



National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services Branch

Direction des acquisitions et  
des services bibliographiques

395 Wellington Street  
Ottawa, Ontario  
K1A 0N4

395, rue Wellington  
Ottawa (Ontario)  
K1A 0N4

*Your file - Votre référence*

*Our file - Notre référence*

## NOTICE

The quality of this microform is heavily dependent upon the quality of the original thesis submitted for microfilming. Every effort has been made to ensure the highest quality of reproduction possible.

If pages are missing, contact the university which granted the degree.

Some pages may have indistinct print especially if the original pages were typed with a poor typewriter ribbon or if the university sent us an inferior photocopy.

Reproduction in full or in part of this microform is governed by the Canadian Copyright Act, R.S.C. 1970, c. C-30, and subsequent amendments.

## AVIS

La qualité de cette microforme dépend grandement de la qualité de la thèse soumise au microfilmage. Nous avons tout fait pour assurer une qualité supérieure de reproduction.

S'il manque des pages, veuillez communiquer avec l'université qui a conféré le grade.

La qualité d'impression de certaines pages peut laisser à désirer, surtout si les pages originales ont été dactylographiées à l'aide d'un ruban usé ou si l'université nous a fait parvenir une photocopie de qualité inférieure.

La reproduction, même partielle, de cette microforme est soumise à la Loi canadienne sur le droit d'auteur, SRC 1970, c. C-30, et ses amendements subséquents.

Canada

RÉGLAGE DE POSITION D'UNE  
POUTRE FLEXIBLE  
AVEC  
AMORTISSEMENT ACTIF DES  
VIBRATIONS

PAR

JEAN DE CARUFEL

Thèse présentée à  
l'Université d'Ottawa  
en accomplissement partiel des exigences  
pour l'obtention d'une

Maîtrise en Science Appliquée

en

Génie mécanique

Département de Génie Mécanique  
Université d'Ottawa

© Jean de Carufel, Ottawa, Canada, 1992



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services Branch

395 Wellington Street  
Ottawa, Ontario  
K1A 0N4

Bibliothèque nationale  
du Canada

Direction des acquisitions et  
des services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa (Ontario)  
K1A 0N4

*Your file* *Votre référence*

*Our file* *Notre référence*

The author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

L'auteur a accordé une licence irrévocable et non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de sa thèse de quelque manière et sous quelque forme que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

The author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-315-85841-9

Canada



UNIVERSITÉ D'OTTAWA  
UNIVERSITY OF OTTAWA

## SOMMAIRE

Le réglage de structures flexibles est présentement un domaine de recherche très actif. Les demandes en performance de l'industrie et de l'aérospatiale pour ce genre de réglage ne cesse d'augmenter. La grande complexité modale, les problèmes de débordement et la difficulté de modélisation rendent le développement de système de réglage et d'amortissement très complexe, même pour une structure simple.

Dans ce rapport, deux méthodes de réglage pour le positionnement et l'atténuation active des vibrations sont étudiées. Elles sont appliquées à la poutre d'Euler-Bernouilli. La première consiste en une méthode à impédances actives à gains dynamiques conçues dans le domaine fréquentielle. La seconde est une méthode plus complexe à retour d'états complets et placement de pôles conçue dans le domaine temporelle. Une fonction de transfert et un modèle d'état y sont aussi présenté.

Des résultats de simulation et d'expérience viennent appuyer les méthodes proposées.

## REMERCIEMENT

Je profite de ce court texte pour remercier toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin à finaliser ce travail de recherche. Je remercie spécialement mon superviseur de thèse Dr. D.S. Necsulescu pour son support et sa compréhension. L'expérience acquise à travailler à ses cotés m'auront beaucoup aidé dans ma carrière. Je m'en voudrais de ne pas souligner le support de mes confrères de recherche du laboratoire d'asservissement de système mécanique. Ensuite, je remercie M. Bill Graham de l'Agence Spatiale Canadienne pour ses conseils qui ont le mérite d'avoir orienté mes travaux de recherches dans une direction qui a abouti à de bons résultats.

Je remercie tout spécialement les membres de ma famille qui m'ont supporté tout au long de mes études avec en plus des encouragements quand nécessaire. Je ne peut passer sous silence les encouragements de ma grand-mère Mme Pauline de Carufel à qui je dois le fait d'avoir fait des études supérieures. Finalement, je remercie mon épouse Ann pour tout le support et la compréhension qu'elle a su démontrer tout au long de mes études.

## TABLE DES MATIERES

Sommaire . . . . .	ii
Remerciements . . . . .	iii
Table des matières . . . . .	iv
Liste des schémas . . . . .	vi
Liste des tableaux . . . . .	vii
Nomenclature . . . . .	viii
I Introduction . . . . .	1
II Généralité . . . . .	5
2.1 - Systèmes à paramètres distribués . . . . .	5
2.2 - Positionnement et amortissement . . . . .	6
2.3 - Performance et robustesse . . . . .	7
2.4 - Modèle réduit et modes négligés . . . . .	8
III Revue littéraire . . . . .	10
3.1 - Approche classique . . . . .	10
3.2 - Commande optimale . . . . .	11
3.3 - Commande à structure variable . . . . .	13
3.4 - Modèle ondulatoire . . . . .	14
3.5 - Impédance active . . . . .	14
3.6 - Robustesse . . . . .	16
3.7 - Critique . . . . .	16
3.8 - Direction du rapport . . . . .	18
IV Modélisation . . . . .	20
4.1 - Poutre d'Euler-Bernouilli . . . . .	21
4.2 - Solution de l'équation d'Euler-Bernouilli . . . . .	27
4.3 - Fonction de transfert . . . . .	32
4.4 - Orthogonalité . . . . .	37
4.5 - Modèle d'état . . . . .	39
4.5.1 - Approche Lagrangienne . . . . .	40
4.5.2 - Modèle réduit . . . . .	45
4.5.3 - Effet des modes négligés . . . . .	46
4.5.4 - Espace modale . . . . .	49

V	Montage expérimentale . . . . .	50
	5.1 - Poutre . . . . .	50
	5.2 - Moteur . . . . .	53
	5.3 - Système d'implantation dSPACE . . . . .	55
VI	Méthodes de commandes . . . . .	60
	6.1 - Impédance active . . . . .	60
	6.1.1 - Gains constants . . . . .	61
	6.1.2 - Gains dynamiques . . . . .	64
	6.2 - Placements de pôles . . . . .	66
	6.2.1 - Retour d'états complets . . . . .	66
	6.2.2 - Observateur linéaire . . . . .	69
	6.2.3 - Effet des modes négligés . . . . .	71
	6.2.4 - Retour d'état filtré . . . . .	73
VII	Résultats . . . . .	74
	7.1 - Identification expérimentale . . . . .	74
	7.2 - Impédance active . . . . .	79
	7.2.1 - Gains constants . . . . .	80
	7.2.2 - Gains dynamiques . . . . .	87
	7.3 - Retour d'états . . . . .	92
	7.3.1 - Effet des modes négligés . . . . .	93
	7.3.2 - Résultats . . . . .	94
VIII	Conclusion . . . . .	98
	Références . . . . .	102
	Annexe A - Valeurs et formes propres . . . . .	105
	Annexe B - Modélisation . . . . .	122
	Annexe C - Programmes . . . . .	128
	Annexe D - Synthèse . . . . .	149

## LISTE DES SCHÉMAS

schéma 3.1	- Montage étudié . . . . .	19
schéma 4.1	- Poutre d'Euler-Bernouilli . . . . .	20
schéma 4.2	. . . . .	28
schéma 4.3	. . . . .	32
schéma 4.4	- Définition des variables . . . . .	40
schéma 5.1	- Montage expérimentale . . . . .	51
schéma 5.2	- Schéma fonctionnel . . . . .	55
schéma 5.3	- Architecture ds2001 . . . . .	57
schéma 5.4	- Logiciel dSPACE . . . . .	58
schéma 6.1	- Impédance active . . . . .	61
schéma 6.2	- Synthèse dans le plan s . . . . .	62
schéma 6.3	- Lieu d'Evans - un mode flexible . . . . .	63
schéma 6.4	- Variation des gains . . . . .	66
schéma 6.5	- Retour d'états filtrés . . . . .	73
schéma 7.1	- Exemple de réponse fréquentielle . . . . .	75
schéma 7.2	- Réponse fréquentielle - modèle d'état . . . . .	76
schéma 7.3	- Réponse fréquentielle - fonction de transfert . . . . .	77
schéma 7.4	- Impédance active . . . . .	79
schéma 7.5	- Lieu des pôles - mode rigide . . . . .	81
schéma 7.6	- Impédance active - $K_r=5.6$ , $K_s=.236$ . . . . .	82
schéma 7.7	- Lieu des pôles - premier mode flexible . . . . .	83
schéma 7.8	- Lieu des pôles - deuxième mode flexible . . . . .	83
schéma 7.9	- Lieu des pôles - troisième mode flexible . . . . .	83
schéma 7.10	- Amortissement fictif . . . . .	83
schéma 7.11	- Impédance active - $K_r=.525$ , $K_s=.059$ . . . . .	85
schéma 7.12	- Impédance active - $K_r=7.12$ , $K_s=.065$ . . . . .	85
schéma 7.13	- Impédance active - $K_r=54.7$ , $K_s=.123$ . . . . .	86
schéma 7.14	- Gains dynamiques - résultats 1 . . . . .	88
schéma 7.15	- Gains dynamiques - résultats 2 . . . . .	90
schéma 7.16	- Gains dynamiques - résultats 3 . . . . .	91
schéma 7.17	- Schéma fonctionnel - Retour d'états filtrés . . . . .	92
schéma 7.18	- Comparaisons d'états . . . . .	95
schéma 7.19	- Résultats - Retour d'états . . . . .	97
schéma 7.20	- Cycle limite . . . . .	97

**LISTE DES TABLEAUX**

tableau 5.1 - Paramètres de la poutre . . . . .	52
tableau 5.2 - Fréquences naturelles . . . . .	52
tableau 5.3 - Carte dSPACE . . . . .	56
tableau 7.1 - Comparaison fréquences naturelles . . . . .	77
tableau 7.2 - Impédances actives . . . . .	82

## NOMENCLATURE

$\bar{A}$	:	Aire de la section
$A$	:	Matrice d'états du système
$A^*$	:	Aire de cisaillement
$b_i$	:	Coefficient de couplage
$B$	:	Vecteur d'action sur le système dynamique
$C$	:	Coefficient d'atténuation de Warburton
$C$	:	Matrice de sortie du modèle dynamique
$D_i$	:	Constante d'amortissement
$e$	:	Erreur d'estimation
$E$	:	Coefficient d'élasticité linéaire
$F_r$	:	Fonction de Rayleigh
$G$	:	Coefficient d'élasticité en cisaillement
$h_c$	:	Couplage non-linéaire modes considérés
$h_n$	:	Couplage non-linéaire modes négligés
$H$	:	Hamiltonien
$I$	:	Inertie de surface de la section
$I_m$	:	Inertie du moteur
$I_p$	:	Inertie de la poutre
$I_t$	:	Inertie totale
$J(x)$	:	Inertie rotationnelle distribuée de la poutre
$k_i$	:	Rigidité généralisée
$K_a$	:	Gain de l'amortisseur
$K_c$	:	Vecteur gain du régulateur
$K_o$	:	Vecteur gain de l'observateur
$K_r$	:	Gain du ressort
$L$	:	Longueur de la poutre
$m(x)$	:	Masse distribuée de la poutre
$M(x)$	:	Moment fléchissant
$M_c$	:	Masse de la charge
$M_i$	:	Masse généralisée
$M_{ij}$	:	Coefficient de couplage inertiel non-linéaire
$p()$	:	Forces distribuées sur la poutre
$p_d$	:	Pôle désiré en boucle fermée
$p_i$	:	Pôle en boucle ouverte
$P$	:	Matrice de controllabilité
$q()$	:	Couple distribué sur la poutre
$q_i(t)$	:	Coordonnée généralisée
$Q$	:	Matrice d'observabilité
$Q_i$	:	Force généralisée
$T_k$	:	Energie cinétique
$T_r$	:	Temps de réglage
$T_{sec}$	:	Frottement de Coulomb
$U()$	:	Vecteur position

$U_p$	:	Energie potentielle
$v()$	:	Effet de raccourcissement
$V(x)$	:	Effort de cisaillement
$x$	:	État du système
$x_c$	:	État estimé
$y()$	:	Déformée de la poutre
$z_i$	:	Zéro en boucle ouverte
$\alpha_i$	:	Argument de $p_i$ p/r à $p_d$
$\beta_i$	:	Argument de $z_i$ p/r à $p_d$
$\Delta A_c$	:	Erreur de modélisation du modèle
$\Delta B_c$	:	Erreur de modélisation du modèle
$\epsilon_c$	:	Effets des modes négligés sur ceux considérés
$\epsilon_n$	:	Effets des modes considérés sur ceux négligés
$\zeta_{ci}$	:	Coefficient d'amortissement modale encastré
$\zeta_{li}$	:	Coefficient d'amortissement modale libre
$\zeta_{pi}$	:	Coefficient d'amortissement modale d'un pôle
$\zeta_{zi}$	:	Coefficient d'amortissement modale d'un zéro
$\eta_i$	:	Coordonnée généralisée
$\theta$	:	Mouvement angulaire du corps rigide
$\theta_m$	:	Mouvement angulaire mesuré
$\lambda_i$	:	Valeur propre
$\rho$	:	Densité
$\tau$	:	Couple moteur
$\phi_i$	:	Forme propre
$\varphi$	:	Déphasage
$\omega_i$	:	Fréquence naturelle
$\omega_{ci}$	:	Fréquence naturelle encastrée
$\omega_{li}$	:	Fréquence naturelle libre
$\omega_{pi}$	:	Fréquence naturelle d'un pôle
$\omega_{zi}$	:	Fréquence naturelle d'un zéro
$ G $	:	Gain du système

## I- INTRODUCTION

Les besoins des industries manufacturières et aérospatiales sont aujourd'hui les sources de motivation les plus importantes pour la recherche dans le domaine de la commande automatique. En aérospatiale, atteindre les objectifs fixés par les programmes spatiaux mis en place requière le développement de technologies jusqu'ici inexistantes ou peu développées, tandis que dans le domaine manufacturier, il y a longtemps que "avancement technologique" est synonyme de "compétitivité".

Un des champs de recherche commun entre les deux est l'asservissement de structure mécanique flexible. Pour la conception des grandes structures de l'espace, l'importance des contraintes économiques et physiques en rapport avec le poids résulte en des structures légères mais, par conséquent, flexible. Il faut dès lors considérer en plus du "réglage d'orientation" le "réglage de forme" ayant pour but de dissiper les excitations de la commande d'orientation. Le même phénomène est présent en robotique où il faut réduire le poids des bras afin d'accroître la rapidité et réduire la consommation d'énergie. Encore une fois, il en découle que l'hypothèse des corps rigides ne tient plus.

Depuis plusieurs années, des chercheurs se penchent sur le problème du réglage des structures flexibles. Au début, pour des

raisons plus pratiques que technologiques, l'utilisation d'amortisseurs passifs est étudiée. Malgré de très bonnes propriétés de robustesse, la méthode comporte de graves lacunes. Le fait que l'ajustement optimum de l'amortisseur dépend de la fréquence naturelle de la vibration à atténuer, une structure possédant plusieurs modes de vibration ne serait bien amortie que s'il y avait un nombre égal d'amortisseurs. Or, le but étant de réduire le poids, l'ajout d'amortisseur n'apparaît pas comme une solution élégante. Conséquemment, l'utilisation d'éléments actionneurs actifs (moteur, fusée, etc) qui peuvent injecter de l'énergie dans la structure devînt et demeure un sujet important de recherche.

L'atténuation active des vibrations permet d'utiliser différents éléments de mesure et de concevoir un système d'asservissement plus complexe offrant donc plus de flexibilité dans la loi de commande. En générale, il existe deux classes de systèmes d'asservissement pour l'atténuation active des vibrations qui se distinguent par la nature de la loi de commande. Dans un premier temps, lorsque la commande ne fait pas appel directement à un modèle du système, le réglage est appelé réglage par commande à basse-authorité et conserve de très bonnes propriétés de robustesse (par exemple, le cas de la simple rétroaction de vitesse locale). Puis, si la commande fait appel à un modèle du système, le réglage à haute-authorité est obtenu et offre la possibilité de bien

meilleures performances au détriment de la robustesse.

Il existe aussi une importante distinction dans l'application. Lorsque les capteurs agissant sur la commande d'un actionneur sont colocalisés avec celui-ci, la fonction de transfert entre l'actionneur et les capteurs est à phase minimale rendant le problème de conception plus facile. Mais s'il ne sont pas colocalisés, le délai de propagation à travers la structure rend le système à phase non-minimal et le problème de stabilisation devient important.

Le présent rapport décrit une étude théorique et expérimentale sur l'atténuation active des vibrations dans une poutre flexible ayant une extrémité libre et l'autre attaché à l'axe d'un moteur. La thèse est organisée en huit chapitres. Afin de bien situer le lecteur, des concepts d'ordre général sont d'abord présentés immédiatement suivant l'introduction. Puis, dans une critique suivant la revue littéraire, l'orientation prise par l'étude faisant l'objet de ce rapport est établie à la lumière de ce qui fut fait dans le passé. Ensuite, tous les aspects de la modélisation sont présentés au chapitre quatre. Par la suite, un chapitre est pour sa part consacré à la description du montage expérimental. Puis, au chapitre six, deux méthodes de commande colocalisée sont proposées: l'impédance active à gains constants

et à gains dynamiques (commande à basse-authorithé), et la commande par retour d'états filtrée (commande à haute-authorité). Finalement, les résultats de simulation et expérimentaux pour les différentes méthodes proposées sont présentés au chapitre sept.

## II- GÉNÉRALITÉ

L'objectif de ce chapitre est de faire comprendre au lecteur ce en quoi l'asservissement de structures flexibles est différent de celui des structures rigides. Les notions de système à paramètres distribués, d'amortissement, de dimension modale et de réduction d'ordre y sont révisés et commentés.

### 2.1 - Système à paramètres distribués

Étant donné la nature distribuée des composantes d'inertie et de rigidité, les structures flexibles font parties de la classe des systèmes à paramètres distribués. Bien que tous les systèmes mécaniques soient essentiellement des systèmes à paramètres distribués, il est souvent possible de les modéliser correctement par des composantes concentrées. Ce n'est pas le cas pour les structures flexibles faisant l'objet de la présente recherche.

En fait, cette propriété est un des problèmes de l'asservissement des structures flexibles. Dans ce cas, le développement d'un modèle mathématique adéquat pour la synthèse devient un problème complexe, infinidimensionnel. L'utilisation des théories d'asservissements, bien développées pour les systèmes à paramètres concentrés, devient alors impossible. D'un côté, la théorie classique de l'asservissement, basée sur la fonction de transfert (ou transmission isomorphe), ne s'applique plus aisément

lorsque cette fonction complexe comporte des fonctions transcendentales comme c'est le cas pour les systèmes à paramètres distribués. De l'autre côté, la théorie moderne basée sur le modèle d'état se trouve aussi limitée puisque le modèle d'état d'un système à paramètres distribués est infini-dimensionnel avec une infinité de valeurs propres.

Finalement, au niveau de la modélisation, il devient très difficile d'établir un modèle adéquat pour la composante distribuée dissipative. Le modèle visqueux, bien que couramment utilisé, est très difficile à valider.

## 2.2 - Positionnement et Amortissement

Tout système de commande de position peut être vu, selon l'approche énergétique (dynamique Hamiltonienne par exemple), comme un système allouant un potentiel à une position et contrôlant les transferts de puissance afin d'obtenir un potentiel désiré. En définissant comme différence de potentiel la différence due à l'erreur de positionnement, le système de commande devient un injecteur d'énergie afin d'augmenter l'énergie cinétique menant à une réduction de la différence de potentiel, et un dissipateur d'énergie afin de dissiper l'énergie cinétique lorsque la différence de potentiel réduit.

Pour les structures flexibles, lors de la phase d'injection

d'énergie, une partie de celle-ci est absorbée par la structure sous forme de vibration. Il faut alors aussi penser à dissiper cette énergie. Pour les grandes structures flexibles de l'espace, cela se fait soit par l'ajout d'un système de réglage de forme (ayant pour but la dissipation des vibrations) à celui du réglage d'orientation, ou bien en incluant la flexibilité à un système de commande unique de haute-authorité. En robotique, il est essentiel d'inclure la flexibilité à même le système de commande de haute-authorité.

L'efficacité du système de commande se mesure donc par la capacité de positionnement et d'amortissement des vibrations. Si le positionnement est très rapide, mais que l'amortissement des vibrations est très lent, le système de commande est inadéquat. Mais si, afin de ne pas induire de vibration, le positionnement est très lent, il est aussi inadéquat. Il faut donc trouver un bon compromis.

### 2.3 - Performances et Robustesse

La difficulté de modéliser les systèmes à paramètres distribués amène le problème de performance versus robustesse. La robustesse est l'aptitude d'un système de réglage d'opérer adéquatement même si certains facteurs non-considérés et incontrôlables (tel les erreurs de modélisation, les bruits de mesure, etc...) surgissent. En l'absence d'un modèle précis,

simplicité est gage de robustesse. Par exemple, l'amortissement passif, bien que limité en performances, résulte en des systèmes de commande inconditionnellement stables donc très robustes. Au fur et à mesure que la complexité s'accroît, le potentiel de performance s'accroît aussi, mais les différences entre le modèle et le système réel deviennent de plus en plus importantes. Donc un des objectifs de la recherche dans ce domaine est l'utilisation de méthodes plus complexes et plus performantes tout en gardant un certain niveau de robustesse.

#### 2.4 - Modèle Réduit et Modes Négligés

Comme les systèmes à paramètres distribués résultent en des modèles mathématiques infinidimensionnels et que les théories de l'asservissement ne peuvent être utilisées dans ces cas, il existe deux approches. Il y a le développement d'une théorie de l'asservissement des systèmes à paramètres distribués. Plusieurs chercheurs y regardent déjà. Ce n'est pas le but du travail de recherche présenté dans ce rapport où l'utilisation d'un modèle réduit, discrétisé dans l'espace rend possible l'utilisation des théories de l'asservissement.

Cette réduction de modèle est possible grâce aux propriétés des structures flexibles par lesquelles l'atténuation interne des vibrations augmente avec la fréquence naturelle d'un mode de vibration et la contribution modale (forme propre) diminue avec

l'augmentation de la fréquence naturelle du mode. Il s'agit donc d'inclure dans le modèle les modes de vibration importants et de négliger les autres.

A des fins de simulation, il est plus facile d'inclure un grand nombre de modes de vibration, mais lorsque le modèle sert à la synthèse de la loi de commande, les efforts augmentent exponentiellement avec l'ordre du modèle. Pour cette raison, il faut distinguer quatre niveaux de modélisation; le modèle parfait qui n'existe jamais, le modèle hypothétique infinidimensionnel, le modèle de simulation d'ordre élevé et le modèle de conception. La validation de ces modèles est une étape très importante.

La réduction de l'ordre du modèle a un effet néfaste sur le système de commande. L'effet des modes négligés sur la mesure résulte en une déstabilisation du système de commande lorsque celui-ci utilise un modèle de la structure (haute-authorité). Ce phénomène appelé "débordement de mesure" limite beaucoup l'application des systèmes de commande à haute autorité. L'effet de la commande sur les modes négligés de la structure, appelé "débordement de commande", contribue à la déstabilisation de la structure. Ces deux phénomènes de "débordement" par leur interaction constituent un des problèmes les plus importants de l'approche par réduction de modèle.

### III- REVUE LITTÉRAIRE

A la lumière des problèmes particuliers à l'asservissement des structures flexibles, voici un résumé des publications faites décrivant certaines contributions importantes. Depuis plusieurs années déjà, l'atténuation active des vibrations est un sujet de recherche très actif. A tous les niveaux de généralisation et pour toutes sortes d'applications, les chercheurs se penchent sur le sujet. Les articles présentés ici sont classés selon la nature de la loi de commande et indépendamment de l'application.

#### 3.1 - Approche Classique

Après avoir été longtemps utilisée pour la synthèse des amortisseurs passifs, l'approche classique basée sur la fonction de transfert et la réponse fréquentielle est utilisée pour l'atténuation active des vibrations. Lutze et Goff [16] , pronant l'exactitude et la précision de la fonction de transfert transcendentale par rapport au modèle d'état réduit, démontre l'utilisation des méthodes classiques pour l'analyse des pôles/zéros pour les problèmes de ficelles et de poutres flexibles.

L'approche est soutenue par Bryson et Wie (1987) [36] qui l'appliquent à des structures plus complexes. De leur analyse, ils concluent que l'utilisation de paires actionneurs/capteurs colocalisées résulte en une structure alternée de pôles et de zéros

purement imaginaires. De plus, Wie (1987) [35] approfondit l'utilisation de cette approche en analysant les pôles/zéros de la structure flexible expérimentale COFS-I et en faisant la synthèse d'une loi de commande selon le concept de "filtrage généralisé de structure flexible". Les cas étudiés sont ceux de la commande colocalisée, non colocalisée, avec filtre à phase minimale et filtre à phase non-minimale. Des simulations complètes (avec effet de la dynamique des actionneurs et du retard dû à la numérisation) viennent appuyer les résultats.

### 3.2 - Commande optimale

Cette approche fait l'objet d'un grand nombre de publications dont en voici une sélection. D'abord, Meirovitch et Oz (1979) [19] présentent un compte-rendu des méthodes étudiées dans les années 70. Leur discussion sur les problèmes reliés au contrôle des structures flexibles (voir chapitre deux) en font un article subséquemment très cité. Après avoir critiqué les méthodes de placement de pôles, de commande optimale et de commande modale, ils prônent la synthèse de la commande optimale dans l'espace modale.

Ensuite, Cannon et Schmitz (1984) [2] contribuent grandement à l'avancement de l'asservissement des robots flexibles par une application expérimentale. Ils présentent les résultats d'une expérience visant à asservir un manipulateur flexible à un degré de liberté à l'aide de la rétroaction de la position de l'extrémité,

de l'angle du moteur et sa dérivée, et de la sortie d'une jauge de déformation. La loi de commande optimale se base sur le retour d'état observés "optimalement" incluant trois modes flexibles. La modélisation de la poutre d'Euler-Bernouilli à l'aide de la dynamique Lagrangienne est souvent citée par d'autres auteurs.

Lynche et Banda (1986) [17] décrivent de façon générale une méthode de synthèse de commande optimale (LQG) avec recouvrement de robustesse (LTR). Pour une structure flexible modélisée par la méthode des modes hypothétiques (modèle réduit et linéarisé), ils conçoivent un régulateur optimum et ajustent la matrice de distribution de bruit utilisée pour l'estimation des états par filtre Kalman pour retrouver les marges de gain et de phase nécessaires à une bonne robustesse. Pour ce faire, les performances et les incertitudes sont représentées par des bornes dans le domaine fréquentiel. Des simulations appliquées à l'atténuation des vibrations dans une poutre composée flexible, utilisant une commande colocalisée démontrent la validité de la méthode. Prasad, Calise et Byrns (1991) [25] présentent un travail très semblable utilisant un observateur optimal (LQ) avec fonction de coût dépendant de la fréquence au lieu d'un filtre Kalman.

Wang et Vidyasagar (1987) [32,33] font la synthèse d'une loi de commande optimale basée sur la factorisation stable. La nature strictement propre des structures flexibles rend la commande optimale intraitable. Ils considèrent donc des solutions

suboptimales. Des résultats expérimentaux supportent leur méthode.

Finalelement, Parsons (1988) [24] combine la robustesse des systèmes de commande à basse-authorité avec les performances de ceux à haute-authorité. Après avoir identifier cinq modes de vibrations par la méthode du maximum du vraisemblable, il fait la synthèse d'impédance active et d'un régulateur optimum, puis les combine en un seul système de commande. Son étude expérimentale confirme l'utilité de joindre une impédance active à un système de commande à haute-authorité.

### 3.3 - Commande à Structure variable

Dès le début des années 70, Gething et Gill (1974) [9] proposent une méthode de synthèse pour une loi de commande discontinue pour l'amortissement de système dynamique possédant peu ou pas d'amortissement naturelle. Mais, l'ajout d'un terme d'amortissement fictif afin de donner une solution à l'équation (3.1) limite la validité sur un sous-espace de l'espace d'état seulement. Comme solution, Coupe (1976) [5] suggère l'utilisation de  $Q = 0$ .

$$A^T P + P A = -Q \quad (3.1)$$

Plus récemment, Ozguner, Yurkovitch, Martin III et Al-Abbas (1986) [22,23] ont étudié expérimentalement l'utilisation d'une loi de commande à structures variables forçant la dynamique d'un point sur une structure flexible à suivre un modèle de référence. Le

système de commande voit ainsi les vibrations comme des perturbations qu'il annule par l'opération en mode de glissement.

Nathan et Singh (1989) [20] utilisent aussi la commande à structure variable mais appliquée à un robot à deux degrés de liberté. Un système semblable à celui de Ozguner et Al. force la dynamique des angles à suivre un modèle de référence, ensuite un stabilisateur discontinu semblable à celui de Coupe atténue les résidues de vibrations.

### 3.4 - Modèle ondulatoire

En modélisant les vibrations comme des ondes progressives, il devient alors possible de considérer les systèmes de commande comme des absorbeurs d'onde comme dans la théorie des micro-ondes. C'est l'approche de Von Flotow (1980) [29] et de Von Flotow et Schaffer (1986) [30]. En définissant l'état d'une structure par l'état de la section de la structure (moment fléchissant, moment tordant, cisaillement, etc), il devient théoriquement possible de concevoir un absorbeur d'onde. Des simulations avec application à une poutre d'Euler sont présentées en support à l'approche.

### 3.5 - Impédance active

Il est connu que l'utilisation de rétroaction de position et

de vitesse colocalisée est suffisante pour obtenir un système inconditionnellement stable. Le remplacement des impédances passives par des impédances actives accroît la flexibilité dans le choix des valeurs d'impédance.

D'abord, Gehling (1986) [8] montre pour une application particulière comment impédances passives et actives peuvent être utilisées simultanément à l'avantage de l'amortissement.

Ham et Henniges (1987) [10] et Ham, Henniges et Greely (1987, 1989) [11,12] proposent l'utilisation de la rétroaction décentralisée positive-réelle de la vitesse pour l'atténuation active des vibrations pour la structure expérimentale spatiale COFS-I. Dans l'article de 1989, ils présentent des résultats de simulation complets incluant les phénomènes non-linéaires (saturation, friction, limite d'action des moteur), les bruits de mesure, la numérisation et considérant vingt modes flexibles (flexion et torsion).

De leur côté, Wang, Lu et Hsu (1989) [31] présentent les résultats d'études expérimentales sur un système semblable à celui de Cannon et Schmitz [2] (ref. section 3.2). Ils utilisent une rétro-action de sortie (position et vitesse) colocalisé et quasi-colocalisée de la dérivée de la déformée à l'aide d'un capteur laser. La loi de commande simple résulte en une bonne robustesse.

Finalemment, Wells, Schueller et Tlusty (1990) [34] présentent une étude expérimentale très similaire en remplaçant le capteur laser par une jauge de déformation et en ajoutant une commande à priori pour compenser les dynamiques du servomoteur.

### 3.6 - Robustesse

Une contribution importante par Yedavelly (1986) [37] en rapport avec la quantification de la robustesse propose une formalisation des conditions de stabilité face aux incertitudes de modélisation. Cette formalisation rajoute donc des contraintes de robustesse pour la synthèse des régulateurs optimum.

### 3.7 - Critique

L'approche classique au problème d'asservissement des structures flexibles offre des possibilités analytiques intéressantes. Malgré la nature transcendente des fonctions de transfert, la modélisation pôles/zéros reste un outil d'analyse puissant. Mais d'un coté, la formulation de méthode de synthèse devient un processus complexe, et les résultats sont difficilement applicables à l'analyse des systèmes à entrées et sorties multiples comme un manipulateur flexible à plusieurs degrés de liberté. C'est le cas de la méthode de Wie [35] par filtrage généralisé de structure flexible.

Pour les approches de la théorie moderne, un des gros problèmes est l'obtention d'un modèle d'état représentatif. Pour les systèmes à paramètres distribués il faut discrétiser dans l'espace ou réduire le modèle d'ordre infini à un système d'ordre fini. Cette réduction ainsi que la difficulté de représenter la friction interne limitent la détermination d'un modèle analytique adéquat. Il faut donc toujours valider expérimentalement un modèle de synthèse. Pour cette raison, les publications d'articles décrivant une étude expérimentale deviennent d'une importance capitale.

La synthèse des régulateurs optimum nécessite ce genre de réduction d'ordre. Sachant la sensibilité des régulateurs LQ et LQG aux erreurs de modélisation, il n'est pas curieux de voir des chercheurs utiliser des méthodes de recouvrement de robustesse (Branda et Lynch [17], et Prasad, Calise et Byrns [30]). Les bons résultats obtenus par Cannon et Schmitz [2] prouvent que l'utilisation de la poutre simple et flexible s'avère un bon compromis entre la complexité et la représentativité. Ils démontrent aussi l'utilité de la jauge de déformation lorsqu'en présence de phénomènes non-linéaires inhérents aux actionneurs (stiction, jeu d'engrenage).

Pour la commande à structure variable, les efforts initiaux de Gething et Gill [9], et Coupe [5] ne reflètent pas complètement la problématique des systèmes à structures flexibles. Les phénomènes

de débordement et les problèmes de modélisation ne sont pas discutés. Il en est de même pour Nathan et Singh [20]. La méthode d'Ozguner et Al. [21,22] d'autre part fonctionne bien mais n'est pas conçue pour l'amortissement de vibrations. Une étude préliminaire montre en effet que la méthode appliquée à la poutre de Cannon et Schmitz [2] a pour effet d'encasturer la poutre sans toutefois l'empêcher de vibrer.

Pour l'approche par impédance active, il est vite reconnu qu'elle fonctionne bien. Tous les résultats sont concluants.

### 3.8 - Description du rapport

Le travail présenté dans ce rapport comporte deux directions.

D'abord, l'approche classique de Wie [35] est utilisée dans le but de faire la synthèse d'impédance active. En analysant le lieu des pôles, il devient possible de voir l'effet des valeurs des impédances sur la localisation des pôles en boucle fermée dans le plan complexe. Cette analyse est aussi utilisée pour générer une impédance dynamique, variant dans le temps, permettant ainsi l'atténuation adéquate de tous les modes de vibration importants. Ceci requière le développement d'une fonction de transfert représentative au préalable.

Ensuite, une méthode par rétroaction d'état utilisant le placement de pôles est étudiée. Une solution au problème de débordement de mesure y est proposée. Dans les deux cas l'étude comporte une phase analytique (de modélisation et de synthèse), une phase de simulation et une phase expérimentale. L'application type se fait donc sur une poutre flexible semblable à celle de Wells et Al. La poutre est montée sur un axe de moteur à une extrémité et est libre à l'autre extrémité (schema 3.1). Le choix de l'application semble un bon compromis entre la complexité et la représentativité, et les résultats obtenus sont facilement comparables aux résultats obtenus par les différents chercheurs.

