

Approximation diophantienne avec contrainte d'angles

Jérémy Champagne

Thèse soumise en vue de l'obtention de la
Maîtrise ès sciences Mathématiques et statistique¹

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des sciences
Université d'Ottawa

© Jérémy Champagne, Ottawa, Canada, 2021

1. le programme de maîtrise est un programme conjoint avec l'Université Carleton, administré par l'Institut en mathématiques et en statistique d'Ottawa-Carleton

Résumé

Soient k, n des entiers avec $1 \leq k \leq n - 2$. On cherche le suprémum $\omega(n, k)$ des nombres ω avec la propriété suivante. Pour tout point $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , tout sous-espace E de \mathbb{R}^n orthogonal à \mathbf{u} de dimension k et tout $\delta > 0$, il existe une infinité de points non nuls $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ formant un angle au plus δ avec E tels que $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{x}\|^{-\omega}$. Ici, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ désigne le produit scalaire de \mathbf{x} avec \mathbf{u} et $\|\mathbf{x}\|$ désigne la norme de \mathbf{x} . En posant $\nu_m = (m - 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 3})/2$, Schmidt (1976) a démontré que $\omega(3, 1) \geq \nu_2$, puis Thurnheer (1990) a obtenu $\omega(n, n - 2) \geq \nu_{n-1}$ en général. En 2014, Roy a établi que $\omega(3, 1) = \nu_2$. Dans ce mémoire, on montre que $\omega(n, 1) = \nu_2$ quel que soit n , on simplifie l'argument de Thurnheer et on montre que $\omega(n, k) \geq \nu_{k+1}$ en général. On répond également à une question connexe de Badziahin et Bugeaud.

Abstract

Let k, n be integers with $1 \leq k \leq n - 2$. We seek the supremum $\omega(n, k)$ of all number ω with the following property. For any point $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ with linearly independent coordinates over \mathbb{Q} , any subspace E of \mathbb{R}^n which is orthogonal to \mathbf{u} of dimension k , and any $\delta > 0$, there exist infinitely many non-zero points $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ making an angle at most δ with E such that $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{x}\|^{-\omega}$. Here, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ denotes the scalar product of \mathbf{x} with \mathbf{u} and $\|\mathbf{x}\|$ denotes the norm of \mathbf{x} . Letting $\nu_m = (m - 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 3})/2$, Schmidt (1976) proved that $\omega(3, 1) \geq \nu_2$, then Thurnheer (1990) obtained $\omega(n, n - 2) \geq \nu_{n-1}$ in general. In 2014, Roy established that $\omega(3, 1) = \nu_2$. In this thesis, we show that $\omega(n, 1) = \nu_2$ no matter the choice of n , we simplify Thurnheer's argument and we show that $\omega(n, k) \geq \nu_{k+1}$ in general. We also answer a related question asked by Badziahin and Bugeaud.

Remerciements

Je remercie d'abord et avant tout mon superviseur Damien Roy pour toute l'aide et le support moral qu'il m'a apporté ces deux dernières années. Tu es le premier à avoir cru en ma capacité à réussir dans ce domaine et je t'en serai toujours reconnaissant. Je me considère choyé d'avoir travaillé avec un chercheur de ton calibre et j'ai énormément appris sous ta tutelle.

Je remercie également mes parents de toujours avoir eu mon avenir à cœur et de m'avoir permis de poursuivre mes études en mathématique. Vous m'avez toujours appuyé dans mon choix de carrière et, autrement, je ne serais probablement pas là où j'en suis. Je vous remercie de m'avoir hébergé pendant toute cette année de pandémie et de confinement. Je remercie ma sœur, Léonie, pour sa tolérance envers mes longs monologues sur les cônes et les prismes et sur les manières d'inscrire les uns dans les autres.

J'offre aussi mes remerciements à quelques-uns de mes collègues de la maîtrise en mathématique : Samuel Pilon, Khalil Besrou, Charalambos Kioulos, Dene Lepine, Gage Thornewell, Maria Perepechaenko, Trinity Chinner, Masoomeh Akbari et Youssef Moussaid. Ce fut un réel plaisir d'apprendre à vos côtés et je suis content de vous compter parmi mes amis. J'espère que nos chemins se recroiseront.

