on étudie la convergence des solutions.

Le présent travail définit un espace préhilbertin H[S] dans l'ensemble des fonctions continues sur une surface régulière S de classe C^2. Puis on considère les opérateurs K et G de la théorie du potentiel comme des transformations de H en H. K, dans le plan, et K^2, dans l'espace, sont complètement continues et K est pleinement symétrisable par la transformation G symétrique et positive. Appliquant les résultats de REID[5)], on obtient aussitôt les spectres $\{\lambda_i , u_i\}$ de K et $\{\lambda_i , Gu_i\}$ de K^*, l'inégalité de Bessel, $\sum (f,Gu_i)^2 \leq (f,Gf)$, et l'expansion bilinéaire de Hilbert, $(GKf,g) = \sum (Kf,Gu_i)(g,Gu_i)$.

BLUMENFELD et MAYER[6)] affirment que la série $\sum (\lambda_i{}^2 Gu_i)^2$ est bornée, en substituant $f(q) = K^{*2}(p,q)$ dans l'inégalité de Bessel; mais

1) Howland.
2) Blumenfeld et Mayer.
3) Fredholm [1]-[2].
4) Marty [1]-[4].
5) Reid, p. 41-50.
6) Blumenfeld et Mayer, p. 2034.

ils ne prouvent la validité de cette inégalité que pour les fonctions bornées et intégrables. Or $K^{*2}(p,q)$ n'est pas borné; cependant $K^{*3}(p,q)$ est continu, donc borné. Pour améliorer ces résultats, je prouve la convergence de la série $\sum(\lambda_i Gu_i)^2$.

Ce dernier théorème, avec l'inégalité de Bessel et l'expansion bilinéaire de Hilbert, nous donne une expansion de GKf,
$GKf = \sum \lambda_i(f,Gu_i)Gu_i$, uniformément et absolument convergente sur S.

Ce même théorème nous donne aussi une expansion de $K^{*2}h$ dans le plan, $K^{*2}h = \sum \lambda_i^2(h,u_i)Gu_i$, et une expansion de $K^{*3}h$ dans l'espace, $K^{*3}h = \sum \lambda_i^3(h,u_i)Gu_i$; ces expansions sont uniformément et absolument convergentes.

Comme K, dans le plan, et K^2, dans l'espace, sont des transformations complètement continues de $L^2[S]$ en $H[S]$, on peut recourir à l'alternative de Fredholm pour garantir l'existence de solutions continues pour l'équation de Robin-Poincaré, $f = \lambda Kf + g$, et pour celle de Neumann-Poincaré, $h = \lambda K^*h + g$, dans les deux cas $g \in H$.

Ensuite, on exprime la solution de l'équation $Gf = \lambda GKf + Gg$ sur la surface S, au moyen de l'expansion de GKf. Le potentiel de simple couche $V[f]$ qui résout le problème de Robin-Poincaré, est l'extension de Gf à tout le plan ou à tout l'espace et par le premier théorème de Harnack, cette extension est partout uniformément et absolument convergente.

On résout aussi l'équation $h = \lambda^2K^{*2}h + \lambda K^*g + g$ dans le plan, et $h = \lambda^3K^{*3}h + \lambda^2K^{*2}g + \lambda K^*g + g$ dans l'espace. Alors le potentiel de double couche $W[h]$ est la solution du problème de Neumann-Poincaré. Si pour terme non homogène on a $g = Gk$, $k \in H$, le problème de Neumann-

Poincaré se réduit à celui de Robin-Poincaré.

L'emploi des méthodes d'analyse fonctionnelle nous révèle immédiatement que l'équation de Robin-Poincaré est un cas particulier d'équation intégrale au noyau complètement continu et pleinement symétrisable par une transformation symétrique et positive dans un espace préhilbertin. Comme cet espace est l'ensemble des fonctions continues définies sur un domaine compact, avec la métrique de L^2, on peut obtenir la convergence de $\sum(\lambda_i G u_i)^2$. Mais, puisque dans le cas du problème de Neumann-Poincaré, on ne symétrise pas le noyau de l'équation fonctionnelle, l'application de cette méthode y est moins élégante que dans le cas du problème de Robin-Poincaré.

CHAPITRE PREMIER

LES EQUATIONS INTEGRALES DE LA THEORIE DU POTENTIEL

1.1 Surface d'intégration S

Définition. Soit R une région régulière de l'espace[1] E^3 ou du plan[2] E^2, et bornée par une surface ou une courbe ∂R de classe[3] C^2.

Dans la suite, nous dirons "S" ou "surface S" pour ∂R et nous dénoterons par "dt" un élément de surface dS contenant le point t. De plus, nous ometterons souvent d'indiquer le domaine d'intégration S.

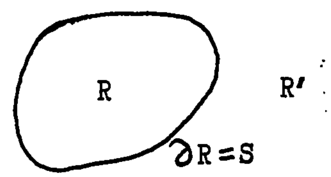

Fig. 1.

On exige que R soit régulière pour assurer la validité du théorème de la divergence[4] et des formules de Green[5]. Par définition S est compacte; alors si S est de classe C^2, certaines inégalités seront valables uniformément sur S pour les noyaux de la théorie du potentiel et ceux-ci seront complètement continus comme on le verra dans la suite.

1.2 Potentiel de simple et double couches sur S

Définition. Soit C[S], ou C, l'ensemble des fonctions définies et continues sur S.

1) Kellogg, p. 113.
2) Kellogg, p. 100.
3) Kellogg, p. 157.
4) Kellogg, p. 113.
5) Kellogg, p. 212-218. Sternberg et Smith, p. 63-67.

Dans le cas du plan, il faudra souvent restreindre $C[S]$ au sous-ensemble des fonctions de masse totale nulle sur S, c'est-à-dire telles que $\int_S f(q)dq = 0$. Nous l'indiquerons chaque fois.

<u>Définition</u>. Soit V le potentiel d'une simple couche de densité f sur S, $f \in C$, défini par la relation suivante:

$$V[f,P] = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_S \frac{1}{r_{Pq}} f(q)\,dq & \text{en } E^3 \\ \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_S \log \frac{1}{r_{Pq}} f(q)\,dq & \text{en } E^2, \end{cases}$$

r_{Pq} étant la distance de P à q, et q le point d'intégration sur S.