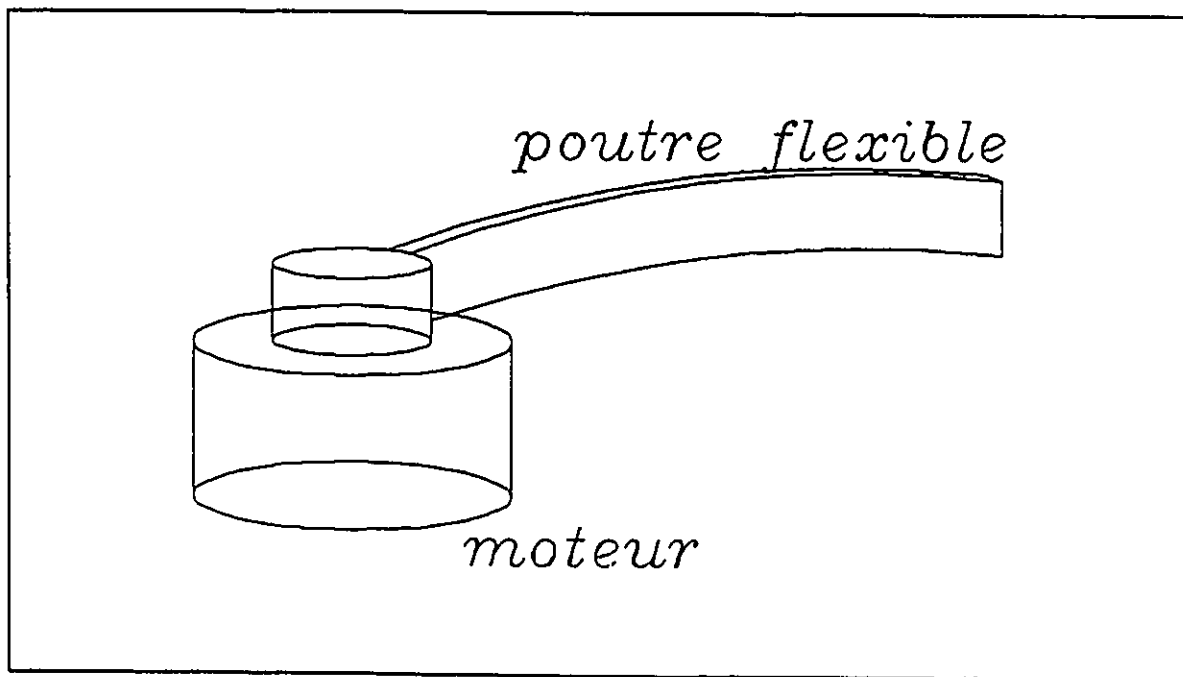


schéma 3.1 - montage étudié

#### IV- MODÉLISATION

Le chapitre quatre est consacré d'une façon générale à la mise en équation de modèles de la poutre flexible utilisée pour la partie expérimentale du travail. D'abord, le modèle d'Euler-Bernouilli et ses limites sont traités dans une première section. Puis, l'équation d'Euler-Bernouilli est solutionnée pour les conditions limites de la poutre expérimentale. Finalement, deux sections présentent respectivement le développement d'une fonction de transfert et celui d'un modèle d'état basé sur la dynamique Lagrangienne.

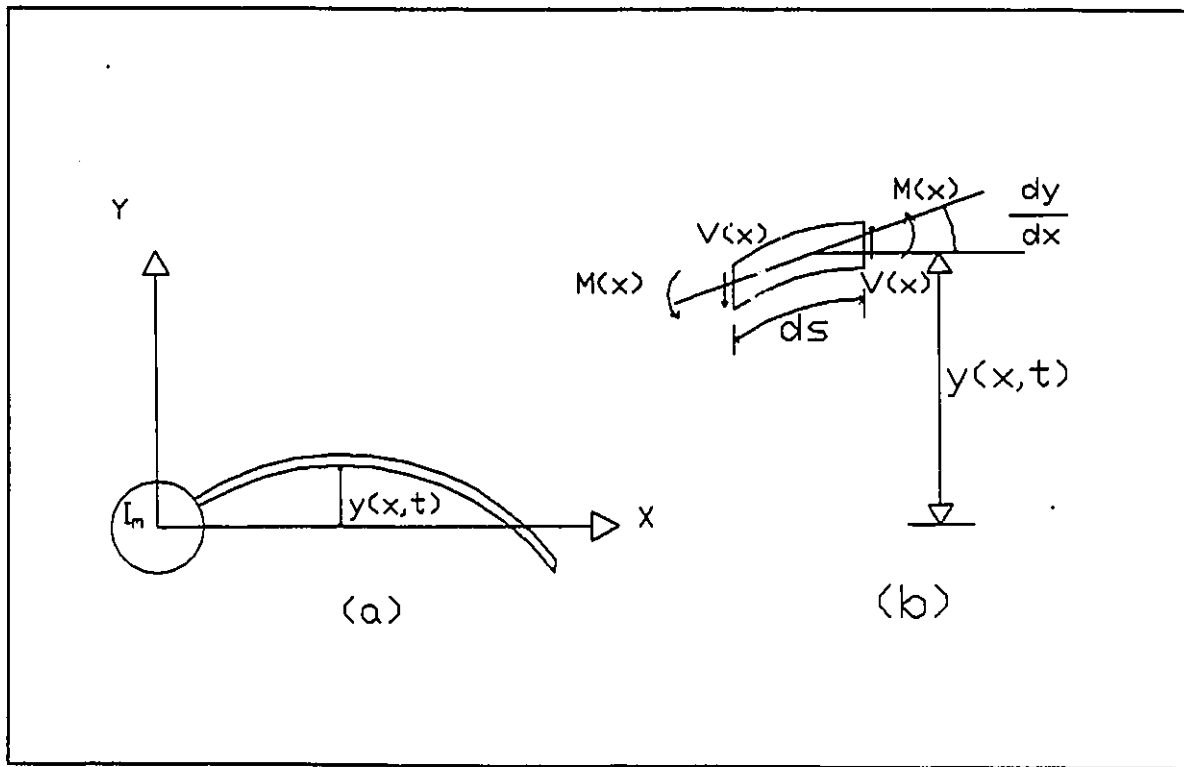


schéma 4.1 - Poutre d'Euler-Bernouilli

Dans toutes les références (Thomson [27], Timoshenko [28]) l'équation d'Euler-Bernouilli est présentée à partir de conditions limites d'une poutre aux extrémités libre-libre. L'objectif de cette section est de valider l'équation pour le cas spécial de la poutre expérimentale.

Soit une poutre mince, large, flexible en flexion dans un axe seulement et rigide en torsion (schéma 4.1a). En considérant aussi un élément d'une longueur  $ds$  de la poutre à une distance  $x$  de la base, les expressions de l'énergie cinétique et potentielle de la poutre sont données par

$$T_k = \frac{1}{2} I_m \left[ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t \partial x} \right]_{x=0}^2 + \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left[ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L J(x) \left[ \frac{\partial^2 y(x, y)}{\partial x \partial t} \right]^2 dx$$

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{A^* G} V(x, t)^2 dx$$

(4-1)

où:

$I_m$  : inertie du moteur  
 $m(x)$  : masse par unité de longueur  
 $J(x)$  : inert. rotat. par unité de longueur  
 $E$  : module d'élasticité linéaire  
 $I$  : moment de surface de la section  
 $A^*$  : aire de cisaillement  
 $G$  : module d'élasticité en cisaillement  
 $V()$  : effort de cisaillement

Si l'hypothèse de la poutre mince est valide, les composantes d'énergie cinétique rotationnelle de la poutre et d'énergie potentielle due au cisaillement sont négligeables, alors les

expressions d'énergie cinétique et potentielle (4-1) se réduisent à

$$T_k = \frac{1}{2} I_m \dot{y}'(0, t)^2 + \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \dot{y}(x, t)^2 dx$$

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^L EI y''(x, t)^2 dx$$
(4-2)

où:

$$\dot{y}(x, t) \triangleq \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$$

$$\dot{y}'(0, t) \triangleq \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t \partial x}$$

$$y''(x, t) \triangleq \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

En utilisant le principe d'Hamilton, pour un système homogène conservatif, la variation du Hamiltonien est donnée par

$$\delta H = -\delta L = \delta V_p - \delta T_k = 0$$
(4-3)

Selon les relations (4-2), les variations d'énergie cinétique et potentielle sont

$$\begin{aligned}
\delta T_k &= I_m \dot{y}'(0, t) \delta \dot{y}'(0, t) + \int_0^L m(x) \dot{y}(x, t) \delta \dot{y}(x, t) dx \\
\delta V_p &= \int_0^L EI y''(x, t) \delta y''(x, t) dx \\
&= EI \left\{ [y''(x, t) \delta y'(x, t) - y'''(x, t) \delta y(x, t)]_0^L + \int_0^L y''''(x, t) \delta y(x, t) dx \right\}
\end{aligned}
\tag{4-4}$$

Donc, en joignant (4-3) et (4-4),

$$\begin{aligned}
&EI \left\{ [y''(x, t) \delta y'(x, t) - y'''(x, t) \delta y(x, t)]_0^L + \int_0^L EI y''''(x, t) \delta y(x, t) dx \right\} \\
&\quad - I_m \dot{y}'(0, t) \delta \dot{y}'(0, t) - \int_0^L m(x) \dot{y}(x, t) \delta \dot{y}(x, t) dx = 0
\end{aligned}
\tag{4-5}$$

Pour les conditions limites de la poutre expérimentale du schéma 4.1,

$$\begin{aligned}
\text{à } x=0 \quad &y(0, t) = 0 \\
&EI y''(0, t) = I_m \dot{y}'(0, t) \\
\text{à } x=L \quad &y''(L, t) = 0 \\
&y'''(L, t) = 0
\end{aligned}
\tag{4-6}$$

l'équation 4-5 devient

$$\begin{aligned}
&\int_0^L EI y''''(x, t) \delta y(x, t) dx - I_m \dot{y}'(0, t) \delta \dot{y}'(0, t) \\
&\quad - I_m \dot{y}'(0, t) \delta \dot{y}'(0, t) - \int_0^L m(x) \dot{y}(x, t) \delta \dot{y}(x, t) dx = 0
\end{aligned}
\tag{4-7}$$

Puis, sous forme d'intégrale de temps,

$$\int_0^L EI \int_{t_1}^{t_2} y''''(x, t) \delta y(x, t) dt dx - I_m \int_{t_1}^{t_2} \ddot{y}'(0, t) \delta y'(0, t) dt - I_m \int_{t_1}^{t_2} \dot{y}'(0, t) \delta \dot{y}'(0, t) dt - \int_0^L m(x) \int_{t_1}^{t_2} \dot{y}(x, t) \delta \dot{y}(x, t) dt dx = 0 \quad (4-8)$$

De plus, sachant que

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{y}'(0, t) \delta \dot{y}'(0, t) dt = \dot{y}'(0, t) \delta y'(0, t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{y}'(0, t) \delta y'(0, t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{y}'(0, t) \delta y'(0, t) dt$$

et que

(4-9)

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{y}(x, t) \delta \dot{y}(x, t) dt = \dot{y}(x, t) \delta y(x, t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{y}(x, t) \delta y(x, t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{y}(x, t) \delta y(x, t) dt$$

et en divisant par  $\delta y(x, t)$ , l'équation 4-8 se réduit à

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4-10)$$

L'équation aux dérivées partielles (4-10) est l'équation d'Euler-Bernouilli pour une poutre flexible mince. Cette relation fait l'hypothèse que le cisaillement est négligeable ainsi que l'inertie rotationnelle. De plus, elle ne considère pas d'atténuation et de dissipation.

Si l'hypothèse de minceur n'est pas valide, le même cheminement à partir des expressions d'énergie (4-1) donne l'équation suivante (Thomson [26]);

$$\begin{aligned}
 & EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \dots \\
 & \dots \left[ J(x) + \frac{EI m(x)}{A \cdot G} \right] \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{J(x) m(x)}{A \cdot G} \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial t^4} = 0
 \end{aligned}
 \tag{4-11}$$

L'expression (4-10) est un cas spécial plus solvable de l'expression (4-11).

D'autres auteurs proposent d'autre part de modéliser la dissipation par un terme d'amortissement visqueux relié au taux de variation de la dilatation. Dans ce cas, l'expression (4-3) prend l'allure suivante

$$\delta H = - \int_0^L C E I \dot{y}'''(x, t) \delta y(x, t) dx \quad (4-12)$$

et l'équation d'Euler-Bernouilli (4-10) devient

$$E I \left[ \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + C \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial t \partial x^3} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4-13)$$

Toutefois, l'utilisation d'un modèle visqueux n'étant pas justifiée et la composante d'amortissement interne n'étant pas généralement importante, l'équation (4-13) n'est que très rarement utilisée.

Puis, si le système n'est pas homogène et que la poutre est soumise à des efforts externes distribués de forces  $p(x, t)$  et moment  $q(x, t)$ , alors (4-3) devient

$$\delta H = \int_0^L p(x, t) \delta y(x, t) dx + \int_0^L q(x, t) \delta y'(x, t) dx \quad (4-14)$$

où:

$p(x, t)$  : forces distribuées  
 $q(x, t)$  : couples distribués

et n'a une solution non-intégrale que si  $q(x, t) = 0$ . Alors, dans ce cas (4-10) devient

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (4-15)$$

Puis si des efforts ponctuels appliqués aux extrémités sont présents, il est possible de les inclure dans les conditions limites et de solutionner (4-10) selon ces conditions.

#### 4.2 - Solution de l'équation d'Euler-Bernouilli

Lorsqu'une poutre répond à l'hypothèse de minceur, les solutions de l'équation d'Euler-Bernouilli permettent de déterminer analytiquement les fréquences naturelles et les formes modales de la poutre. Des solutions sont présentées dans une publication de Blevins [1] pour différentes conditions limites. Malheureusement, ces solutions ne couvrent pas le cas présenté dans ce rapport. Conséquemment, cette section est vouée à la solution de l'équation d'Euler-Bernouilli pour les conditions limites spécifiques à l'application présentée ici.

Soit une poutre flexible de longueur L montée sur l'axe d'un moteur d'inertie  $I_m$  et pouvant posséder une charge ponctuelle à l'autre extrémité (schéma 4.2). Les conditions limites du système libre d'efforts externes sont;

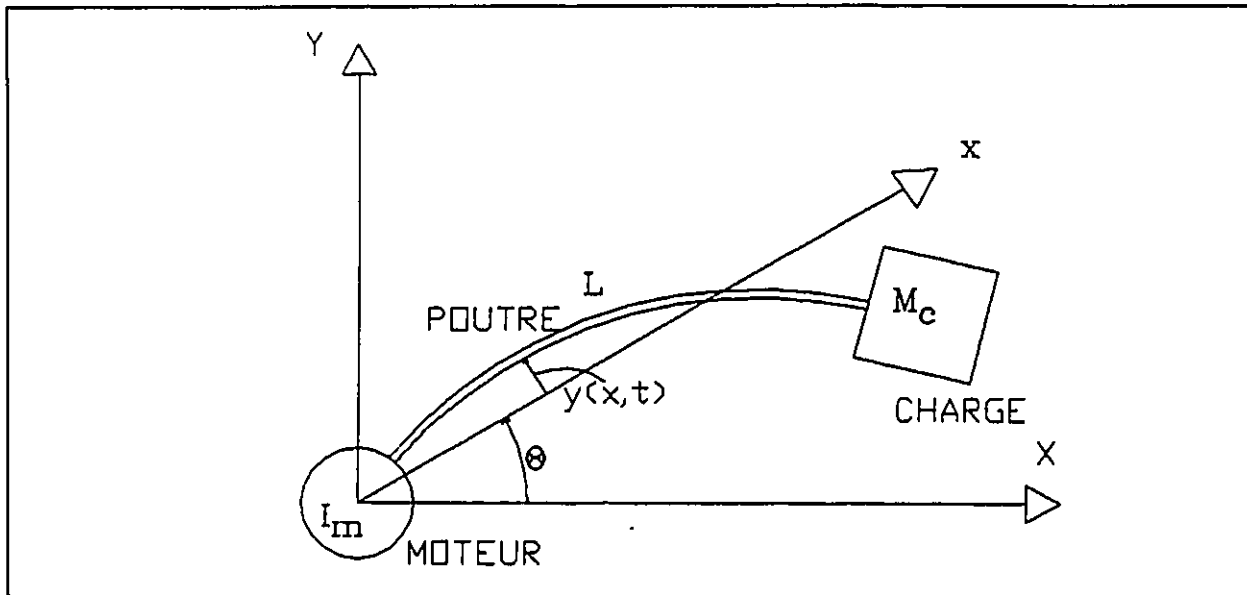


schéma 4.2

$$\begin{aligned}
 \text{à } x=0 \quad & y(0, t) = 0 \\
 & EIy''(0, t) = I_m \ddot{\theta}(0, t) \\
 \text{à } x=L \quad & EIy''(L, t) = M_c \ddot{y}(L, t) \\
 & y'''(L, t) = 0
 \end{aligned} \tag{4-16}$$

Par la méthode de séparation des variables, la solution est de la forme

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \tag{4-17}$$

où:

- $q_i(t)$  : coordonnées généralisées
- $\phi_i(x)$  : formes propres

Par la nature de l'équation (4-10),  $q_i(t)$  est la solution d'une équation différentielle du second ordre et  $\phi_i(x)$  d'une équation différentielle d'ordre quatre. En conséquence,

$$q_i = a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t)$$

$$\phi_i(x) = A_i \cos(\lambda_i x) + B_i \cosh(\lambda_i x) + C_i \sin(\lambda_i x) + D_i \sinh(\lambda_i x)$$

(4-18)

où:  $\omega_i$ : fréquences naturelles  
 $\lambda_i$ : valeurs propres

De (4-18), il est possible d'établir que

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} = -\sum \omega_i^2 \phi_i(x) q_i(t)$$

(4-19)

donc, l'équation (4-10) peut être réécrite sous la forme suivante

$$EI \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} q_i(t) - m(x) \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \phi_i(x) q_i(t) = 0 \quad (4-20)$$

Pour que chaque  $\phi_i(x) q_i(t)$  soit une solution homogène indépendante de (4-10), il faut que

$$EI \frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} - m(x) \omega_i^2 \phi_i(x) = 0 \quad (4-21a)$$

ou bien

$$\frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} - \lambda_i^4 \phi_i(x) = 0 \quad (4-21b)$$

où:

$$\lambda_i^4 = \frac{m(x)}{EI} \omega_i^2 \quad (4-21c)$$

d'où la solution (4-18) pour  $\phi_i(x)$ . La relation (4.21c) exprime le lien entre la forme propre d'un mode de vibration et sa fréquence naturelle.

La solution  $\phi_i(x)$  de l'équation (4-18) devant satisfaire les conditions limites (4-16), les coefficients  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  et  $\lambda_i$  sont trouvés en solutionnant le système d'équations suivant;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{I_m \lambda_i^3}{\rho A} & \frac{I_m \lambda_i^3}{\rho A} \\ c\lambda & ch\lambda & -s\lambda & sh\lambda \\ \frac{M_c}{\rho A} \lambda_i c\lambda + s\lambda & \frac{M_c}{\rho A} \lambda_i ch\lambda + sh\lambda & \frac{M_c}{\rho A} \lambda_i s\lambda - c\lambda & \frac{M_c}{\rho A} \lambda_i sh\lambda + ch\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(4-22)

où:

$$\begin{aligned} s\lambda &\Delta \sin(\lambda_i L) \\ c\lambda &\Delta \cos(\lambda_i L) \\ sh\lambda &\Delta \sinh(\lambda_i L) \\ ch\lambda &\Delta \cosh(\lambda_i L) \end{aligned}$$

En normalisant tel que

$$\int_0^L \phi_i^2(x) dx = 1 \quad (4-23)$$

les solutions sont telles que  $\lambda_i$  satisfait l'équation

$$\left[ \frac{I_m M_c}{(\rho A)^2} \lambda_i^4 - 1 \right] (c\lambda \operatorname{sh}\lambda - s\lambda \operatorname{ch}\lambda) + \frac{I_m}{\rho A} \lambda_i^3 (1 + c\lambda \operatorname{ch}\lambda) + \frac{M_c}{\rho A} \lambda_i s\lambda \operatorname{sh}\lambda = 0 \quad (4-24)$$

et que

$$A_i = \frac{I_m \lambda_i^3}{2 \rho A} \left[ \frac{\operatorname{sh}\lambda + s\lambda}{\frac{I_m \lambda_i^3}{2 \rho A} (c\lambda + \operatorname{ch}\lambda) + s\lambda} \right] D_i \quad (4-25)$$

$$B_i = -A_i$$

$$C_i = \left[ \frac{\operatorname{sh}\lambda - \frac{I_m \lambda_i^3}{2 \rho A} (c\lambda + \operatorname{ch}\lambda)}{\frac{I_m \lambda_i^3}{2 \rho A} (c\lambda + \operatorname{ch}\lambda) + s\lambda} \right] D_i$$

$D_i$  choisi pour satisfaire (4-23)

L'équation (4-24) est l'équation caractéristique de la poutre du schéma (4.2) et les solutions  $\lambda_i$  sont les valeurs caractéristiques. Si la charge et l'inertie du moteur sont négligeable, l'équation caractéristique (4-24) se limite à

$$\cos(\lambda_i L) \sinh(\lambda_i L) - \sin(\lambda_i L) \cosh(\lambda_i L) = 0 \quad (4-26)$$

qui est l'équation caractéristique pour les conditions limites jointée-libre (Blevins [1]). Puis, si la charge est négligeable et que l'inertie du moteur est grande, alors l'équation caractéristique devient

$$1 + \cos(\lambda_i L) \cosh(\lambda_i L) = 0 \quad (4-27)$$

qui est l'équation caractéristique pour une poutre aux extrémités encastrée-libre (Blevin [1]). Les valeurs de  $\lambda, L$  pour différents rapport  $M_e/\rho A$  et  $I_m/\rho A$  sont données en annexe.

#### 4.3 - Fonction de Transfert

L'approche classique par l'analyse des pôles/zéros nécessite dans un premier temps le développement d'une fonction de transfert. Dans cette section, une fonction de transfert est développée pour le cas où la charge est nulle ( $M_e=0$ ), un couple  $\tau$  est appliquée à la base et inclu dans les conditions limites, et pour une poutre possédant un mode rigide (schéma 4.3).

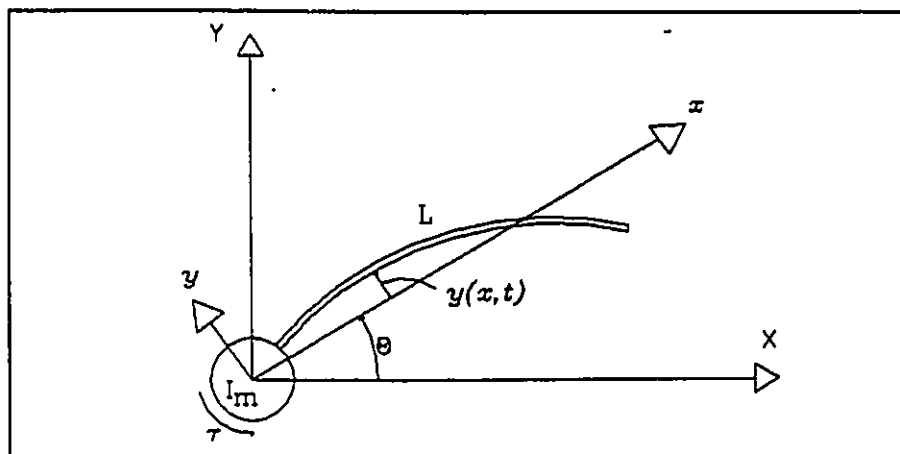


schéma 4.3

Dans ces conditions, les conditions limites sont données par;

$$\begin{aligned}
 \text{à } x=0 \quad & y(0, t) = 0 \\
 & EIy''(0, t) + \tau = I_m (\ddot{\theta}(t) + \dot{y}'(0, t)) \\
 \text{à } x=L \quad & y''(L, t) = 0 \\
 & y'''(L, t) = 0
 \end{aligned} \tag{4-28}$$

En transformée de Laplace, l'équation d'Euler-Bernouilli (4-10) et les conditions limites (4-28) deviennent, pour une poutre de section constante ( $m(x) = \rho A$ ).

$$EIY''''(x, s) + \rho A s^2 Y(x, s) = 0 \quad (4-29a)$$

$$\begin{aligned} C.L.: \quad & Y(0, s) = 0 \\ & EIY''(0, s) + \tau = I_m s^2 (\theta(s) + Y'(0, s)) \\ & Y''(L, s) = 0 \\ & Y'''(L, s) = 0 \end{aligned} \quad (4-29b)$$

Puis en définissant une variable complexe intermédiaire  $\lambda$  tel que

$$\lambda^4 = -\frac{\rho A}{EI} s^2 \quad (4-30)$$

alors (4-29a) devient

$$Y''''(x, s) - \lambda^4 Y(x, s) = 0 \quad (4-31)$$

ayant une solution homogène

$$Y(x, s) = A(s) \sin(\lambda x) + B(s) \cos(\lambda x) + C(s) \sinh(\lambda x) + D(s) \cosh(\lambda x) \quad (4-32)$$

L'équation (4-32) devant satisfaire les conditions limites (4-29b),  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $C(s)$  et  $D(s)$  doivent satisfaire

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ I_m s^2 \lambda & EI \lambda^2 & I_m s^2 \lambda & -EI \lambda^2 \\ -s \lambda & -c \lambda & sh \lambda & ch \lambda \\ -c \lambda & s \lambda & ch \lambda & sh \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A(s) \\ B(s) \\ C(s) \\ D(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ T(s) - I_m s^2 \theta(s) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-33)$$

où:

$$\begin{aligned} s\lambda &\Delta \sin(\lambda L) \\ c\lambda &\Delta \cos(\lambda L) \\ sh\lambda &\Delta \sinh(\lambda L) \\ ch\lambda &\Delta \cosh(\lambda L) \\ s^2 &\Delta -\frac{EI}{\rho A} \lambda^4 \end{aligned}$$

En définissant l'angle mesuré comme étant

$$\Theta_m(s) = \Theta(s) + Y'(0, s) \quad (4-34)$$

et en résolvant le système linéaire (4-33) pour obtenir

$$Y'(0, s) = \frac{\lambda (1 + c\lambda ch\lambda) (T(s) - I_m s^2 \Theta(s))}{I_m s^2 \lambda (1 + c\lambda ch\lambda) + EI \lambda^2 (c\lambda sh\lambda - s\lambda ch\lambda)} \quad (4-35)$$

la fonction de transfert obtenue devient alors

$$\Theta_m(s) = \frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda)} \Theta(s) + \frac{N_2(\lambda)}{D(\lambda)} T(s) \quad (4-36)$$

$$\begin{aligned} \text{où: } N_1(\lambda) &= EI \lambda^2 (c\lambda sh\lambda - s\lambda ch\lambda) \\ N_2(\lambda) &= \lambda (1 + c\lambda ch\lambda) \\ D(\lambda) &= \text{dénominateur de 4-35} \end{aligned}$$

Puis, en définissant le mode rigide tel que

$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{I_t s^2} = -\frac{\rho A}{I_t EI \lambda^4} \quad (4-37)$$

$$\begin{aligned} \text{où: } I_t &= I_m + I_p \\ I_m &: \text{inertie du moteur} \\ I_p &: \text{inertie de la poutre} \\ &\quad \text{par rapport au moteur} \end{aligned}$$

on obtient finalement

$$\frac{\Theta_m(s)}{T(s)} = \frac{\rho A (c\lambda \operatorname{sh}\lambda - s\lambda \operatorname{ch}\lambda) - I_c \lambda^3 (1 + c\lambda \operatorname{ch}\lambda)}{I_c \lambda^4 \left[ I_m \frac{EI}{\rho A} \lambda^3 (1 + c\lambda \operatorname{ch}\lambda) - EI (c\lambda \operatorname{sh}\lambda - s\lambda \operatorname{ch}\lambda) \right]} \quad (4-38)$$

$$\text{où: } \lambda = \sqrt[4]{-\frac{EI}{\rho A} s^2}$$

La fonction (4-38) est la fonction de transfert dite exacte entre le couple appliqué par le moteur et l'angle de celui-ci. Les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles 4-38 est non-analytique (pôles du système), autre que les quatre solutions  $\lambda=0$ , sont les mêmes que ceux de (4-24) avec  $M_t = 0$ . Donc, les pôles en boucle ouverte du système représentent les valeurs propres des modes de vibration libre. Pour leur part, les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles la fonction de transfert est nulle (les zéros de la fonction) sont des valeurs comprises entre les valeurs propres d'une poutre jointé-libre (équation 4-26) et les valeurs propres d'une poutre encastree-libre (équation 4-27), se rapprochant de ces dernières lorsque ces valeurs grandissent. Ce phénomène rend nuancable l'hypothèse de Wie [36] et de Cannon [2] représentant la fonction de transfert comme étant

$$\frac{\Theta_m(s)}{T(s)} = \frac{K \prod_i (s^2 + 2\zeta_{ei}\omega_{ei}s + \omega_{ei}^2)}{s^2 \prod_j (s^2 + 2\zeta_{lj}\omega_{lj}s + \omega_{lj}^2)} \quad (4-39)$$

où:  $\zeta_{ei}$ : coef. d'attén. du  $i^{\text{ième}}$  mode encastré  
 $\omega_{ei}$ : fréq. nat. du  $i^{\text{ième}}$  mode encastré  
 $\zeta_{lj}$ : coef. d'attén. du  $j^{\text{ième}}$  mode libre  
 $\omega_{lj}$ : fréq. nat. du  $j^{\text{ième}}$  mode libre

Bien qu'expérimentalement observée, la fonction de transfert hypothétique (4-39) n'est valide que pour les poutres possédant un rapport  $I/\rho A$  élevé, donc dans les cas où l'inertie du moteur est relativement importante et/ou dans les cas où la poutre est relativement longue. Dans ces cas, la relation (4-38) devient

$$\frac{\Theta_m(s)}{T(s)} = \frac{(1 + c\lambda \operatorname{ch}\lambda)}{EI\lambda \left[ (c\lambda \operatorname{sh}\lambda - s\lambda \operatorname{ch}\lambda) - \frac{I_m}{\rho A} \lambda^3 (1 + c\lambda \operatorname{ch}\lambda) \right]} \quad (4-40)$$

si la poutre est longue et que l'inertie du moteur est importante, et

$$\frac{\Theta_m(s)}{T(s)} = \frac{(1 + c\lambda \operatorname{ch}\lambda)}{EI\lambda (c\lambda \operatorname{sh}\lambda - s\lambda \operatorname{ch}\lambda)} \quad (4-41)$$

si l'inertie du moteur n'est pas importante. Les équations (4-40) et (4-41) sont les équations obtenues par Wie [36] pour des cas similaires.

A toute fin pratique, la fonction (4-39) peut être vue comme l'expansion en série de Taylor factorisée de (4-38), ajoutant un terme arbitraire de dissipation visqueuse jusque là non considérée. De plus, sachant que les zéros et les pôles se rapprochent de plus en plus lorsque la fréquence naturelle augmente (Wie [36]), l'annulation pôles/zéros donne une fonction réduite de la forme

$$\frac{\Theta_m(s)}{T(s)} = \frac{K \prod_i^n (s^2 + 2\zeta_{zi}\omega_{zi}s + \omega_{zi}^2)}{s(\tau s + 1) \prod_j^n (s^2 + 2\zeta_{pj}\omega_{pj}s + \omega_{pj}^2)} \quad (4-42)$$

$\zeta_{zi}, \omega_{zi}$  : pour le  $i^{\text{ième}}$  zéro  
 où:  $\zeta_{pj}, \omega_{pj}$  : pour le  $j^{\text{ième}}$  pôle  
 $\tau$  : const. de temps mécanique

La relation 4-42 représente donc la fonction de transfert hypothétique et réduite à  $n$  modes de vibration de la poutre flexible du schéma 4.3.

#### 4-4 Orthogonalité

Pour que l'équation 4-21 soit valide pour tout  $i$ , il suffit que chaque composante  $\phi_i(x) q_i(t)$  soient indépendantes,  $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}^T$  formant une base orthogonale. Le but de cette section est de trouver sous quelles conditions l'hypothèse d'orthogonalité est vérifiée. Selon l'équation 4-21, pour chaque solution  $\phi_i(x)$  et  $\phi_j(x)$ ,

$$\rho A \omega_i^2 \phi_i(x) = EI \frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} \quad (4-43 \text{ a})$$

$$\rho A \omega_j^2 \phi_j(x) = EI \frac{d^4 \phi_j(x)}{dx^4} \quad (4-43 \text{ b})$$

En multipliant les deux cotés de 4-43a par  $\phi_j(x)$  et 4-41b par  $\phi_i(x)$ , l'équation reste valide et devient

$$\rho A \omega_i^2 \phi_i(x) \phi_j(x) = EI \frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} \phi_j(x) \quad (4-44 \text{ a})$$

$$\rho A \omega_j^2 \phi_j(x) \phi_i(x) = EI \frac{d^4 \phi_j(x)}{dx^4} \phi_i(x) \quad (4-44 \text{ b})$$

Puis, en intégrant le terme de droite par partie;

$$\begin{aligned} \omega_i^2 \int_0^L \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx &= EI \left[ \phi_j(x) \frac{d^3 \phi_i(x)}{dx^3} - \frac{d\phi_j(x)}{dx} \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \right]_0^L \\ &+ EI \int_0^L \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} dx \end{aligned} \quad (4-45 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \omega_j^2 \int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_i(x) dx &= EI \left[ \phi_i(x) \frac{d^3 \phi_j(x)}{dx^3} - \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \right]_0^L \\ &+ EI \int_0^L \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} dx \end{aligned} \quad (4-45 \text{ b})$$

Pour les conditions limites (4-16), les équations (4-45) deviennent respectivement,

$$\omega_i^2 \left[ \int_0^L \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx + I_m \frac{d\phi_i(0)}{dx} \frac{d\phi_j(0)}{dx} \right] = EI \int_0^L \frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2} \frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2} dx \quad (4-46a)$$

$$\omega_j^2 \left[ \int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_i(x) dx + I_m \frac{d\phi_j(0)}{dx} \frac{d\phi_i(0)}{dx} \right] = EI \int_0^L \frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2} \frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2} dx \quad (4-46b)$$

pour lesquelles  $\omega_i \neq \omega_j$  si  $i \neq j$ . Dans ce cas, l'unique solution est

$$\int_0^L \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx + I_m \frac{d\phi_i(0)}{dx} \frac{d\phi_j(0)}{dx} = 0$$

$$EI \int_0^L \frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2} \frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2} dx = 0 \quad (4-47)$$

Les équations 4-47 sont les conditions d'orthogonalité de la poutre du schéma 4.2.

#### 4-5 Modèle d'état

La fonction de transfert obtenue dans la section 4.3 sert à l'analyse et la synthèse d'asservissement par les méthodes classiques du domaine fréquentiel. Elle est utilisée plus tard pour la conception d'impédance active. Les méthodes dites modernes requièrent pour leur part un modèle d'état pour l'analyse et la synthèse dans le domaine temporel. Cette section est donc consacrée au développement d'un modèle d'état.

#### 4.5.1 Approche Lagrangienne

L'approche énergétique de Lagrange est une bonne approche pour obtenir un modèle d'état pour les systèmes mécaniques. Cette sous-section présente les grandes lignes du développement d'un tel modèle.