Finalement, je voudrais témoigner de mon admiration pour l'étendue de l'œuvre mathématique de Wolfgang M. Schmidt. Une grande partie de ce mémoire est basée sur ses publications et je lui suis redevable de m'avoir fait connaître d'aussi belles mathématiques.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Historique	1
1.2	Mes contributions	7
1.3	Une contribution additionnelle	11
1.4	Les préliminaires	13
2	Géométrie	14
2.1	Espaces euclidiens	14
2.2	Produit extérieur	19
2.3	Mesure d'angle entre vecteurs	25
2.4	Mesure d'angle entre sous-espaces vectoriels	33
2.5	Domaines angulaires	44
3	Notions d'approximation diophantienne	47
3.1	Exposants d'approximation diophantienne	47
3.2	Suite des meilleures approximations	49
3.3	Relation entre la suite des meilleures approximations et les exposants d'approximation	53
4	Approximation par les formes linéaires dans un cône	58
4.1	Théorème de Schmidt sur l'approximation avec contrainte de signes	58
4.2	Théorème général pour l'approximation dans un cône	63
4.3	Optimalité du résultat	70
5	Approximation par les formes linéaires dans un domaine angulaire	87
5.1	Exposant d'approximation restreint à un sous-ensemble	87
5.2	Premier principe de transfert	90
5.3	Deuxième principe de transfert	92
5.4	Conclusion	98

Chapitre 1

Introduction

Ce mémoire concerne l'approximation rationnelle de n -uplets de nombres réels, un sujet central de la théorie des nombres.

1.1 Historique

On commence par rappeler un résultat fondamental sur l'approximation par les formes linéaires.

Théorème 1.1.1. *Soit $n \geq 1$ et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $X > 1$, il existe $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ non tous nuls avec*

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq X \quad \text{et} \quad |x_0 + x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n| \leq X^{-n}. \quad (1.1.1)$$

Ce résultat est dû à Dirichlet (1842) lorsque X est un entier et sa démonstration se base sur le principe des tiroirs. Puisque les inégalités dans (1.1.1) définissent un parallélépipède dans \mathbb{R}^{n+1} de volume 2^{n+1} , le cas avec X réel est une conséquence directe du théorème des corps convexes de Minkowski [12, §II.2, Théorème 2B]. Dans un article publié en 1976 [11], W. M. Schmidt ajoute une contrainte de signes et obtient le résultat suivant, où $\gamma = (1 + \sqrt{5})/2$ désigne le nombre d'or.

Théorème 1.1.2 (Schmidt, [11, Théorème 1]). *Soient $1, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0 \quad \text{et} \quad |x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2| \leq \varepsilon \max\{x_1, x_2\}^{-\gamma}. \quad (1.1.2)$$

Dans son article, Schmidt mentionne que la condition d'indépendance linéaire est nécessaire. Pour le voir, il suffit de prendre $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ mal approchable, c'est-à-dire un nombre pour lequel il existe une constante $C \in (0, 1)$ telle que

$$|q\alpha_2 - p| \geq Cq^{-1}$$

pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q > 0$. On obtient alors,

$$|x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2| = |x_2\alpha_2 + x_0| \geq Cx_2^{-1} > C \max\{x_1, x_2\}^{-\gamma}$$

pour tout $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ avec $x_1, x_2 > 0$.

Par ailleurs, comme $1, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , il n'existe aucun triplet $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ qui satisfasse (1.1.2) pour tout $\varepsilon > 0$. Donc, en faisant tendre ε vers zéro dans le théorème 1.1.2, on obtient une infinité de triplets $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ avec

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0 \quad \text{et} \quad |x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2| \leq \max\{x_1, x_2\}^{-\gamma}.$$

Toujours dans le même article, Schmidt remarque que le théorème 1.1.2 ne peut être grandement amélioré en augmentant le nombre de variables. Plus précisément, il démontre le résultat suivant.

Théorème 1.1.3 (Schmidt, [11, Remarque F]). *Soit $n \geq 3$. Alors, il existe $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} tels que*

$$|x_0 + x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n| \geq C_\varepsilon \max\{x_1, \dots, x_n\}^{-(2+\varepsilon)}$$

pour tous $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon > 0$ avec $x_1, \dots, x_n > 0$, où C_ε est une constante positive ne dépendant que de ε .

En 1983, Schmidt conjecture que γ peut être remplacé par $2 - \varepsilon$ dans le théorème 1.1.2 pour n'importe quel $\varepsilon > 0$ [13, §5], alors qu'il n'émet pas d'opinion précise dans son article original de 1976. En 1990, Thurnheer a obtenu la généralisation suivante du résultat de Schmidt.