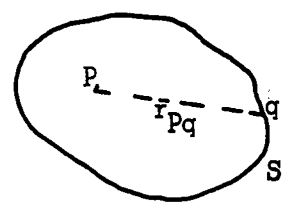

Fig. 2.

On écrira indifféremment V, $V[f]$, $V[P]$, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Comme la surface S est régulière, pour $f \in C$, $V[f]$ est défini sur S et est continu dans tout l'espace[1]. De plus, $V[P]$ est harmonique dans R et R'. Le potentiel $V[f]$ est régulier[2] à l'infini dans E^3; dans E^2, pour assurer[3] la régularité de V, f doit être de masse totale nulle.

<u>Définition</u>. Soit $G: C[S] \to C[S]$ la transformation définie par l'intégrale au noyau symétrique $G(p,q)$

1) Kellogg, p. 160.
2) Kellogg, p. 217 et 144.
3) Plemelj, p. 20.

$$(1.2.1)\qquad Gf = \int_S G(p,q)f(q)dq = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_S \dfrac{1}{r_{pq}} f(q)dq & \text{en } E^3 \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_S \log\dfrac{1}{r_{pq}} f(q)dq & \text{en } E^2. \end{cases}$$

Il est clair que $Gf = V|_S$ la restriction de $V[f,P]$ à S.

<u>Définition</u>. Soit[1] n la direction de la normale à S dirigée dans R', convenue comme positive. Indiquons par $\frac{\partial}{\partial n_p}\frac{1}{r_{pq}}$ la dérivée de $\frac{1}{r_{pq}}$ au point p de S dans la direction de la normale positive, le point $P \to p$.

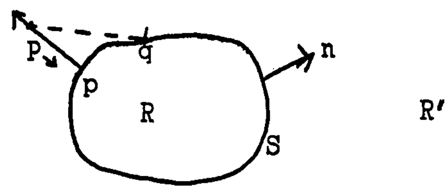

Fig. 3.

<u>Définition</u>. Soit K: $C[S] \to C[S]$ la transformation définie par l'intégrale au noyau $K(p,q)$

$$(1.2.2)\qquad Kf = \int_S K(p,q)f(q)dq = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_S \dfrac{\partial}{\partial n_p}\dfrac{1}{r_{pq}} f(q)dq & \text{en } E^3 \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_S \dfrac{\partial}{\partial n_p}\log\dfrac{1}{r_{pq}} f(q)dq & \text{en } E^2. \end{cases}$$

Soit V_{n_+} la limite de $(V[P])_n = \frac{\partial}{\partial n}(V[P])$, $P \in R'$, $P \to p$; et V_{n_-} la limite correspondante pour $P \in R$, ces limites étant approchées uniformément[2] par rapport à p.

Employant cette notation, on a les formules de Plemelj[3]

$$(1.2.3)\qquad (V[f])_{n_-} - (V[f])_{n_+} = 2f \qquad \text{sur } S$$

$$(1.2.4)\qquad (V[f])_{n_-} + (V[f])_{n_+} = 2Kf \qquad \text{sur } S.$$

<u>Définition</u>. Soit W le potentiel d'une double couche de moment h

1) Kellogg, p. 164.
2) Kellogg, p. 164.
3) Kellogg, p. 164.

sur S, $h \in C$, défini par la relation suivante

$$W[f,P] = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_q}\left(\frac{1}{r_{Pq}}\right) h(q)dq & \text{en } E^3 \\ \frac{1}{\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_q}\left(\log \frac{1}{r_{Pq}}\right) h(q)dq & \text{en } E^2. \end{cases}$$

Comme la surface S est régulière, pour $f \in C$, le potentiel W est défini et harmonique dans R et R′ et est régulier à l'infini[1].

<u>Définition</u>. Soit $K^*: C[S] \to C[S]$ la transformation définie par l'intégrale au noyau $K^*(p,q) = K(q,p)$

$$(1.2.5) \qquad K^*h = \int_S K^*(p,q)h(q)dq = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_q}\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) h(q)dq & \text{en } E^3 \\ \frac{1}{\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_q}\left(\log \frac{1}{r_{pq}}\right) h(q)\,dq & \text{en } E^2. \end{cases}$$

On a alors[2]

$$(1.2.6) \qquad (W[h])_+ - (W[h])_- = 2h \qquad \text{sur } S$$

$$(1.2.7) \qquad (W[h])_+ + (W[h])_- = 2K^*h \qquad \text{sur } S,$$

$(W[h])_+$ étant la limite de $W[P]$, $P \in R'$, quand $P \to p \in S$ le long de n, et $(W[h])_-$ la limite correspondante pour $P \in R$, ces limites étant approchées uniformément par rapport à p.

Soit $h \in C$; pour $P' \in R'$ et $P \in R$, on a[3]

$$(W[P'])_n - (W[P])_{n_-} \to 0$$

uniformément avec $P' \to p$, $P \to p$, la distance de P′ à p étant maintenue égale à celle de P à p.

La formule de Green est applicable au potentiel $W[K^*h]$ dans le plan[4] et au potentiel $W[K^{*2}h]$ dans l'espace[5].

1) Kellogg, p. 217.
2) Kellogg, p. 167-168.
3) Kellogg, p. 170.
4) Sternberg et Smith, p. 156 et Liapounoff, p. 285-286.
5) Liapounoff, p. 285-286.

1.3 L'intégrale de Dirichlet

Dans la suite, on aura besoin du fait que l'intégrale $\int_S fGf$ est positive. On obtient ce résultat en exprimant l'intégrale sur S au moyen de l'intégrale de Dirichlet.