Différemment du modèle de Cannon et Schmitz [2], la cinématique est définie comme au schéma 4.4

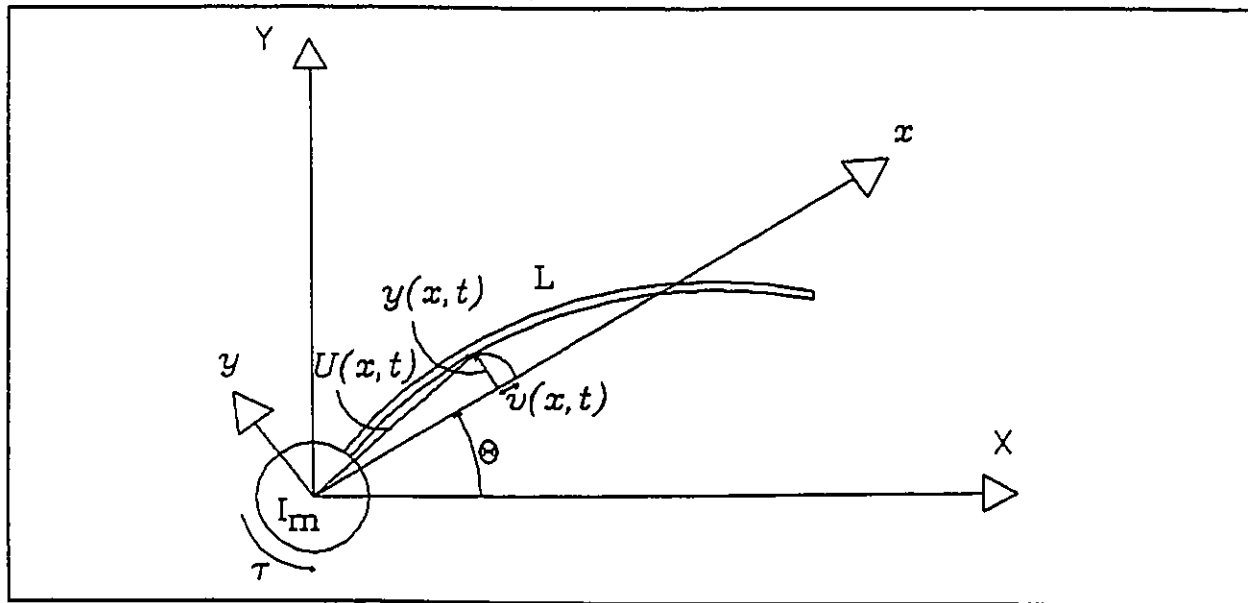


schéma 4.4 - définition des variables

De par ce schéma, selon les axes XY, le vecteur de position est donné par;

$$U(x, \theta, t) = \begin{cases} -y(x, t) \sin[\theta(t)] + [x - v(x, t)] \cos[\theta(t)] \\ y(x, t) \cos[\theta(t)] + [x - v(x, t)] \sin[\theta(t)] \end{cases}$$

(4-48)

En négligeant le raccourcissement  $v(x, t)$ , le vecteur vitesse devient

$$\dot{U}(x, \theta, t) = \begin{cases} -\dot{y}(x, t) \sin[\theta(t)] - y(x, t) \dot{\theta}(t) \cos[\theta(t)] - x\dot{\theta}(t) \sin[\theta(t)] \\ \dot{y}(x, t) \cos[\theta(t)] - y(x, t) \dot{\theta}(t) \sin[\theta(t)] + x\dot{\theta}(t) \cos[\theta(t)] \end{cases}$$

(4-49)

Puis, l'énergie cinétique est donnée par

$$T_k = \frac{1}{2} I_m \left[ \dot{\theta}(t) + \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial t \partial x} \right]^2 + \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{U}^T \dot{U} dx \quad (4-50)$$

En exécutant le produit scalaire, utilisant l'équation d'orthogonalité (4-47a) et faisant l'hypothèse que  $y(x, t)$  est donné par (4-17), l'équation (4-50) devient

$$T_k = \frac{1}{2} [(I_m + I_p) \dot{\theta}(t)^2 + I_m \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{d\phi_i(0)}{dx} \dot{q}_i(t) \right)^2 + 2 I_m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d\phi_i(0)}{dx} \dot{q}_i(t) \dot{\theta}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} M_i \dot{q}_i(t)^2 + \sum_{i=1}^{\infty} M_i q_i(t)^2 \dot{\theta}(t)^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i \dot{q}_i(t) \dot{\theta}(t) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} M_{ij} q_i q_j \dot{\theta}(t)^2]$$

(4-51)

où:

$$\begin{aligned}
 I_p &\triangleq \int_0^L \rho A x^2 dx : \text{inertie de la poutre} \\
 M_i &\triangleq \int_0^L \rho A \phi_i(x)^2 dx : \text{masse généralisée} \\
 b_i &\triangleq \int_0^L \rho A x \phi_i(x) dx \\
 M_{ij} &\triangleq \int_0^L \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx = -I_m \frac{d\phi_i(0)}{dx} \frac{d\phi_j(0)}{dx}
 \end{aligned}$$

Ensuite, l'énergie potentielle (négligeant le cisaillement) est donnée par

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (4-52)$$

et selon (4-17) et la condition d'orthogonalité (4-47b), (4-52) devient

$$V_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} k_i q_i(t)^2 \quad (4-53)$$

$$\text{où : } k_i \triangleq \int_0^L EI \left[ \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \right]^2 dx : \text{rigidité généralisée}$$

Se rappelant de l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} + \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\eta}_i} = Q_i \quad i=1, 2, \dots \quad (4-53)$$

où:

$$\begin{aligned}
 L &\triangleq T_k - V_p : \text{Lagrangien} \\
 \eta_i &: \text{coordonnée généralisée} \\
 F_R &\triangleq \sum_{i=1}^{\infty} D_i \dot{\eta}_i^2 : \text{fonction de Rayleigh} \\
 Q_i &: \text{forces généralisées}
 \end{aligned}$$

Il est possible d'établir les équations du mouvement en incluant un terme dissipatif visqueux de Rayleigh  $F_r$ . Par définition, les forces généralisées sont données par

$$\begin{aligned} Q_0 &= \tau \\ Q_1 &= \frac{d\phi_1(0)}{dx} \tau \\ Q_2 &= \frac{d\phi_2(0)}{dx} \tau \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4-55)$$

Conséquemment, les équations de mouvement sont données par la forme matricielle ci-bas;

$$[M] \ddot{\eta} + [D] \dot{\eta} + [K] \eta + n(\dot{\eta}, \dot{\eta}, \eta) = b\tau \quad (4-56)$$

où:

$$\begin{aligned} \eta &= (\theta, q_1, q_2, \dots)^T \in \mathbb{R}^n \\ M &= \begin{bmatrix} I_m + I_p & I_m \phi_1'(0) + b_1 & I_m \phi_2'(0) + b_2 & \dots \\ I_m \phi_1'(0) + b_1 & I_m \phi_1'(0)^2 + M_1 & 0 & 0 \\ I_m \phi_2'(0) + b_2 & 0 & I_m \phi_2'(0)^2 + M_2 & \\ \vdots & 0 & & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ D &= \text{diag}[D_0, D_1, D_2, \dots] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ K &= \text{diag}[0, k_1, k_2, \dots] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ b &= (1, \frac{d\phi_1(0)}{dx}, \frac{d\phi_2(0)}{dx}, \dots)^T \in \mathbb{R}^n \\ n &= (n_0, n_1, n_2, \dots)^T \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

et où les termes de couplages non-linéaires sont

$$\begin{aligned} n_0 &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} M_i q_i \dot{q}_i \theta + \sum_{i=1}^{\infty} M_i q_i^2 \theta + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} M_{ij} [(q_i \dot{q}_j + \dot{q}_i q_j) + q_i q_j \theta] \\ n_i &= -M_i q_i \theta^2 - \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} M_{ij} q_j \theta^2 \end{aligned}$$

Alors, en définissant un vecteur d'état

$$\mathbf{x} = (\eta^T, \dot{\eta}^T)^T \in \mathbb{R}^n \quad (4-57)$$

le modèle d'état devient

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\tau + \mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \quad (4-58)$$

où:

$$\mathbf{x}, \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Finalement, si le vecteur de sortie  $y$  contient l'angle du moteur et la vitesse angulaire de l'arbre moteur

$$y = \begin{bmatrix} \theta + \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} \\ \theta + \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial t \partial x} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (4-59)$$

il est possible d'écrire

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \text{où} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{d\phi_1(0)}{dx} & \frac{d\phi_2(0)}{dx} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{d\phi_1(0)}{dx} & \dots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n \quad (4-60)$$

### 4.5.2 Modèle réduit

Le modèle d'état établi dans la sous-section précédente (équation 4-58 et 4-60) est infini-dimensionnel et non-linéaire. Heureusement, les modes de vibration en haute fréquence sont atténués beaucoup plus rapidement que ceux en basse fréquence, et de plus la contribution d'un mode à la valeur mesurée réduit en augmentant la fréquence naturelle du mode de vibration. Ces deux propriétés font en sorte qu'il est possible de négliger tous les modes de vibration ayant une fréquence naturelle au delà d'une certaine valeur. Ce processus de réduction résulte en un modèle approximatif d'ordre fini. Par exemple, si  $n$  modes de vibration sont considérés, alors le modèle devient

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}^* &= \mathbf{A}^* \mathbf{x}^* + \mathbf{B}^* \tau + \mathbf{h}^*(\dot{\mathbf{x}}^*, \mathbf{x}^*) \\ y^* &= \mathbf{C}^* \mathbf{x}^*\end{aligned}\tag{4-61}$$

où:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^* &\in \mathbb{R}^{2n+2} \\ \mathbf{A}^* &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathbf{M}^{*-1} \mathbf{K}^* & -\mathbf{M}^{*-1} \mathbf{D}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2} \times \mathbb{R}^{2n+2} \\ \mathbf{B}^* &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{*-1} \mathbf{b}^* \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2} \\ \mathbf{h}^* &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{*-1} \mathbf{n}^* \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2}\end{aligned}$$

*en considérant  $n$  modes de vibration*

### 4.5.3 Effet des modes négligés

La réduction du modèle entraîne donc une différence indéniable entre le modèle et le système réel. Dans cette sous-section, l'effet des modes négligés est démontré par comparaison avec le modèle (4-61).

D'abord, les équations de mouvement (équation 4-56) peuvent être séparées entre modes négligés et modes considérés;

$$\begin{bmatrix} M_{cc} & M_{cn} \\ M_{nc} & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_c \\ \ddot{\eta}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_c & 0 \\ 0 & D_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\eta}_c \\ \dot{\eta}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_c & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_c \\ \eta_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n_{cc} \\ n_{nc} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n_{cn} \\ n_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_c \\ b_n \end{Bmatrix} \tau \quad (4-62)$$

où:

$$M_{cc}, D_c, K_c \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

$$M_{nn}, D_n, K_n \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

$$M_{cn} \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m \quad \text{couplage}$$

$$M_{nc} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{inertiel}$$

$$\eta_c = (\theta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{modes consid.}$$

$$\eta_n = (\alpha_{n+2}, \alpha_{n+3}, \dots)^T \in \mathbb{R}^m \quad \text{modes néglig.}$$

$$b_c, n_{cc}, n_{cn} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$b_n, n_{nc}, n_{nn} \in \mathbb{R}^m$$

$$\tau \in \mathbb{R}$$

Par une manipulation algébrique démontrée en annexe B, les modèles d'état des modes considérés et des modes négligés sont définis comme étant

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c \tau + h_c(x_c, \dot{x}_c) + \epsilon_c(x_c, \dot{x}_c, x_n, \dot{x}_n) \\
 \dot{x}_n &= A_n x_n + B_n \tau + h_n(x_n, \dot{x}_n) + \epsilon_n(x_c, \dot{x}_c, x_n, \dot{x}_n) \\
 y &= C_c x_c + C_n x_n
 \end{aligned} \tag{4-63}$$

où:

$$\begin{aligned}
 x_c &\triangleq (\eta_c, \dot{\eta}_c)^T \in \mathbb{R}^{2n+2} \\
 x_n &\triangleq (\eta_n, \dot{\eta}_n)^T \in \mathbb{R}^m \\
 A_c &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & I \\ -Q^{-1}M_{cc}^{-1}Kc & -Q^{-1}M_{cc}^{-1}D_c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2} \times \mathbb{R}^{2n+2} \\
 B_c &\triangleq \begin{Bmatrix} 0 \\ Q^{-1}[M_{cc}^{-1}b_c - Pb_n] \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2} \\
 h_c &\triangleq \begin{Bmatrix} 0 \\ -Q^{-1}M_{cc}^{-1}n_{cc} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2} \\
 \epsilon_c &\triangleq \begin{Bmatrix} 0 \\ Q^{-1}P[D_n \dot{\eta}_n + K_n \eta_n + n_{nc} + n_{nn}] - Q^{-1}M_{nn}^{-1}n_{cn} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2} \\
 P &\triangleq M_{nn}^{-1}M_{cn}M_{nn}^{-1} \\
 Q &\triangleq [I - PM_{nc}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & I \\ -Q_2^{-1}M_{nn}^{-1}K_n & -Q_2^{-1}M_{nn}^{-1}D_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\
B_n &\triangleq \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_2^{-1}[M_{nn}^{-1}b_n - P_2 b_c] \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^n \\
h_n &\triangleq \begin{Bmatrix} 0 \\ -Q_2^{-1}M_{nn}^{-1}n_{nn} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^n \\
e_n &\triangleq \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_2^{-1}P_2 [D_c \dot{\eta}_c + K_c \eta_c + n_{cn} + n_{cc}] - Q_2^{-1}M_{cc}^{-1}n_{nc} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^n \\
P_2 &\triangleq M_{cc}^{-1}M_{nc}M_{cc}^{-1} \\
Q_2 &\triangleq [I - P_2 M_{cn}]
\end{aligned}$$

Par conséquent, à partir des modèles réduits de l'équation (4-61) et «réel» de l'équation (4-63), il est possible de réaliser la nature du problème lorsqu'un système de réglage de haute-authorité se base sur un modèle du système. Le «débordement de mesure» est issu du terme  $C_n x_n$  de la relation de sortie de l'équation (4-63), tandis que le «débordement de commande» provient du fait que la commande  $\tau$  et les modes considérés agissent sur la dynamique des modes négligés (équation 4-63). Ces effets se doivent d'être envisagés lors de la synthèse des systèmes de réglage.

#### 4.5.4 Espace modale

Le modèle (4-63) est souvent représenté dans l'espace modale. C'est-à-dire qu'à l'aide d'une transformation  $x = Tz$  le modèle devient

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T^{-1}A^*TZ + T^{-1}B^*\tau + T^{-1}h_c^* \\ y &= CTZ \end{aligned} \quad (4-64)$$

où T est choisit tel que

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & -2Z\Omega \end{bmatrix} z + B_m\tau + h_m \\ y &= C_m z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où: } -\Omega^2 &= \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & -\omega_1^2 & & \\ & & -\omega_2^2 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & -\omega_n^2 \end{bmatrix} \\ -2Z\Omega &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & & & 0 \\ & -2\zeta_1\omega_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -2\zeta_n\omega_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-65)$$

La méthode des modes hypothétiques suggère de son coté de considérer la matrice d'inertie  $M_c$  diagonale et d'en arriver directement à la forme modale (4-65). La justesse de l'hypothèse dépend de l'application.

## V - MONTAGE EXPERIMENTAL

Comme le chapitre précédent le démontre, le problème de modélisation analytique d'une structure flexible, même aussi simple que la poutre d'Euler-Bernouilli, n'est pas une tâche de tout repos. Par conséquent, les études portant sur l'atténuation active des vibrations nécessitent des simulations avec modèle de structures flexibles expérimentalement identifiées ou, mieux encore, des expériences réelles. Le travail dont fait l'objet du présent rapport comporte donc une phase expérimentale. Le chapitre cinq présente les trois composantes majeures du montage expérimental utilisé.

### 5.1 - Poutre

Comme le montre le schéma 5.1, la poutre est la composante contrôlée du montage, ressemblant à un robot planaire à un degré de liberté. La poutre fut conçue de façon à ce que

1. trois modes de vibration soient importants,
2. les vibrations en torsions et en flexion dans le second axe soient négligeables,

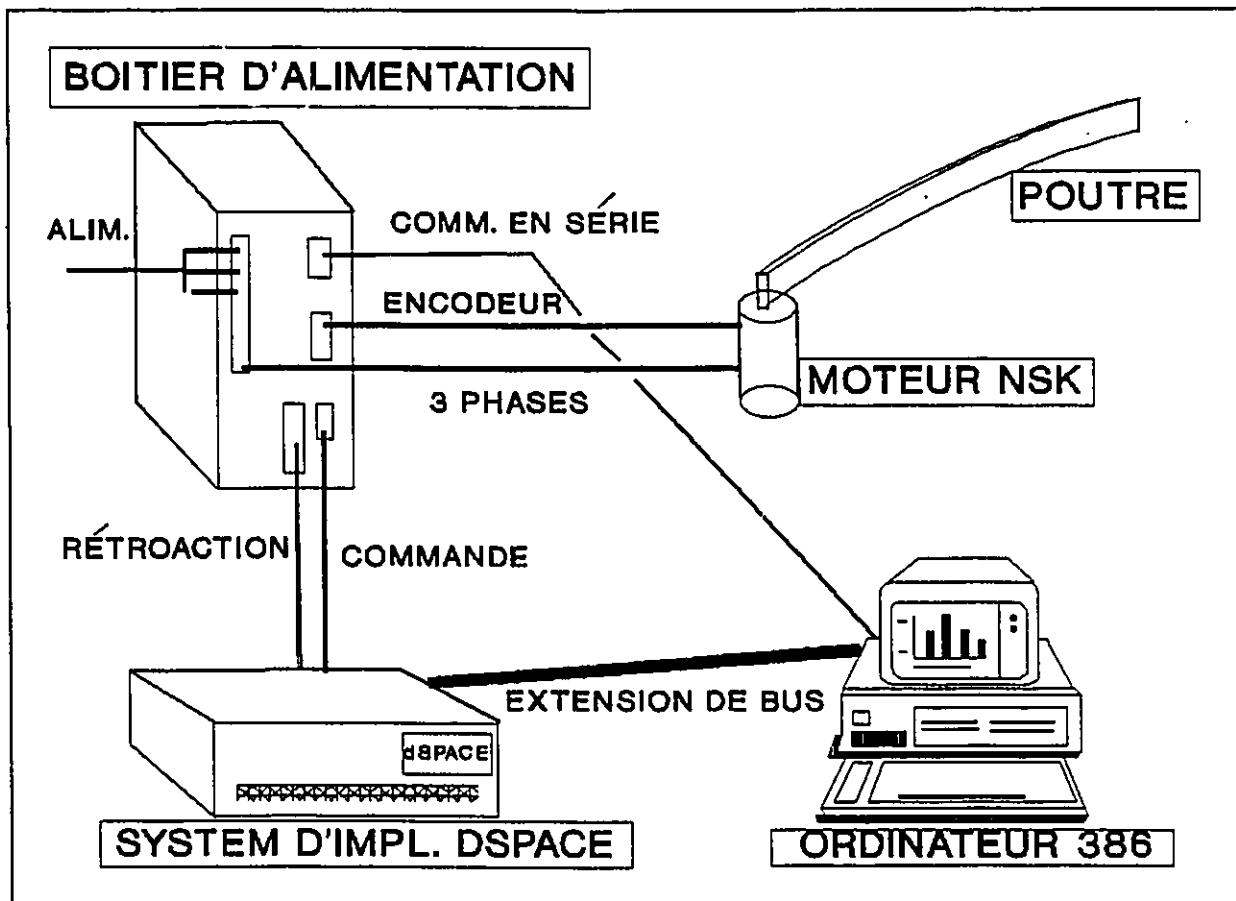


schéma 5.1 - Montage expérimentale

3. la poutre ressemble à une des poutres utilisée par d'autres chercheurs (pour fin de comparaison),
4. l'inertie de la poutre par rapport à la base soit plus grande que celle du moteur (au moins vingt fois),
5. la poutre soit longue d'un maximum de un mètre.

Sachant d'abord l'inertie du moteur ( $I_m = 2.3 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ) donnée par le fabricant et en utilisant les résultats de la section 4.2 montrés en annexe A, la poutre fût conçue avec les paramètres suivants;

Paramètre	Symbole	valeur
section	b x h	.15875 x 2.54 cm
longueur	L	1 m
matériau		Aluminium
densité		2700 kg/m <sup>3</sup>
coeff. de Hooke	E	70 GPa
Inertie	$I_p$	$54.4 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$

**tableau 5.1 - paramètres de la poutre**

Le calcul des coefficients  $M_i$  (masse généralisée) et  $k_i$  (rigidité généralisée) des équations (4-51) et (4-54), ainsi que les formes modales  $\phi_i(x)$  analytiques sont présentées dans l'annexe B. Pour cette poutre, les fréquences naturelles évaluées sont données au tableau 5.2

mode	fréq. nat. libre	fréq. nat. encastré
1	4.3 Hz	1.3 Hz
2	10 Hz	8.2 Hz
3	23.6 Hz	22.9 Hz
4	45.2 Hz	44.9 Hz
5	74 Hz	
7	111 Hz	

**tableau 5.2 - fréquences naturelles**

Comme il a été démontré à la section 4.3, au fur et à mesure que la fréquence naturelle augmente, la différence entre les modes de vibrations encastres et libres diminue. Dans le cas présent, dès le quatrième mode de vibration la différence est très petite. Ceci suggère que seulement trois modes de vibration sont importants. Cette poutre ressemble à la poutre de Wells, Schueller et Tlustly [34] et se prête bien à la comparaison. Les résultats devraient être aussi comparables à ceux de Wang, Lu et Hsu [31].

## 5.2 - Moteur

Le moteur utilisé pour le montage expérimental en est un de marque NSK, à courant continu, à trois phases, sans balai et à prise directe. La commutation des phases se fait électroniquement dans le boîtier d'alimentation (voir schéma 5.1). Pour ce, un encodeur avec résolution de 409 600 pas par révolution est construit à même le moteur. Il peut développer un couple maximal de 9.8 N.m et atteindre 4 tours par seconde. Le boîtier d'alimentation permet de choisir entre trois modes de commande: position, vitesse ou couple. Ces commandes sont implantées sur un processeur de signaux numériques (DSP) à même le boîtier d'alimentation. Le choix du mode se fait par communication en série (RS232) à l'aide d'une série de code développée par NSK. Une

fois le mode défini, la commande peut se faire par signal numérique, par communication en série ou par signal analogique  $\pm 10$  Volt.

Le système d'alimentation permet aussi son utilisation comme système de commande intermédiaire. C'est-à-dire qu'il met à la disponibilité du système de commande externe des signaux de contrôle tels des signaux de quadrature pour la rétroaction de position, des signaux analogiques pour les rétroactions de couple et de vitesse, et toute une gamme de signaux logiques pour le bon fonctionnement du moteur (alarme, arrêt d'urgence, limite de position, etc).

Dans l'expérience faisant l'objet du présent rapport, le mode de commande analogique du couple est utilisé, où le boîtier sert de système d'asservissement intermédiaire. Sur l'effet des signaux de position et de vitesse, un système de commande génère un signal analogique représentant une commande de couple. Un schéma fonctionnel représentant le matériel utilisé est présenté au schéma 5.2

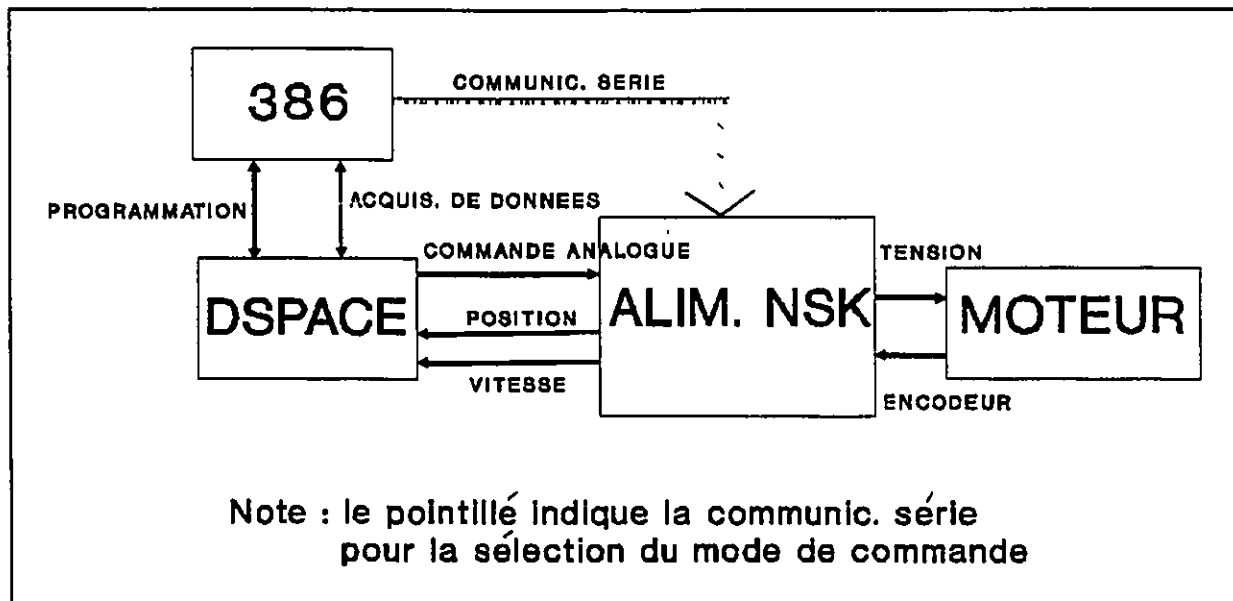


schéma 5.2 - schéma fonctionnel

### 5.3 - Système d'implantation dSPACE

Comme démontré au schéma 5.2, la troisième composante majeure est le système d'implantation dSPACE. Ce système ultra-puissant offre l'ensemble matériel/logiciel facilitant grandement le processus d'implantation.

Du côté matériel, il s'agit d'un ensemble de cartes pourvoyant différentes fonctions propres à l'implantation de systèmes d'asservissement numérique. Une liste de ces cartes est donnée par le tableau 5.3. D'abord, la carte processeur DS1002 montée directement sur le bus d'expansion d'un ordinateur personnel 386, est développée autour d'un processeur de signaux numériques de la

famille TMS320C30 (voir schéma 5.3) à arithmétique avec virgule flottante. Le processeur est programmable en langage C (spécialement développé pour ce genre de processeur). Sur un bus périphérique au DS1002 et à haute vitesse (PHS-BUS) sont montées les différentes cartes d'entrées/sorties; une carte de conversion analogique à numérique (A/N) 12 bits possédant trente-deux signaux d'entrée multiplexés par deux entrées réelles, deux cartes de conversion numérique à analogique (N/A) 16 bits possédant chacune cinq sorties programmables, deux cartes de compteurs 16 bits pour comptage de position par encodeur et une carte d'entrées/sorties programmable en quatre ports. Pour plus de détail sur le matériel, consultez le manuel dSPACE.

carte	description	Qtée
ds1002	carte processeur	1
ds2002	carte A/N	1
ds2101	carte N/A	2
ds3001	carte pour encodeur	2
ds4001	carte i/o	1

tableau 5.3 - carte dSPACE

L'ensemble du Logiciel dSPACE a pour but le développement rapide de programme d'implantation, l'exécution de ces programmes, la préparation du matériel dSPACE et l'acquisition en temps réel de données expérimentales. Chaque composante de ce logiciel s'exécute

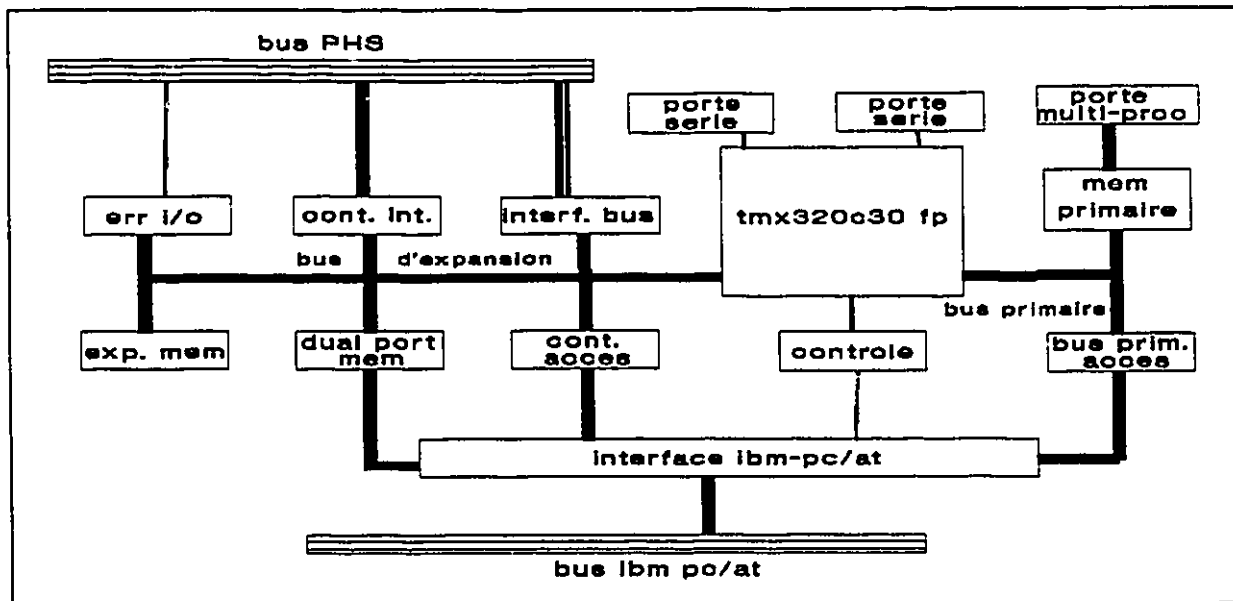


schéma 5.3 - architecture ds1002

sur l'ordinateur hôte 386. Dans un premier temps, il existe deux filières d'initialisation; initialisation du processeur et initialisation d'une application.

La filière d'initialisation du processeur contient l'information nécessaire pour l'interaction entre le logiciel de développement et le matériel dSPACE. Le programme SED30 permet la création et la modification de ces filières. La filière d'initialisation d'une application contient elle l'information nécessaire à l'interaction entre le programme d'application et le matériel dSPACE disponible. Pour développer un programme d'application (système d'asservissement numérique), il est possible de faire la synthèse en utilisant des logiciels spécialisés comme MATRIXx et Matlab et de faire la conversion sous la représentation

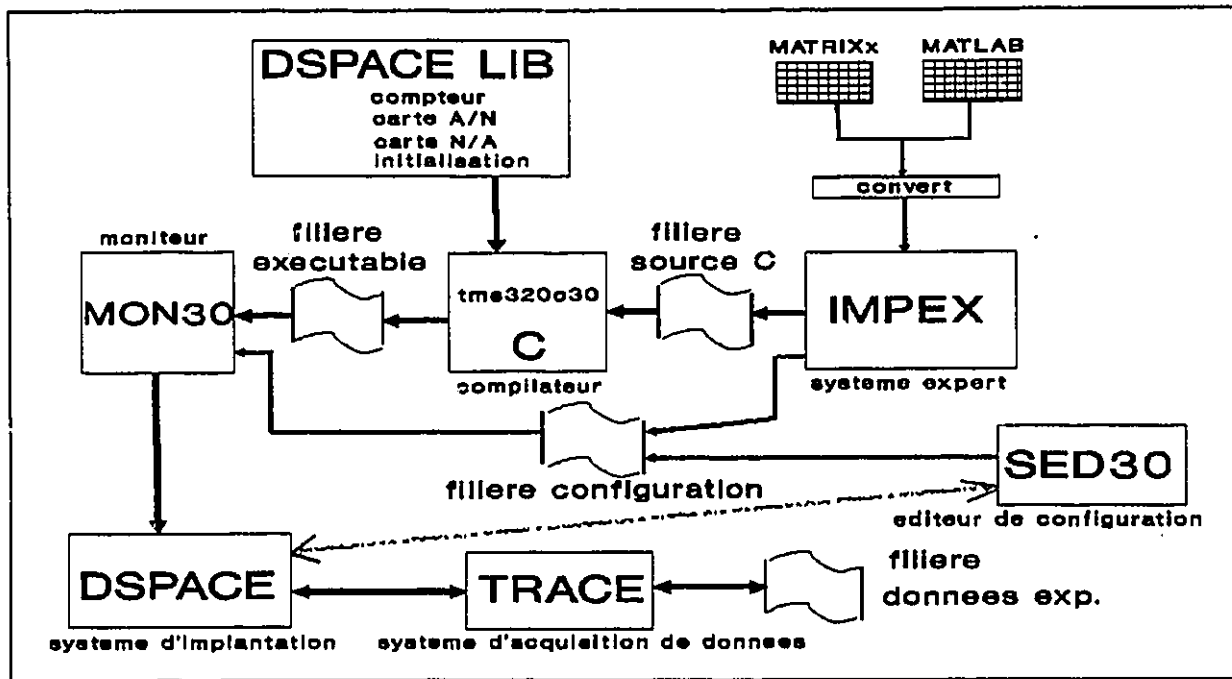


schéma 5.4 - Logiciel dSPACE

Impex (système expert d'implantation). Ce système expert permet l'analyse complète du système d'asservissement obtenu à la vue des composantes matérielles sur lesquelles il sera implanté. Il permet aussi de générer un programme C du système d'asservissement et la filière d'initialisation d'une application correspondante. Une bibliothèque de procédure dSPACE (contrôle des cartes, lectures des cartes, horloge, initialisation, etc.) est disponible pour compiler, assembler et joindre au programme d'application C. Puis le logiciel MON30 est utilisé pour initialiser le processeur, les différentes cartes, pour mettre en place le programme, pour mettre en marche et/ou éteindre le processeur. Finalement, le logiciel TRACE permet l'acquisition en temps réel de données expérimentales.

Bien sur, cette description est superficielle. Mais elle met en valeur l'avantage du système dSPACE; la simplicité. Un processus habituellement lent devient beaucoup plus simple et rapide. Pour plus de détails sur le logiciel dSPACE, il est possible de consulter la documentation dSPACE.

## VI - METHODES DE COMMANDE

Le but de ce travail de recherche est l'élaboration de systèmes d'asservissement capables de positionner une structure flexible (voir section 5.1) en atténuant rapidement les vibrations induites lors du positionnement. Dans ce chapitre, les deux méthodes proposées sont présentées et analysées. Il s'agit des approches par impédance active et par retour d'états filtrés.

### 6.1 - Impédance active

Les méthodes par impédance active sont ceux les plus souvent utilisées autant pour les manipulateurs flexibles (voir Wang, Lu et Hsu [31], et Wells et Schueller [34]) que pour les grandes structures flexibles de l'espace (Ham, greely et Henniges [11,12]). Il s'agit alors de remplacer les impédances passives par des systèmes d'asservissement les imitant. Dans le cas du montage qui nous intéresse, c'est équivalent à ajouter une impédance formée d'un ressort de constante  $K_r$  et d'un amortisseur de constante  $K_v$ , tous deux angulaires, à la base de la poutre (schéma 6.1a). Le système d'asservissement requis pour imiter cette impédance est présenté simplement au schéma 6.1b.

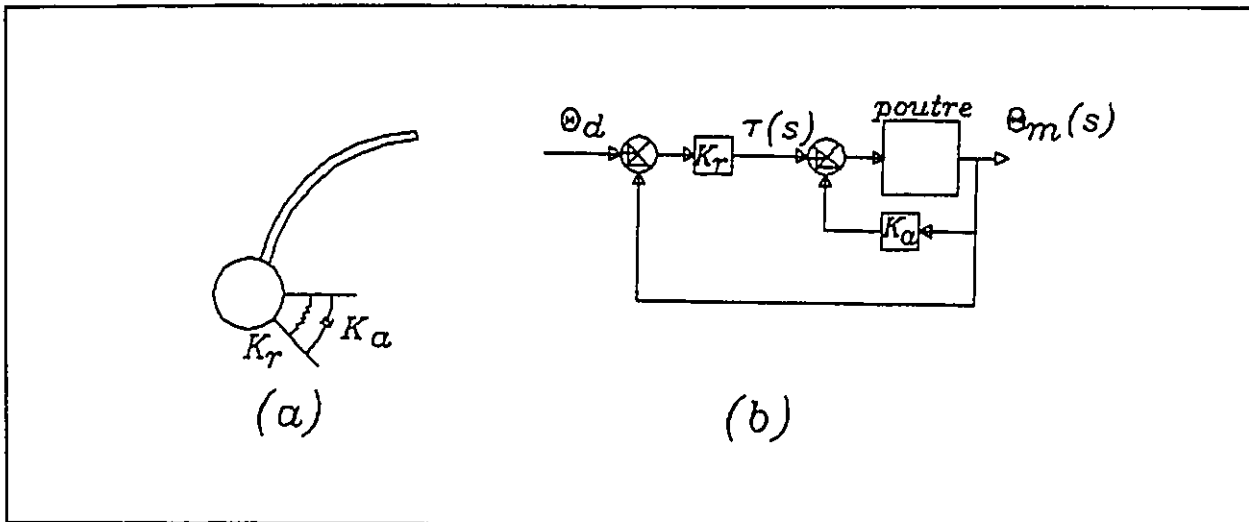


schéma 6.1 - Impédance active

### 6.1.1 - Gains constants

Une approche consiste à déterminer une paire de gains  $\{K_r, K_a\}$  constants rencontrant des objectifs de synthèse quelconques. Dans ce cas, l'avantage de l'impédance active sur l'impédance passive n'est pas valorisé. En utilisant la modélisation par fonction de transfert (équation 4-40), l'approche classique permet l'évaluation des gains.