Théorème 1.1.4 (Thurnheer, [14, Théorème 1.b]). *Soit $n \geq 2$ et soient $1, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$|x_n| < \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \quad \text{et} \quad |x_0 + x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n| \leq \varepsilon \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}^{-\nu_n}, \quad (1.1.3)$$

où

$$\nu_n = \frac{n-1 + \sqrt{(n-1)(n+3)}}{2}.$$

En effet, on va montrer que le cas $n = 2$ du théorème 1.1.4 implique le théorème 1.1.2. Pour cela, on suppose $1, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} et $\varepsilon > 0$. En posant

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2},$$

les nombres $1, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . Puisque $\nu_2 = \gamma$, il suit du théorème 1.1.4 qu'il existe $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ avec

$$|x_2| < |x_1| \quad \text{et} \quad |x_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2| \leq 2^{-1-\gamma}\varepsilon|x_1|^{-\gamma}.$$

Quitte à remplacer chaque x_i par $-x_i$, on peut supposer que $x_1 > 0$. On observe que

$$x_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2 = x_0 + \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\alpha_1 + \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\alpha_2$$

et on pose donc

$$y_0 = 2x_0, \quad y_1 = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad y_2 = x_1 - x_2.$$

On a ainsi $(y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^3$ et, comme $|x_2| < x_1$, on a $0 < y_i \leq 2x_1$ pour $i = 1, 2$. On obtient aussi

$$|y_0 + y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2| = 2|x_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2| \leq \varepsilon(2x_1)^{-\gamma} \leq \varepsilon \max\{y_1, y_2\}^{-\gamma}.$$

Dans le même article, Thurnheer démontre le résultat suivant.

Théorème 1.1.5 (Thurnheer, [14, Théorème 2]). *Soit $n \geq 2$ et soient $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . On suppose qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ avec $1/n < t < 1/(n-1)$ et une constante $C > 0$ tels que*

$$\max_{1 \leq i \leq n} |y_0\alpha_i - y_i| \geq C|y_0|^{-t} \tag{1.1.4}$$

pour tout $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ avec $y_0 \neq 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ avec

$$|x_n| < \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \quad \text{et} \quad |x_0 + x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}^{-(h(t)-\varepsilon)},$$

où

$$h(t) := \frac{(n-1)^2t + 1 + \sqrt{((n-1)^2t + 1)^2 + 4n^2(n-1)t^2}}{2nt}.$$

Pour mieux apprécier l'importance du théorème 1.1.5, on rappelle deux résultats fondamentaux sur l'approximation simultanée.

Théorème 1.1.6. *Soit $n \geq 1$ et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $Y > 1$, il existe $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{Z}$ non tous nuls avec*

$$|y_0| \leq Y \quad \text{et} \quad \max_{1 \leq i \leq n} |y_0 \alpha_i - y_i| \leq Y^{-1/n}.$$

Comme pour le théorème 1.1.1, le théorème 1.1.6 est dû à Dirichlet lorsque $Y^{1/n}$ est un entier et est dû à Minkowski lorsque $Y > 1$ est un nombre réel quelconque. Le résultat qui suit est une conséquence d'un théorème classique de Khintchine (voir [12, §III.3, Théorème 3A]).

Théorème 1.1.7. *Soit $n \geq 1$ un entier. Alors, pour presque tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ (au sens de la mesure de Lebesgue), on a*

$$\max_{1 \leq i \leq n} |y_0 \alpha_i - y_i| \geq C_\varepsilon |y_0|^{-(1/n+\varepsilon)}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ avec $y_0 \neq 0$, où $C_\varepsilon > 0$ est une constante ne dépendant que de $\varepsilon > 0$ et de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Une conséquence du théorème 1.1.7 est que, pour presque tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, l'hypothèse (1.1.4) du théorème 1.1.5 est satisfaite pour tout $t > 1/n$. On observe aussi que la fonction $h(t)$ donnée au théorème 1.1.5 est décroissante sur l'intervalle $1/n < t < 1/(n-1)$ et tend vers n lorsque t tend vers $1/n$. On arrive donc au corollaire suivant.

Corollaire 1.1.8. *Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour presque tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe une infinité de $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ avec*

$$|x_n| < \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \quad \text{et} \quad |x_0 + x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}^{-(n-\varepsilon)}.$$

Par un argument similaire à celui donné après le théorème 1.1.4, le cas $n = 2$ du corollaire 1.1.8 implique que la conjecture de Schmidt est vérifiée pour presque toute paire de nombres réels.

Plus récemment, en 2009, Bugeaud et Kristensen ont introduit des nombres $\omega_{n,k}(\boldsymbol{\alpha})$ qui mesurent la qualité d'approximation d'un point $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ sous des contraintes qui généralisent celles de Schmidt et Thurnheer [2].