Soit $f \in C$, et dans le plan de masse totale nulle. Alors le potentiel $V[f,P]$ est régulier à l'infini. Dans ce cas, on peut appliquer la première formule de Plemelj (1.2.3) et la première égalité de Green pour les fonctions harmoniques[1], afin d'obtenir la relation désirée:

(1.3.1) $$D(V) = \int_{R+R'} (\nabla^2 V)^2 dR = \int_S Gf(V_{n-} - V_{n+})dS = 2\int_S fGfdS.$$

1.4 Problèmes de Robin-Poincaré et de Neumann-Poincaré

Le problème de Robin-Poincaré[2] est celui de trouver un potentiel V d'une simple couche tel que

$$(V_{n-} - V_{n+}) = \lambda(V_{n-} + V_{n+}) + 2g \qquad \text{sur } S,$$

ou, en faisant usage des formules de Plemelj (1.2.3) et (1.2.4), on a

(1.4.1) $$f - \lambda Kf = g \qquad \text{sur } S.$$

Le problème de Neumann-Poincaré[3] consiste à trouver un potentiel W d'une double couche tel que

$$(W_+ - W_-) = \lambda(W_+ + W_-) + 2g \qquad \text{sur } S,$$

ou, en faisant usage des relations (1.2.6) et (1.2.7), on a

(1.4.2) $$h - \lambda K^*h = g \qquad \text{sur } S.$$

Le problème de Neumann est ainsi un cas particulier, $\lambda = \pm 1$, du problème de Robin-Poincaré et le problème de Dirichlet[4] est un

1) Sternberg et Smith, p. 65.
2) Poincaré [1], p. 61.
3) Poincaré [1], p. 134. Fredholm [1], p. 39.
4) Poincaré [1], p. 134.

cas particulier, $\lambda = \pm 1$, du problème de Neumann-Poincaré.

On résoudra les deux problèmes de Poincaré pour une valeur λ quelconque et toute fonction $g \in C[S]$. Les solutions seront exprimées en séries selon les fonctions propres de la transformation K^*, appelées fonctions fondamentales de Poincaré, ces séries étant partout uniformément et absolument convergentes.

1.5 Quelques propriétés des noyaux des transformations G, K et K*

Notons immédiatement quelques propriétés des noyaux de G, K et K^*.

Définition. Le noyau itéré $T^n(p,q)$ de la transformation T^n est défini par induction:

$$T^n(p,q) = \int T^{n-1}(p,t)T^1(t,q)dt; \quad T^1(p,q) = T(p,q).$$

On sait que $K(p,q)$ et $K^*(p,q)$ sont uniformément continus sur $S \times S$ dans le plan[1].

Dans l'espace, on a[2] pour tout $p,q \in S$:

$$(1.5.1) \qquad G(p,q) \leq \frac{M}{r_{pq}}; \quad |K(p,q)| \leq \frac{M}{r_{pq}}; \quad |K^*(p,q)| \leq \frac{M}{r_{pq}};$$

la constante M étant indépendante de p et q.

Il s'ensuit par un théorème de Pétrovskiĭ[3] avec $\alpha = 1$ et $d = 2$, que $G^3(p,q)$, $K^3(p,q)$ et $K^{*3}(p,q)$ sont uniformément continus sur $S \times S$, et

$$(1.5.2) \qquad |K^2(p,q)| \leq B \log \frac{M}{r_{pq}}; \qquad |K^{*2}(p,q)| \leq B \log \frac{M}{r_{pq}};$$

les constantes M et B étant positives et indépendantes de p et q.

Adoptons la notation suivante:

$$(T,T)(p) = \int [T(p,q)]^2 dq.$$

1) Riesz et Sz.-Nagy, p. 190.
2) Kellogg, p. 299.
3) Petrovskiĭ, p. 29. Kellogg, p. 301-304.

<u>Théorème 1.5.1</u> L'intégrale $(G^2,G^2)(p)$ est uniformément continue sur S.

<u>Preuve</u>: Dans le plan $G(p,q)=\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{r_{pq}}$. Alors, si $T(p,q)=\frac{1}{(r_{pq})^{1/2}}$, on a

$$|G(p,q)|\leq B\cdot T^2(p,q).$$

Par le même théorème de Petrovskiĭ avec $\alpha=\frac{1}{2}$ et $d=1$, on voit que $G^2(p,q)$ est uniformément continu sur $S\times S$. Donc (G^2,G^2) est uniformément continue sur S.

Dans l'espace,

$$(G^2,G^2)(p)=G^4(p,p)$$

et $G^4(p,q)$ est uniformément continu.

c.q.f.d.

<u>Corollaire 1.5.1</u> Les intégrales suivantes

$(K,K)(p)$ et $(K^*,K^*)(p)$ en E^2

$(K^2,K^2)(p)$ et $(K^{*2},K^{*2})(p)$ en E^3

sont des fonctions de p uniformément continues sur S.

<u>Preuve</u>: Dans le plan, la conclusion suit de la continuité de $K(p,q)$, et dans l'espace, de l'inégalité (1.5.1).

c.q.f.d.

<u>Corollaire 1.5.2</u> L'intégrale (G^2,G^2) et les intégrales du corollaire 1.5.1 sont toutes bornées par une constante A positive.

<u>Preuve</u>: Ces intégrales sont continues et S est compacte.

c.q.f.d.

<u>Corollaire 1.5.3</u> Les intégrales suivantes

$\int[K(p,t)-K(q,t)]^2dt$ en E^2

$\int[K^2(p,t)-K^2(q,t)]^2dt$ en E^3

tendent uniformément vers zéro avec $p\to q$. On a les mêmes résultats avec K*.

<u>Preuve</u>: Dans le plan, la conclusion suit de la continuité de K sur $S \times S$.

Dans l'espace, soient σ un voisinage de q de rayon 2a suffisamment petit et σ' un autre voisinage du même point q de rayon a.

Alors, pour $p \in \sigma'$,

$$\int_{S-\sigma} [K^2(p,t) - K^2(q,t)]^2 dt \to 0$$

uniformément, et par l'inégalité (1.5.2) on a de la façon habituelle en passant aux coordonnées polaires[1)]

$$\int_{\sigma} [K^2(p,t) - K^2(q,t)]^2 dt \leq 4B^2 \int_{\sigma} [K^2(q,t)]^2 dt < \epsilon .$$

Comme ces inégalités valent uniformément pour tout $q \in S$ et pour a suffisamment petit, ceci achève la démonstration.

c.q.f.d.

1) PetrovskiY, p. 30. Kellogg, p. 304.