Par exemple, pour une fonction de transfert en boucle ouverte de la forme de 6-1, l'étude des pôles/zéros permettent le calcul de  $\{K_r, K_a\}$  pour obtenir des pôles "désirés" (Maret [18]).

$$G(s) = \frac{K(K_r + K_a s) \prod_{j=1}^n (s^2 + 2\zeta_{z_j} \omega_{z_j} s + \omega_{z_j}^2)}{s(\tau s + 1) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\zeta_{p_i} \omega_{p_i} s + \omega_{p_i}^2)} \quad (6-1)$$

Si, par exemple, des pôles à  $p_d = \alpha_d \pm \omega_d j$  sont voulus, alors les conditions des angles et des grandeurs donnent les équations nécessaires pour la synthèse (voir schéma 6.2) de  $K_a$  et  $K_r$ .

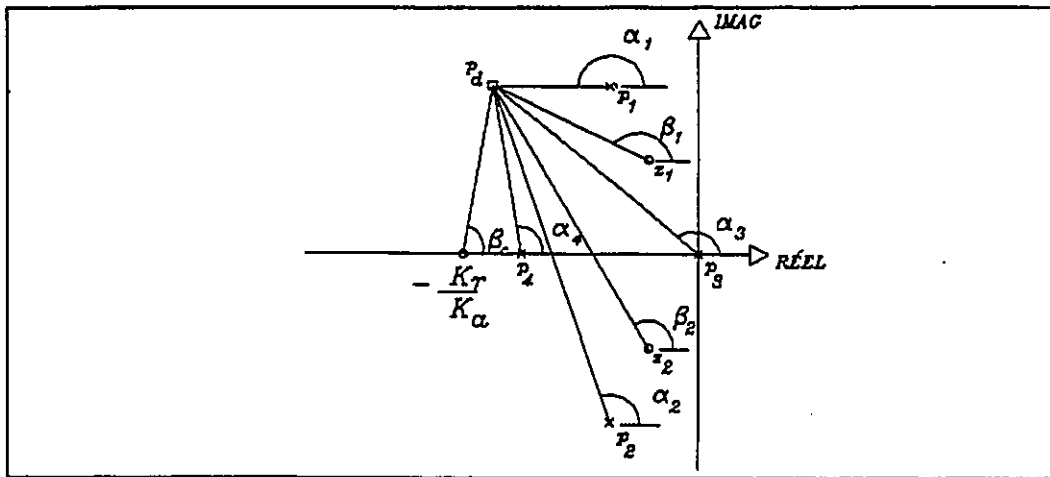


schéma 6.2 - Synthèse dans le plan s

Noter que

$$p_i - p_d = \overline{p_i p_d} \angle p_i p_d$$

Alors, de la condition des angles

$$\begin{aligned} \beta_c &= 180^\circ + \sum \alpha_i - \sum \beta_j \\ \alpha_i &= \angle p_i p_d, \quad \beta_j = \angle z_j p_d \end{aligned} \quad (6-2)$$

$$\frac{K_r}{K_a} = -\text{Re}(p_d) - \frac{\text{Im}(p_d)}{\tan \beta_c}$$

condition des grandeurs:

$$K_a = \frac{\prod_i (p_i p_d)}{K \prod_j (z_j p_d) z_c p_d}$$

Donc, pour concevoir une impédance active amortissant un mode de vibration, il s'agit de choisir la partie imaginaire de  $P_d$  et d'essayer de "tirer" les pôles de ce mode vers la gauche du plan complexe  $S$ . Mais deux paramètres ne sont pas suffisants pour affecter tous les modes de vibrations. Comme le démontre le schéma 6.3 représentant un système flexible quelconque possédant un seul mode de vibration, soumis à des impédances de ratio  $K_r/K_s$  différents (pour différents  $p_d$ ), il est impossible d'atténuer tous les modes en une seule impédance. Comme il est possible de constater, lorsque  $K_r/K_s$  est petit (premier lieu), le mode rigide est très affecté. Puis, lorsque  $K_r/K_s$  augmente, le régulateur se met à amortir de façon efficace le mode flexible (deuxième lieu).

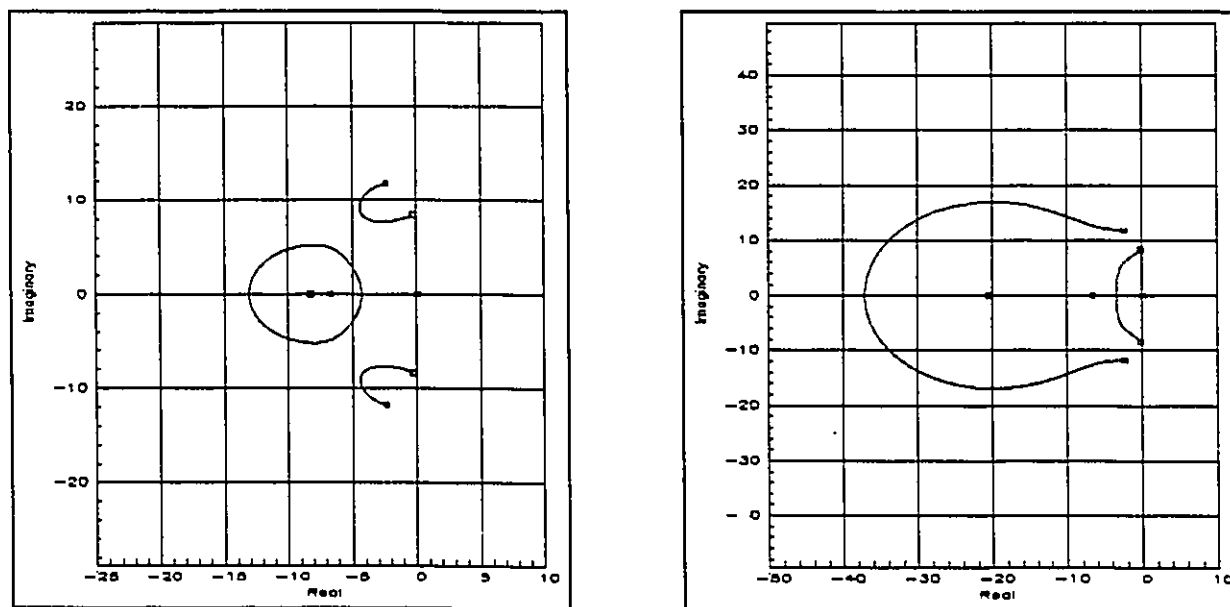


schéma 6.3 - Lieu d'Evans - un mode flexible

### 6.1.2 - Gains dynamiques

Dans le cas de la structure du schéma 6.1, l'amortissement des modes en plus hautes Fréquences est déjà grande. Donc, peu de problème lorsque des gains constants sont utilisés. Pour les structures à plus haute complexité modale, telles les grandes structures flexibles de l'espace, des gains constants ne sont pas efficaces.

La solution suggérée dans cette section vise à faire varier les gains  $K_s$  et  $K_r$ . La variation de ces gains peut se faire sous deux formes: l'approche mode par mode et la méthode directe. Pour la méthode mode par mode, il s'agit d'utiliser la méthode de synthèse présentée en 6.1.1 et de concevoir de bons amortisseurs pour chaque mode, pour enfin faire varier  $K_s$  et  $K_r$  en temps sous forme d'échelle pour amortir les modes du plus importants au moins importants. En ce qui concerne l'approche directe, elle sera mis à l'étude plus tard. Pour le moment, il est possible de la décrire comme une méthode plus analytique pour laquelle les gains  $\{K_r, K_s\}$  varient en fonction de l'état du système et non de façon déterministique en fonction du temps. Pour ce, la commande optimale, la méthode de Lyapanov ou la commande Hamiltonienne peuvent être utilisées.

En automatique, il est connu que 98% de l'atténuation d'un mode de pôles  $p_d$  se fait en,

$$T_r = \frac{4}{|\operatorname{Re}(p_d)|} \quad T_r : \text{temps de réglage (2\%)} \quad (6-3)$$

Donc, si chaque paire de gains  $\{K_r, K_i\}$  trouvés à l'aide des équations 6-2 est maintenue pour leur temps de réglage respectif, la structure devrait s'atténuer en un temps aux alentours de

$$T_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n (T_{ri}) \quad (6-4)$$

En utilisant un régulateur à grande bande passante pour un déplacement rapide du mode rigide d'abord, et commençant l'amortissement lorsque l'erreur devient petite en passant de la plus basse à la plus haute fréquence, alors il est possible d'intégrer le contrôle de position et de forme. Dans ce cas, les gains sont des fonction de temps comme représentés au schéma 6.4. En allouant une période de transition  $\Delta T_i$  entre chaque changement de gain, le gain varie de  $K_i$  à  $K_{i+1}$  en suivant une fonction cubique (équation 6-5) prévenant ainsi les discontinuités.

$$K_{i-i+1} = \frac{-2[K_{i+1} - K_i]}{\Delta T^3} + \frac{3[K_{i+1} - K_i]}{\Delta T^2} + K_i \quad (6-5)$$

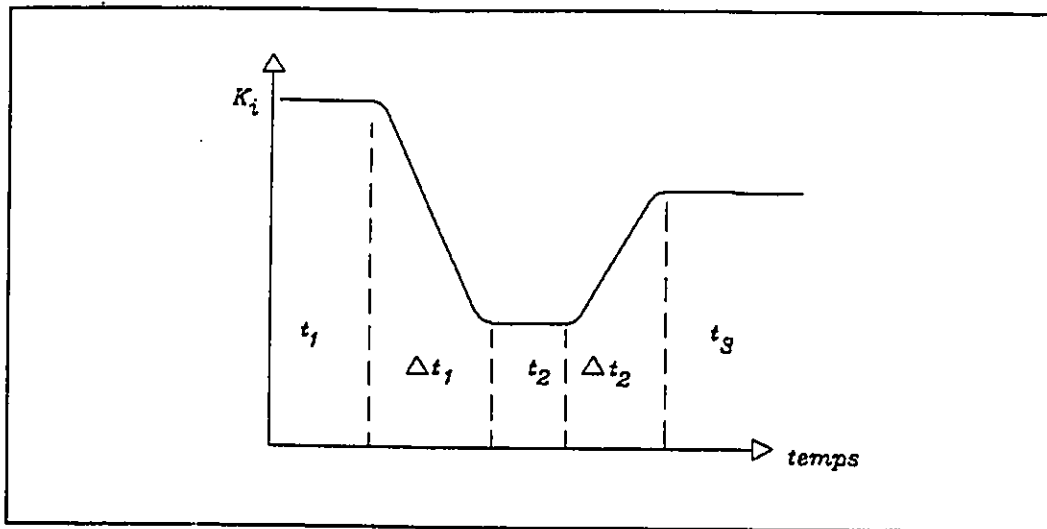


schéma 6.4 - Variation des gains

Ceci résulte en une méthode brutale mais pratique.

## 6.2 - Placement de pôles

Une deuxième approche étudiée en est une par modèle d'état. Il s'agit de déterminer un régulateur qui place les pôles du système en boucle fermée à des endroits prédéterminés. Cette méthode bien connue (Friedland) ne fut pas appliquée de façon concrète pour les structures flexibles.

### 6.2.1 - Retour d'état complet

Afin de placer les  $n$  pôles d'un système d'ordre  $n$ , il faut déterminer  $n$  gains. Pour un système de la forme (entré simple/sortie simple)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{6-6}$$

Il s'agit de déterminer un vecteur gain  $K_c = \{K_1, K_2, \dots\}$  tel que

$$u = -K_c x\tag{6-7}$$

donne les pôles en boucle fermée voulus. Alors, dans ce cas, l'équation 6-6 s'écrit

$$\dot{x} = (A - BK_c)x\tag{6-8}$$

et les pôles sont les valeurs propres de  $(A - BK_c)$ .

(Théorème)

Si, et seulement si, un système linéaire invariant de la forme (6-6) est contrôlable, il existe un vecteur gain  $K_c$  tel que (6-7) permette de placer les pôles de façon arbitraire dans le plan complexe. (Preuve dans Friedland [7])

(Théorème)

Soit  $P$  défini par (6-9); si  $\dim(P) = n$  (espace vectoriel de  $P$  est  $n$ -dimensionnel) alors le système (6-6) est contrôlable. (Preuve dans Friedland [7])

$$P = [B \ AB \ AAB \ \dots \ A^{n-1}B]\tag{6-9}$$

*matrice de contrôlabilité*

Soit l'équation caractéristique de (6-6)

$$\begin{aligned} \det[\lambda I - A] &= 0 \\ s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n &= 0 \end{aligned} \quad (6-10)$$

et l'équation caractéristique voulue

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \quad (6-11)$$

Le vecteur gain  $K_c$  telque  $\det[\lambda I - (A - BK_c)] = 0$  soit égale à (6-11) est donné par l'équation de Bass-Gura

$$K_c' = [(PG)^T]^{-1}(\alpha - a) \quad (6-12)$$

où:

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

$$a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$K_c = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$$

$P$ : matrice de controllabilité

$G$ : matrice triangulaire Toeplitz

$$= \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les preuves des deux théorèmes et de l'équation 6-12 sont présentées dans Friedland [7], et dans Kwakernaak et Sivan [15].

### 6.2.2 - Observateur linéaire

D'autre part, pour effectuer le calcul de la loi de commande (6-7), il faut avoir directement accès aux états du système (x). Lorsque les états sont mesurés directement ou quand la matrice C de 6-6 est inversible, x est obtenu facilement. Mais dans le cas faisant l'objet de ce rapport, seulement la position angulaire de l'arbre-moteur est disponible. Il faut alors trouver un moyen de déterminer les états. Un des moyens est l'observateur linéaire ou de Luenberger.

(Théorème)

Si le système (6-6) est observable, alors

$$\dot{x}_e = Fx_e + Gy + HU \quad (6-13)$$

est un observateur de (6-6) si  $F = A - K_o C$ ,  $G = K_o$  (gain de l'observateur) et  $H = B$ . (Friedland [7] pour la preuve)

En définissant l'erreur d'estimation

$$e = x - x_e \quad (6-14)$$

alors la dynamique de l'erreur est donnée par

$$\dot{e} = [A - K_o C]e \quad (6-15)$$

(Théorème)

Soit  $Q$ , une matrice défini par (6-16); si  $\dim(Q)=n$  (espace vectoriel de  $Q$  est  $n$ -dimensionnel), alors le système (6-6) est observable. (Preuve dans Friedland [7])

$$Q = [C' \ A' C' \ A' A' C' \ \dots \ (A')^{n-1} C'] \quad (6-16)$$

*matrice de observabilité*

Dans ce cas, l'équation de Bass-Gura (6-12) devient

$$K_o = [(QG)^T]^{-1}(\alpha - a) \quad (6-17)$$

où:

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

*: coefficient de l'éq. car. de l'observateur*

$$a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$K_o = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$$

$Q$ : *matrice d'observabilité*

$G$ : *matrice triangulaire Toeplitz*

$$= \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Enfin, par le principe de séparation (Friedland [7]), un régulateur par retour d'état complet et un observateur linéaire complet peuvent être conçus séparément. Les valeurs propres du système résultant sont celles obtenues de la synthèse du

régulateur plus celles obtenues de la synthèse de l'observateur. A noter que le principe a pour hypothèse une modélisation parfaite. Les équations (6-12) et (6-17) sont les équations de synthèse utilisées pour le système d'asservissement proposé dans ce travail.

### 6.2.3 - Effet des modes négligés

Etant donné l'hypothèse du principe de séparation portant sur la modélisation parfaite, il est important de comprendre l'effet de la mauvaise modélisation, en particulier celui des modes négligés. En rappelant les équations (4-63).

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c X_c + B_c \tau + h_c(x_c, \dot{x}_c) + \epsilon_c(x_c, \dot{x}_c, x_n, \dot{x}_n) \\ \dot{x}_n &= A_n x_n + B_n \tau + h_n(x_n, \dot{x}_n) + \epsilon_n(x_c, \dot{x}_c, x_n, \dot{x}_n) \\ y &= C_c x_c + C_n x_n\end{aligned}\quad (6-17)$$

En incluant le terme de frottement sec, et les erreurs de modélisation, l'équation (6-17) donnent;

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c \tau + h_c(x_c, \dot{x}_c) + \epsilon_c(x_c, \dot{x}_c, x_n, \dot{x}_n) + \\ &\quad \Delta A_c x_c + \Delta B_c \tau + B_c T_{\text{sec}} \text{sgn}(\dot{\theta}_m)\end{aligned}\quad (6-18)$$

Alors, pour un observateur de la forme

$$\dot{x}_o = (A_c - K_o C_c) x_o + B_c \tau + K_o \dot{\theta}_m \quad (6-19)$$

la dynamique de l'erreur est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{e} = & (A_c - K_o C)e + h_c(x_c, \dot{x}_c) + \epsilon_c(x_c, \dot{x}_c, x_n, \dot{x}_n) + \Delta A_c x_c \\ & + \Delta B_c \tau + B_c T_{\text{sec}} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_m) - K_o C_n x_n \end{aligned} \quad (6-20)$$

Comme déjà présenté au chapitre quatre, le débordement de mesure provient de termes  $C_n x_n$  de l'équation de l'erreur (6-20). Sans procéder à une analyse de Fourier complète, il est connu que ce terme est composé de signaux à plus haute fréquence que ceux considérés. Par conséquent, il est important de filtrer le signal de rétroaction avec un filtre de fréquence de coupure entre la fréquence naturelle la plus élevée des modes considérés et la prochaine non-consideré. Ce filtrage permet de stabiliser le système. L'observateur est aussi déstabilisé indirectement par les modes négligés par le terme  $\epsilon_c$ . Le seule moyen de le contrer est de réduire l'excitation des modes négligés par la commande (débordement de commande).

L'estimation est aussi biaisée par une mauvaise modélisation par les termes  $\Delta A_c x_c$  et  $\Delta B_c \tau$ . Négliger le couplage non-linéaire altère aussi l'estimé des états. Un bon modèle et un observateur robuste sont les seules solutions à ce problème. Finalement, le frottement sec excite aussi l'erreur d'estimation.

Encore une fois, sans procéder à une analyse de Fourier complète, il est possible de prédire que les termes  $\epsilon_c$  et  $B_c T_{\text{sec}}$

$\text{sgn}(\theta)$  vont déstabiliser le mode observé à plus haute fréquence que les autres, dû au fait qu'ils ont eux-aussi des composantes à haute fréquence. Dans ce cas, il s'agit de garder ce mode déstabilisé dans l'observateur comme un "absorbeur" et de filtrer cette composante de la commande afin d'éviter de "débordement de commande".

#### 6.2.4 - Retour d'état filtré

La méthode recommandée est donc une version filtrée d'un régulateur par retour d'état basé sur un observateur linéaire. Il faut noter dans ce cas que la commande exacte doit être disponible. Afin de ne pas avoir de problème, la commande est saturée à une valeur connue avant d'atteindre la saturation de l'actionneur. Des filtres passe-bas de Butterworth de second ordre peuvent être utilisés pour les filtre 1 et 2 (Voire schéma 6.5).

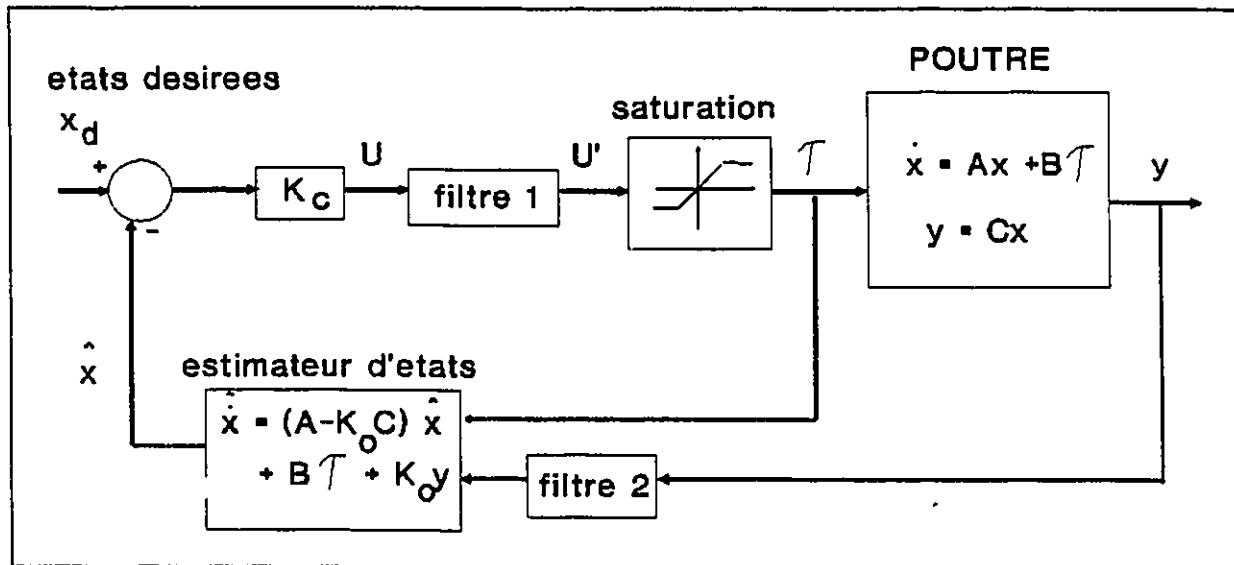


schéma 6.5 - Retour d'état filtré

## VII - RÉSULTATS

Dans le but d'appuyer les arguments développés au chapitre précédent sur les deux méthodes d'asservissement proposées, des simulations et des applications expérimentales furent effectuées et les résultats sont présentés ici. Afin d'obtenir des simulations représentatives, la poutre du montage expérimentale du chapitre cinq est d'abord identifiée expérimentalement par le tracé du lieu de Bode (réponse fréquentielle). Le modèle numérique ainsi obtenu est par la suite utilisé à des fins de simulation et de synthèse.

Le processus d'analyse des méthodes consiste donc en quatre étapes, soit

- synthèse des régulateurs selon les méthodes recommandées ,
- simulation de la réponse temporelle pour une manoeuvre d'orientation de saut de  $90^\circ$ ,
- si les simulations sont concluantes, l'implantation expérimentale,
- l'analyse comparative des résultats.

### 7.1 - Identification expérimentale

L'analyse fréquentielle des systèmes linéaires est bien connue. Tout système linéaire forcé sinusoidalement à une

fréquence  $\omega$  et une amplitude  $A$  possède une solution particulière sinusoidale de fréquence  $\omega$ , d'amplitude  $A |G(\omega)|$  (où  $|G(\omega)|$  est le gain du système) et de phase  $\varphi(\omega)$ . L'étude de ces fonctions de gain et de phase sur une plage donnée de fréquence détermine les réponses transitoires et particulières du système linéaire. Le diagramme de Bode est une des représentations pratiques de cette réponse fréquentielle. On y représente le gain en dB ( $20 \cdot \log(\text{gain})$ ) et la phase en degré en fonction de la fréquence représentée sur une échelle logarithmique.

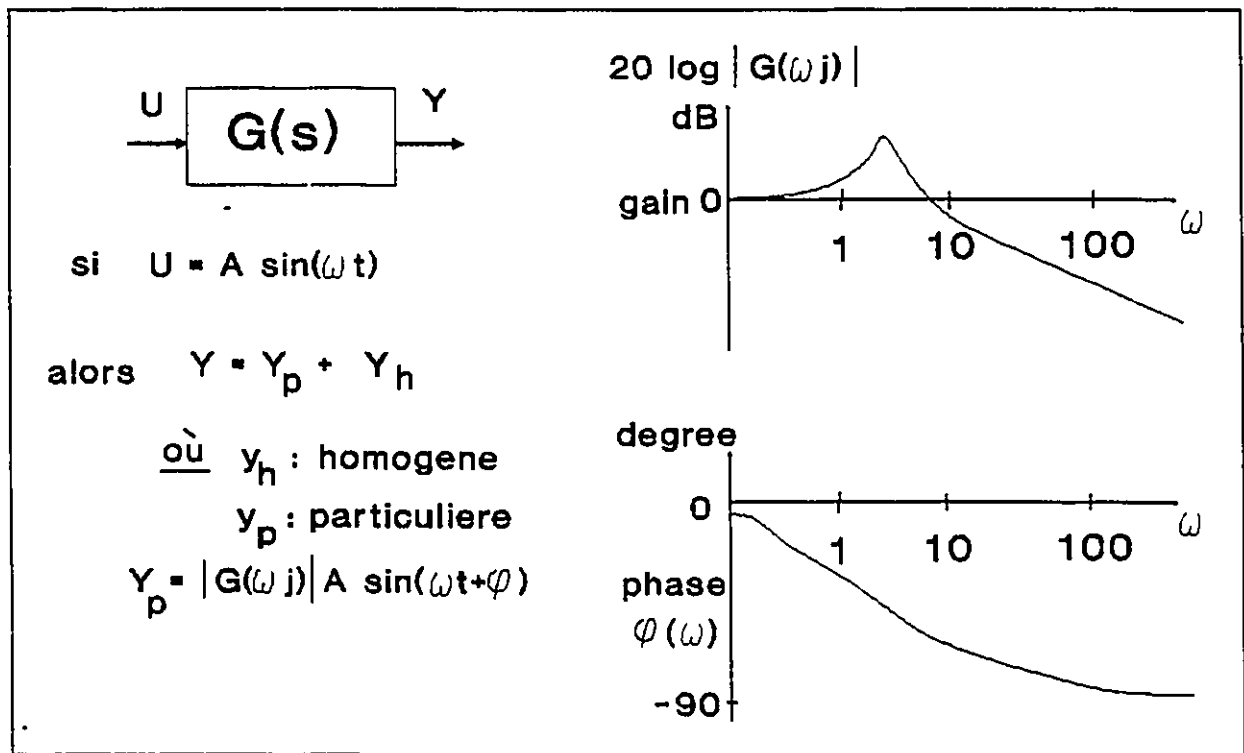


schéma 7.1 - Exemple de réponse fréquentielle

En utilisant le programme d'indentification de l'annexe D (en langage C) implanté sur le système dSPACE du chapitre cinq, la réponse fréquentielle du système est obtenue. Les lieux de Bode en pointillé des schéma 7.2 et 7.3 représentent ce résultat expérimentale. Le gain définit en dB le rapport entre l'amplitude du mouvement angulaire du moteur en radian et celle du signal sinusoïdale de commande de couple en Newton-mètre. L'identification est suffisante pour détecter les trois premiers modes de vibration.

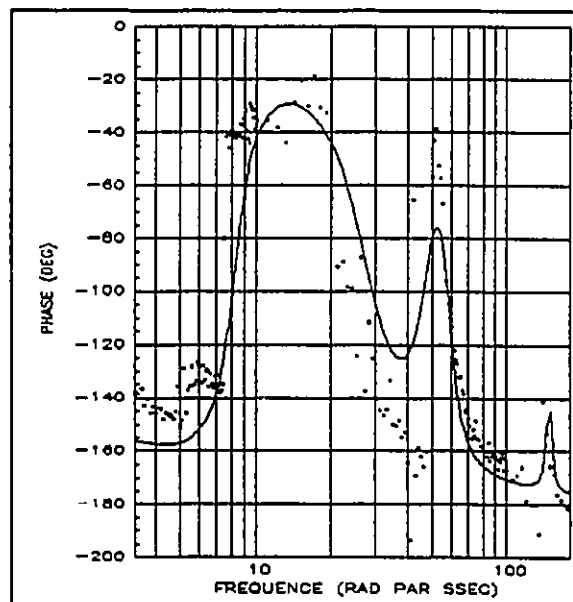
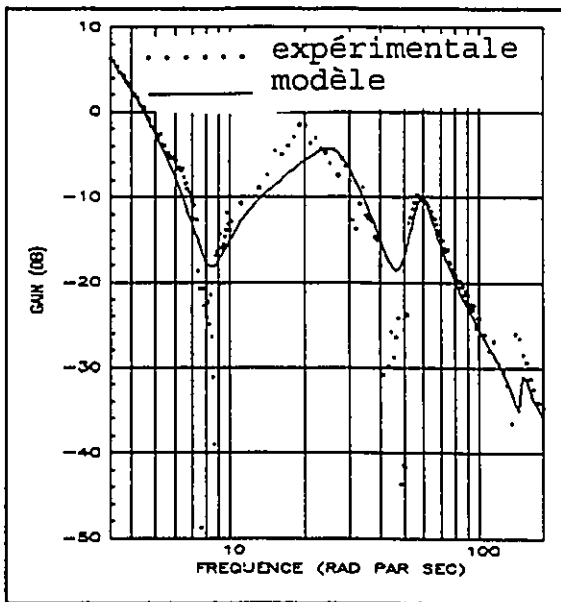


schéma 7.2 - Réponse fréquentielle - modèle d'états

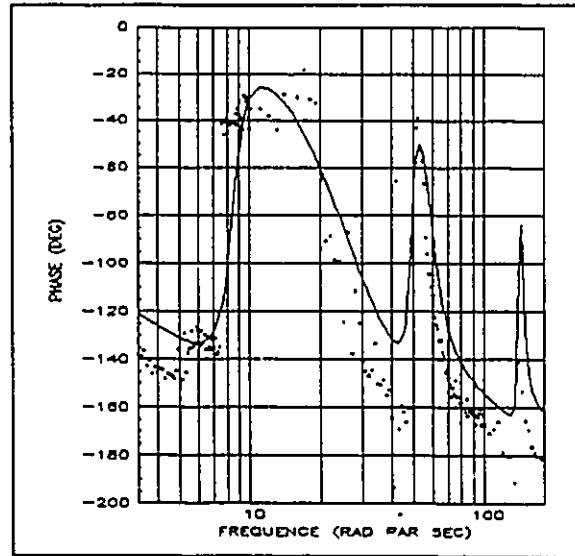
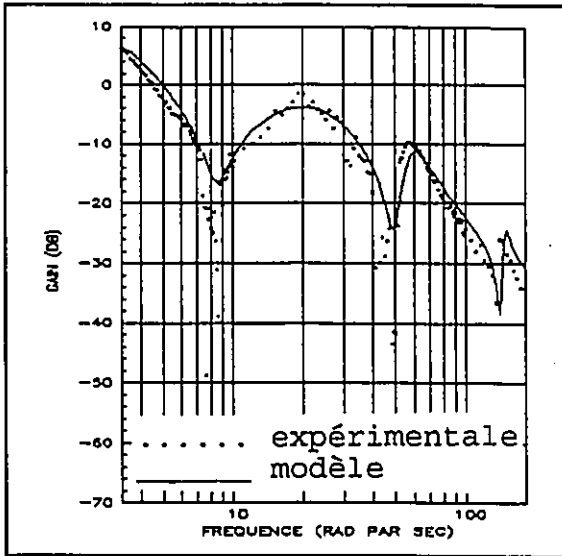


schéma 7.3 - Réponse fréquentielle - fonction de transfert

A l'aide des modèles d'états et par fonction de transfert du chapitre quatre, des modèles numériques sont établis afin de bien représenter les résultats expérimentaux. Les réponses fréquentielles de ces modèles sont comparées à celle obtenue expérimentalement dans les schéma 7.2 et 7.3 (ligne pleine). Les différences sont expliquées par la dynamique réelle non-linéaire et surtout le frottement sec qui augmente l'amortissement des modes libres. La fonction de transfert est donc,

$$\frac{\Theta_m(s)}{T(s)} = \frac{301.85[s^2 + 2(.11)8.5s + 8.5^2]}{s(.16s + 1)[s^2 + 2(.5)25s + 25^2]} \dots \quad (7-1)$$

$$\dots \frac{[s^2 + 2(.05)49s + 49^2][s^2 + 2(.015)140s + 140^2]}{[s^2 + 2(.13)58s + 58^2][s^2 + 2(.03)146s + 146^2]}$$



analytique		expérimentale	
libre	encastrée	libre	encastrée
4.3 Hz	1.3 Hz	4.0 Hz	1.3 Hz
10.0 Hz	8.2 Hz	9.3 Hz	7.9 Hz
23.6 Hz	22.9 Hz	24.0 Hz	23.7 Hz

tableau 7.1 - Comparaison fréquences naturelles

### 7.2 - Impédance active

L'application des méthodes par impédance active sur le montage expérimental se résume par le schéma fonctionnel du schéma 7.4. Les composantes à l'intérieur du pointillé sont exécutées par dSPACE.

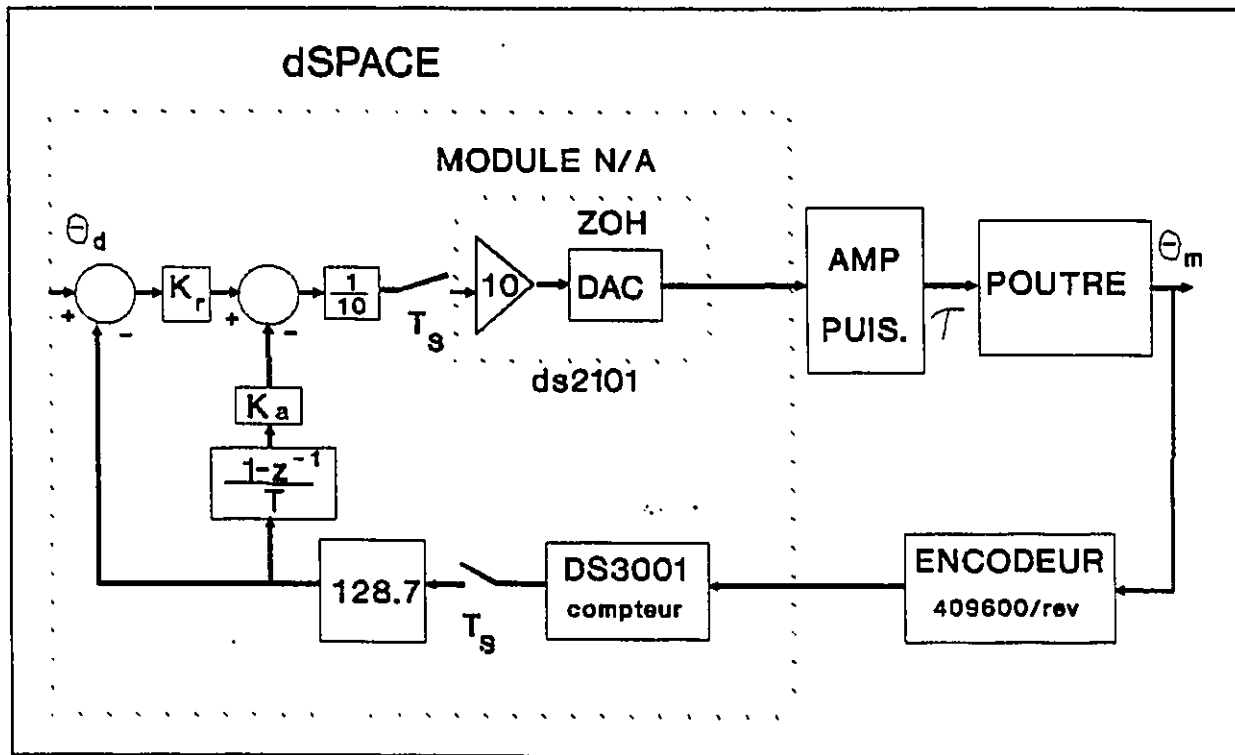


schéma 7.4 - Impédance active

Les simulations sont effectuées à l'aide du système BUILD du logiciel MATRIXx. Pour cette méthode particulière, les programmes sous forme de schéma fonctionnel sont présentés en annexe C. Cette méthode de programmation système BUILD facilite grandement les simulations. Dans tous les cas, les simulations sont effectuées par intégration Runge-Kutta de quatrième ordre.