Définition 1.1.9. Soient k, n des entiers avec $1 \leq k < n$ et soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un point de \mathbb{R}^n avec $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . On définit $\omega_{n,k}(\alpha)$ comme le suprémum des $\omega \in \mathbb{R}$ pour lesquels le système d'inégalités

$$\begin{aligned} \max\{|x_{k+1}|, \dots, |x_n|\} &< \max\{|x_1|, \dots, |x_k|\}, \\ |x_0 + x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n| &\leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}^{-\omega} \end{aligned}$$

admet une infinité de solutions $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$.

Avec ces notations, on va montrer que le théorème 1.1.4 implique $\omega_{n,n-1}(\alpha) \geq \nu_n$. Pour cela, on pose

$$\beta_1 = n\alpha_1, \dots, \beta_{n-1} = n\alpha_{n-1}, \beta_n = \alpha_n,$$

ce qui donne $1, \beta_1, \dots, \beta_n$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . On applique le théorème 1.1.4 avec β_1, \dots, β_n en faisant tendre ε vers zéro, ce qui fournit une infinité de $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ avec

$$|x_n| < \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \quad \text{et} \quad |x_0 + x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n| \leq n^{-\nu_n} \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}^{-\nu_n}.$$

Pour un tel $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, on pose

$$y_0 = x_0, \quad y_1 = nx_1, \quad \dots, \quad y_{n-1} = nx_{n-1}, \quad y_n = x_n,$$

de sorte que

$$x_0 + x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n = y_0 + y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n.$$

Cela fournit une infinité de $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ avec

$$|y_n| = |x_n| < \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \leq n \max\{|x_1|, \dots, |x_{n-1}|\} = \max\{|y_1|, \dots, |y_{n-1}|\}$$

et

$$|y_0 + y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n| \leq n^{-\nu_n} \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}^{-\nu_n} \leq \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\}^{-\nu_n}.$$

On en déduit $\omega_{n,n-1}(\alpha) \geq \nu_n$.

De la même façon, le corollaire 1.1.8 implique que $\omega_{n,n-1}(\alpha) \geq n$ pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

Dans leur article [2], Bugeaud et Kristensen obtiennent des résultats sur le spectre des valeurs atteintes par le n -uplet $(\omega_{n,1}(\alpha), \dots, \omega_{n,n-1}(\alpha))$. Ils observent que l'on a toujours $\omega_{n,k}(\alpha) \geq k$ et soulèvent les deux problèmes suivants.

Problème 1. Soient $1 \leq k < n$ des entiers. Existe-t-il $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} tel que $\omega_{n,k}(\boldsymbol{\alpha}) < k + 1$?

Problème 2. Existe-t-il une suite de nombres $\{b_n\}_{n \geq 2}$ avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2$$

telle que, pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} on ait

$$\omega_{n,1}(\boldsymbol{\alpha}) \geq b_n ?$$

En 2012, contre toute attente, Moshchevitin obtient un contre-exemple à la conjecture de Schmidt. Cela répond également au problème 1 dans le cas $(n, k) = (2, 1)$.

Théorème 1.1.10 (Moshchevitin, [7, Théorème 1]). Il existe $1, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} tels que

$$|x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2| \geq 2^{-300} \max\{x_1, x_2\}^{-\eta}$$

pour tout triplet $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ avec $x_1, x_2 > 0$, où η désigne la plus grande racine réelle du polynôme

$$z^4 - 2z^2 - 4z + 1.$$

On note que $\eta \approx 1,947$.

Un peu plus tard, Roy démontre que le théorème 1.1.2 est en fait optimal. Dans son article [8], il affirme d'abord que le théorème 1.1.2 est équivalent au résultat suivant.

Théorème 1.1.11. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , soit $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ unitaire avec $\mathbf{u} \cdot \mathbf{d} = 0$ et soit $\delta \in (0, \pi/2)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ non nul tel que

$$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{d}) < \delta \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma},$$

où $\|\cdot\|_2$ dénote la norme euclidienne sur \mathbb{R}^3 et où $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ dénote l'angle aigu entre les droites $\langle \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}}$ et $\langle \mathbf{d} \rangle_{\mathbb{R}}$.

Ensuite, il construit des points $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ avec les propriétés suivantes.

Théorème 1.1.12. *Soit $\psi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ une fonction croissante tendant vers l'infini. Alors, il existe un triplet $(\mathbf{u}, \mathbf{d}, \delta)$ satisfaisant les hypothèses du théorème 1.1.11 tel que le système d'inégalités*

$$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{d}) < \delta \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \frac{1}{\psi(\|\mathbf{x}\|_2) \|\mathbf{x}\|_2^\gamma}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$.