CHAPITRE II

SPECTRE DES TRANSFORMATIONS K ET K*

2.1 L'espace préhilbertin H

Définition. Soit

$$(f,g) = \int_S f(p)g(p)dp, \quad f,g \in C[S],$$

un produit scalaire réel défini sur $C[S]$. Alors ce produit scalaire définit la métrique de L^2 sur $C[S]$:

$$\|f\|^2 = (f,f),$$

et dans cette métrique, $C[S]$ est un espace préhilbertin $H[S]$, ou simplement H.

Remarquons que $H \subset L^2[S]$, L^2 étant l'espace hilbertin des fonctions au carré intégrable définies sur S.

Soient K et K* les transformations de la théorie du potentiel, aux noyaux $K(p,q)$ et $K^*(p,q) = K(q,p)$. On voit que K* est l'adjointe de K par rapport au produit scalaire sur H, puisque $(f,K^*g) = (Kf,g)$, tout $f,g \in H$.

2.2 Les transformations G, K et K* bornées en H

Définition. La norme $\|T\|$ d'une transformation linéaire de H en H est la plus petite borne supérieure telle que

$$\|Tf\| \leq \|T\| \cdot \|f\|, \quad \text{tout } f \in H.$$

Théorème 2.2.1 Les transformations G, K et K* sont bornées en H.

Preuve: Par le corollaire 1.5.2, on a

$$(Gf,Gf)^2 = (f,G^2f)^2 \leq (f,f)^2 \int_S A dp \leq (f,f)^2 A\,|S|.$$

Donc $\|G\|^4 \leq A|S|$. Par le même corollaire 1.5.2, on voit que K et K* sont bornées dans l'espace. Dans le plan, la conclusion découle directement de la continuité de $K(p,q)$.

c.q.f.d.

2.3 Les transformations complètement continues K, K^* dans le plan et K^2, K^{*2} dans l'espace.

Définition. Soit T une transformation linéaire de H en H. T est complètement continue[1] en H si l'image par T de toute suite bornée d'éléments de H est compacte en H.

Théorème 2.3.1 K, K^* dans le plan et K^2, K^{*2} dans l'espace sont complètement continues en H.

Preuve: Soit $\{f_n\}$ une suite d'éléments de H, bornée $\|f_n\| \leqslant F$. Soient $g_n = Kf_n$ en E^2 et $g_n = K^2 f_n$ en E^3. Alors, par le corollaire 1.5.3,

$$|g_n(p) - g_n(q)|^2 \leqslant F^2 \int [K(p,t) - K(q,t)]^2 dt \qquad \text{en } E^2$$

et

$$|g_n(p) - g_n(q)|^2 \leqslant F^2 \int [K^2(p,t) - K^2(q,t)]^2 dt \qquad \text{en } E^3$$

tendent uniformément vers zéro avec $p \to q$, tout n; par conséquent $\{g_n\}$ forme une famille également continue.

De plus, par le corollaire 1.5.2, les suites $\{Kf_n\}$ en E^2 et $\{K^2 f_n\}$ en E^3 sont uniformément bornées par $FA^{1/2}$.

Sous ces hypothèses, le théorème d'Ascoli[2] affirme que ces suites contiennent une sous-suite convergeant uniformément vers un élément de H.

Enfin, on sait[3] que l'adjointe d'une transformation c.c. est c.c.

c.q.f.d.

Corollaire 2.3.1 K est c.c. en L^2 dans le plan et K^2 est c.c.

1) Riesz et Sz.-Nagy, p. 203.
2) Kellogg, p. 265.
3) Taylor, p. 275.

en L^2 dans l'espace.

On sait que même K est c.c. en L^2 dans l'espace[1].

<u>Corollaire 2.3.2</u> Soit $f \in L^2$. Alors, dans le plan $Kf, K^*f \in H$, et dans l'espace K^2f, $K^{*2}f \in H$.

Ces deux corollaires découlent de la preuve du théorème précédent.

2.4 <u>K pleinement symétrisable par $G > 0$</u>

<u>Définition</u>. Une transformation T de H en H est symétrique si

$$(Tf,g)=(f,Tg), \quad \text{tout } f,g\in H.$$

<u>Définition</u>. T est positive si

$$(Tf,f)\geq 0, \quad \text{tout } f\in H.$$

<u>Définition</u>. T est symétrisable à gauche par S, si

$$(STf,g)=(f,STg), \quad \text{tout } f,g\in H.$$

<u>Théorème 2.4.1</u> La transformation G est positive et symétrique.

<u>Preuve</u>: G est symétrique. En effet $G(p,q)=G(q,p)$.

G est positive[2]. Soit $f\in H$, et dans le plan de masse totale nulle. Alors, par l'égalité (1.3.1), on a

$$2(Gf,f)=(Gf,V_{n_-}-V_{n_+})=\int_{R+R'}(\nabla^2 V)^2\geq 0.$$

c.q.f.d.

<u>Théorème 2.4.2</u> K est symétrisable à gauche par G et K* à droite.

<u>Preuve</u>: Soient $f,g\in H$, et dans le plan de masse totale nulle. Soient $u=V[f]$ et $v=V[g]$. Alors[3]

$$(u_-v_{n_-}-v_-u_{n_-})=0 \quad \text{et} \quad (u_+v_{n_+}-v_+u_{n_+})=0.$$

Puisque $Gf=u_+=u_-$ et $Gg=v_+=v_-$, on a

1) Garabedian, p. 359-361.
2) Blumenfeld et Mayer, p. 2014-2015.
3) Sternberg et Smith, p. 65.

$$(Gf, v_{n_-} + v_{n_+}) = (Gg, u_{n_-} + u_{n_+})$$

et par la formule de Plemelj (1.2.4),

$$(Gf, Kg) = (Gg, Kf);$$

enfin par la symétrie de G,

$$(f, GKg) = (GKf, g) \quad \text{et} \quad (K^*Gf, g) = (f, K^*Gg).$$

c.q.f.d.

Définition. Soit T une transformation de H en H symétrisable par G. T est pleinement symétrisable[1] par G si pour tout élément propre f à valeur propre correspondante λ non nulle, on a $Gf \neq 0$, c'est-à-dire

$$Tf = \lambda f \neq 0 \quad \text{implique} \quad Gf \neq 0.$$

Théorème 2.4.3 K est pleinement symétrisable par G.