Pour sa part, l'application expérimentale se fait à l'aide du programme C de l'annexe C. La loi de commande continue de la forme suivante,

$$\tau = K_r e - K_a \dot{\theta}_m \quad (7-3)$$

où:  $e = \theta_d - \theta_m$

est approximé par différences arrières donnant,

$$\tau_k = K_r e_k - \frac{K_a}{T_e} \theta_k + \frac{K_a}{T_e} \theta_{k-1} \quad (7-4)$$

où:  $T_e$ : période d'échantillonnage

### 7.2.1 - Gains constants

Dans le but de concevoir de bon amortisseur pour chaque modes considérés, le processus de synthèse présenté au chapitre six est utilisé. Dans un premier temps, un régulateur est conçu avec l'hypothèse que le corps est rigide. En négligeant la flexibilité, la fonction de transfert 7-2 se réduit à,

$$\frac{\Theta_m(s)}{T(s)} = \frac{22.9}{s(.16s+1)} \quad (7-5)$$

et l'application de la méthode de synthèse (équations 6-2) pour un cahier de charge de  $M_p = 5\%$  et  $T_r = .2$  sec ( c-à-d  $\zeta = .7$  et  $\zeta\omega_n = 20$  ) donne les gains  $K_r=.236$  et  $K_f=5.6$ . Le lieu des pôles gardant le ratio  $K_r/K_f$  constant démontrant le

déplacement des pôles lorsque les gains augmentent est présenté dans le schéma 7.5. Il est possible de constater que les pôles sont bien déplacés vers les pôles en boucle fermée voulus. Les résultats de simulation et expérimentaux de cette loi de commande sont présentés au schéma 7.6. La ligne pleine représente les résultats d'expérience tandis que celle

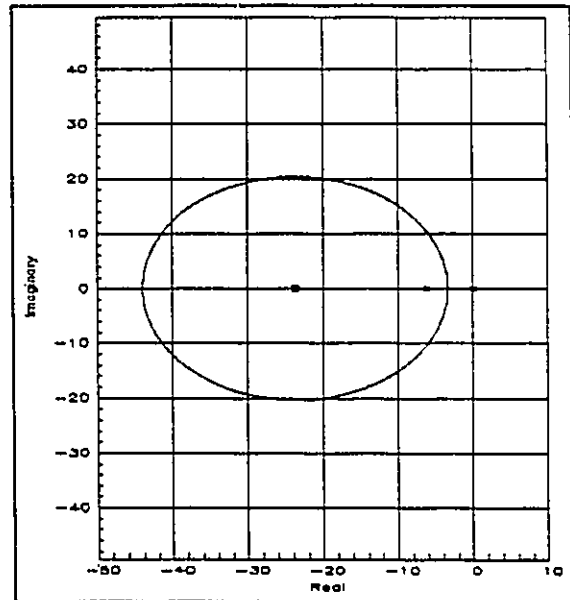


schéma 7.5 - Lieu des pôles mode rigide

pointillée s'associe aux résultats de simulation. Afin de ne pas endommager le montage, la commande de couple fut limitée à 1.5 Nm. C'est la raison pour laquelle le saut est effectué en un temps supérieur au temps de réglage voulu. Comme il est clairement observé, le comportement obtenu n'est pas celui pressenti puisque la flexibilité n'est pas négligeable. Le statisme final obtenu provient de la friction de Coulomb.

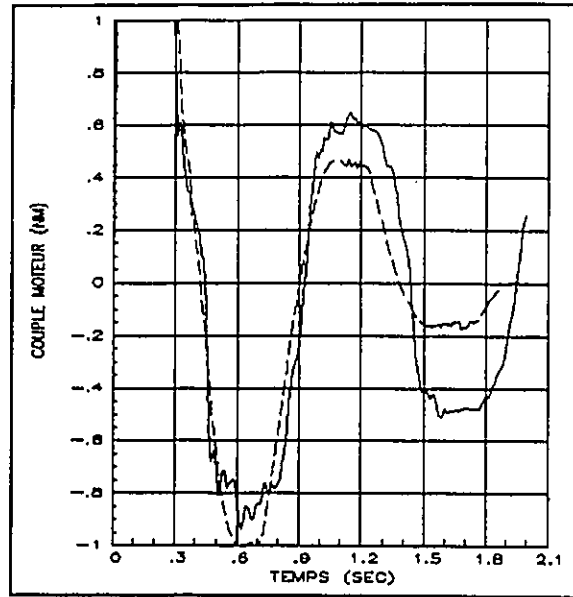
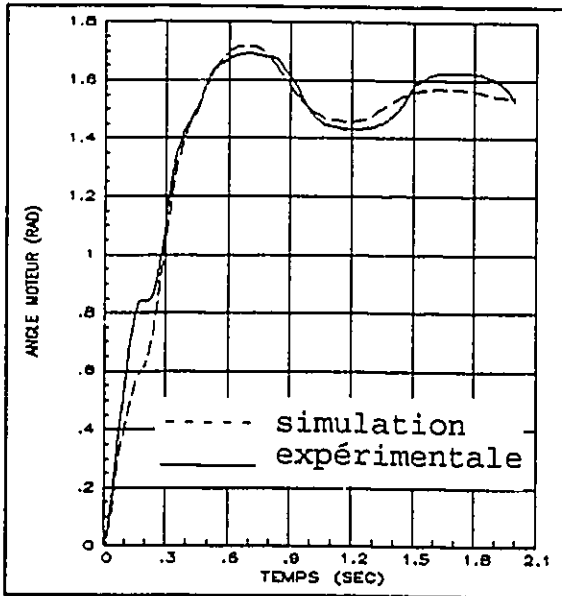


schéma 7.6 -  $K_r=5.6$ ,  $K_a=.236$

Donc, dans le but d'obtenir l'amortissement des trois modes, il faut inclure les modes flexibles dans le calcul. En utilisant la fonction de transfert 7-2, trois différents régulateurs atténuant de façon adéquate les trois modes de vibration respectivement sont conçus. En effectuant la synthèse pour obtenir un amortissement de chacun des modes en .2 sec (contrainte d'amortissement absolue), c'est-à-dire pour un pôle désiré avec une partie réelle à -20 et partie imaginaire autour de la fréquence naturelle à atténuer, les trois impédances du tableau 7.1 sont obtenues.

mode atténué	pôle désiré $p_d$	$K_r$	$K_a$
1	- 20 + 20 i	.5251	.059
2	- 20 + 60 i	7.82	.0652
3	- 20 + 145 i	54.676	.1229

tableau 7.2 - impédances actives

Les lieux des pôles pour ces différents ratio  $K_1/K_2$ , lorsque  $K_1$  varie de 0 à l'infini sont présentés dans les schéma 7.7, 7.8 et 7.9 respectivement.

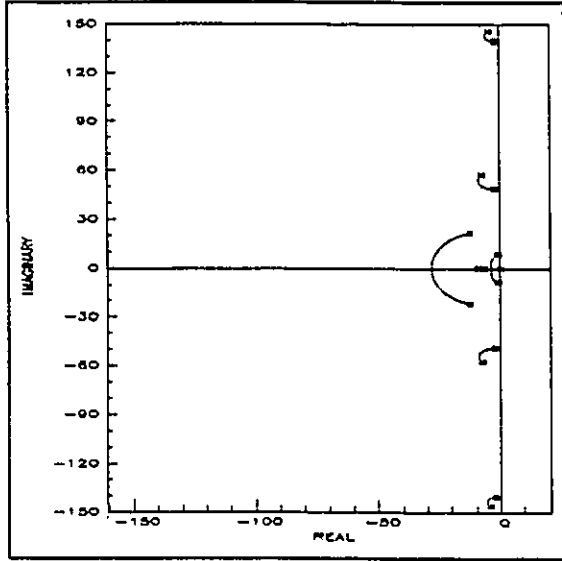


schéma 7.7 - Lieu des pôles premier mode

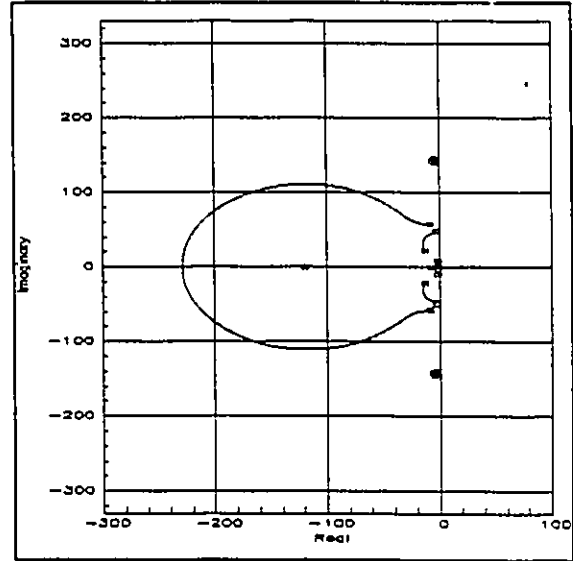


schéma 7.8 - lieu des pôles second mode

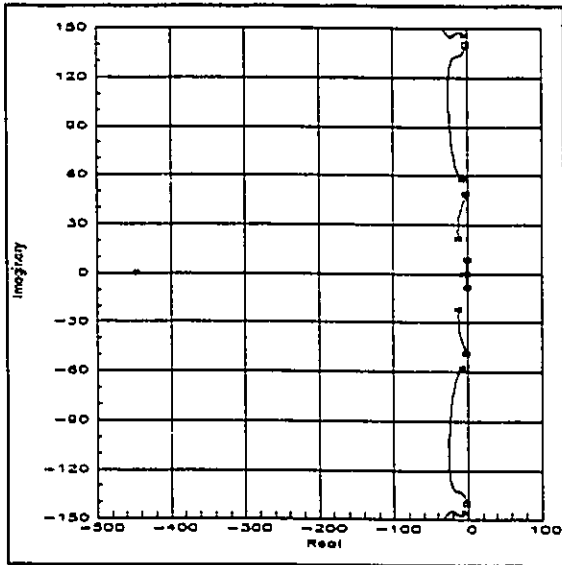


schéma 7.9 - lieu des pôles troisième mode

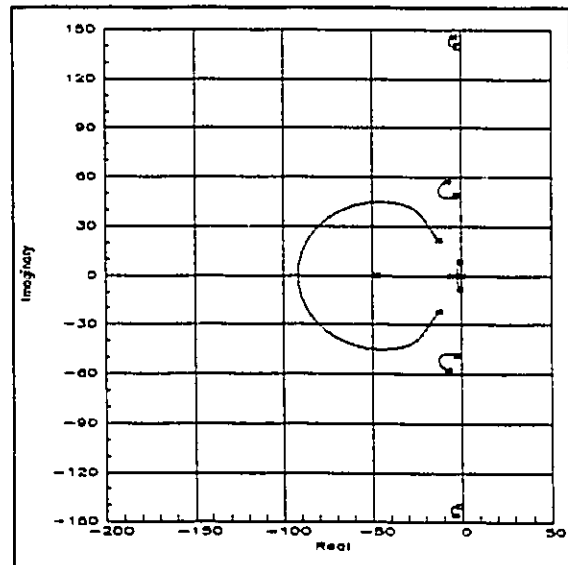


schéma 7.10 - amollissement fictif

Comme voulu, chacune des impédances attire vers la gauche un pôle en boucle ouverte différent. Toutefois, il faut être très prudent pour éviter ce qui sera appelé ici "l'amortissement fictif". Dans certains cas, comme celui présenté dans le schéma 7.10 où un pôle désiré à  $-45+45i$  est utilisé pour atténuer le deuxième mode de vibration, il est possible d'obtenir un résultat où effectivement il existe un pôle à l'endroit désiré mais aussi un autre de partie imaginaire de grandeur similaire (donc de même fréquence) avec beaucoup moins d'amortissement. Cette observation suggère des limites à la rapidité d'atténuation. Il faut éviter cette situation.

Les résultats expérimentaux et simulés pour une consigne de saut de  $90^\circ$  sont présentés au schéma 7.11, 7.12 et 7.13 pour chacune des impédances ainsi obtenues. Étant donné l'importance du premier mode de vibration, l'impédance amortissant le premier mode présente une bonne amortissement. Mais le temps de réponse est relativement lent et l'erreur statique dû au frottement sec reste très important. Dans le cas du deuxième régulateur obtenu, il est possible d'observer que le deuxième mode à plus haute fréquence est bien amorti, mais le premier mode ne l'est pratiquement pas. L'effet du troisième régulateur n'est toutefois pas observable étant donné l'importance négligeable du troisième mode. Mais il est possible de constater que ce régulateur possédant une bande

passante plus large excite le deuxième mode de vibration, mais ne l'atténue que très peu.

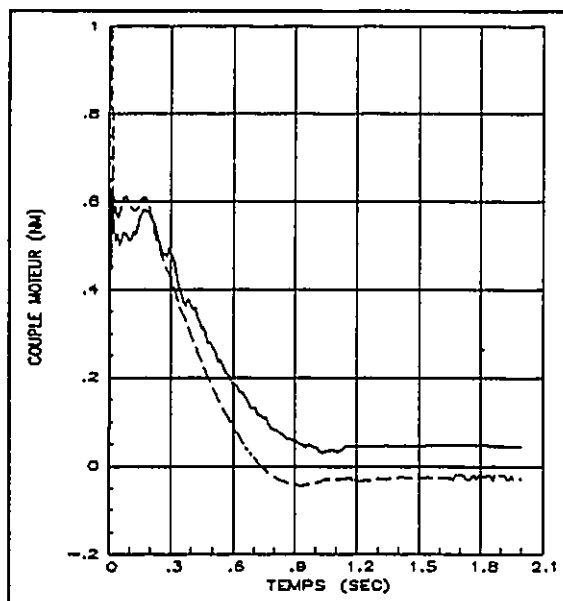
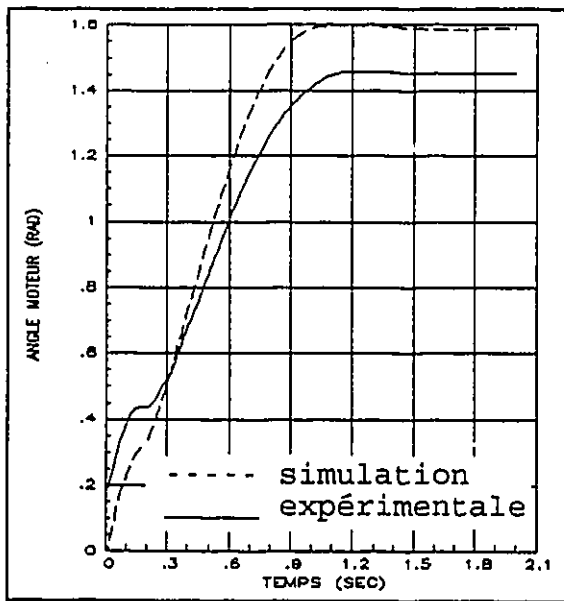


schéma 7.11 -  $K_t = .525$ ,  $K_a = .059$

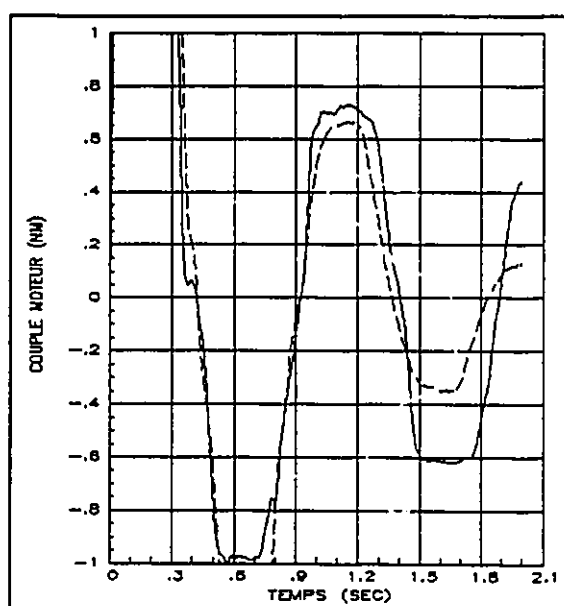
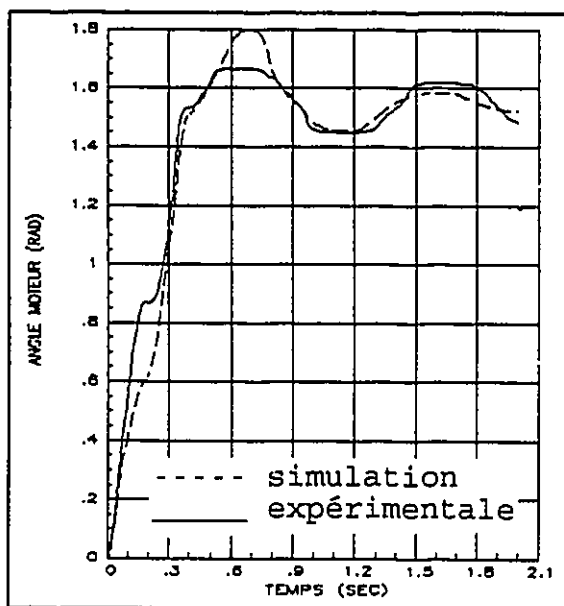


schéma 7.12 -  $K_t = 7.12$ ,  $K_a = .065$

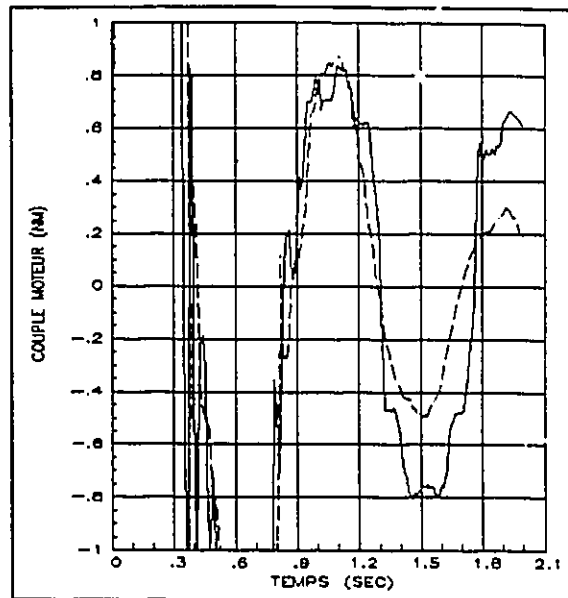
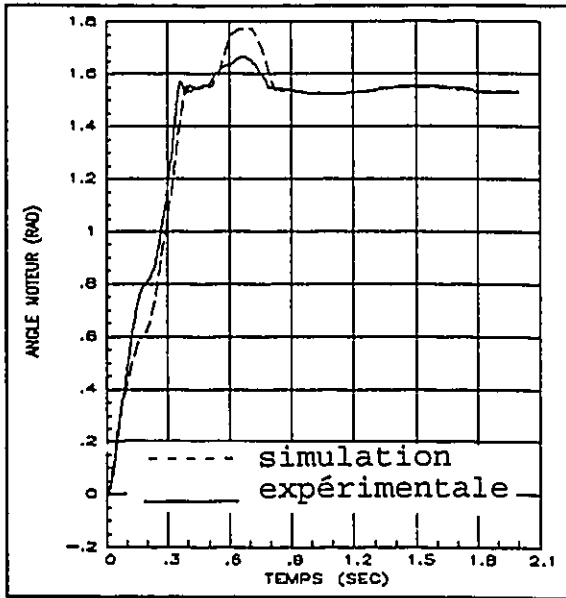


schéma 7.13 -  $K_t=54.7$ ,  $K_r=.123$

### 7.2.2 - Gains dynamiques

Il serait donc préférable d'inclure à même le régulateur les avantages de chacune des impédances développées à la section précédente. La méthode de variation de gain suivant une horaire pré-établie présentée au chapitre six est donc appliquée ici. En utilisant les résultats du tableau 7.1, les équations 6-3 et 6-5, et le régulateur de la poutre rigide de la section précédente, l'impédance dynamique est implanté à l'aide du programme en langage C de l'annexe C.

En se fiant au résultat de la section précédente, les temps de durée pour chaque impédance est établie à 1.1 seconde pour le régulateur rigide, .1 seconde pour l'impédance du premier mode, .2 seconde pour celle du deuxième mode et jusqu'au prochain changement de consigne pour la troisième impédance. Lorsque la consigne change, la séquence est ré-initialisée. La sélection des temps de transition est faite de façon empirique afin de ne pas exciter les modes déjà amortis. Pour les trois transitions, les temps de transition suivants sont utilisés: .2 seconde, .4 seconde et .8 seconde. Les résultats expérimentaux seulement sont présentés au schéma 7.14. Comme voulu, le positionnement est effectué de façon très efficace en environ deux secondes pour un saut de 90° et ce avec un statisme final très faible étant donné la grandeur de  $K$ ,

pour la dernière impédance. Ces résultats se comparent bien à ceux de Wells, Schueller et Tlusty [34] qui ont obtenu un temps similaire pour une expérience similaire. Les résultats de Wang, Lu et Hsu [31], même avec un signal de rétroaction de plus, ne sont guère mieux.

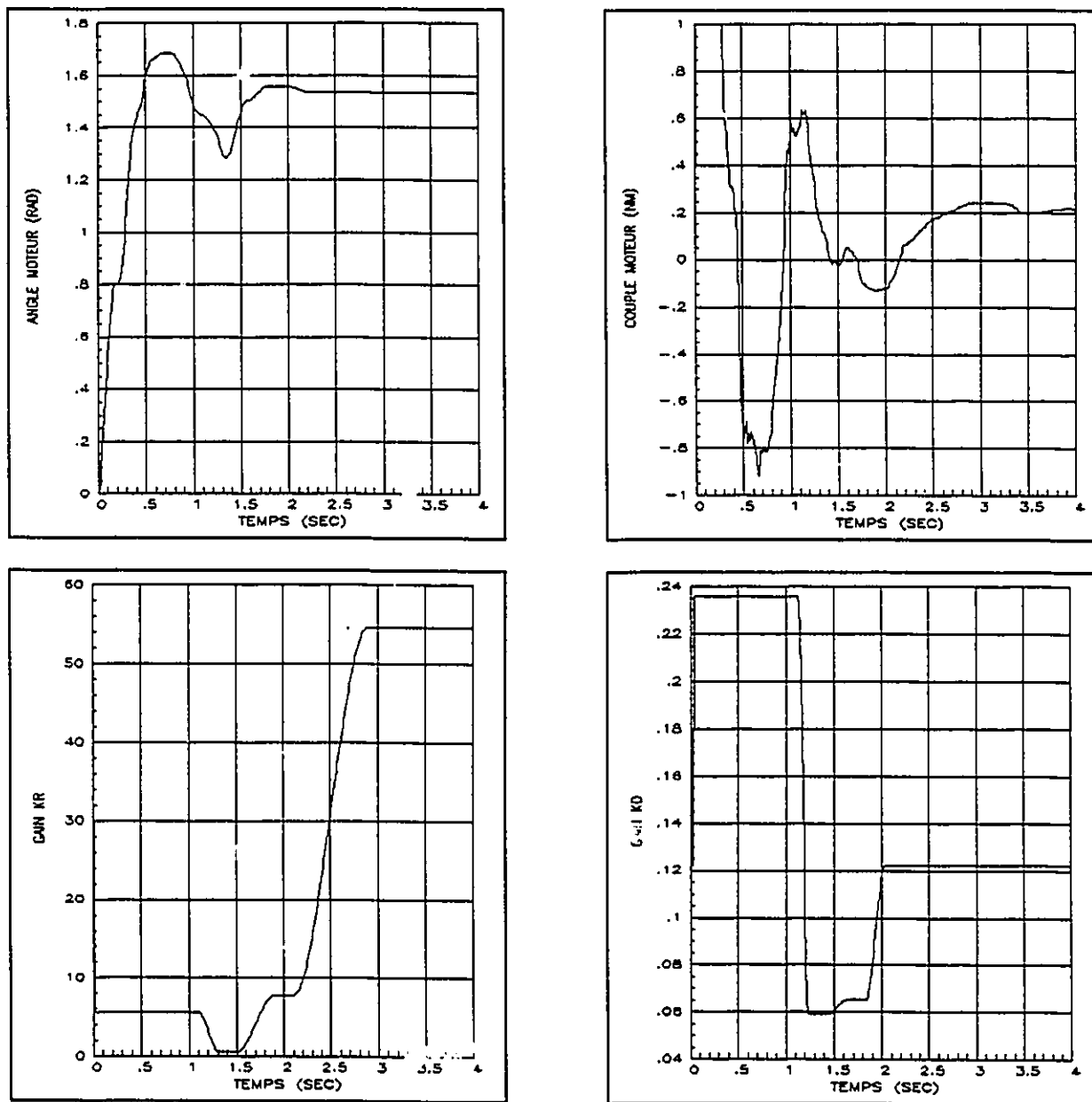


schéma 7.14 - gains dynamique - résultats 1

Lorsque le temps de transition devient innacceptable, c'est à dire que la dynamique des gains devient trop importante, alors le régulateur n'est plus efficace. C'est le contre exemple présenté au schéma 7.15. Par l'allure de la courbe de couple, il est possible de voir que même si l'angle atteint le position désirée de consigne, la poutre vibre selon le premier mode encastré. Après avoir été atténué, ce mode est excité de nouveau par une transition trop rapide des gains.

Finalement, la poutre ne possédant qu'un seul mode qui soit très important, les deuxième et troisième modes de vibration peuvent être négligé sans beaucoup d'effet. En utilisant seulement le régulateur du mode rigide et l'impédance atténuant le premier mode de vibration, le résultat du schéma 7.16 est obtenu. La diminution du risque d'exciter les modes amortis lors d'une transition justifie donc l'utilisation de ce troisième régulateur.

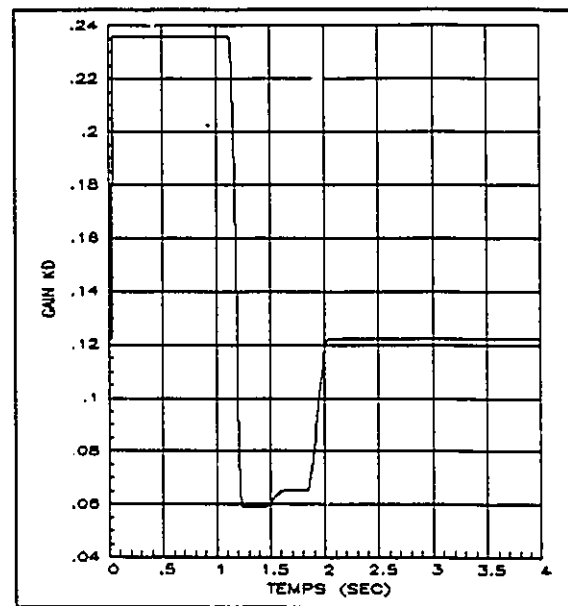
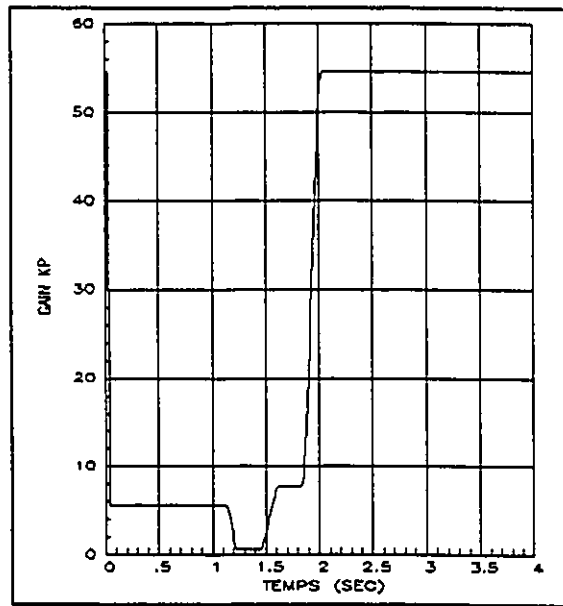
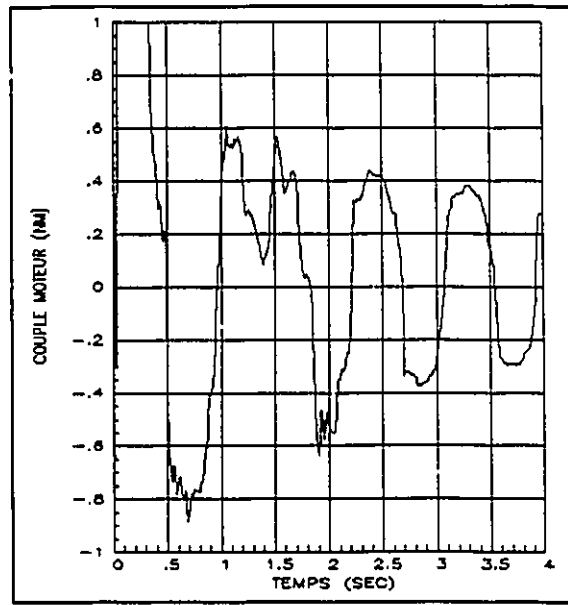
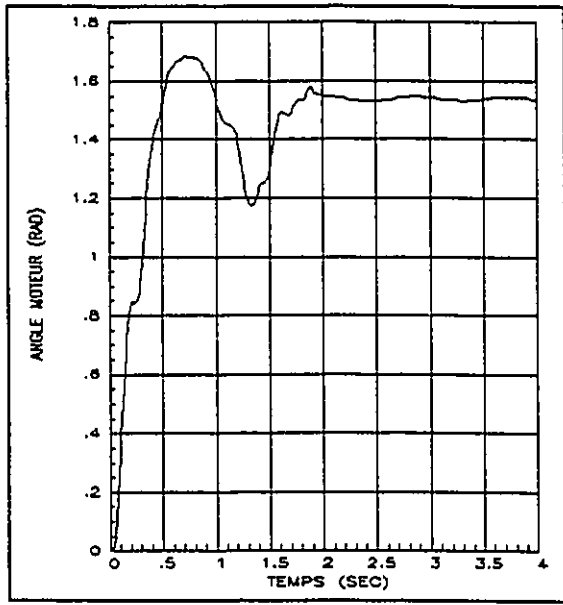


schéma 7.15 - gains dynamique - résultats 2

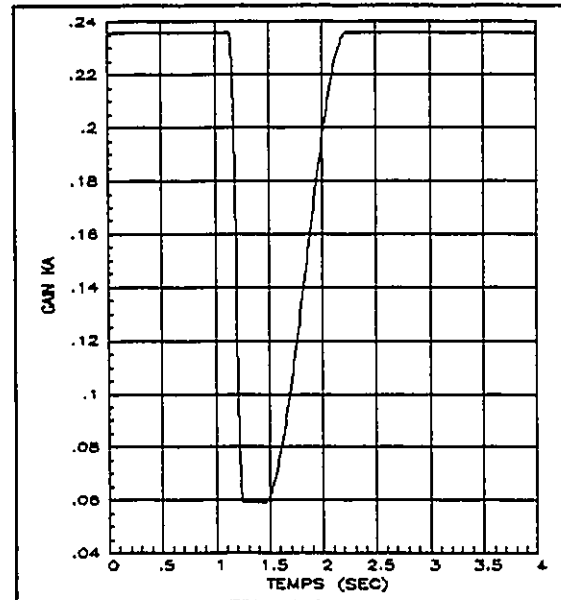
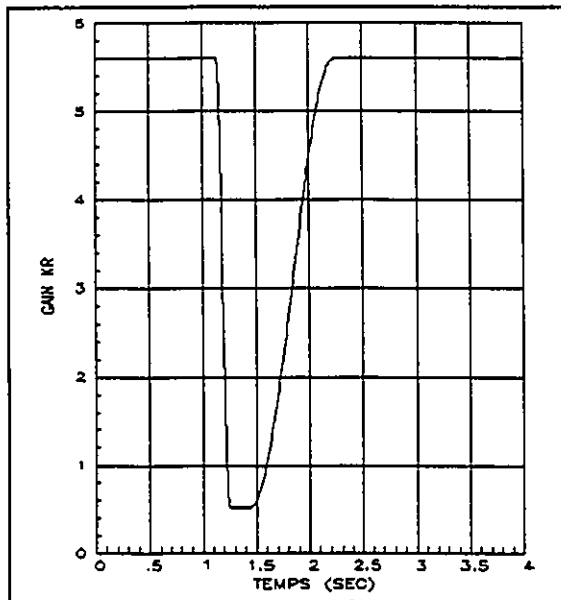
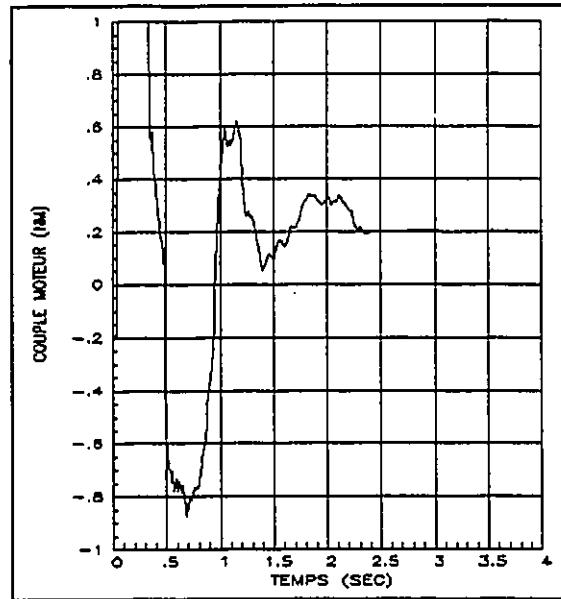
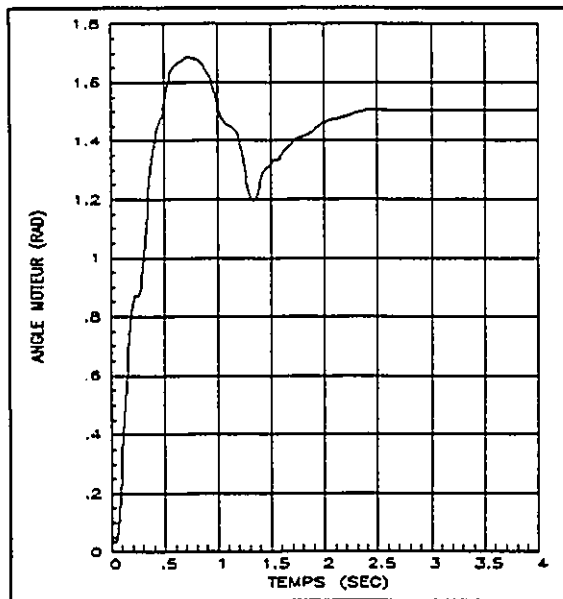


schéma 7.16 - gains dynamique - résultats 3

### 7.3 - Retour d'états

Bien que raisonnable, la méthode à impédance active a ses limites. Par exemple, pour le contrôle de robots, il est habituellement désiré de ne pas obtenir de dépassement (régime sur-amorti) pour des raisons de sécurité. Ce n'est pas le cas pour la méthode par impédance. Cette méthode s'applique donc plus aisément aux grandes structures flexibles de l'espace lesquelles possèdent une grande quantité de modes de vibration rendant impossible l'application de méthodes plus complexes telle le réglage optimale.

Dans cette section, la méthode par retour d'états filtrés proposée au chapitre six est étudiée. Il s'agit dans ce cas d'un système de commande à haute autorité. La structure générale du système implanté est présentée au schéma 7.17.