On va montrer que la condition $\mathbf{d} \cdot \mathbf{u} = 0$ dans le théorème 1.1.11 est nécessaire. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} et soit $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ unitaire. On suppose que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{d} \neq 0$, ce qui revient à dire que $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{d}) < \pi/2$. Alors, il existe $\delta \in (0, \pi/2)$ tel que $\angle(\mathbf{d}, \mathbf{u}) < \pi/2 - 2\delta$. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ non nul avec $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{d}) < \delta$, on a

$$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \angle(\mathbf{x}, \mathbf{d}) + \angle(\mathbf{d}, \mathbf{u}) \leq \pi/2 - \delta$$

et donc

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{u}\|_2 \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq \kappa \|\mathbf{x}\|_2,$$

où $\kappa = \|\mathbf{u}\|_2 \cos(\pi/2 - \delta) > 0$.

1.2 Mes contributions

Dans mon mémoire, je me suis d'abord appliqué à généraliser la construction de Roy à \mathbb{R}^n pour tout $n \geq 3$. On peut définir $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in [0, \pi/2]$ pour $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ non nuls en imposant la condition

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = \|\mathbf{v}\|_2 \|\mathbf{w}\|_2 \cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Cela étend la définition usuelle de \angle sur \mathbb{R}^3 . J'ai obtenu le théorème suivant.

Théorème 1.2.1. *Soit $n \geq 3$ et soit $\psi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ une fonction croissante tendant vers l'infini. Alors, il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ unitaire avec $\mathbf{u} \cdot \mathbf{d} = 0$ et $\delta \in (0, \pi/2)$ tels que le système d'inégalités*

$$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{d}) < \delta \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \frac{1}{\psi(\|\mathbf{x}\|_2) \|\mathbf{x}\|_2^\gamma}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$.

Une conséquence de ce théorème est que, pour tout $n \geq 2$, il existe $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} tels que

$$\omega_{n,1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq \gamma.$$

Cela répond au problème 1 (pour $k = 1$) et au problème 2 de Bugeaud et Kristensen. On se demande alors si le théorème 1.1.11 demeure vrai avec le même exposant γ lorsque l'on remplace les ensembles $\mathbb{Z}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ par $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$. En effet, il est naturel de penser qu'on peut toujours faire mieux quand on augmente le nombre de variables. Cependant, la contrainte angulaire dans le théorème 1.1.11 complique la tâche. Avec mon superviseur Damien Roy, nous avons développé une méthode simple pour contourner ces complications et je suis ensuite parvenu à généraliser le théorème 1.1.11 comme suit.

Théorème 1.2.2. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , soit $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ unitaire avec $\mathbf{u} \cdot \mathbf{d} = 0$ et soit $\delta \in (0, \pi/2)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ non nul tel que*

$$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{d}) < \delta \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma}.$$

Le théorème 1.2.1 montre que l'exposant γ dans le théorème 1.2.2 est optimal. Finalement, j'ai donné une preuve complète de l'équivalence entre le théorème 1.1.2 de Schmidt et le théorème 1.1.11 de Roy.

Je me suis également intéressé à la généralisation des ensembles apparaissant dans les travaux de Schmidt, Thurnheer, Bugeaud et Kristensen, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &:= \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}, \\ \mathcal{Q}_n &:= \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x_n| < \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \right\}, \\ \mathcal{R}_{n,k} &:= \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \max\{|x_{k+1}|, \dots, |x_n|\} < \max\{|x_1|, \dots, |x_k|\} \right\}, \end{aligned}$$

où $1 \leq k < n$ sont des entiers. Cela m'a mené à la définition suivante.

Définition 1.2.3. *Soit $n \geq 1$, soit E un sous-espace de \mathbb{R}^n et soit $\delta \in (0, 1)$. On note $E^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$ l'orthogonal de E et $\text{proj}_{E^\perp} : \mathbb{R}^n \rightarrow E^\perp$ la projection orthogonale sur E^\perp . On définit*

$$\mathcal{A}(E, \delta) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v})\|_2 < \delta \|\mathbf{v}\|_2\}.$$

On dit que $\mathcal{A}(E, \delta)$ est un domaine angulaire autour de E . En particulier, lorsque $\dim E = 1$, on dit que $\mathcal{A}(E, \delta)$ est un cône.