Preuve: Soit $V[f]$ le potentiel de simple couche de densité $f \in H$. Puisque V est harmonique en R et R', si $V|_S = Gf = 0$ sur S, alors $V = 0$ en E^2 ou E^3. Donc $V_{n_-} = V_{n_+} = 0$ sur S, et par (1.2.4), $Kf = 0$.

Alors $Gf = 0$ implique $Kf = 0$; par conséquent $Kf \neq 0$ implique $Gf \neq 0$.

c.q.f.d.

2.5 Spectre de K et K*

Considérons d'abord le cas dans l'espace E^3. Nous avons établi que les transformations G et K de l'espace préhilbertin H sont bornées, que K^2 est complètement continue et que K est pleinement symétrisable par $G \geqslant 0$. Alors nous pouvons appliquer à K les théorèmes connus tels que formulés par Reid[2] pour obtenir le spectre de K et de K*.

Il existe donc un ensemble maximal non vide[3] d'éléments propres u_i

1) Zaanen, p. 371.
2) Reid, p. 47-50.
3) Blumenfeld et Mayer, p. 2015. Kellogg, p. 312.

linéairement indépendants correspondant aux valeurs propres $\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \cdots \geqslant 0$, chacune apparaissant aussi souvent que l'indique sa multiplicité. Cet ensemble est G-orthonormal, c'est-à-dire

$$(u_i^+, Gu_j^+) = \delta_{ij} ,$$

et

$$\lambda_i^+ = \max\ (f, GKf) \quad \text{sur} \left\{ f: \ f \in H,\ (f, Gu_k^+) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, i-1 \right\} .$$

L'ensemble $\{u_i^+, \lambda_i^+\}$ est fini ou dénombrablement infini, et dans le dernier cas, $\lambda_i^+ \to 0$.

De plus, si $(f, Gu_i^+) = 0$, tout i, alors $(f, GKf) \leqslant 0$.

Il existe aussi un ensemble maximal G-orthonormal d'éléments propres u_j^- de K correspondant aux valeurs propres négatives $\lambda_1^- \leqslant \lambda_2^- \leqslant \cdots \leqslant 0$, et jouissant des propriétés extrémales correspondantes.

De plus $(u_i^+, Gu_j^-) = 0$, tout i, j.

Le spectre de K* est l'ensemble $\{\lambda_i, Gu_i\}$, puisque

$$\lambda f = Kf \quad \text{implique} \quad \lambda Gf = K^* Gf.$$

Dans le plan E^2, les transformations G et K de l'espace H sont bornées et K est complètement continue. Mais nous avons établi que K est pleinement symétrisable par $G \geqslant 0$ et que G est positive seulement dans le sous-espace de H des fonctions continues de masse totale nulle. Pour remédier à cette restriction, remarquons[1)] que K possède un valeur propre $\lambda_1 = 1$ correspondant à la fonction propre u_1 telle que

$$\int u_1 = 1 \neq 0, \quad Gu_1 \equiv 1 \quad \text{et} \quad (u_1, Gu_1) = 1.$$

Alors on peut appliquer le procédé de Reid pour trouver les autres valeurs propres et les autres fonctions propres puisque

1) Blumenfeld et Mayer, p. 2015. Kellogg, p. 312.

$$(u_i, Gu_1) = (u_i, 1) = \int u_i = 0, \text{ tout } i > 1.$$

De plus[1] si λ_i , $i > 1$, est une valeur propre, $\lambda = -\lambda_i$ est aussi une valeur propre.

Remarquons enfin que si $f \in H$, $f-(f,Gu_1)u_1$ est de masse totale nulle et $(f-(f,Gu_1)u_1, Gu_i) = (f,Gu_i)$, $i > 1$. Donc dans la suite, nous n'aurons plus à nous occuper de cette restriction.

1) Blumenfeld et Mayer, p. 2022.

CHAPITRE III

THEOREMES D'EXPANSION

3.1 Expansion de GKf

Pour exprimer la solution du problème de Robin-Poincaré en une série suivant les fonctions fondamentales de Poincaré, nous aurons besoin d'un théorème d'expansion de GKf.

Lemme 3.1.1 Soient $f, g \in H$. Alors

$$(3.1.1) \qquad (Gf,f) \geqslant \sum_{1}^{\infty} (f,Gu_i)^2$$

$$(3.1.2) \qquad (GKf,g) = \sum_{1}^{\infty} (Kf,Gu_i)(g,Gu_i).$$

La preuve est donnée dans Reid[1].

La preuve du lemme suivant est une adaptation de la première partie de la preuve[2] du théorème de Mercer pour les transformations symétrisables complètement continues en H.

Lemme 3.1.2 Soit $\{\lambda_i, Gu_i\}$ le spectre de K^*. Alors

$$(3.1.3) \qquad \sum (\lambda_i Gu_i)^2 \leqslant B < \infty.$$

Preuve: Montrons d'abord que $GKK(p,p) \geqslant 0$, tout $p \in S$.

Autrement il existerait un voisinage σ de p, tel que

$$GKK(p,q) \leqslant -\delta < 0, \text{ tout } p,q \in \sigma.$$

Soit f une fonction continue[3] de S en $[0,1]$,

$$f = \begin{cases} 1 & \text{au point } p \\ 0 & \text{sur } S - \sigma. \end{cases}$$

Alors nous avons[4]

1) Reid, p. 49.
2) Dieudonné, p. 338-339.
3) Dieudonné, p. 86, (4.5.2).
4) Dieudonné, p. 155, (8.5.3).

3.1

$$\int f(q)\int GKK(q,p)f(p)\,dp\,dq \leqslant -\delta\,[\int f(q)dq]^2 < 0.$$

Mais le membre de gauche est

$$(GKKf,f)=(Kf,GKf),$$

et ceci contredit le fait que $GKK \geqslant 0$.

Maintenant, remarquons que

$$L_m(p,q)= GKK(p,q) - \sum_1^m \lambda_i{}^2 Gu_i(p)Gu_i(q)$$

est le noyau d'une transformation positive L_m puisque nous avons

$$(L_m f,f)=(GKKf,f) - \sum_1^m \lambda_i{}^2(f,Gu_i)^2=(GKKg,g)$$

avec

$$g=f - \sum_1^m (f,Gu_i)u_i \ .$$

Et puisque $L_m(p,p)\geqslant 0$, tout $p\in S$, on voit que

$$\sum[\lambda_i Gu_i(p)]^2 \leqslant GKK(p,p)\leq B<\infty, \quad \text{tout } p\in S.$$

c.q.f.d.