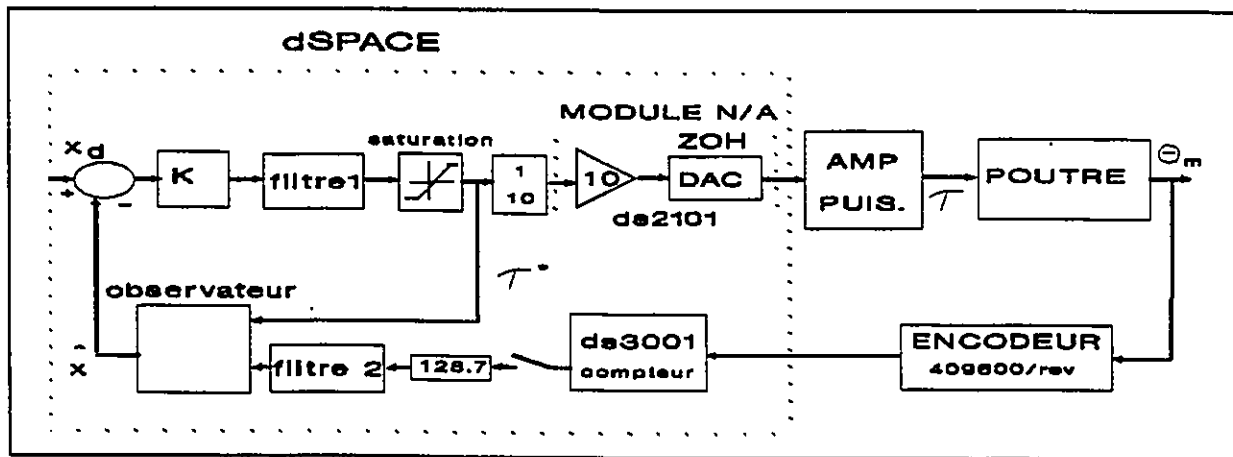


schéma 7.17 - Retour d'états filtrés

Pour toutes les applications des cette approche, la période d'échantillonnage (expérience seulement) est de .5 milliseconde. le vecteur gain  $K_0$  est obtenu de l'équation de Bass-Gura (équation 6-12) en utilisant la fonction de placement de pôles du logiciel MATRIXx. Le gain de l'observateur linéaire  $K_0$  est basé sur le modèle d'état numérique de l'équation 7-1 et obtenu aussi à l'aide du logiciel MATRIXx. Les filtres 1 et 2 sont tous deux des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie (IIR) approximant un filtre Butterworth du second ordre, avec respectivement 100 rad/sec et 200 rad/sec de fréquence de coupure. Finalement, les programmes d'implantation et de simulation sont présentés en annexe C.

#### 7.3.1 - Effets des modes négligés

Pour justifier l'utilisation du filtre 1 avec fréquence de coupure de 100 rad/sec, coupant ainsi l'effet du mode observé en plus haute fréquence, il faut revenir à l'argument de la section 6.2.3. Le débordement de mesure, la friction de Coulomb et le couplage non-linéaire ont pour effet de déstabiliser le mode flexible observé à plus haute fréquence. Donc afin de réduire l'effet du débordement de mesure et de commande, il faut atténuer les composantes de la commande aux environs de cette fréquence. Ceci est démontré par la comparaison des états observés en simulation où

il n'y a pas de débordement et ceux observés expérimentalement. Pour un régulateur avec les pôles d'observateur et de contrôleur de l'équation 7-6, cette comparaison est démontrée au schéma 7.18.

$$\begin{array}{l}
 \text{pôles observateur} \left\{ \begin{array}{l} -100 \pm 5 i \\ -105 \pm 10 i \\ -105 \pm 15 i \\ -120 \pm 15 i \end{array} \right. \\
 \\
 \text{pôles contrôleur} \left\{ \begin{array}{l} -4.5 \\ -5.0 \\ -5 \pm 20 i \\ -5 \pm 55 i \\ -5 \pm 140 i \end{array} \right.
 \end{array}
 \tag{7-6}$$

Les résultats démontrent que les trois premiers états observés (mode rigide  $\theta$ , premier mode flexible  $\eta_1$  et second mode flexible  $\eta_2$ ) ne sont guère différents entre la simulation (ligne pleine) et l'expérience (ligne pointillée), mais que le troisième mode flexible observé est très bruité expérimentalement. Ces résultats sont obtenus pour un saut de  $90^\circ$ .

### 7.3.2 - Résultats

Pour le système de commande avec les pôles 7-6, les résultats simulés (ligne pointillée) et expérimentaux (ligne pleine) sont présentés dans le schéma 7-19. La réponse obtenue

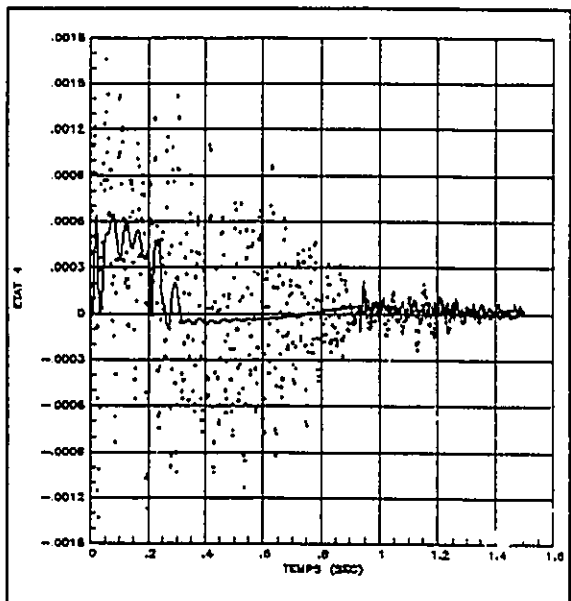
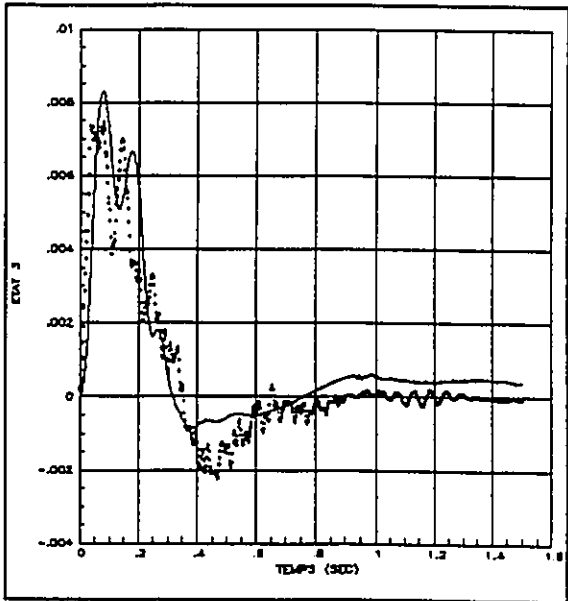
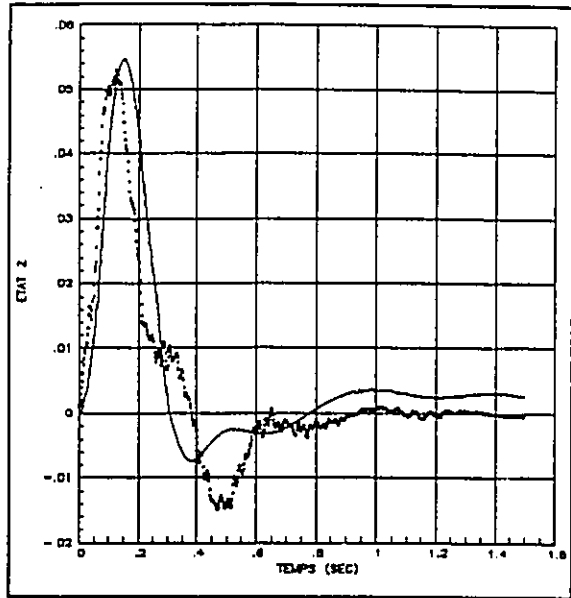
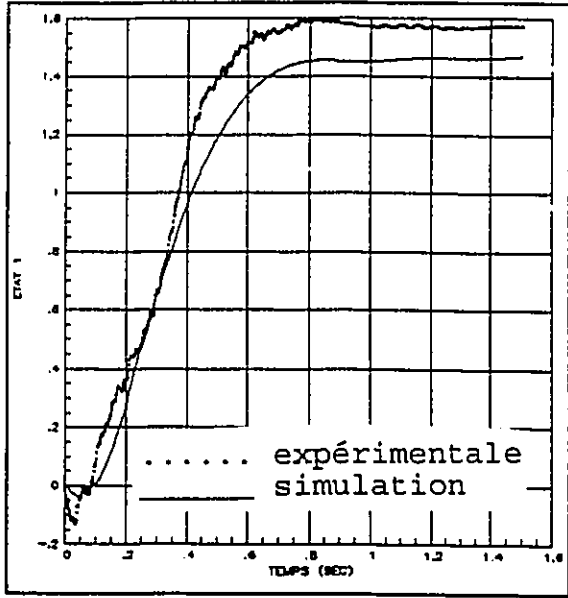


schéma 7-18 - comparaison d'états

est excellente. Ce résultat est de loin supérieure à ceux obtenu par Wells, Shueller et Tlusty [34], et Wang, Lu et Hsu [31]. Le frottement sec explique le statisme finale obtenu. L'utilisation d'un intégrateur très lent pourrait résoudre ce problème. Il faut noter qu'il n'y a pas de dépassement. Mais la quantité de calcul requise, même pour une simple poutre, rend l'application très difficile lorsque des systèmes de plus haute dimension sont considérés.

Il existe une limite de rapidité atteignable. Par exemple, lorsque les pôles désirés pour le controlleur sont poussés vers la gauche dans le plan complexe afin d'améliorer la rapidité, le système de commande devient plus sensible aux erreurs de modélisation. La discussion de Yadavelli [37] sur les limites dans le domaine fréquentielle de la robustesse face aux erreurs de modélisation pourrait tout aussi bien s'appliquer à la méthode de synthèse présentée à la section 6.2. Ceci est démontré par les résultats d'expérience présentés au schéma 7.19, pour des pôles de controlleur comme à l'équation 7-7. Un cycle limite est alors atteint démontrant probablement l'effet d'une non-linéarité telle le frottement sec.

$$\text{pôles controlleur} \left\{ \begin{array}{l} -5 \\ -6 \\ -6 \pm 20j \\ -6 \pm 55j \\ -6 \pm 140j \end{array} \right\} \quad (7-7)$$

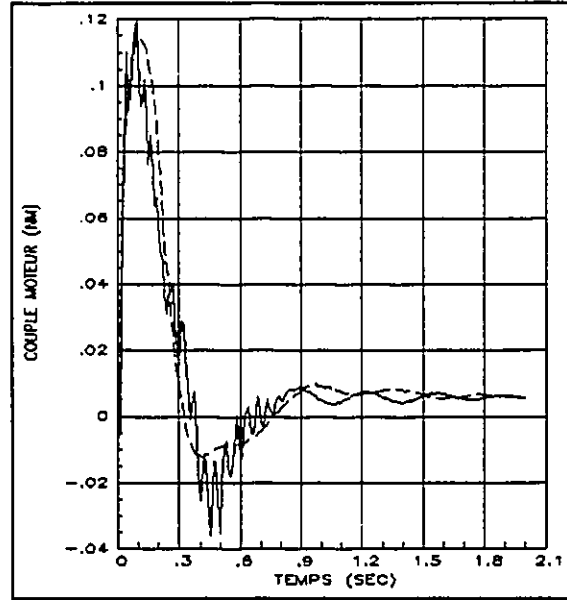
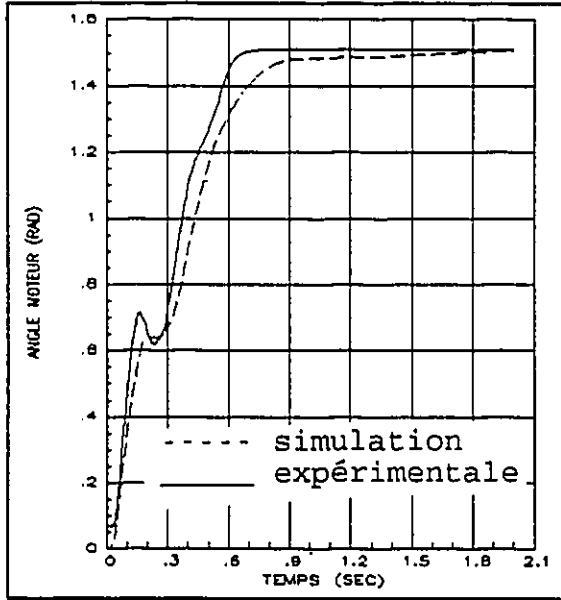


schéma 7.19 - Résultats pour retour d'états

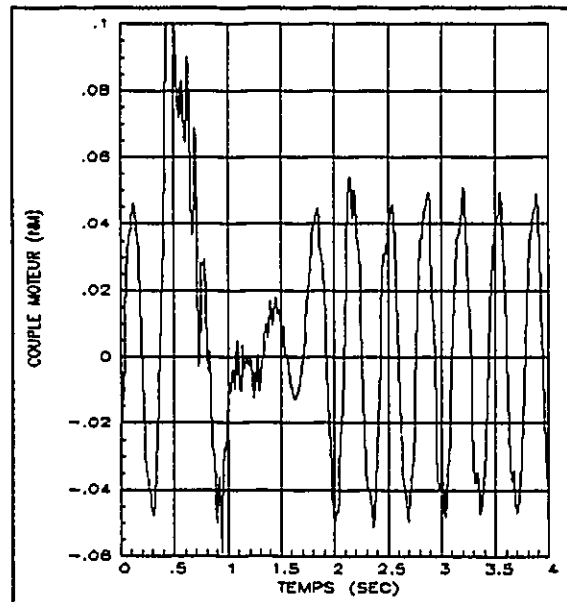
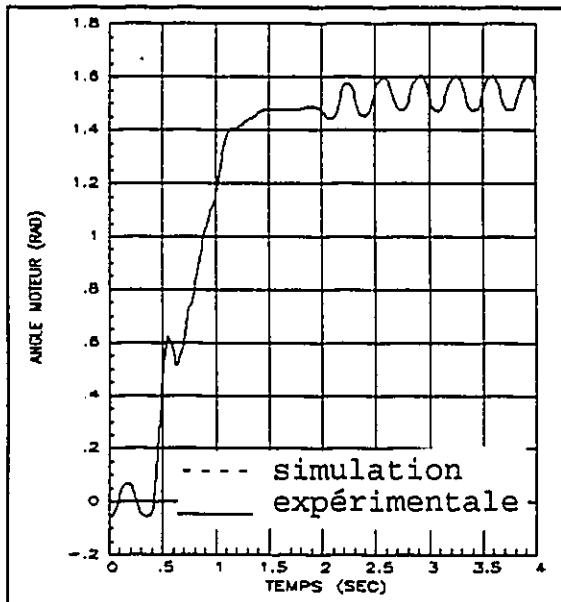


schéma 7.20 - cycle limite

## VIII - CONCLUSION

L'effet de débordement, la difficulté de modéliser, la réduction de modèle et la grande dimension modale sont les principales raisons pour expliquer la difficulté de l'asservissement des structures flexibles. Différentes méthodes d'asservissement ont été étudiées aux cours des dernières années. Les résultats obtenus démontrent le compromis à faire entre la complexité et la robustesse du système de réglage. Pour les systèmes à basse autorité, c'est-à-dire pour lesquels la loi de commande est indépendante du modèle, la robustesse n'est pas un problème mais les performances sont limitées. Plus la loi de commande dépend d'un modèle, plus les performances potentielles sont accrues. Plus les performances potentielles sont grandes, mais plus le système résultant est sensible aux erreurs de modélisation.

Dans ce rapport, le problème de l'asservissement d'une poutre flexible semblable à un robot à un degré de liberté fut envisagé. Après une analyse critique de la littérature, le problème de modélisation fut considéré. Les hypothèses et l'application du modèle d'Euler-Bernouilli pour les poutres flexibles ont été discutés. Ce modèle fut utilisé pour solutionner les formes propres et les fréquences naturelles d'une poutre montée sur un moteur à une extrémité et possédant une charge ponctuelle à l'autre

extrémité. Les résultats ainsi obtenus ont complété ceux de R. Blevins.

Par la suite, deux modèles mathématiques incluant le couple du moteur furent développés. Le premier modèle obtenu fut la fonction de transfert se portant à l'analyse fréquentielle. La fonction de transfert transcendante obtenue (équation 4-38) à complété l'éventail de fonction de transfert de Wie [36]. Il fut alors démontré que l'hypothèse de Cannon et Schmitz [2] selon laquelle les zéros de la fonction de transfert linéarisée sont associés aux modes de vibration de la poutre encastrée est nuancable. Elle n'est observée que lorsque l'inertie du moteur est très importante ou dans les cas où la poutre est très longue. Le second modèle fut obtenu par la dynamique Lagrangienne et représenté sous forme d'état. Contrairement au modèle de Cannon et Schmitz, l'hypothèse de l'angle petit ne fut pas utilisé. Le résultat a donc inclus le couplage entre le mode rigide et ceux flexibles. Le modèle infini-dimensionnel obtenu fut alors réduit et l'effet des modes négligés étudié avec beaucoup de détail.

Un montage expérimentale composé d'une poutre flexible, d'un moteur à courant continu à prise directe et d'un système d'implantation de régulateur numérique dSPACE fut développé. La poutre fut conçue pour ne comprendre que trois modes de vibration, être rigide en torsion et dans les autres axes, ne pas dépasser un

mètre de long et représenter une bonne portion (au moins 20 fois) de l'inertie rotationnelle totale. Le moteur NSK à courant continu et à prise directe fut commandé par couple. Une commande analogique de tension de  $\pm 10V$  fut utilisé comme commande. La rétroaction de position fut assuré à l'aide d'un résolveur converti numériquement en quadrature d'encodeur avec une résolution de 409600 pas/révolution. Les systèmes de réglage furent implantés numériquement sur le système d'implantation dSPACE en utilisant un processeur de signaux numérique TMS320C30, programmable en langage C et contrôlé par une série de programme dSPACE.

Puis, deux méthodes furent proposées pour l'asservissement de position et l'atténuation des vibrations pour la poutre flexible étudiée dans ce travail. D'abord une méthode par impédance active à gain statique et dynamique fut présentée utilisant l'analyse fréquentielle du lieu d'Evans pour outil de synthèse. Basé sur le fait que l'atténuation d'un certain mode dépend des gains, il fut proposé une méthode pour laquelle les gains sont variés en temps pour atténuer chaque mode tour à tour. Une deuxième méthode, par placement de pôle, fut ensuite proposée. Bien connue, cette méthode diffère de la normale par l'utilisation dans l'observateur linéaire d'un mode "absorbeur" à haute fréquence réduisant les effets de débordement et facilitant l'implantation d'un régulateur par retour d'états complet.

Le système expérimental fut par la suite identifié par une méthode fréquentielle. Les résultats obtenus furent utilisés pour établir des modèles numériques employés pour fin de synthèse des régulateurs proposés et pour les simulations du comportement de ces régulateurs. Une bonne concordance fut observée entre les fréquences naturelles analytiquement évaluées et celles obtenues expérimentalement. Les résultats de simulation et expérimentaux de l'application des méthodes proposées ont démontré que la méthode par impédance active à gain dynamique est bénéfique surtout pour les structures flexibles à grande complexité modale. Ils ont aussi démontré que l'utilisation d'un "absorbeur" dans l'observateur en vue d'utiliser un régulateur par placement de pôles à retour d'état complet est très bénéfique dans le cas de la poutre flexible. Cette méthode est toutefois beaucoup plus complexe et il devient très difficile de l'appliquer pour les structures flexibles à grande complexité modale.

Le travail a donc permis de comprendre un peu plus la dynamique des structures flexibles, d'obtenir des résultats expérimentaux jusque-là peu nombreux et d'appliquer deux nouvelles méthodes de réglage. Il serait intéressant de continuer le travail sur le système de réglage par impédance active à gains dynamique appliqué à de plus grande structure. L'obtention d'une loi de variation de gain en fonction des états du système pourrait être le but d'une prochaine étude.

## RÉFÉRENCES

1. Blevins, R.D. ;Formulas For Natural Frequency And Mode Shape; Van Nostrand Reinhold, New-York, 1979, 492 pp.
2. Cannon, R.H. et Schmitz, E. ;Precise Control of Flexible Manipulators; Robotics Res. - First International Symp., M. Brady & R. Paul editor, MIT Press, 1984, pp. 841-861.
3. Chapnik, B.V., Heppler, G.R. et Aplevich, J.D.;Modelling Impact on a One Link Flexible Robot Arm; IEEE trans. on Rob. Research and Automation, Vol. 7, No. 4, August 1991, pp 479-488.
4. Chrétien, J.P., Carton, P. et Maurette, M.;Dynamic Modelling and Control of a Flexible Arm Holding a Non-rigid Payload; Proc. European in-orbit Tech. Symp., Toulouse, France, September 1989.
5. Coupe, G.M.;The Reduction of Undamped Oscillation With Relay Control; IEEE Trans. on Automatic Control, February 1977, p. 564.
6. Crocker, G.W., Hughes, P.C. et Hong, T.;Real-time Computer Control of a Flexible Spacecraft Emulator; IEEE Control Systems Magazine, Jan. 1990, pp. 3-8.
7. Friedland, B.;Control Systems Design; McGraw-Hill, NY, 1986.
8. Gehling, R.W.;Active Augmentation of Passively Damped Representative Large Space Structures; Damping 1986 Proc., FDL, WPAFB, May 1986, pp. EB1-EB18.
9. Gething, J.M. et Gill, K.F.;Relay Control of Undamped Linear Systems Using Lyapunov's Second Method; Proc. of IEEE Control and Sciences; Vol. 121, April 1974, pp. 301-306.
10. Ham, F. et Greely, S.;Active Damping Control Design for the Mast Flight System; Proc. Amer. Cont. Conf., June 1987, pp. 355-367.
11. Ham, F., Greely, S. et Henniges, B.;Active Vibration Suppression for the Mast Flight System; IEEE, Jan. 1989, p. 85.
12. Ham, F., Greely, S. et Henniges, B.;Active Damping Control Design for the COFS Mast Flight System; AIAA, 1987, p. 354.

13. HenrichFreise, H.;The Control of an Elastic Manipulation Device Using DSP; Proc. of Amer. Cont. Conf., Vol. 2, Georgia, June 1988, pp. 1029-1035.
14. Hughes, P.C.;Analysis of two Passive Dampers for Reducing Controller/Flexibility Interaction on CTS; CASI/AIAA Meet., October 1974, pp. 1-7.
15. Kwakernaak, H. et Sivan, R.;Linear Optimal Control Systems; Wiley Interscience, NY, 1972.
16. Lutze, F.H. et Goff, R.M.;Application of Classical Techniques to Control of Continuous Systems;?.
17. Lynch, P.S. et Banda, S.S.;Active Control for Vibration Damping; Damping 1986 Proc., FDL, WPAFB, May 1986, pp EC1-EC27.
18. Maret, Louis;Régulation Automatique; Presse Polytechnique Romande, Lausanne,
19. Meirovitch, L. et Oz, H.;An Assessments of Methods for the Control of Large Space Structures; Cont. of Large Space Structures; State of the technology, p34.
20. Nathan, P.J. et Singh, S.N.;Variable Structure Control of a Robotic Arm with Flexible Links; IEEE Tr. on Aut. Cont., 1989.
21. Necsulescu, D.S.;Feasability Study of the Application of Impedance Control to Large Flexible Structures; D.O.C. Contract report, March 1989.
22. Ozguner, U. et Al.;Decentralized Control Experiments on Nasa's Flexible Grid; Proc. of 1986 Amer. Cont. Conf., June 1986, pp. 1045-1051.
23. Ozguner, U. et Al.;Laboratory Facility for Flexible Structure Control Experiments; IEEE trans., Aug. 1988, p. 27.
24. Parsons, E.K.;An Experiment Demonstrating Pointing Control on a Flexible Structure; IEEE, April 1988, p.79.
25. Prasad, J.V.R., Calise, A.J. et Byrns, E.U.;Active Vibration Control using First Order Dynamic Compensator with Frequency Shaped Cost Function; IEEE Trans. on Cont. Systems, 1991, pp71-78.
26. Rovner, D. et Cannon, R.;Expermiments Toward On-Line Identification and Control of a Flexible One-Link Manipulator; The Int. Journal of Rob. Res., Vol. 6, No. 4, Winter 1987.

27. Thomson, W.T.;Theory of Vibrations with Applications; second edition, Prentice-Hall, 1981.
28. Timoshenko, S.;Théorie des Vibrations; Béranger, Paris, 1954.
29. Von Flotow, A.H.;Travelling Wave Control of Large Spacecraft Structures; Journ. of Guid., Vol. 9, No. 4, July-August 1986, p. 462.
30. Von Flotow, A.H. and Schaffer, B.;Wave Absorbing Controllers for a Flexible beam; Journ. of Guid., Vol. 9, No. 6, November-December 1986, p. 673.
31. Wang, W.J., Lu, S.S et Hsu, C.F.;Experiments on the Position Control of a One-Link Flexible Robot Arm; IEEE Trans. on Rob. and Autom., Vol. 5, No. 3, June 1989.
32. Wang, D. et Vidyasagar, M.;Control of Flexible Beam for Optimal Step Response; IEEE, 1987, pp. 1567-1572.
33. Wang, D. et Vidyasagar, M.;Transfert Functions for a Single Flexible Link; IEEE Tr., 1989, pp. 1042-1047.
34. Wells, R.L. et Al.;Feedforward and Feedback Control of a Flexible Robotic Arm; IEEE Cont. Magazine, January 1990, pp. 9-15.
35. Wie, B.;Active Vibration Control Synthesis for the COFS-I; A Classical Approach; AIAA, 1987, p. 361.
36. Wie, B. et Bryson, A.E.;Pole-Zero Modelling of Flexible Space Structures; Journ. of Guid., Vol. 11, No. 6, 1987, p. 554.
37. Yadavelli, R.K.;Robust Control Design for Vibration Suppression of Large Space Structures; Damping 1986 Proc., FDL, WPAFB, May 1986, pp. EA1-EA8.

ANNEXE A

VALEURS ET FORMES PROPRES

## A.1 - Conditions limites générales

Soit une poutre avec les conditions limites suivantes;

$$\begin{aligned} \text{à } x=0 \quad y(0, t) &= 0 \\ EIy''(0, t) &= I_m \dot{y}'(0, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{à } x=L \quad EIy''(L, t) &= 0 \\ EIy'''(L, t) &= M_c \dot{y}(L, t) \end{aligned}$$

L'équation caractéristique d'une telle poutre est;

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{I_m M_c}{(\rho A)^2} \lambda_i^4 - 1 \right] (c\lambda \operatorname{sh}\lambda - s\lambda \operatorname{ch}\lambda) \dots \\ &\dots + \frac{I_m}{\rho A} \lambda_i^3 (1 + c\lambda \operatorname{ch}\lambda) + \frac{M_c}{\rho A} \lambda_i s\lambda \operatorname{sh}\lambda = 0 \end{aligned} \tag{A-1}$$

où:

$$\begin{aligned} s\lambda &\Delta \sin(\lambda_i L) \\ c\lambda &\Delta \cos(\lambda_i L) \\ \operatorname{sh}\lambda &\Delta \sinh(\lambda_i L) \\ \operatorname{ch}\lambda &\Delta \cosh(\lambda_i L) \end{aligned}$$

En utilisant le programme de recherche de zéro par dichotomie de la page suivante, une liste de  $\lambda_i L$  est obtenu pour différent rapport  $M_c/\rho A$  (MC/RA) et  $I_m/\rho A$  (M/RA).

PROGRAMME DE RECHERCHE DE VALEURS PROPRES

/\* This program has been written to search the zero of a function using a dichotomous algorithm. It is used to evaluate the eigenvalues of a Euler Beam.

BY: Jean de Carufel

\*\*\*\*\*/

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>
```

```
double fun(double,double,double);
```

```
void main(void)
{
/* VARIABLES */
```

```
FILE *fptr;
int I;
int N = 0;
double X1,X2,X3,F1,F2,F3,P1,P2;
double D[6]={.5,3.5,7.1,10.0,13.0,16.0};
double MODE [450] [6];
double EPS = .0001;
```

```
fptr=fopen("modal2.dat","w");
```

```
fprintf(fptr,"\n VALEURS PROPRES POUR UNE POUTRE AYANT UNE
INERTIE\n");
fprintf(fptr," A LA BASE ET UNE CHARGE A L'AUTRE
EXTREMITE\n");
f p r i n t f ( f p t r , "
===== \n\n");
```

```
for (P1=.005;P1<=.07;P1+=.005)
{
fprintf(fptr,"\npour M/RA = %.3f\n",P1);
fprintf(fptr," MC/RA\tn1\tn2\tn3\tn4\tn5\tn6");
for (P2=0;P2<=.2;P2+=.05)
{
for (I=0;I<6;I++)
{
X1=D[I];
X2=D[I]+.5;
F1=fun(X1,P1,P2);
F2=fun(X2,P1,P2);
while (F1*F2>0.)
{
X1=X2;F1=F2;
```

```

        X2+=.5;
        F2=fun(X2,P1,P2);
    }
    while (.5*fabs(X1-X2)>EPS)
    {
        X3=(X1+X2)/2.;
        F3=fun(X3,P1,P2);
        if (F3*F1>0)
        {
            X1=X3;F1=F3;
        }
        else
        {
            X2=X3;F2=F3;
        }
    }
    MODE [N] [I] = X3;
}
fprintf(fptr,"\n%.3f",P2);
for (I=0;I<6;I++)
{
    fprintf(fptr,"\t%.3f",MODE[N][I]);
}
    N++;
}
}
}

/* function */

double fun(double LA,double M,double MC)
{
    double C,S,CH,SH,F;

    C=cos(LA);
    S=sin(LA);
    CH=cosh(LA);
    SH=sinh(LA);