Soit $n \geq 3$, soit $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ unitaire et soit $\delta \in (0, \pi/2)$. On peut démontrer que

$$\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} \neq 0 \text{ et } \angle(\mathbf{v}, \mathbf{d}) < \delta\} = \mathcal{A}(D, \delta')$$

où $D = \langle \mathbf{d} \rangle_{\mathbb{R}}$ et $\delta' = \sin \delta$. On voit donc que le théorème 1.1.11 énoncé par Roy revient à remplacer \mathcal{P} par un cône de \mathbb{R}^3 dans le théorème 1.1.2 de Schmidt. Dans le même ordre d'idée, \mathcal{Q}_n et $\mathcal{R}_{n,k}$ peuvent également être remplacés par des domaines angulaires de \mathbb{R}^{n+1} dans les travaux de Thurnheer et dans ceux de Bugeaud et Kristensen.

La démonstration du théorème 1.1.2 élaborée par Schmidt se sépare en deux parties, chacune suggérant un principe de transfert entre deux contextes d'approximation. C'est également le cas de la démonstration du théorème 1.1.4 donnée par Thurnheer. De plus, les deux principes de transfert de Thurnheer généralisent ceux de Schmidt.

À partir d'ici, on fixe $n \geq 3$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . On fixe également E un sous-espace de dimension k de \mathbb{R}^n avec $0 \subsetneq E \subsetneq \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ ainsi qu'un nombre $\delta \in (0, 1)$.

Le premier principe de transfert est le suivant.

Théorème 1.2.4. *On suppose $\omega > k$ tel que l'inégalité*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{x}\|_2^{-\omega}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{A}(E, \delta)$. On pose

$$\hat{\omega} = \frac{(n - k - 1)\omega}{\omega - k}.$$

Alors, pour tout $X > 1$ suffisamment grand, le système d'inégalités

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq X \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq X^{-\hat{\omega}}$$

admet une solution non nulle $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$.

La démonstration de ce principe repose sur une utilisation ingénieuse du théorème des corps convexes de Minkowski développée par Schmidt dans le cas $(n, k) = (3, 1)$ (voir [11, Lemme 1]) et se généralise facilement pour $1 \leq k < n - 1$ quelconques. Le deuxième principe de transfert s'énonce comme suit.

Théorème 1.2.5. *On suppose que $k = n - 2$. De plus, on suppose $\hat{\omega} \geq n - 1$ tel que pour tout $X > 1$ suffisamment grand, le système d'inégalités*

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq X \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq X^{-\hat{\omega}}$$

admet une solution non nulle $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$. Alors, l'inégalité

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{x}\|_2^{-(\hat{\omega}-1)}$$

admet une infinité de solutions $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{A}(E, \delta)$.

Le cas $n = 3$ de ce principe est essentiellement démontré par Schmidt dans [11]. Cependant, sa méthode n'est pas applicable au cas avec n général puisqu'elle se base sur un résultat de géométrie des nombres ne fonctionnant qu'en dimension $n = 3$. Le cas général du principe s'obtient plutôt en utilisant la méthode de Thurnheer. À la suggestion de mon directeur, je suis parvenu à une version simplifiée de la méthode de Thurnheer inspirée par la théorie des fractions continues et c'est elle que j'utilise pour démontrer le théorème 1.2.5.

En combinant les théorèmes 1.2.4 et 1.2.5 et en appliquant la méthode développée par moi et Roy, on obtient le résultat suivant. Ici, on utilise les mêmes notations que dans les théorèmes énoncés précédemment. On rappelle en particulier que $k = \dim E$ est un entier entre 1 et $n - 2$ et que

$$\nu_{k+1} = \frac{k + \sqrt{k(k+4)}}{2}.$$

Théorème 1.2.6. *Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe une infinité de $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{A}(E, \delta)$ tel que*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{x}\|_2^{-(\nu_{k+1}-\varepsilon)}.$$

Lorsque $k = n - 2$, cela constitue une version légèrement plus faible du théorème 1.1.4 de Thurnheer. Par contre, cette façon de diviser la preuve en deux principes de transfert montre bien comment le nombre ν_{k+1} apparaît. On note que $k < \nu_{k+1} < k+1$. Une conséquence du théorème 1.2.6 est que, pour tous $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , on a

$$\omega_{n-1,k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \geq \nu_{k+1},$$

ce qui ne semble pas avoir été observé auparavant. En fait, en appliquant notre méthode au théorème 1.1.4 de Thurnheer, on obtient une version plus forte du théorème 1.2.6 (cette démonstration ne fait cependant pas partie du présent mémoire).