Notons que dans le plan, on peut déduire la convergence de $\sum(\lambda_i Gu_i)^2$ directement de l'inégalité (3.1.1) avec $f(q)= K^*(p,q)-u_1(q)$, puisque ce noyau est continu sur $S\times S$ et $f(q)$ est de masse totale nulle.

<u>Théorème 3.1.1</u> Soit $f\in H$. Alors

$$GKf=\sum(Kf,Gu_i)Gu_i \ , \tag{3.1.4}$$

la série convergeant uniformément et absolument sur S.

<u>Preuve</u>: La convergence uniforme découle des inégalités (3.1.1) et (3.1.3); en effet, soit

$$g_m=\sum_1^m(Kf,Gu_i)Gu_i \ ,$$

alors

$$|g_n - g_m| \leqslant \sum_m^n (f,Gu_i)^2 \sum_m^n (\lambda_i Gu_i)^2 \leqslant \sum_m^n (f,Gu_i)^2 \sum_1^\infty(\lambda_i Gu_i)^2 \to 0$$

uniformément avec $m\to\infty$.

L'égalité découle de (3.1.2) Soit $f\in H$; on peut écrire

$$GKf = g + \sum (Kf, Gu_i) Gu_i \ , \quad g \in H.$$

On a donc

$$(GKf, g) = (g,g) + \sum (Kf, Gu_i)(g, Gu_i)$$

et par conséquent $(g,g) = 0$. Puisque g est continue, alors $g = 0$, tout $f \in H$.

c.q.f.d.

3.2 Expansion de $K^{*2}f$ dans le plan et de $K^{*3}f$ dans l'espace

Le deuxième théorème d'expansion, requis pour la solution du problème de Neumann-Poincaré, exige une étude directe du potentiel de double couche puisque la méthode d'analyse fonctionnelle employée pour l'étude de la transformation symétrique GK, ne s'applique pas à la transformation K* non symétrique. Nous aurons donc recours aux théorèmes de Blumenfeld et Mayer.

On dira que la formule de Green est applicable au potentiel de double couche $W[f]$ si on a

$$D(W) = 2\,(W_{+}W_{n}^{\prime}) < \infty \ ,$$

la dérivée normale W_{n_+} de W sur S étant la limite de la dérivée $W_{n_{S+\varepsilon}}$ sur une surface de classe C^2 $S+\varepsilon \subset R'$, située à la distance ε de S, alors que $\varepsilon \to 0$, et la dérivée W_{n_-} la limite correspondante de $W_{n_{S-\varepsilon}}$ sur la surface $S-\varepsilon \subset R$,

Lemme 3.2.1 Soit $f \in H$ et telle que la formule de Green est applicable à $W[f]$. Alors

$$\sum (f, u_i)^2 \leq D(W[f,p]) \leq B < \infty.$$

La preuve est donnée dans Blumenfeld et Mayer[1].

1) Blumenfeld et Mayer, p. 2024-2026.

<u>Corollaire 3.2.1</u> Soit $f \in H$. Alors

$$\sum (K^*f,u_i)^2 \leq B < \infty \qquad \text{en } E^2$$

$$\sum (K^{*2}f,u_i)^2 \leq B < \infty \qquad \text{en } E^3.$$

<u>Preuve</u>: On a déjà remarqué à la fin du paragraphe 1.2 que la formule de Green est applicable à $W[K^*h]$ dans le plan et à $W[K^{*2}h]$ dans l'espace, tout $h \in H$. c.q.f.d.

<u>Lemme 3.2.2</u> Soit $\{\lambda_i, u_i\}$ le spectre de K. Alors

$$\sum (\lambda_i^2 u_i)^2 \leq B < \infty \qquad \text{en } E^2$$

$$\sum (\lambda_i^5 u_i)^2 \leq B < \infty \qquad \text{en } E^3.$$

<u>Preuve</u>: Dans le plan, $f(q) = K(p,q)$ est continue et $(K^*f,u_i) = \lambda_i^2 u_i(p)$. De même dans l'espace, $K^3(p,q)$ est continu. c.q.f.d.

<u>Corollaire 3.2.2</u> Soit $f \in H$. Alors on a

(3.2.1) $$K^2 f = \sum (K^2 f, Gu_i)u_i \qquad \text{en } E^2$$

(3.2.2) $$K^5 f = \sum (K^5 f, Gu_i)u_i \qquad \text{en } E^3.$$

<u>Preuve</u>: Dans le plan, soit

$$g_m = \sum_1^m (K^2 f, Gu_i)u_i \ .$$

La convergence uniforme suit de l'inégalité

$$|g_n - g_m| \leq \sum_m^n (f,Gu_i)^2 \sum_m^n (\lambda_i^2 u_i)^2 \leq \sum_m^n (f,Gu_i)^2 \sum_1^\infty (\lambda_i^2 u_i)^2 \to 0.$$

Pour démontrer l'égalité, considérons

$$K^2 f = g + \sum (K^2 f, Gu_i)u_i \quad , \quad g \in H.$$

Puisque $g \in H$, on peut écrire

$$(K^2 f, Gg) = (g, Gg) + \sum (K^2 f, Gu_i)(g, Gu_i),$$

et par l'égalité (3.1.2), $(g,Gg) = 0$. Donc $g = 0$.

Le même raisonnement vaut avec $K^5 f$ dans l'espace. c.q.f.d.

Dans le plan, l'égalité (3.2.1) suffira pour obtenir une expansion de $K^{*2}f$ uniformément convergente; mais dans l'espace nous devrons recourir à une preuve par induction.

<u>Théorème 3.2.1</u> Soit $f \in H$. Alors on a

$$K^{*2}f = \sum (K^{*2}f, u_i) Gu_i \qquad \text{en } E^2 \tag{3.2.3}$$

$$K^{*3}f = \sum (K^{*3}f, u_i) Gu_i \qquad \text{en } E^3, \tag{3.2.4}$$

les séries convergeant uniformément et absolument sur S.