    F=(M*MC*LA*LA*LA*LA-1)*(C*SH-S*CH) + M*LA*LA*LA*(1+C*CH)
    + MC*LA*S*SH;
    return(F);
}

```

## RÉSULTATS

VALEURS PROPRES POUR UNE POUTRE AYANT UNE INERTIE  
A LA BASE ET UNE CHARGE A L'AUTRE EXTREMITE

=====

pour M/RA = 0.050

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.968	4.897	7.897	11.011
0.050	2.890	4.698	7.621	10.672
0.100	2.827	4.574	7.482	10.532
0.150	2.774	4.491	7.400	10.457
0.200	2.729	4.432	7.347	10.411
0.250	2.692	4.387	7.310	10.380
0.300	2.659	4.353	7.282	10.357
0.350	2.631	4.326	7.260	10.340
0.400	2.606	4.304	7.243	10.327
0.450	2.584	4.286	7.230	10.317
0.500	2.565	4.271	7.218	10.308
0.550	2.547	4.257	7.209	10.300
0.600	2.532	4.246	7.200	10.294
0.650	2.518	4.236	7.193	10.289
0.700	2.505	4.228	7.187	10.284
0.750	2.493	4.220	7.182	10.280
0.800	2.482	4.213	7.177	10.277
0.850	2.472	4.207	7.173	10.274
0.900	2.463	4.202	7.169	10.271
0.950	2.455	4.197	7.165	10.268

pour M/RA = 0.100

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.639	4.794	7.876	11.003
0.050	2.562	4.603	7.603	10.667
0.100	2.499	4.484	7.466	10.527
0.150	2.448	4.404	7.386	10.452
0.200	2.405	4.347	7.333	10.406
0.250	2.369	4.304	7.295	10.375
0.300	2.338	4.270	7.268	10.353
0.350	2.310	4.244	7.246	10.336
0.400	2.287	4.222	7.229	10.322
0.450	2.266	4.204	7.216	10.312
0.500	2.247	4.189	7.204	10.303
0.550	2.231	4.175	7.195	10.296
0.600	2.216	4.164	7.186	10.290
0.650	2.202	4.154	7.179	10.284
0.700	2.190	4.146	7.173	10.280
0.750	2.178	4.138	7.168	10.276
0.800	2.168	4.131	7.163	10.272

0.850	2.158	4.125	7.158	10.269
0.900	2.150	4.120	7.155	10.266
0.950	2.141	4.115	7.151	10.264

pour M/RA = 0.150

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.471	4.760	7.869	11.001
0.050	2.394	4.572	7.597	10.665
0.100	2.332	4.455	7.461	10.525
0.150	2.281	4.376	7.381	10.451
0.200	2.238	4.319	7.328	10.405
0.250	2.203	4.277	7.291	10.374
0.300	2.172	4.244	7.263	10.351
0.350	2.145	4.217	7.241	10.334
0.400	2.121	4.195	7.225	10.321
0.450	2.100	4.177	7.211	10.310
0.500	2.082	4.162	7.199	10.302
0.550	2.065	4.149	7.190	10.294
0.600	2.050	4.138	7.182	10.288
0.650	2.036	4.128	7.175	10.283
0.700	2.024	4.119	7.168	10.278
0.750	2.013	4.111	7.163	10.274
0.800	2.002	4.105	7.158	10.271
0.850	1.993	4.099	7.154	10.267
0.900	1.984	4.093	7.150	10.265
0.950	1.975	4.088	7.147	10.262

pour M/RA = 0.200

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.367	4.743	7.865	10.999
0.050	2.289	4.557	7.595	10.664
0.100	2.227	4.441	7.459	10.524
0.150	2.176	4.362	7.378	10.450
0.200	2.134	4.306	7.325	10.404
0.250	2.098	4.264	7.288	10.373
0.300	2.067	4.230	7.261	10.350
0.350	2.040	4.204	7.239	10.333
0.400	2.016	4.182	7.222	10.320
0.450	1.995	4.164	7.209	10.309
0.500	1.977	4.149	7.197	10.301
0.550	1.960	4.136	7.188	10.294
0.600	1.945	4.125	7.179	10.287
0.650	1.931	4.115	7.172	10.282
0.700	1.918	4.106	7.166	10.277
0.750	1.907	4.099	7.161	10.273
0.800	1.896	4.092	7.156	10.270
0.850	1.886	4.085	7.152	10.267
0.900	1.877	4.080	7.148	10.264
0.950	1.869	4.075	7.144	10.261

pour M/RA = 0.250

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.295	4.733	7.863	10.999
0.050	2.217	4.548	7.593	10.663
0.100	2.155	4.432	7.457	10.524
0.150	2.104	4.354	7.377	10.449
0.200	2.061	4.298	7.324	10.403
0.250	2.025	4.256	7.287	10.372
0.300	1.994	4.223	7.259	10.350
0.350	1.967	4.196	7.238	10.333
0.400	1.943	4.175	7.221	10.320
0.450	1.922	4.157	7.207	10.309
0.500	1.903	4.141	7.196	10.300
0.550	1.886	4.128	7.186	10.293
0.600	1.870	4.117	7.178	10.287
0.650	1.856	4.107	7.171	10.282
0.700	1.843	4.099	7.165	10.277
0.750	1.832	4.091	7.159	10.273
0.800	1.821	4.084	7.155	10.269
0.850	1.811	4.078	7.150	10.266
0.900	1.801	4.072	7.146	10.263
0.950	1.793	4.067	7.143	10.261

pour M/RA = 0.300

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.242	4.727	7.862	10.998
0.050	2.164	4.542	7.592	10.663
0.100	2.101	4.427	7.456	10.524
0.150	2.050	4.349	7.376	10.449
0.200	2.007	4.293	7.323	10.403
0.250	1.971	4.251	7.286	10.372
0.300	1.939	4.218	7.258	10.349
0.350	1.912	4.191	7.237	10.333
0.400	1.888	4.170	7.220	10.319
0.450	1.866	4.151	7.206	10.309
0.500	1.847	4.136	7.195	10.300
0.550	1.830	4.123	7.185	10.293
0.600	1.814	4.112	7.177	10.286
0.650	1.800	4.102	7.170	10.281
0.700	1.787	4.093	7.164	10.277
0.750	1.775	4.086	7.158	10.273
0.800	1.764	4.078	7.154	10.269
0.850	1.754	4.072	7.149	10.266
0.900	1.744	4.067	7.145	10.263
0.950	1.735	4.062	7.142	10.260

pour M/RA = 0.350

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.201	4.722	7.861	10.998
0.050	2.123	4.538	7.591	10.662
0.100	2.060	4.423	7.455	10.523
0.150	2.009	4.345	7.375	10.449
0.200	1.965	4.289	7.322	10.403
0.250	1.929	4.247	7.285	10.372
0.300	1.897	4.214	7.258	10.349
0.350	1.869	4.188	7.236	10.332
0.400	1.845	4.166	7.220	10.319
0.450	1.823	4.148	7.206	10.308
0.500	1.804	4.133	7.194	10.300
0.550	1.786	4.120	7.185	10.292
0.600	1.770	4.108	7.177	10.286
0.650	1.756	4.098	7.169	10.281
0.700	1.743	4.090	7.163	10.276
0.750	1.730	4.082	7.158	10.272
0.800	1.719	4.075	7.153	10.269
0.850	1.709	4.069	7.149	10.266
0.900	1.699	4.063	7.145	10.263
0.950	1.690	4.058	7.141	10.260

pour M/RA = 0.400

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.169	4.718	7.860	10.997
0.050	2.090	4.535	7.591	10.662
0.100	2.027	4.420	7.455	10.523
0.150	1.975	4.342	7.375	10.449
0.200	1.932	4.286	7.322	10.403
0.250	1.895	4.244	7.285	10.372
0.300	1.863	4.211	7.257	10.349
0.350	1.835	4.185	7.236	10.332
0.400	1.810	4.163	7.219	10.319
0.450	1.788	4.145	7.205	10.308
0.500	1.769	4.130	7.194	10.300
0.550	1.751	4.117	7.184	10.292
0.600	1.735	4.106	7.176	10.286
0.650	1.720	4.096	7.169	10.281
0.700	1.707	4.087	7.163	10.276
0.750	1.694	4.079	7.157	10.272
0.800	1.683	4.072	7.152	10.269
0.850	1.672	4.066	7.148	10.266
0.900	1.662	4.060	7.144	10.263
0.950	1.653	4.055	7.141	10.260

pour M/RA = 0.450

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.142	4.716	7.859	10.997
0.050	2.063	4.532	7.590	10.662
0.100	2.000	4.418	7.454	10.523
0.150	1.948	4.340	7.374	10.449
0.200	1.904	4.284	7.322	10.403
0.250	1.867	4.242	7.284	10.371
0.300	1.835	4.209	7.257	10.349
0.350	1.807	4.183	7.235	10.332
0.400	1.782	4.161	7.219	10.319
0.450	1.760	4.143	7.205	10.308
0.500	1.740	4.128	7.193	10.299
0.550	1.722	4.115	7.184	10.292
0.600	1.705	4.103	7.176	10.286
0.650	1.691	4.094	7.168	10.281
0.700	1.677	4.085	7.162	10.276
0.750	1.664	4.077	7.157	10.272
0.800	1.653	4.070	7.152	10.268
0.850	1.642	4.064	7.148	10.265
0.900	1.632	4.058	7.144	10.263
0.950	1.623	4.053	7.140	10.260

pour M/RA = 0.500 -

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.120	4.714	7.859	10.997
0.050	2.041	4.530	7.590	10.662
0.100	1.978	4.416	7.454	10.523
0.150	1.925	4.338	7.374	10.448
0.200	1.881	4.282	7.321	10.402
0.250	1.844	4.240	7.284	10.371
0.300	1.812	4.207	7.256	10.349
0.350	1.783	4.181	7.235	10.332
0.400	1.758	4.159	7.218	10.319
0.450	1.736	4.141	7.204	10.308
0.500	1.716	4.126	7.193	10.299
0.550	1.697	4.113	7.183	10.292
0.600	1.681	4.102	7.175	10.286
0.650	1.666	4.092	7.168	10.281
0.700	1.652	4.083	7.162	10.276
0.750	1.639	4.075	7.157	10.272
0.800	1.627	4.068	7.152	10.268
0.850	1.616	4.062	7.147	10.265
0.900	1.606	4.056	7.144	10.262
0.950	1.597	4.051	7.140	10.260

pour M/RA = 0.550

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.101	4.712	7.858	10.997
0.050	2.022	4.528	7.589	10.662
0.100	1.959	4.414	7.454	10.523
0.150	1.906	4.337	7.374	10.448
0.200	1.862	4.281	7.321	10.402
0.250	1.824	4.239	7.284	10.371
0.300	1.792	4.206	7.256	10.349
0.350	1.763	4.180	7.235	10.332
0.400	1.738	4.158	7.218	10.319
0.450	1.715	4.140	7.204	10.308
0.500	1.695	4.125	7.193	10.299
0.550	1.676	4.112	7.183	10.292
0.600	1.660	4.100	7.175	10.286
0.650	1.644	4.090	7.168	10.281
0.700	1.630	4.082	7.162	10.276
0.750	1.618	4.074	7.156	10.272
0.800	1.606	4.067	7.151	10.268
0.850	1.594	4.061	7.147	10.265
0.900	1.584	4.055	7.143	10.262
0.950	1.574	4.050	7.140	10.260

pour M/RA = 0.600

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.086	4.710	7.858	10.997
0.050	2.006	4.527	7.589	10.662
0.100	1.942	4.413	7.454	10.523
0.150	1.890	4.336	7.373	10.448
0.200	1.845	4.280	7.321	10.402
0.250	1.807	4.238	7.283	10.371
0.300	1.775	4.205	7.256	10.349
0.350	1.746	4.179	7.235	10.332
0.400	1.720	4.157	7.218	10.318
0.450	1.697	4.139	7.204	10.308
0.500	1.677	4.124	7.193	10.299
0.550	1.658	4.110	7.183	10.292
0.600	1.641	4.099	7.175	10.286
0.650	1.626	4.089	7.168	10.280
0.700	1.612	4.080	7.162	10.276
0.750	1.599	4.073	7.156	10.272
0.800	1.587	4.066	7.151	10.268
0.850	1.575	4.059	7.147	10.265
0.900	1.565	4.054	7.143	10.262
0.950	1.555	4.049	7.140	10.260

pour M/RA = 0.650

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.072	4.709	7.858	10.997
0.050	1.992	4.526	7.589	10.662
0.100	1.928	4.412	7.453	10.523
0.150	1.875	4.335	7.373	10.448
0.200	1.831	4.279	7.321	10.402
0.250	1.793	4.237	7.283	10.371
0.300	1.760	4.204	7.256	10.349
0.350	1.731	4.178	7.234	10.332
0.400	1.705	4.156	7.218	10.318
0.450	1.682	4.138	7.204	10.308
0.500	1.661	4.123	7.192	10.299
0.550	1.642	4.109	7.183	10.292
0.600	1.625	4.098	7.175	10.286
0.650	1.610	4.088	7.168	10.280
0.700	1.595	4.079	7.161	10.276
0.750	1.582	4.072	7.156	10.272
0.800	1.570	4.065	7.151	10.268
0.850	1.558	4.058	7.147	10.265
0.900	1.548	4.053	7.143	10.262
0.950	1.538	4.048	7.139	10.260

pour M/RA = 0.700

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.060	4.708	7.858	10.997
0.050	1.980	4.525	7.589	10.662
0.100	1.916	4.411	7.453	10.523
0.150	1.863	4.334	7.373	10.448
0.200	1.818	4.278	7.320	10.402
0.250	1.780	4.236	7.283	10.371
0.300	1.746	4.203	7.256	10.349
0.350	1.717	4.177	7.234	10.332
0.400	1.691	4.155	7.218	10.318
0.450	1.668	4.137	7.204	10.308
0.500	1.647	4.122	7.192	10.299
0.550	1.629	4.109	7.183	10.292
0.600	1.611	4.097	7.175	10.286
0.650	1.596	4.088	7.168	10.280
0.700	1.581	4.079	7.161	10.276
0.750	1.568	4.071	7.156	10.272
0.800	1.555	4.064	7.151	10.268
0.850	1.544	4.058	7.147	10.265
0.900	1.533	4.052	7.143	10.262
0.950	1.523	4.047	7.139	10.260

pour M/RA = 0.750

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.049	4.707	7.857	10.996
0.050	1.969	4.524	7.589	10.662
0.100	1.905	4.410	7.453	10.522
0.150	1.851	4.333	7.373	10.448
0.200	1.807	4.277	7.320	10.402
0.250	1.768	4.235	7.283	10.371
0.300	1.735	4.202	7.255	10.349
0.350	1.705	4.176	7.234	10.332
0.400	1.679	4.154	7.217	10.318
0.450	1.656	4.136	7.204	10.308
0.500	1.635	4.121	7.192	10.299
0.550	1.616	4.108	7.183	10.292
0.600	1.599	4.097	7.174	10.286
0.650	1.583	4.087	7.167	10.280
0.700	1.568	4.078	7.161	10.276
0.750	1.555	4.070	7.156	10.272
0.800	1.542	4.063	7.151	10.268
0.850	1.530	4.057	7.147	10.265
0.900	1.520	4.051	7.143	10.262
0.950	1.509	4.046	7.139	10.260

pour M/RA = 0.800

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.039	4.706	7.857	10.996
0.050	1.959	4.524	7.588	10.661
0.100	1.895	4.410	7.453	10.522
0.150	1.841	4.332	7.373	10.448
0.200	1.797	4.276	7.320	10.402
0.250	1.758	4.234	7.283	10.371
0.300	1.724	4.202	7.255	10.349
0.350	1.695	4.175	7.234	10.332
0.400	1.669	4.154	7.217	10.318
0.450	1.645	4.136	7.203	10.308
0.500	1.624	4.120	7.192	10.299
0.550	1.605	4.107	7.182	10.292
0.600	1.587	4.096	7.174	10.286
0.650	1.571	4.086	7.167	10.280
0.700	1.557	4.077	7.161	10.276
0.750	1.543	4.069	7.156	10.272
0.800	1.530	4.063	7.151	10.268
0.850	1.518	4.056	7.147	10.265
0.900	1.508	4.051	7.143	10.262
0.950	1.497	4.046	7.139	10.259

pour M/RA = 0.850

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.031	4.705	7.857	10.996
0.050	1.951	4.523	7.588	10.661
0.100	1.886	4.409	7.453	10.522
0.150	1.833	4.332	7.373	10.448
0.200	1.787	4.276	7.320	10.402
0.250	1.749	4.234	7.283	10.371
0.300	1.715	4.201	7.255	10.349
0.350	1.685	4.175	7.234	10.332
0.400	1.659	4.153	7.217	10.318
0.450	1.635	4.135	7.203	10.308
0.500	1.614	4.120	7.192	10.299
0.550	1.595	4.107	7.182	10.292
0.600	1.577	4.096	7.174	10.286
0.650	1.561	4.086	7.167	10.280
0.700	1.546	4.077	7.161	10.276
0.750	1.532	4.069	7.156	10.272
0.800	1.520	4.062	7.151	10.268
0.850	1.508	4.056	7.146	10.265
0.900	1.497	4.050	7.142	10.262
0.950	1.486	4.045	7.139	10.259

pour M/RA = 0.900

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.023	4.705	7.857	10.996
0.050	1.943	4.522	7.588	10.661
0.100	1.878	4.409	7.453	10.522
0.150	1.825	4.331	7.373	10.448
0.200	1.779	4.276	7.320	10.402
0.250	1.740	4.234	7.283	10.371
0.300	1.706	4.201	7.255	10.349
0.350	1.677	4.174	7.234	10.332
0.400	1.650	4.153	7.217	10.318
0.450	1.627	4.135	7.203	10.308
0.500	1.605	4.120	7.192	10.299
0.550	1.586	4.106	7.182	10.292
0.600	1.568	4.095	7.174	10.286
0.650	1.552	4.085	7.167	10.280
0.700	1.537	4.076	7.161	10.276
0.750	1.523	4.068	7.155	10.272
0.800	1.510	4.061	7.150	10.268
0.850	1.498	4.055	7.146	10.265
0.900	1.487	4.049	7.142	10.262
0.950	1.476	4.044	7.139	10.259

pour M/RA = 0.950

MC/RA	n1	n2	n3	n4
0.000	2.016	4.704	7.857	10.996
0.050	1.936	4.522	7.588	10.661
0.100	1.871	4.408	7.453	10.522
0.150	1.817	4.331	7.373	10.448
0.200	1.772	4.275	7.320	10.402
0.250	1.733	4.233	7.283	10.371
0.300	1.699	4.200	7.255	10.349
0.350	1.669	4.174	7.234	10.331
0.400	1.642	4.152	7.217	10.318
0.450	1.619	4.134	7.203	10.308
0.500	1.597	4.119	7.192	10.299
0.550	1.578	4.106	7.182	10.292
0.600	1.560	4.095	7.174	10.286
0.650	1.543	4.085	7.167	10.280
0.700	1.528	4.076	7.161	10.276
0.750	1.514	4.068	7.155	10.272
0.800	1.501	4.061	7.150	10.268
0.850	1.489	4.055	7.146	10.265
0.900	1.478	4.049	7.142	10.262
0.950	1.467	4.044	7.139	10.259

Plus précisément pour la poutre expérimentale

VALEURS PROPRES POUR UNE POUTRE AYANT UNE INERTIE  
A LA BASE ET UNE CHARGE A L'AUTRE EXTREMITE

=====

pour M/RA = 0.005

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0.000	3.781	3.781	8.339	11.162	14.212	17.319
0.050	3.701	3.701	7.999	10.786	13.802	16.876
0.100	3.635	3.635	7.826	10.633	13.661	16.744
0.150	3.579	3.579	7.726	10.553	13.591	16.682
0.200	3.531	3.531	7.662	10.505	13.551	16.646

pour M/RA = 0.010

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0.000	3.641	3.641	8.084	11.075	14.173	17.298
0.050	3.564	3.564	7.775	10.720	13.776	16.863
0.100	3.499	5.259	7.622	10.575	13.637	16.731
0.150	3.443	5.161	7.533	10.498	13.569	16.670
0.200	3.396	5.090	7.476	10.451	13.528	16.635

pour M/RA = 0.015

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0.000	3.513	3.513	8.003	11.047	14.161	17.292
0.050	3.437	5.139	7.708	10.700	13.767	16.859
0.100	3.373	5.000	7.561	10.556	13.629	16.727
0.150	3.318	4.906	7.475	10.481	13.561	16.666
0.200	3.271	4.838	7.419	10.434	13.521	16.631

pour M/RA = 0.020

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6	
<u>0.000</u>	<u>3.401</u>	<u>5.201</u>	<u>7.964</u>	<u>11.034</u>	<u>14.155</u>	<u>17.288</u>	<-> Poutre expér.
0.050	3.325	4.988	7.675	10.690	13.763	16.856	
0.100	3.261	4.853	7.532	10.547	13.625	16.725	
0.150	3.206	4.762	7.447	10.472	13.557	16.664	
0.200	3.160	4.697	7.393	10.426	13.517	16.629	

pour M/RA = 0.025

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0.000	3.303	5.103	7.941	11.026	14.151	17.286
0.050	3.227	4.893	7.657	10.684	13.760	16.855
0.100	3.163	4.761	7.514	10.542	13.623	16.724
0.150	3.109	4.672	7.431	10.467	13.555	16.663
0.200	3.062	4.609	7.377	10.421	13.515	16.628

pour M/RA = 0.030

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0.000	3.218	5.036	7.926	11.021	14.149	17.285
0.050	3.142	4.828	7.644	10.680	13.759	16.854
0.100	3.078	4.699	7.503	10.539	13.622	16.724
0.150	3.024	4.611	7.421	10.464	13.554	16.662
0.200	2.978	4.550	7.367	10.417	13.514	16.627

pour M/RA = 0.035

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0.000	3.144	4.986	7.916	11.017	14.147	17.284
0.050	3.067	4.782	7.636	10.677	13.757	16.854
0.100	3.003	4.654	7.496	10.536	13.620	16.723
0.150	2.949	4.568	7.413	10.461	13.553	16.662
0.200	2.904	4.507	7.360	10.415	13.513	16.627

pour M/RA = 0.040

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0.000	3.078	4.949	7.908	11.015	14.146	17.284
0.050	3.001	4.747	7.629	10.675	13.756	16.853
0.100	2.937	4.620	7.490	10.535	13.620	16.723
0.150	2.884	4.536	7.408	10.460	13.552	16.661
0.200	2.839	4.475	7.355	10.413	13.512	16.626

pour M/RA = 0.045

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0.000	3.020	4.920	7.902	11.013	14.145	17.283
0.050	2.943	4.720	7.625	10.673	13.756	16.853
0.100	2.879	4.595	7.485	10.533	13.619	16.722
0.150	2.826	4.511	7.404	10.458	13.551	16.661
0.200	2.781	4.451	7.350	10.412	13.511	16.626

pour M/RA = 0.050

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0.000	2.968	4.897	7.897	11.011	14.144	17.283
0.050	2.890	4.698	7.621	10.672	13.755	16.852
0.100	2.827	4.574	7.482	10.532	13.619	16.722
0.150	2.774	4.491	7.400	10.457	13.551	16.661
0.200	2.729	4.432	7.347	10.411	13.511	16.626

pour M/RA = 0.055

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0.000	2.921	4.878	7.893	11.009	14.144	17.282
0.050	2.843	4.681	7.617	10.671	13.755	16.852
0.100	2.780	4.557	7.479	10.531	13.618	16.722
0.150	2.727	4.475	7.398	10.456	13.551	16.661
0.200	2.683	4.416	7.344	10.410	13.511	16.625

pour M/RA = 0.060

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0.000	2.878	4.862	7.890	11.008	14.143	17.282
0.050	2.800	4.666	7.615	10.670	13.755	16.852
0.100	2.737	4.544	7.477	10.530	13.618	16.722
0.150	2.685	4.461	7.395	10.455	13.550	16.661
0.200	2.641	4.403	7.342	10.410	13.510	16.625

pour M/RA = 0.065

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0.000	2.839	4.849	7.887	11.007	14.143	17.282
0.050	2.762	4.654	7.613	10.670	13.754	16.852
0.100	2.698	4.532	7.475	10.530	13.618	16.721
0.150	2.646	4.450	7.394	10.455	13.550	16.660
0.200	2.602	4.392	7.340	10.409	13.510	16.625

pour M/RA = 0.070

MC/RA	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0.000	2.803	4.838	7.885	11.006	14.142	17.282
0.050	2.726	4.643	7.611	10.669	13.754	16.852
0.100	2.663	4.522	7.473	10.529	13.617	16.721
0.150	2.611	4.441	7.392	10.454	13.550	16.660
0.200	2.567	4.382	7.339	10.408	13.510	16.625

## A.2 - Poutre expérimentale

La poutre expérimentale a pour solution,

i	$\lambda_i$	$\omega_i^*$ rad/sec	$A_i^{**}$	$B_i^{**}$	$C_i^{**}$	$D_i^{**}$
1	3.401	27	.83637	-.83687	1.37884	.768584
2	5.201	63	1.4954	-1.4954	.44465	1.5076
3	7.964	148	1.1325	-1.1325	-.9077	1.1317
4	11.03	284.1	1.0594	-1.0594	-.9806	1.0594
5	14.16	467.6	1.0413	-1.0413	-1.0046	1.0413
6	17.29	697.5	1.0291	-1.0291	-1.0092	1.0291

tableau A.1 - poutre expérimentale

Note: \* : de l'équation 4-21 c.

\*\* : des équations 4-25.

et les formes propres sont données au schéma A.1.

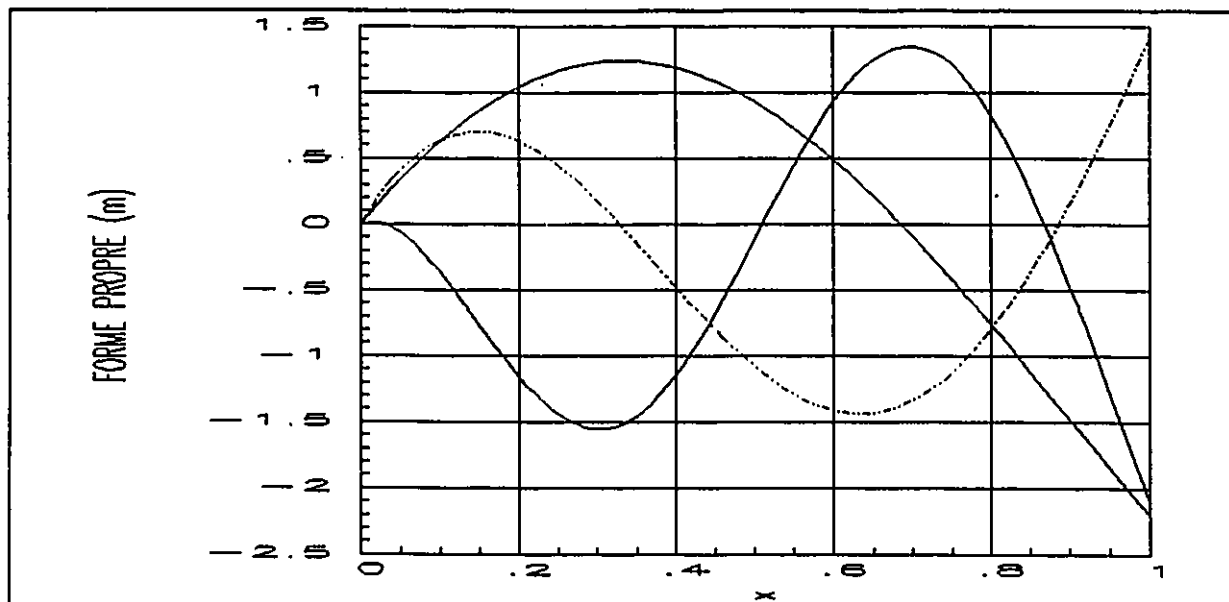


schéma A-1

ANNEXE B

MODÉLISATION

## B.1 - MODES CONSIDÉRÉS ET NÉGLIGÉS

En séparant les modes négligés de ceux considérés, on obtient,

$$\begin{bmatrix} M_{cc} & M_{cn} \\ M_{nc} & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_c \\ \ddot{\eta}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_c & 0 \\ 0 & D_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\eta}_c \\ \dot{\eta}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_c & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_c \\ \eta_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n_{cc} \\ n_{nc} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n_{cn} \\ n_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_c \\ b_n \end{Bmatrix} \tau$$

(B-1)

où :

$$M_{cc}, D_c, K_c \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

$$M_{nn}, D_n, K_n \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

$$M_{cn} \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m \quad \text{couplage}$$

$$M_{nc} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{inertiel}$$

$$\eta_c = (\theta, q_1, q_2, \dots, q_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{modes consid.}$$

$$\eta_n = (q_{n+2}, q_{n+3}, \dots)^T \in \mathbb{R}^m \quad \text{modes néglig.}$$

$$b_c, n_{cc}, n_{cn} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$b_n, n_{nc}, n_{nn} \in \mathbb{R}^m$$

$$\tau \in \mathbb{R}$$

Il est possible d'écrire

$$M_{cc}\ddot{\eta}_c + M_{cn}\ddot{\eta}_n + D_c\dot{\eta}_c + K_c\eta_c + n_{cc} + n_{cn} = b_c \tau$$

$$M_{nn}\ddot{\eta}_n + M_{nc}\ddot{\eta}_c + D_n\dot{\eta}_n + K_n\eta_n + n_{nn} + n_{nc} = b_n \tau$$

(B-2)

ou bien

$$\ddot{\eta}_c = M_{cc}^{-1} [-M_{cn}\ddot{\eta}_n - D_c\dot{\eta}_c - K_c\eta_c - n_{cc} - n_{cn} + b_c \tau]$$

$$\ddot{\eta}_n = M_{nn}^{-1} [-M_{nc}\ddot{\eta}_c - D_n\dot{\eta}_n - K_n\eta_n - n_{nn} - n_{nc} + b_n \tau]$$

(B-3)

Finalement, en définissant

$$\begin{aligned}
 P &\triangleq M_{cc}^{-1} M_{cn} M_{nn}^{-1} \\
 Q &\triangleq [I - P M_{nc}] \\
 P_2 &\triangleq M_{nn}^{-1} M_{nc} M_{cc}^{-1} \\
 Q_2 &\triangleq [I - P_2 M_{cn}]
 \end{aligned} \tag{B-4}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c \tau + h_c(x_c, \dot{x}_c) + \epsilon_c(x_c, \dot{x}_c, x_n, \dot{x}_n) \\
 \dot{x}_n &= A_n x_n + B_n \tau + h_n(x_n, \dot{x}_n) + \epsilon_n(x_c, \dot{x}_c, x_n, \dot{x}_n) \\
 y &= C_c x_c + C_n x_n
 \end{aligned} \tag{B-5}$$

où:

$$\begin{aligned}
 x_c &\triangleq (\eta_c, \dot{\eta}_c)^T \in \mathbb{R}^{2n+2} \\
 x_n &\triangleq (\eta_n, \dot{\eta}_n)^T \in \mathbb{R}^n \\
 A_c &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & I \\ -Q^{-1} M_{cc}^{-1} K C & -Q^{-1} M_{cc}^{-1} D_c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2} \times \mathbb{R}^{2n+2} \\
 B_c &\triangleq \begin{Bmatrix} 0 \\ Q^{-1} [M_{cc}^{-1} b_c - P b_n] \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2} \\
 h_c &\triangleq \begin{Bmatrix} 0 \\ -Q^{-1} M_{cc}^{-1} \Omega_{cc} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2} \\
 \epsilon_c &\triangleq \begin{Bmatrix} 0 \\ Q^{-1} P [D_n \dot{\eta}_n + K_n \eta_n + \Omega_{nc} + \Omega_{nn}] - Q^{-1} M_{nn}^{-1} \Omega_{cn} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2} \\
 P &\triangleq M_{nn}^{-1} M_{cn} M_{cc}^{-1} \\
 Q &\triangleq [I - P M_{nc}]
 \end{aligned}$$

$$A_n \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I \\ -Q_2^{-1}M_{nn}^{-1}K_n & -Q_2^{-1}M_{nn}^{-1}D_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$B_n \triangleq \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ Q_2^{-1}[M_{nn}^{-1}b_n - P_2 b_c] \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^n$$

$$h_n \triangleq \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -Q_2^{-1}M_{nn}^{-1}n_{nn} \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^n$$

$$e_n \triangleq \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ Q_2^{-1}P_2 [D_c \eta_c + K_c \eta_c + n_{cn} + n_{cc}] - Q_2^{-1}M_{cc}^{-1}n_{nc} \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^n$$

$$P_2 \triangleq M_{cc}^{-1}M_{nc}M_{cc}^{-1}$$

$$Q_2 \triangleq [I - P_2 M_{cn}]$$

## B.2 - MODELE ANALYTIQUE

En utilisant les résultats de A.2 pour la poutre expérimentale, selon les équations 4-51 et 4-53 en effectuant les calculs à l'aide du programme d'intégration de la page précédente, on obtient les paramètres suivants

i	$\varphi'_i(0)$	$M_i$	$b_i$	$k_i$	$D_i$
1	7.303	.10887	-.0104	167.56	.187
2	10.1537	.10887	-.0143	719.25	.693
3	1.784	.10887	-.0023	2645.72	.928
4	.8697	.10887	-.0047	9192.1	--

tableau B.1 - paramètres analytiques

Note:  $D_i$  est hypothétique pour 5 % d'amortissement.

Le modèle analytique devient donc,

$$M = \begin{bmatrix} .03859 & .006397 & .009054 & .001803 \\ .006397 & .23154 & 0 & 0 \\ .009054 & 0 & .346 & 0 \\ .001803 & 0 & 0 & .1162 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 167.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 719.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2645.7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .187 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .693 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .928 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 7.303 \\ 10.1537 \\ 1.784 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}F \end{bmatrix} \tau$$

$$\theta_m = \{1 \ 7.303 \ 10.1537 \ 1.784 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} x$$

ANNEXE C

PROGRAMMES

## C.1 - PROGRAMME D'IDENTIFICATION

```
/* IDENTIFICATION PROGRAMME */

/* This programme has been written to execute an
   identification procedure using frequency domain
   experimental techniques. */

/* BY: Jean de Carufel OCTOBER 1991 */

/*****
/* declaration of input / output functions */

float ds3001(long base, long channel);
void ds2101(long base, long channel, float value);

/* declaration of variables */

float u2          = 0.0000000E+00; /* pos. from ds3001 */
float u2_1        = 0.0000000E+00; /* u2 at k-1 */
float u2_2        = 0.0000000E+00; /* u2 at k-2 */
float y1          = 0.0000000E+00; /* torque to ds2101 */
float y1_1        = 0.0000000E+00; /* previous torque */
float vel         = 0.0000000E+00; /* velocity putput */
float posmax      = 0.0000000E+00; /* maximum position */
float posmin      = 0.0000000E+00; /* minimum position */
float omega       = 3.0000000E+00; /* freq. considered */
float phase       = 0.0000000E+00; /* phase considered */
float gain        = 0.0000000E+00; /* gain considered */

long N            = 0; /* time in # of inter. */
long TMAXTI       = 0; /* time of max. torque */
long PMAXTI       = 0; /* time of max. posit. */
long STOPREQ      = 1; /* stop motor request */
long F1           = 0; /* =1 ==> looking TMAXTI*/
long F2           = 0; /* =1 ==> found TMAXTI */
long F3           = 0; /* =1 ==> found maxpos */
long ASCEND       = 0; /* =1 ==> looking maxpos*/
long DESCEND      = 0; /* =1 ==> looking minpos*/

/* function */

#include <d:\c30tools\math.h>
#include <d:\c30tools\stdlib.h>

/* interrupt routine */

c_int10()
{
```

```

/* get position */

u2 = ds3001(0x00000040, 0x00000001);

/* if gain and phase is found for that freq. */
/* reset everything and prepare for next freq. */

if (STOPREQ == 1)
{
if (N==6000) /* give 3 sec to come back*/
{
if (omega>200.0) exit(0);
y1_1=0;
N=0;
F1=0;
F2=0;
F3=0;
ASCEND=0;
DESCEND=0;
STOPREQ=0;
if (omega<10) omega+=0.1;
else if (omega<100) omega+=1;
else omega+=5;
}
}
else /* if not ==> have to wait for steady state */
{
if (N>10000) /* if steady state is reached (5 sec) */
{
/* search for phase and gain */

if (y1-y1_1>0.0 && F1==0 && F2==0)
F1=1;
else if (y1-y1_1<0.0 && F1==1)
{
F1=0;
F2=1;
TMAXTI=N-1;
}
else if (F2==1)
{
if ((u2-u2_1)>1.0E-6 && ASCEND==0 && F3==0)
ASCEND=1;
else if ((u2-u2_1)<-1.0E-6 && ASCEND==1)
{
ASCEND=0;
DESCEND=1;
PMAXTI=N-1;
phase=(TMAXTI-PMAXTI)*omega*0.0005+3.1416;
posmax=u2_1;
F3=1;
}
}
}
}
}

```

```

        }
        /* if gain and phase is found */
        /* sample and set stopreq = 1 */

    else if ((u2-u2_1)>1.0E-6 && DESCEND==1)
    {
        DESCEND=0;
        posmin=u2_1;
        gain=((posmax-posmin)*64.433970)/0.09;
asm("      trapu    27"); /* call TRACE30*/
        STOPREQ=1;
        N=0;
        y1=0.0;
        y1_1=0.0;
        u2_1=0.0;
    }
}

y1_1=y1;

    /* if searching for gain and phase */
    /* output sine excitation at omega frequency */

    if (STOPREQ==0) y1=0.09*sin(omega*N*0.0005);

    else /* or bring back the arm to zero position */

    { /* PID CONTROL*/
        y1=y1_1+4783.854*u2-9543.8*u2_1+4760*u2_2;
        if (y1>0.1) y1=0.1;
        else if (y1<-0.1) y1=-0.1;
    }

    ds2101(0x00000080,0x00000001,y1);

    u2_2=u2_1;
    u2_1=u2;
    N++;

}
void init();
void timer1(float time);

main()
{
    init();
    timer1(5.0000000E-4., /* start timer with .5 ms samp */
    for(;;)
        ;
}

```

## C.2 - PROGRAMME D'IMPLANTATION D'IMPÉDANCE DYNAMIQUE

```
/******  
*  
*          PD CONTROLLER          *  
*          *****                *  
*  
*    created by IMPEX expert system *  
*  
*    modified by: Jean de Carufel   february, 1992 *  
*  
*****  
/
```

```
/* declaration of input / output functions */
```

```
float ds3001(long base, long channel);  
void ds2101(long base, long channel, float value);
```

```
/* declaration of variables */
```

```
float  t_sampling      = 0.0010000E+00;  
float  torque          = 0.0000000E+00;  
float  signal_out      = 0.0000000E+00;  
float  torque_1        = 0.0000000E+00;  
float  torque_sat      = 1.0000000E+00;  
float  position        = 0.0000000E+00;  
float  position_1      = 0.0000000E+00;  
float  error           = 0.0000000E+00;  
float  error_1         = 0.0000000E+00;  
float  error_2         = 0.0000000E+00;  
float  error_dot       = 0.0000000E+00;  
float  desired_pos     = 0.0000000E+00;  
float  t_samp_data_acq = 0.0100000E+00;  
float  step_duration   = 5.0000000E+00;  
float  step_in_rad     = 1.5400000E+00;  
float  kp[]            = { 5.6, 0.5251, 5.6, 0.0};  
float  kd[]            = { 0.236, 0.059, 0.236, 0.0};  
float  kpp             = 0.0000000E+00;  
float  kdd             = 0.0000000E+00;  
float  t_dur[]        = { 1.1, .2, .1};  
float  t_f_p           = 0.0000000E+00;  
float  delta_t[]      = { 0.1, .8 };  
  
long   N               = 0;  
long   N2              = 1;  
long   DELTA_N         = 0;  
long   N_TO_CHANGE    = 0;  
long   N_F_P           = 0;  
long   N_PREV         = 0;  
long   NO_MORE        = 0;
```

```

long I = 0;

c_int10()
{
/* sampling at every t_samp_data_acq second */
if (N2 == (long) ((t_samp_data_acq/t_sampling)+.5))
{
N2=0;
asm("          trapu    27"); /* call TRACE30 */
}

position = -1*ds3001(0x00000040, 0x00000001)/.00776;

/* square wave generation */
if (N == (long) (step_duration/t_sampling))
{
if (desired_pos>.1) desired_pos = 0.0;
else desired_pos = step_in_rad;
N=0;
I=0;
NO_MORE = 0;
N_TO_CHANGE = (long) (t_dur[0]/t_sampling+.5);
}

error = desired_pos-position;
error_dot = (error-error_1)/t_sampling;

/*****
*
* gain schedule
*
*****/

if (N == N_TO_CHANGE && NO_MORE == 0)
{
I++;
if (kp[I] == 0.0) NO_MORE = 1;
else
{
N_PREV = N;
DELTA_N = (long) (delta_t[I-1]/t_sampling+.5);
N_TO_CHANGE=N+DELTA_N+((long) (t_dur[I]/t_sampling+.5));
}
}
if (NO_MORE == 0)
{

```

```

N_F_P = N - N_PREV;
if (N_F_P < DELTA_N && I > 0)
{
    kpp = (-2.0*(kp[I]-kp[I-1])*N_F_P*N_F_P*N_F_P)
        / (DELTA_N*DELTA_N*DELTA_N)
        + (3.0*(kp[I]-kp[I-1])*N_F_P*N_F_P) / (DELTA_N*DELTA_N)
        + kp[I-1];
    kdd = (-2.0*(kd[I]-kd[I-1])*N_F_P*N_F_P*N_F_P) /
        (DELTA_N*DELTA_N*DELTA_N)
        + (3.0*(kd[I]-kd[I-1])*N_F_P*N_F_P) / (DELTA_N*DELTA_N)
        + kd[I-1];
}
else
{
    kpp=kp[I];
    kdd=kd[I];
}
}

/* elegant form of t=k1*ek+k2*ek_1 */
torque      = kpp*error+kdd*error_dot;

error_1     = error;
torque_1    = torque;

/* saturate torque +/- 1 Nm */
if (torque>torque_sat) torque=torque_sat;
else if (torque<(-1*torque_sat)) torque = -1*torque_sat;

signal_out=torque/8.5;

ds2101(0x00000080, 0x00000001, signal_out);

N++;
N2++;
}

void init();
void timer1(float time);

main()
{
    N_TO_CHANGE = (long) (t_dur[0]/t_sampling+.5);
    init();
    timer1(t_sampling);
    for (;;)
        ;
}

```