Théorème 1.2.7. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{A}(E, \delta)$ tel que*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2^{-\nu_{k+1}}.$$

Cependant, nous ne savons pas si l'exposant ν_{k+1} est optimal dans le théorème 1.2.7 (sauf dans le cas $k = 1$ qui correspond au théorème 1.2.2). Le problème suivant demeure donc ouvert.

Problème 3. *Étant donnés des entiers k, n avec $1 \leq k \leq n - 2$, existe-t-il un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , un sous-espace E de $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ de dimension k et un nombre $\delta \in (0, 1)$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{x}\|_2^{-(\nu_{k+1} + \varepsilon)}$$

n'admette qu'un nombre fini de solutions $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{A}(E, \delta)$?

1.3 Une contribution additionnelle

En 2019, Badziahin et Bugeaud ont démontré un principe de transfert sur l'approximation d'un nombre et de ses puissances [1]. Le principe s'énonce en termes d'exposants d'approximation, que l'on définit comme suit.

Définition 1.3.1. *Soit $m \geq 1$ un entier et soit $\xi \in \mathbb{R}$ un nombre transcendant sur \mathbb{Q} . On définit $\omega_m(\xi)$ comme le suprémum des $\omega \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'inégalité*

$$|x_0 + x_1 \xi + \cdots + x_m \xi^m| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_m|\}^{-\omega} \quad (1.3.1)$$

admet une infinité de solutions $(x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}^{m+1}$.

On définit $\omega_m^{\text{lead}}(\xi)$ de la même façon que $\omega_m(\xi)$, mais en ajoutant la condition

$$|x_m| = \max\{|x_0|, \dots, |x_m|\}$$

au système (1.3.1).

On définit $\lambda_m(\xi)$ comme le suprémum des $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'inégalité

$$\max_{1 \leq i \leq m} |y_0 \xi^i - y_i| \leq |y_0|^{-\lambda}$$

admet une infinité de solutions $(y_0, \dots, y_m) \in \mathbb{Z}^{m+1}$.

L'exposant λ_m est bien connu et l'exposant ω_m est à la base de la classification de Mahler des nombres réels. L'exposant ω_m^{lead} est non standard, mais la contrainte additionnelle dans sa définition permet à Badziahin et Bugeaud de démontrer le principe de transfert suivant.

Théorème 1.3.2 (Badziahin et Bugeaud, [1, Théorème 3.1]). *Soient k, n des entiers avec $2 \leq k \leq n$ et soit $\xi \in \mathbb{R}$ un nombre transcendant sur \mathbb{Q} . Alors, on a*

$$\lambda_n(\xi) \geq \frac{\omega_k^{\text{lead}}(\xi) - n + k}{(k-1)\omega_k^{\text{lead}}(\xi) + n},$$

où l'on convient que le membre de droite est égal à $1/(k-1)$ lorsque $\omega_k^{\text{lead}}(\xi) = +\infty$.

Dans leur article, Badziahin et Bugeaud conjecturent que l'exposant ω_k^{lead} peut être remplacé par l'exposant usuel ω_k dans le théorème 1.3.2. C'est ce que moi et Roy démontrons dans un article publié peu après [4]. En fait, nous donnons un résultat un peu plus fort.

Théorème 1.3.3 (Champagne et Roy). *Soit $k \geq 1$ un entier et soient r_0, \dots, r_k des entiers distincts. Alors, il existe une constante entière $M \geq 1$ telle que, pour tout nombre $\xi \in \mathbb{R}$ transcendant sur \mathbb{Q} , on ait*

$$\omega_k^{\text{lead}}\left(\frac{1}{M(\xi - r_i)}\right) = \omega_k\left(\frac{1}{M(\xi - r_i)}\right)$$

pour au moins un choix de $i \in \{0, \dots, k\}$.

Pour apprécier ce résultat, il faut d'abord rappeler une propriété importante des exposants ω_m et λ_m .