<u>Preuve</u>: Dans le plan, on a

$$K^{*2}f = g + \sum (K^{*2}f, u_i) Gu_i \ , \quad g \in H,$$

et par le lemme 3.1.2 et le corollaire 3.2.1, cette série converge uniformément sur S. Prenant le produit scalaire avec g, on obtient

$$(K^{*2}f, g) = (g,g) + \sum (K^{*2}f, u_i)(g, Gu_i) \ ;$$

mais par l'égalité (3.2.1) avec $K^2 g$, on a

$$(K^{*2}f, g) = (K^2 g, f) = \sum (K^2 g, Gu_i)(f, u_i) = \sum (K^{*2}f, u_i)(g, Gu_i).$$

Ainsi $(g,g) = 0$ et puisque $g \in H$, $g = 0$, tout $f \in H$.

Dans l'espace, par l'égalité (3.2.2) on a de la même façon

$$K^{*5}f = \sum (K^{*5}f, u_i) Gu_i \ ,$$

la série étant uniformément convergente. Mais on voit que

$$\sum (K^3 f, u_i) Gu_i$$

est aussi uniformément convergente. Alors par un théorème de Blumenfeld et Mayer[1)], on a par induction l'égalité (3.2.4). c.q.f.d.

1) Blumenfeld et Mayer, p. 2027-2031. La preuve est basée sur l'identité $(W[K^*f])_n = K(W[f])_n$ valable si la formule de Green est applicable à $W[f]$. Soit $h_m = K^{*2}f - \sum^{m} (K^{*2}f, u_i) Gu_i$. Par la formule de Green, $i = 1, 2, \ldots,$
$D(W[K^{*i}h_m]) = 2(K^{*i}h_m, (W[K^{*i}h_m])_n) = 2(K^{*i+1}h_m, (W[K^{*i-1}h_m])_n)$.
Comme $(K^{*i}h_m, u_1) = 0$, $K^{*i}h \neq$ constante différente de zéro. Puisque $K^{*3}h_m \to 0$, donc par induction $K^* h_m \to 0$.

CHAPITRE IV

SOLUTION DES PROBLEMES DE LA THEORIE DU POTENTIEL

4.1 Existence d'une solution continue

Théorème 4.1.4 Soients

(1.4.1) $$f = g + \lambda K f, \quad g \in H$$

(1.4.2) $$h = g + \lambda K^* h, \quad g \in H,$$

les équations de Robin-Poincaré et de Neumann-Poincaré.

Ces équations possèdent des solutions $f, h \in H$.

Preuve: Considérons le cas du plan. Par le corollaire 2.3.1, K est complètement continue en L^2. Donc, par l'alternative de Fredholm[1], pour une valeur quelconque λ, ces équations possèdent des solutions $f, g \in L^2$. Mais par le corollaire 2.3.2, Kf et K*h sont continues, ce qui implique que si $g \in H$, alors $f, h \in H$.

Dans l'espace, il suffit de considérer l'équation

$$f = g + \lambda K g + \lambda^2 K^2 f.$$

c.q.f.d.

4.2 Solution du problème de Robin-Poincaré.

Si $\lambda = 0$, l'équation (1.4.1) de Robin-Poincaré possède la solution $f = g$.

Si $\lambda \neq 0$, soit $f \in H$ la solution de (1.4.1) dont l'existence est assurée par l'alternative de Fredholm. Alors par le théorème (3.1.1),

$$Gf = Gg + \lambda \sum \lambda_i (f, Gu_i) Gu_i$$

et

1) Riesz et Sz-Nagy, p. 203.

$$(1-\lambda\lambda_i)(f,Gu_i) = (g,Gu_i).$$

La solution de (1.4.1) est donc donnée par

$$Gf = Gg + \sum \frac{\lambda\lambda_i}{1-\lambda\lambda_i}(g,Gu_i)Gu_i \,, \tag{4.2.1}$$

les coefficients de Gu_i étant indéterminés si $\lambda = \lambda_i$, et la série converge uniformément et absolument sur S.

<u>Théorème 4.2.1</u> La série

$$V[f] = V[g] + \sum \frac{\lambda\lambda_i}{1-\lambda\lambda_i}(g,Gu_i)V[u_i] \tag{4.2.2}$$

résout le problème de Robin-Poincaré pour une valeur λ quelconque et pour toute fonction g continue sur S. V[f] est la limite uniforme de cette série partout dans le plan ou dans l'espace et est uniquement déterminée par sa restriction à S.

<u>Preuve</u>: Comme l'extension V[g] et V[u_i] de Gg et Gu_i est harmonique en R et R' et que la série (4.2.1) converge uniformément, la conclusion suit du premier théorème de Harnack[1]. c.q.f.d.

4.3 <u>Solution du problème de Neumann-Poincaré</u>

Si $\lambda = 0$, l'équation (1.4.2) de Neumann-Poincaré possède la solution $h = g$. Si $\lambda \neq 0$, soit $h \in H$ la solution de (1.4.2) dont l'existence est assurée par l'alternative de Fredholm. Dans le plan, soit

$$h = g + \lambda K^*g + \lambda^2 K^{*2}h = k + \lambda^2 K^{*2}h, \quad \text{avec} \quad k = g + \lambda K^*g.$$

Alors

$$h = k + \lambda^2 \sum \lambda_i^2 (h,u_i)Gu_i$$

et

$$(1-\lambda^2\lambda_i^2)(h,u_i) = (k,u_i).$$

1) Kellogg, p. 248-249.

La solution de (1.4.2) est donc donnée par

$$(4.3.1) \qquad h = k + \sum \frac{\lambda^2 \lambda_i^2}{1-\lambda^2 \lambda_i^2} (k, u_i) Gu_i \,, \quad k = g + \lambda K^* g,$$

les coefficients de Gu_i étant indéterminés si $\lambda = \lambda_i$, et la série converge uniformément et absolument sur S.