```
float a5_7 = -5.0506218E+01;
float a5_8 = -8.8308526E+00;
float a5_9 = -1.1915245E-03;
float a5_10 = -1.2324935E-02;
float a5_11 = -1.3508701E-02;
float a5_12 = -2.3645908E-03;
float a6_3 = -1.3497538E+03;
float a6_4 = -5.0744825E+01;
float a6_5 = 6.1587170E-01;
float a6_6 = 5.4974702E+00;
float a6_7 = 4.9261957E+00;
float a6_8 = 8.6132707E-01;
float a6_9 = 1.6534467E-04;
float a6_10 = 1.7031438E-03;
float a6_11 = 1.3207845E-03;
float a6_12 = 2.3119284E-04;
float a7_3 = -3.0569954E+02;
float a7_4 = -1.1447562E+01;
float a7_5 = 1.3946457E-01;
float a7_6 = 1.0184758E+00;
float a7_7 = 2.1151159E+00;
float a7_8 = 1.9504926E-01;
float a7_9 = 3.7296855E-05;
float a7_10 = 2.7182313E-04;
float a7_11 = 7.9641751E-04;
float a7_12 = 5.2150398E-05;
float a8_3 = -5.3515637E+02;
float a8_4 = -2.0106978E+01;
float a8_5 = 2.4417760E-01;
float a8_6 = 1.7831694E+00;
float a8_7 = 1.9531127E+00;
float a8_8 = 1.3387028E+00;
float a8_9 = 6.5514587E-05;
float a8_10 = 4.7747525E-04;
float a8_11 = 5.2333525E-04;
float a8_12 = 5.9017365E-04;
float a9_3 = 2.1986840E+05;
float a9_4 = 8.2612303E+03;
float a9_5 = -1.0032025E+02;
float a9_6 = -7.3261424E+02;
float a9_7 = -8.0243537E+02;
float a9_8 = -1.4030295E+02;
float a9_9 = 9.7141242E-01;
float a9_10 = -1.9617795E-01;
float a9_11 = -2.1502024E-01;
float a9_12 = -3.7637586E-02;
float a10_3 = 1.2675729E+04;
float a10_4 = 4.7324272E+02;
float a10_5 = -5.7821795E+00;
float a10_6 = -4.2586321E+01;
float a10_7 = -4.6250207E+01;
float a10_8 = -8.0867485E+00;
```

```
float a10_9 = -1.5417482E-03;
float a10_10 = 9.8114395E-01;
float a10_11 = -1.2315650E-02;
float a10_12 = -2.1557569E-03;
float a11_3 = -9.5208502E+03;
float a11_4 = -3.6183132E+02;
float a11_5 = 4.3460476E+00;
float a11_6 = 3.1738106E+01;
float a11_7 = 3.3062764E+01;
float a11_8 = 6.0780639E+00;
float a11_9 = 1.1792622E-03;
float a11_10 = 8.5944585E-03;
float a11_11 = 1.0032317E+00;
float a11_12 = 1.6488884E-03;
float a12_3 = 1.7989691E+03;
float a12_4 = 2.3800812E+01;
float a12_5 = -8.0019816E-01;
float a12_6 = -5.8438394E+00;
float a12_7 = -6.4015453E+00;
float a12_8 = -1.2275797E+01;
float a12_9 = -7.4310452E-05;
float a12_10 = -5.4256630E-04;
float a12_11 = -5.9440506E-04;
float a12_12 = 9.9324242E-01;
```

```
/* input matrix */
```

```
float b1_1 = 8.3032981E-06;
float b1_2 = -9.9119606E-05;
float b1_3 = -2.2391281E-04;
float b1_4 = -3.7563081E-03;
float b1_5 = 2.7461005E-06;
float b1_6 = 2.6323567E-07;
float b1_7 = 6.3046569E-07;
float b1_8 = 7.0976137E-06;
float b1_9 = -3.2568590E-05;
float b1_10 = -2.2842911E-07;
float b2_1 = 4.7244100E-04;
float b2_2 = -5.6397067E-03;
float b2_3 = -1.2740190E-02;
float b2_4 = -2.1372639E-01;
float b2_5 = 1.5624761E-04;
float b2_6 = 1.4977582E-05;
float b2_7 = 3.5872233E-05;
float b2_8 = 4.0383998E-04;
float b2_9 = -4.5452378E-03;
float b2_10 = -1.7831887E-05;
float b3_9 = 2.6974500E-04;
float b4_9 = 7.7173864E-03;
float b5_9 = 1.4502213E+00;
float b5_10 = -1.1092184E-03;
float b6_9 = -1.4195024E-01;
```

```
float b6_10 = 1.4489768E-04;
float b7_9 = -3.1962241E-02;
float b7_10 = 4.9615716E-05;
float b8_9 = -5.6226372E-02;
float b8_10 = 5.6931640E-05;
float b9_9 = 2.3103019E+01;
float b9_10 = 1.0014337E-01;
float b10_9 = 1.3194289E+00;
float b10_10 = 1.3250381E-01;
float b11_9 = -1.0173143E+00;
float b11_10 = 9.8767467E-02;
float b12_9 = 8.4521168E-03;
float b12_10 = 5.1052431E-02;
```

```
/* output matrix */
```

```
float c1_1 = 8.8388348E+00;
float c2_3 = 6.6946897E-36;
float c2_5 = 1.0000000E+00;
float c3_3 = 6.6946897E-36;
float c3_6 = 1.0000000E+00;
float c4_3 = 6.6946897E-36;
float c4_7 = 1.0000000E+00;
float c5_3 = 6.6946897E-36;
float c5_8 = 1.0000000E+00;
```

```
/* direct links */
```

```
float d2_10 = 2.4979255E-38;
float d3_10 = 2.4979255E-38;
float d4_10 = 2.4979255E-38;
float d5_10 = 2.4979255E-38;
```

```
/* declaration of variables */
```

```
/* state variables */
```

```
float x1 = 0.0000000E+00;
float x2 = 0.0000000E+00;
float x3 = 0.0000000E+00;
float x4 = 0.0000000E+00;
float x5 = 0.0000000E+00;
float x6 = 0.0000000E+00;
float x7 = 0.0000000E+00;
float x8 = 0.0000000E+00;
float x9 = 0.0000000E+00;
float x10 = 0.0000000E+00;
float x11 = 0.0000000E+00;
float x12 = 0.0000000E+00;
float xk1_1 = 0.0000000E+00;
float xk1_2 = 0.0000000E+00;
float xk1_3 = 0.0000000E+00;
```

```

float xk1_4 = 0.0000000E+00;
float xk1_5 = 0.0000000E+00;
float xk1_6 = 0.0000000E+00;
float xk1_7 = 0.0000000E+00;
float xk1_8 = 0.0000000E+00;
float xk1_9 = 0.0000000E+00;
float xk1_10 = 0.0000000E+00;
float xk1_11 = 0.0000000E+00;
float xk1_12 = 0.0000000E+00;

/* input variables */

float u1 = 1.5400000E+00;
float u2 = 0.0000000E+00;
float u3 = 0.0000000E+00;
float u4 = 0.0000000E+00;
float u5 = 0.0000000E+00;
float u6 = 0.0000000E+00;
float u7 = 0.0000000E+00;
float u8 = 0.0000000E+00;
float u9 = 0.0000000E+00;
float u10 = 0.0000000E+00;

/* output variables */

float y1 = 0.0000000E+00;
float y2 = 0.0000000E+00;
float y3 = 0.0000000E+00;
float y4 = 0.0000000E+00;
float y5 = 0.0000000E+00;

/* temporary variables */

float temp_2 = 0.0000000E+00;
float temp_3 = 0.0000000E+00;
float temp_4 = 0.0000000E+00;
float temp_5 = 0.0000000E+00;

/* counters */

long    N    = 1;
long    N2   = 1;

c_int10()
{
    if (N == 20)
        asm("          trapu    27"); /* call TRACE30 */
    N = 0;
}

```

```

x1 = xk1_1;
x2 = xk1_2;
x3 = xk1_3;
x4 = xk1_4;
x5 = xk1_5;
x6 = xk1_6;
x7 = xk1_7;
x8 = xk1_8;
x9 = xk1_9;
x10 = xk1_10;
x11 = xk1_11;
x12 = xk1_12;

if (N2 == 10000)
{
  if (u1 > .01) u1 = 0.0;
  else u1 = 1.54;
  N2 = 0;
}
u9 = -1*ds3001(0x00000040, 0x00000001);
u10 = y1;

y2 =
  temp_2 +
  d2_10 * u10;
y3 =
  temp_3 +
  d3_10 * u10;
y4 =
  temp_4 +
  d4_10 * u10;
y5 =
  temp_5 +
  d5_10 * u10;
ds2101(0x00000080, 0x00000001, y1);
xk1_1 =
  a1_1 * x1 +
  a1_2 * x2 +
  a1_3 * x3 +
  a1_4 * x4 +
  a1_5 * x5 +
  a1_6 * x6 +
  a1_7 * x7 +
  a1_8 * x8 +
  a1_9 * x9 +
  a1_10 * x10 +
  a1_11 * x11 +
  a1_12 * x12 +
  b1_1 * u1 +
  b1_2 * u2 +
  b1_3 * u3 +
  b1_4 * u4 +

```

```

b1_5 * u5 +
b1_6 * u6 +
b1_7 * u7 +
b1_8 * u8 +
b1_9 * u9 +
b1_10 * u10;
xk1_2 =
a2_1 * x1 +
a2_2 * x2 +
a2_3 * x3 +
a2_4 * x4 +
a2_5 * x5 +
a2_6 * x6 +
a2_7 * x7 +
a2_8 * x8 +
a2_9 * x9 +
a2_10 * x10 +
a2_11 * x11 +
a2_12 * x12 +
b2_1 * u1 +
b2_2 * u2 +
b2_3 * u3 +
b2_4 * u4 +
b2_5 * u5 +
b2_6 * u6 +
b2_7 * u7 +
b2_8 * u8 +
b2_9 * u9 +
b2_10 * u10;
xk1_3 =
a3_3 * x3 +
a3_4 * x4 +
b3_9 * u9;
xk1_4 =
a4_3 * x3 +
a4_4 * x4 +
b4_9 * u9;
xk1_5 =
a5_3 * x3 +
a5_4 * x4 +
a5_5 * x5 +
a5_6 * x6 +
a5_7 * x7 +
a5_8 * x8 +
a5_9 * x9 +
a5_10 * x10 +
a5_11 * x11 +
a5_12 * x12 +
b5_9 * u9 +
b5_10 * u10;
xk1_6 =
a6_3 * x3 +

```

```

a6_4 * x4 +
a6_5 * x5 +
a6_6 * x6 +
a6_7 * x7 +
a6_8 * x8 +
a6_9 * x9 +
a6_10 * x10 +
a6_11 * x11 +
a6_12 * x12 +
b6_9 * u9 +
b6_10 * u10;
xk1_7 =
a7_3 * x3 +
a7_4 * x4 +
a7_5 * x5 +
a7_6 * x6 +
a7_7 * x7 +
a7_8 * x8 +
a7_9 * x9 +
a7_10 * x10 +
a7_11 * x11 +
a7_12 * x12 +
b7_9 * u9 +
b7_10 * u10;
xk1_8 =
a8_3 * x3 +
a8_4 * x4 +
a8_5 * x5 +
a8_6 * x6 +
a8_7 * x7 +
a8_8 * x8 +
a8_9 * x9 +
a8_10 * x10 +
a8_11 * x11 +
a8_12 * x12 +
b8_9 * u9 +
b8_10 * u10;
xk1_9 =
a9_3 * x3 +
a9_4 * x4 +
a9_5 * x5 +
a9_6 * x6 +
a9_7 * x7 +
a9_8 * x8 +
a9_9 * x9 +
a9_10 * x10 +
a9_11 * x11 +
a9_12 * x12 +
b9_9 * u9 +
b9_10 * u10;
xk1_10 =
a10_3 * x3 +

```

```

a10_4 * x4 +
a10_5 * x5 +
a10_6 * x6 +
a10_7 * x7 +
a10_8 * x8 +
a10_9 * x9 +
a10_10 * x10 +
a10_11 * x11 +
a10_12 * x12 +
b10_9 * u9 +
b10_10 * u10;
xk1_11 =
a11_3 * x3 +
a11_4 * x4 +
a11_5 * x5 +
a11_6 * x6 +
a11_7 * x7 +
a11_8 * x8 +
a11_9 * x9 +
a11_10 * x10 +
a11_11 * x11 +
a11_12 * x12 +
b11_9 * u9 +
b11_10 * u10;
xk1_12 =
a12_3 * x3 +
a12_4 * x4 +
a12_5 * x5 +
a12_6 * x6 +
a12_7 * x7 +
a12_8 * x8 +
a12_9 * x9 +
a12_10 * x10 +
a12_11 * x11 +
a12_12 * x12 +
b12_9 * u9 +
b12_10 * u10;
y1 =
c1_1 * xk1_1;
temp_2 =
c2_3 * xk1_3 +
c2_5 * xk1_5;
temp_3 =
c3_3 * xk1_3 +
c3_6 * xk1_6;
temp_4 =
c4_3 * xk1_3 +
c4_7 * xk1_7;
temp_5 =
c5_3 * xk1_3 +
c5_8 * xk1_8;

```

```
    if (y1 > .1) y1 = .1;
    else if (y1 < -.1) y1 = -.1;

    N++;
    N2++;
}

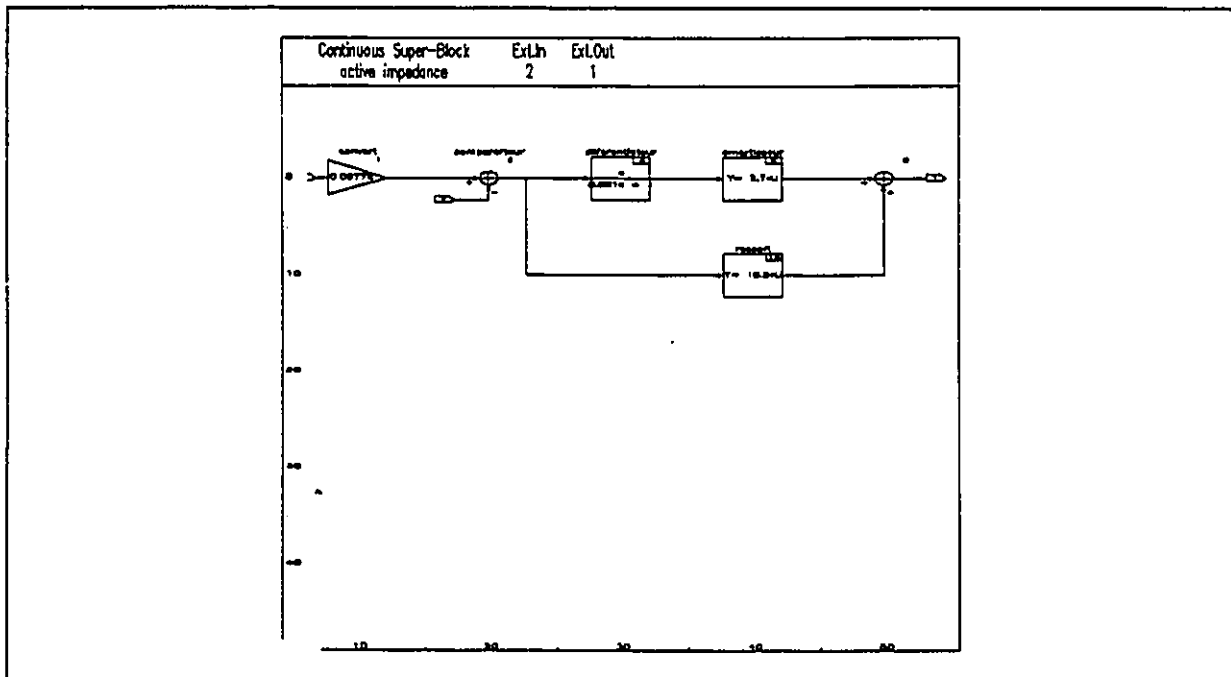
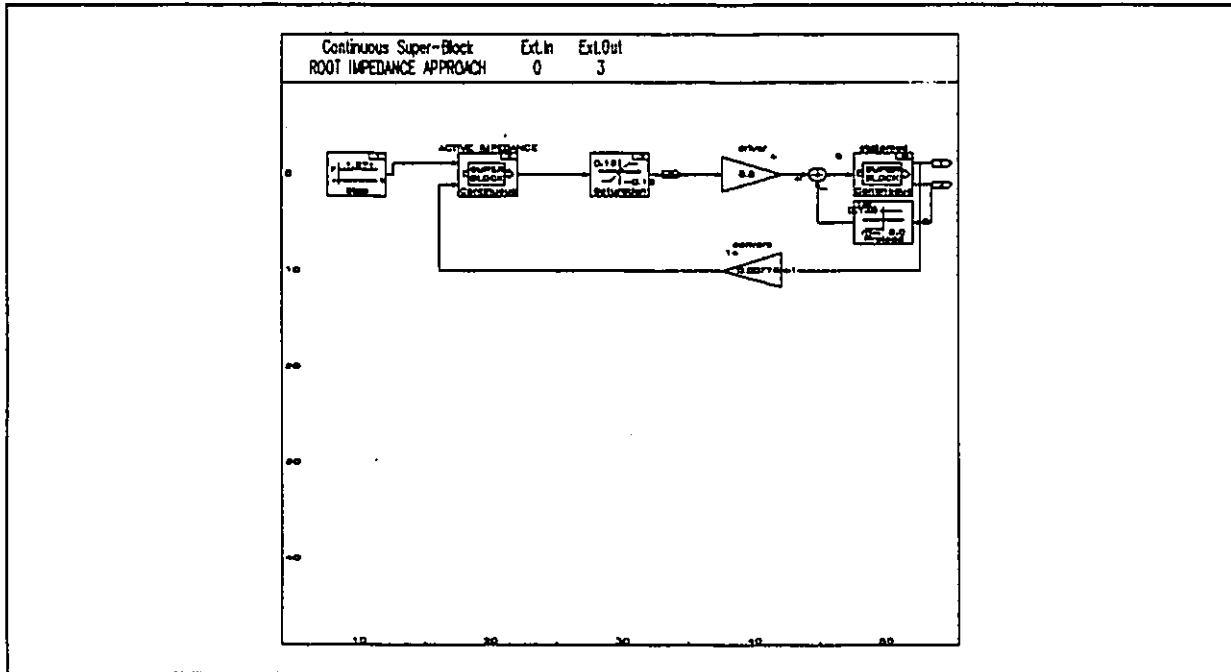
void init();
void timer1(float time);

main()

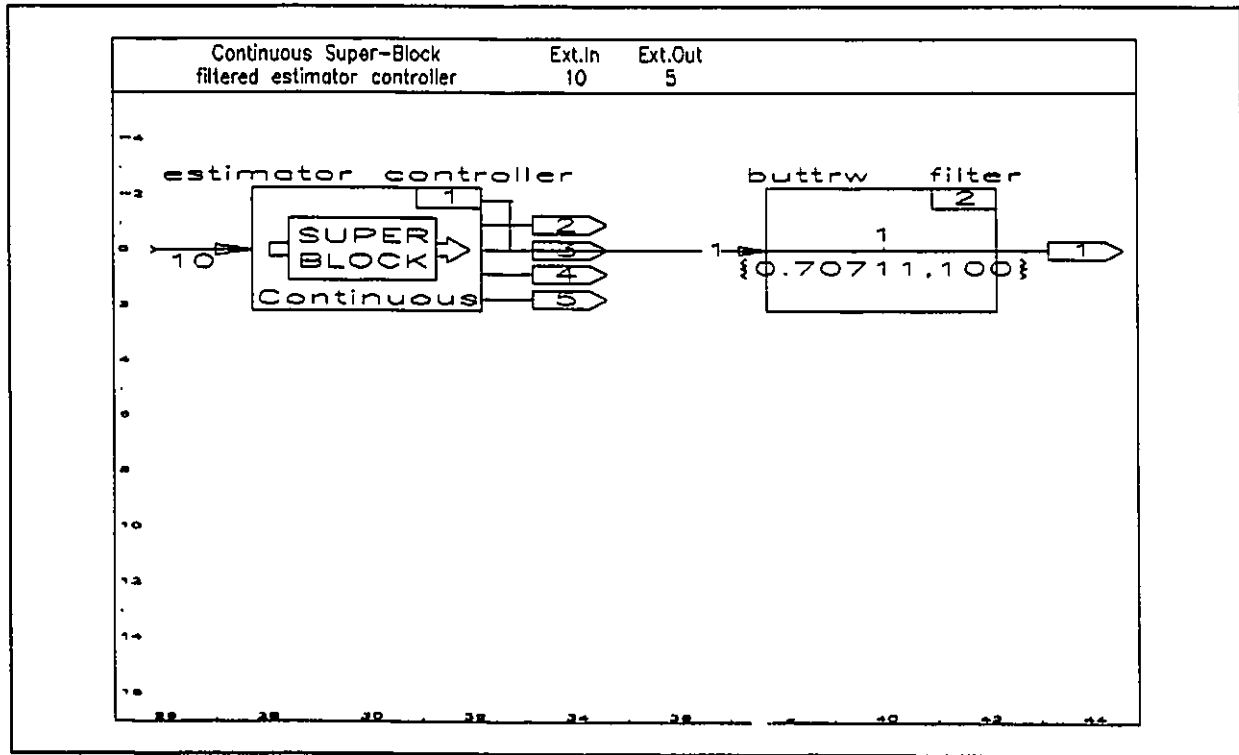
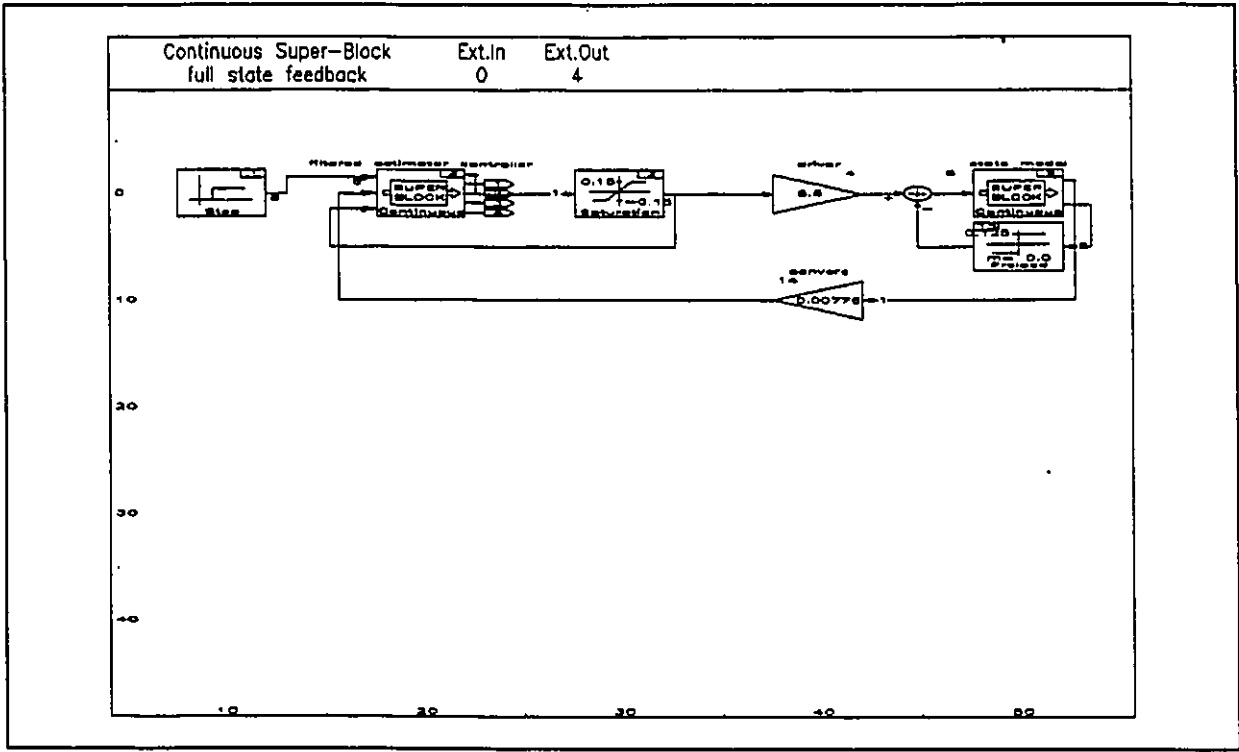
{
    init();
    timer1(5.0000000E-04);
    for (;;)
        ;
}
```

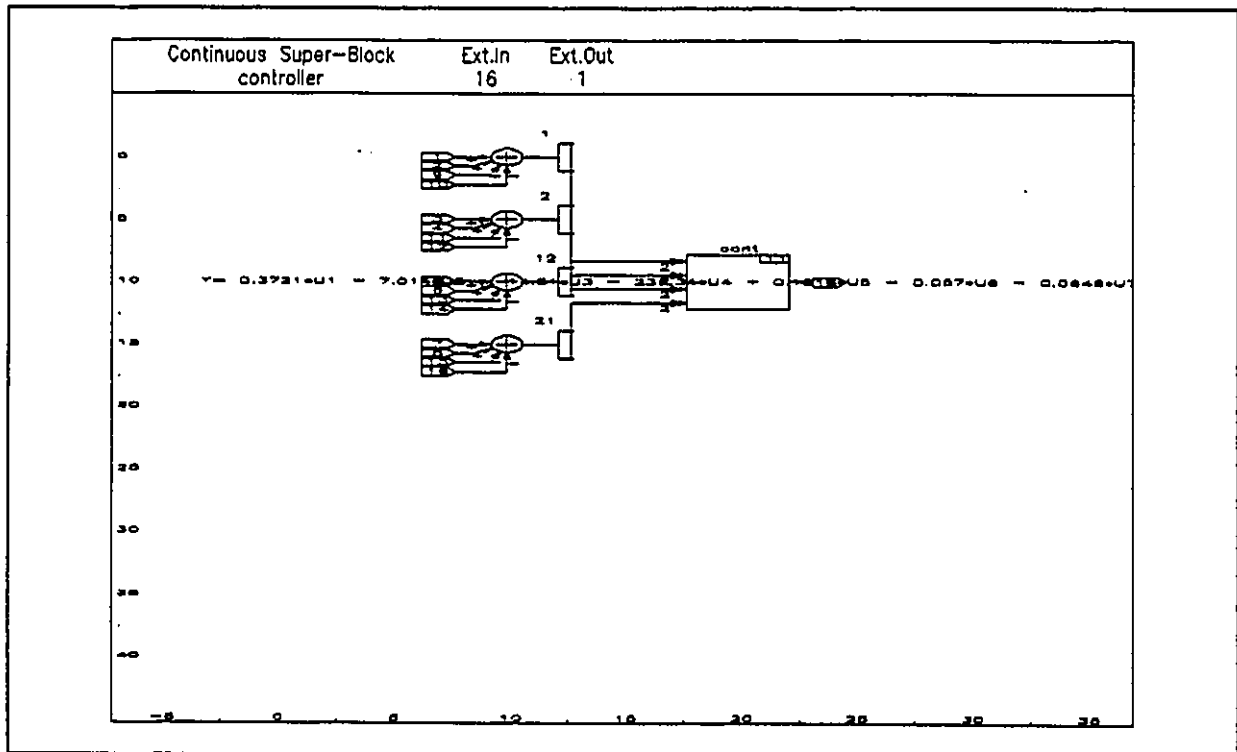
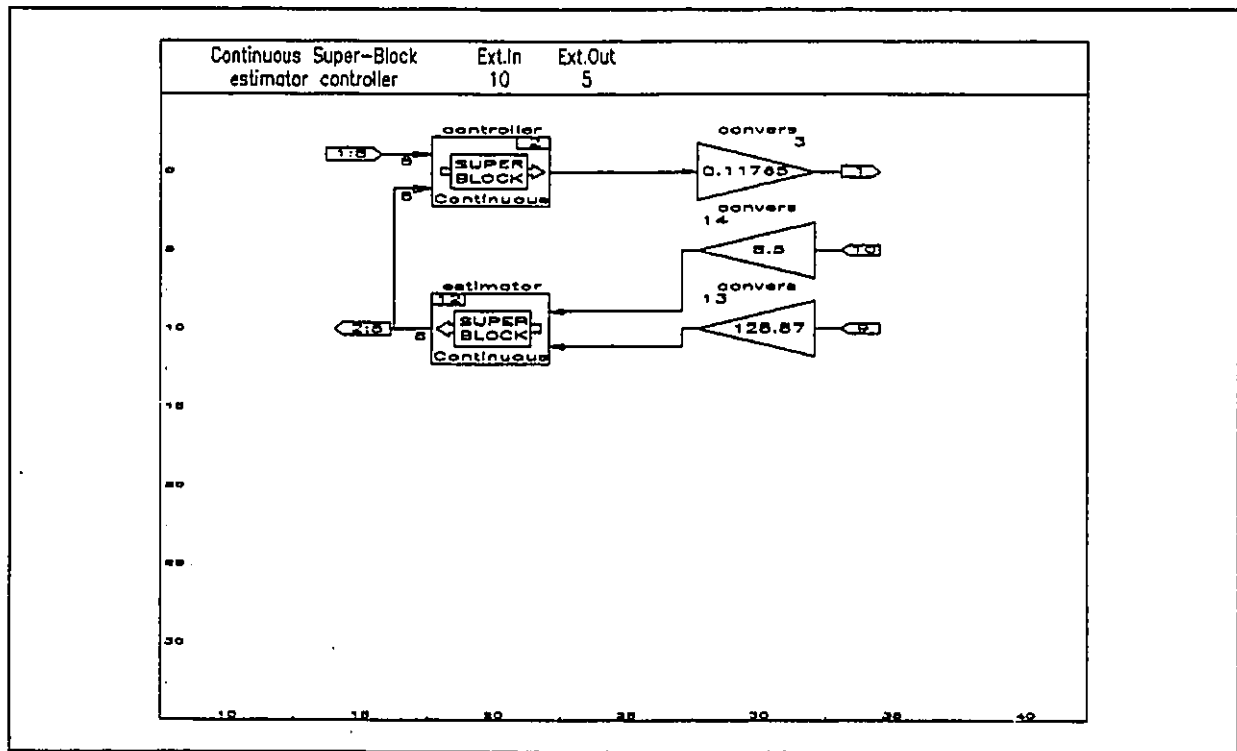
**C.4 - PROGRAMMES BUILD DE SIMULATION**

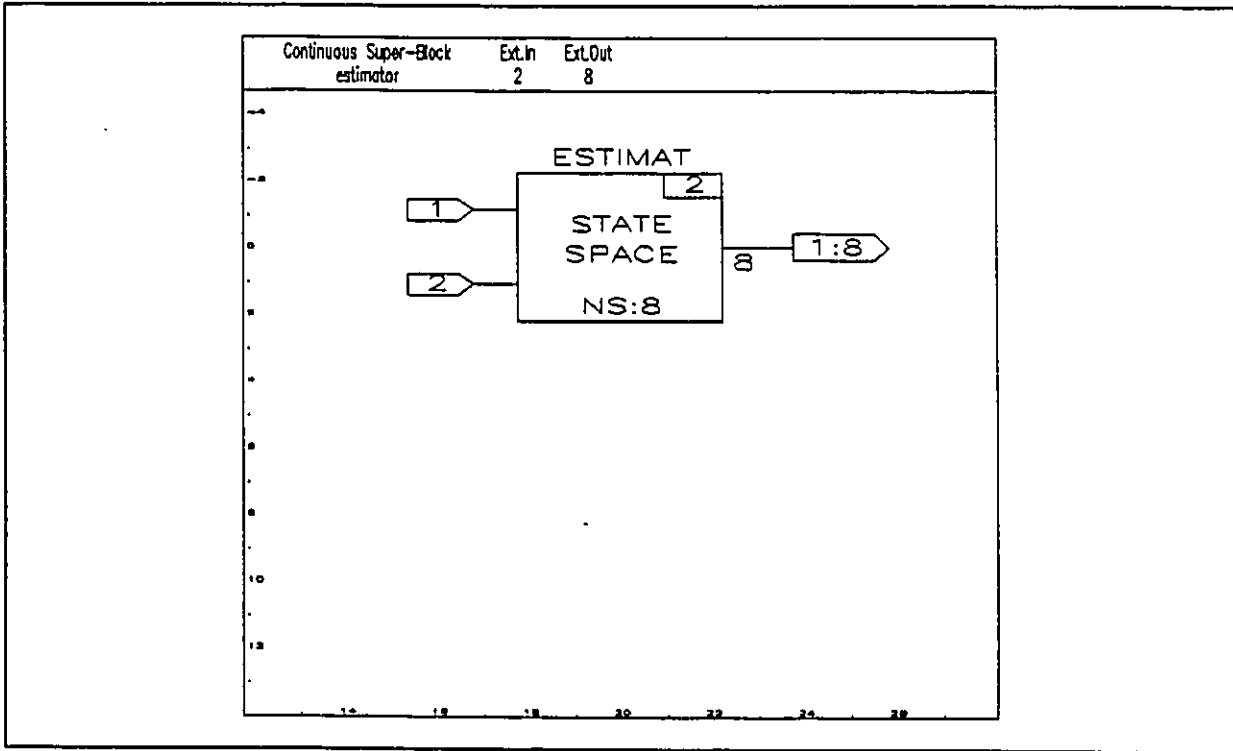
**IMPÉDANCE ACTIVE**



**RETOUR D'ÉTAT**







ANNEXE D

SYNTHESE

Le modèle numérique utilisé pour la synthèse des impédances actives atténuants les différents mode de vibration est celui de l'équation 7-2. Selon les équations 6-2, voici les détails des calculs pour la synthèse.

D'abord, les pôles et les zéros en boucle ouverte sont;

i	pôle	zéro
1	-12.5 + 21.65 i	-.935 + 8.45 i
2	-12.5 - 21.65 i	-.935 - 8.45 i
3	-7.54 + 57.5 i	-2.45 + 48.94 i
4	-7.54 - 57.5 i	-2.45 - 48.94 i
5	-4.38 + 145.9 i	-2.1 + 140 i
6	-4.38 - 145.9 i	-2.1 - 140 i
7	0	
8	-6.25	

Alors pour obtenir un pôle à:

$$\underline{-20 + 20 i}$$

i	Angle		Grandeur	
	$\alpha_i$ (deg)	$\beta_i$ (deg )	$P_d P_i$	$P_d Z_i$
1	192.4	148.8	7.6794	22.3
2	100.2	123.8	42.32	34.25
3	251.6	238.8	39.53	33.85
4	99.1	99.5	78.5	71.14
5	262.9	261.5	126.87	121.33
6	95.4	96.38	166.63	161.0
7	135.0		28.28	
8	124.5		24.27	

$$\beta_c = 119^\circ \quad K_r/K_a = 8.9 \quad K_r = .5251 \quad K_a = .059$$

-20 + 60 i

Angle		Grandeur		
i	$\alpha_i$ (deg)	$\beta_i$ (deg )	$P_d P_i$	$P_d Z_i$
1	101.1	110.3	39.1	54.96
2	95.2	105.6	82.0	71.06
3	168.7	147.8	12.7	20.74
4	96.1	99.2	118.2	110.35
5	259.7	257.4	87.3	82.0
6	94.3	95.1	206.5	116.5
7	108.4		63.25	
8	102.9		61.56	

$\beta_c = 31^\circ$   $K_r/K_s = 119.9$   $K_r = 7.82$   $K_s = .0652$

-20 + 145 i

Angle		Grandeur		
i	$\alpha_i$ (deg)	$\beta_i$ (deg )	$P_d P_i$	$P_d Z_i$
1	93.5	97.75	123.6	137.96
2	92.6	97.1	166.8	154.6
3	98.1	100.3	88.4	97.64
4	92.5	95.2	202.9	194.7
5	183.0	164.4	15.6	18.6
6	93.1	93.6	291.32	285.6
7	97.9		146.45	
8	95.4		145.76	

$\beta_c = 18.75^\circ$   $K_r/K_s = 447.15$   $K_r = 54.676$   $K_s = .1223$