Le Développement en Fraction Continue

Par: Camile Mirmiran

Sous la supervision de : Damien Roy

Dans le cadre: PIRPC

Algorithme des fractions continues

Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On écrit

$\xi = a_0 + \frac{1}{\xi_1}$ avec $a_0 = [\xi]$ et $\xi_1 > 1$

$\xi_1 = a_1 + \frac{1}{\xi_2}$ avec $a_1 = [\xi_1]$ et $\xi_2 > 1$

...

$$\Rightarrow \xi = a_0 + \frac{1}{\xi_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\xi_2}}$$

$$= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

On dit que $\xi = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ est le développement en fraction continue de ξ.

Exemple: $\xi = \frac{27}{5}$

$$\frac{27}{5} = 5 + \frac{2}{5} = 5 + \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{27}{5} = [5; 2,2]$$

On dit que $\frac{27}{5}$ a un développement en fraction continue fini.

THM: $\xi \in \mathbb{R}$ a un développement en fraction continue fini $\Leftrightarrow \xi \in \mathbb{Q}$.

Exemple: $\xi = \sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$$
$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$
$$= 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$$
$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$
$$\dots$$
$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{2} = [1; 2,2,2,2, \dots]$$

On dit que ξ a un development ultimement périodique.

THM: $\xi \in \mathbb{R}$ a un développement ultimement périodique
$\Leftrightarrow \xi$ est racine d'un polynôme de second degré à coefficients entiers.

Exemple: $\xi = \phi$

$\phi = [1; 1,1,1,1, \dots] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ est racine de $x^2 - x - 1$.

Exemple: $\xi = e$

$e = [1; 2,1,1,4,1,1,6,1,1,8, \dots]$ a un développement régulier.

Domaines Euclidiens

Un Domaine Euclidien est un anneau $(R, +, \cdot)$ muni d'une fonction $\delta: R \backslash \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ (appelé le sthasme euclidien)

Satisfaisant

$(E0)$ $\forall a, b \in R,\ ab = 0 \Rightarrow a = 0$ *ou* $b = 0$

$(E1)$ $\forall a, b \in R, \exists\, q, r \in R$ *t.q.*

$a = qb + r$ *avec* $r = 0$ *ou* $\delta(r) < \delta(b)$

$(E2)$ *Si* $a \neq 0 \neq b$, *alors* $\delta(ab) \geq \delta(a)\delta(b)$

On peut plonger un tel anneau dans son corps de fractions

$E = \left\{ \frac{a}{b} ; a, b \in R \text{ et } b \neq 0 \right\}$

avec $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1$.

Algorithme d'Euclide

$r_0, r_1 \in R$ avec $r_1 \neq 0$, on peut écrire

$r_0 = a_0 r_1 + r_2$, *avec* $\delta(r_2) < \delta(r_1)$

$r_1 = a_1 r_2 + r_3$, avec $\delta(r_3) < \delta(r_2)$

...

$r_{n-1} = a_{n-1} r_n + r_{n+1}$,avec $\delta(r_{n+1}) < \delta(r_n)$

$r_n = a_n r_{n+1}$

$$\Rightarrow \frac{r_0}{r_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}$$

Exemple: $R = \mathbb{R}[X]$

$\delta(p(x)) = degré(p(x))$

$$\frac{x^5 + 4x^4 + x^3 - x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + x - 2}$$
$$= 9x^2 + 6x - 5 + \frac{x^2 + x - 3}{x^3 + 3x^2 + x - 2}$$
$$= 9x^2 + 6x - 5 + \frac{1}{(x+2) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{-2(x-2)}}}$$

Généralisation aux complexes

L'anneau des entiers de Gauss est un domaine Euclidien $R = \mathbb{Z}[i]$, avec pour sthasme la norme complexe

$\delta(a + bi) = |a + bi|^2 = a^2 + b^2$

On a pour corps de fraction

$E = \mathbb{Q}(i) = \left\{ \frac{a+bi}{c+di} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ et } c \neq 0 \text{ ou } d \neq 0 \right\}$

Exemple: $\xi = \frac{22+5i}{1-2i}$

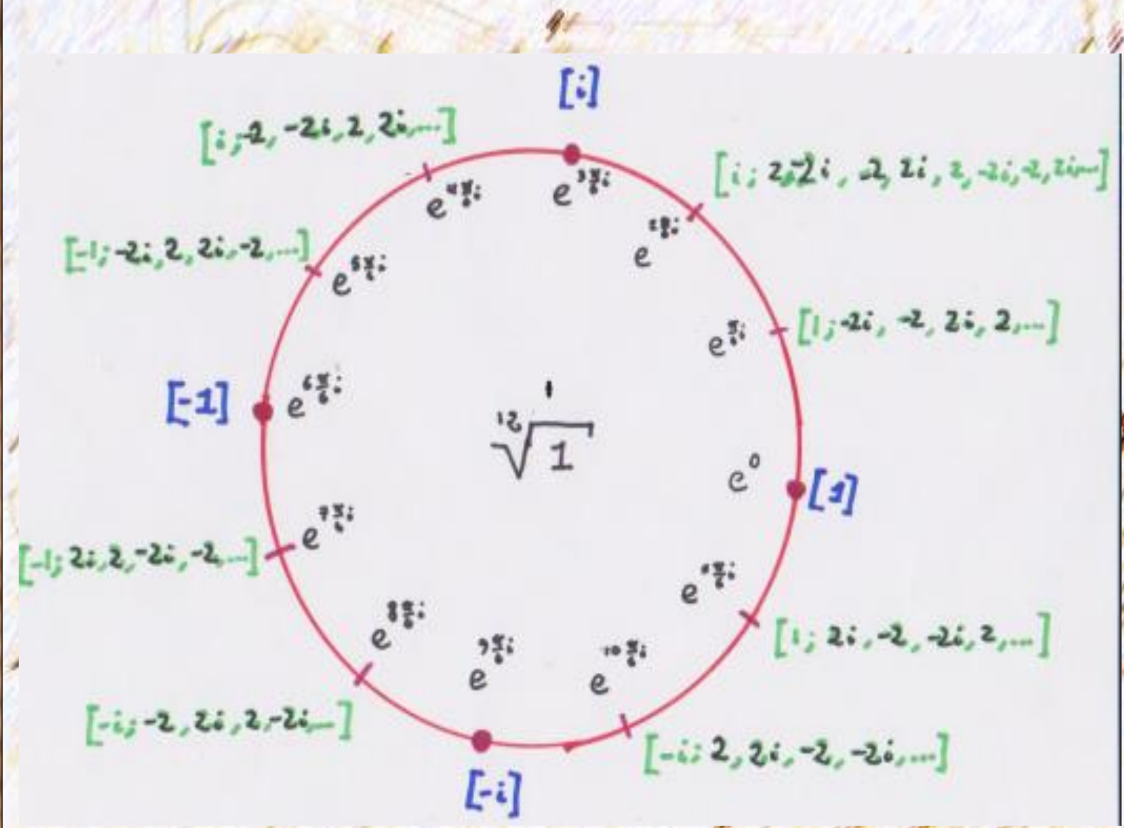
$$\frac{22 + 5i}{1 - 2i} = 5 + 11i + \frac{1}{2 + i}$$

Exemple: $\xi = e^i$

$e^i = [1 + i; 2 - i, 3i, 2, -5i, -2, 7i, 2, -9i, -2, 11i, 2, -13i, -2, \dots]$

e^i a un développement régulier.

Exemple: $\xi = \sqrt[12]{1}$



Réference:

Analysis by its history - RIM

Abstract Algebra – Wiley