Dans l'espace, soit

$$h = g + \lambda K^* g + \lambda^2 K^{*2} g + \lambda^3 K^{*3} h = k + \lambda^3 K^{*3} h, \quad \text{avec } k = g + \lambda K^* g + \lambda^2 K^{*2} g.$$

Alors

$$h = k + \lambda^3 \sum \lambda_i^3 (h, u_i) Gu_i$$

et

$$(1 - \lambda^3 \lambda_i^3)(h, u_i) = (k, u_i).$$

Donc la solution de (1.4.2), dans l'espace, est donnée par

$$(4.3.2) \qquad h = k + \sum \frac{\lambda^3 \lambda_i^3}{1-\lambda^3 \lambda_i^3} (k, u_i) Gu_i \,, \quad k = g + \lambda K^* g + \lambda^2 K^{*2} g,$$

les coefficients de Gu_i étant indéterminés si $\lambda = \lambda_i$, et la série converge uniformément et absolument sur S.

<u>Théorème 4.3.1</u> Dans le plan, la série

$$(4.3.3) \qquad W[h] = W[k] + \sum \frac{\lambda^2 \lambda_i^2}{1-\lambda^2 \lambda_i^2} (k, u_i) W[Gu_i] \,, \quad k = g + \lambda K^* g,$$

et dans l'espace, la série

$$(4.3.4) \quad W[h] = W[k] + \sum \frac{\lambda^3 \lambda_i^3}{1-\lambda^3 \lambda_i^3} (k, u_i) W[Gu_i] \,, \quad k = g + \lambda K^* g + \lambda^2 K^{*2} g,$$

résolvent le problème de Neumann-Poincaré pour une valeur λ quelconque et pour toute fonction continue sur S. $W[h]$ est la limite uniforme de cette série partout dans le plan ou dans l'espace.

La preuve suit des remarques précédentes.

On peut exprimer ces séries en terme des fonctions fondamentales de

Poincaré $V[u_i]$ par les relations suivantes[1)]

$$W[Gu_i\ ,P] = \begin{cases} (\lambda_i - 1)V[u_i\ ,P] & P \in R' \\ (\lambda_i + 1)V[u_i\ ,P] & P \in R. \end{cases}$$

4.4 Un cas particulier du problème de Neumann-Poincaré

Si le terme non homogène de l'équation de Neumann-Poincaré est de la forme $g = Gk$, $k \in H$, le problème de Neumann-Poincaré se réduit à un problème de Robin-Poincaré.

En effet, soit $f \in H$ la solution de l'équation

$$f = k + \lambda Kf.$$

Alors

$$h = Gf = Gk + \lambda K^*Gf$$

est la solution de l'équation originale et cette solution peut être exprimée par la série

(4.4.1) $$h = g + \sum \frac{\lambda\lambda_i}{1-\lambda\lambda_i}(k,Gu_i)Gu_i$$

uniformément et absolument convergente sur S.

Donc

(4.4.2) $$W[h] = W[g] + \sum \frac{\lambda\lambda_i}{1-\lambda\lambda_i}(k,Gu_i)W[Gu_i], \quad g = Gk,$$

résout le problème de Neumann-Poincaré, et la série converge uniformément et absolument partout dans le plan ou dans l'espace.

1) Blumenfeld et Mayer, p. 2020.

BIBLIOGRAPHIE

BLUMENFELD, J. et W. MAYER.
Über Poincaré'sche Fundamentalfunktionen. Sitzber. Akad. Wiss. Wien. 123 (1914), Abt. IIa, 2011-2047.

BRELOT, M.
Eléments de la théorie classique du potentiel. Deuxième éd. améliorée. Centre de documentation universitaire, Paris, 1961.

DIEUDONNÉ, J.
Foundations of Modern Analysis. Academic Press, New York, 1960.

FREDHOLM, I.
[1] *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet*. Kong. Vetenskaps-Akad. Förh. Stockholm (1900), 39-46.
[2] *Sur une classe d'équations fonctionnelles*. Acta Math. 27 (1903), 365-390.

GARABEDIAN, P. R.
Partial Differential Equations. Wiley, New York, 1964.

GOURSAT, E.
Cours d'analyse mathématique. Cinquième éd. Tome III. Gauthier-Villars, Paris, 1942.

GUNTHER, N. M.
La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique. Gauthier-Villars, Paris, 1934.

HOWLAND, J. L.
Induced Potentials. Thèse, Harvard, 1955.

KELLOGG, O. D.
Foundations of Potential Theory. Springer, Berlin, 1929. Réimpression par Dover, New York, 1953.

LIAPOUNOFF, A. M.
Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet. J. de Math. (5) 4 (1898), 241ss.

LIUSTERNIK, L. A. et V. J. SOBOLEV.
Elements of Functional Analysis. Traduit du russe. Ungar, New York, 1961.

MARTY, J.
[1] *Sur une équation intégrale*. C.R. Acad. Sci. Paris 150 (1910), 515-518.
[2] *Développements suivant certaines solutions singulières*. Ibid., 603-606.

[3] Existence de solutions singulières pour certaines équations de Fredholm. Ibid., 1031-1033.
[4] Valeurs singulières d'une équation de Fredholm, Ibid., 1499-1502.

MERCER, J.
Symmetrizable functions and their expansions in terms of biorthogonal functions. Proc. Royal Soc. (A) 97 (1920), 401-413.

MIKHLIN, S. G.
Integral Equations. Traduit du russe. Pergamon, London, 1957.

PETROVSKIĬ, I. G.
Lectures on the Theory of Integral Equations. Traduit de la deuxième éd. russe revisée. Graylock, Rochester, N.Y., 1957.

PLEMELJ, J.
Potentialtheorie Untersuchungen. Preissschrift der Gesellschaft zu Leipzig 40 (1911).

POINCARÉ, H.
[1] La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta Math. 20 (1896), 59-142.
[2] Théorie du potentiel newtonien. Carré et Naud, Paris, 1899.

REID, W. T.
Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space. Duke Math. J. 18 (1951), 41-56.

RIESZ, F. et B. Sz.-NAGY.
Leçons d'analyse fonctionnelle. Deuxième éd. Académie des sciences de Hongrie, Budapest, 1953.

STERNBERG, W. J. et T. L. SMITH.
The Theory of Potential and Spherical Harmonics. University of Toronto, Toronto, 1946.

TAYLOR, A. E.
Introduction to Functional Analysis. Wiley, New York, 1958.

ZAANEN, A. C.
Linear Analysis. North-Holland, Amsterdam, 1953.