Proposition 1.3.4. *Soit $m \geq 2$ un entier et soit $\xi \in \mathbb{R}$ un nombre transcendant sur \mathbb{Q} . Alors, pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ avec $ad - bc \neq 0$, on a*

$$\omega_m\left(\frac{a\xi + b}{c\xi + d}\right) = \omega_m(\xi) \quad \text{et} \quad \lambda_m\left(\frac{a\xi + b}{c\xi + d}\right) = \lambda_m(\xi).$$

On montre maintenant comment on peut remplacer ω_k^{lead} par ω_k dans le théorème 1.3.2. Pour des entiers $2 \leq k \leq n$ et un nombre $\xi \in \mathbb{R}$ transcendant sur \mathbb{Q} , le théorème 1.3.3 garantit l'existence d'entiers M, r avec $M \geq 1$ et $0 \leq r \leq k$ tels que le nombre

$$\xi' = \frac{1}{M(\xi - r)}$$

satisfait

$$\omega_k^{\text{lead}}(\xi') = \omega_k(\xi') = \omega_k(\xi) \quad \text{et} \quad \lambda_n(\xi') = \lambda_n(\xi).$$

Le théorème 1.3.2 donne alors

$$\lambda_n(\xi) = \lambda_n(\xi') \geq \frac{\omega_k^{\text{lead}}(\xi') - n + k}{(k-1)\omega_k^{\text{lead}}(\xi') + n} = \frac{\omega_k(\xi) - n + k}{(k-1)\omega_k(\xi) + n}$$

tel que désiré.

Plus généralement, soient k, n, m des entiers positifs. Alors, le théorème 1.3.3 permet de remplacer ω_k^{lead} par ω_k dans n'importe quelle relation satisfaite par $\omega_k^{\text{lead}}(\xi)$, $\lambda_n(\xi)$ et $\omega_m(\xi)$ pour tout nombre transcendant ξ .

1.4 Les préliminaires

Ce mémoire débute par deux chapitres de préliminaires. Dans ces chapitres, on se contente d'introduire les outils qui seront utilisés plus loin pour démontrer les résultats principaux.

Le premier de ces deux chapitres porte sur les outils géométriques. On commence par rappeler des notions de base sur les espaces euclidiens, puis on explique comment donner une structure euclidienne au produit extérieur $\bigwedge^k V$ lorsque V est lui-même euclidien. On montre comment utiliser la norme euclidienne sur $\bigwedge^2 V$ pour mesurer l'angle entre deux vecteurs de V . On étend cette notion en une mesure du *degré d'orthogonalité* de k vecteurs de V à l'aide de la norme euclidienne sur $\bigwedge^k V$ (pour $k \geq 2$ général). Ensuite, on montre comment mesurer l'angle entre deux sous-espaces de V et on en donne plusieurs propriétés. La plupart de ces propriétés découlent d'une théorie établie par Schmidt sur les angles canoniques entre deux sous-espaces, présentée dans [10]. On couvre donc également une portion de cette théorie. Finalement, on définit la notion de domaine angulaire et on en démontre quelques propriétés.

Le deuxième chapitre de préliminaires est plus court et porte sur des outils d'approximation diophantienne. Plus précisément, on se place dans le contexte de l'approximation par les formes linéaires. On débute en définissant deux exposants d'approximation diophantienne. Cela facilitera plus tard l'écriture et la démonstration des principes de transfert contenus dans les théorèmes 1.2.4 et 1.2.5. On introduit ensuite les suites de meilleures approximations pour un point $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et on présente deux de leurs propriétés importantes établies par Davenport et Schmidt dans [5]. Finalement, on donne quelques relations entre les exposants d'approximation diophantienne et les suites de meilleures approximations.

Chapitre 2

Géométrie

Ce chapitre rassemble les notions géométriques qui seront utilisées dans le reste du mémoire.

2.1 Espaces euclidiens

On rappelle qu'un espace euclidien est un espace vectoriel V sur \mathbb{R} de dimension finie muni d'un produit scalaire

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

De plus, le produit scalaire sur V induit une norme

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad (\mathbf{v} \in V)$$

appelée norme euclidienne. On dit que $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ sont orthogonaux si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ et que $\mathbf{u} \in V$ est unitaire si $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$. On dit que $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ sont orthonormés s'ils sont tous unitaires et orthogonaux deux-à-deux. Soit W un sous-espace de V . Alors, l'orthogonal de W dans V , noté W^\perp , est le sous-espace donné par

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ pour tout } \mathbf{w} \in W\}.$$

Proposition 2.1.1. *Soient A, B des sous-espaces de V . On a*

- $(A^\perp)^\perp = A$,
- $V = A \oplus A^\perp$,
- $\dim A^\perp = \dim V - \dim A$,
- $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

- $A \subseteq B$ si et seulement si $B^\perp \subseteq A^\perp$.

Comme $V = W \oplus W^\perp$, il existe une unique application linéaire $\text{proj}_W : V \rightarrow W$ telle que

$$\mathbf{v} - \text{proj}_W(\mathbf{v}) \in W^\perp$$

pour tout $\mathbf{v} \in V$. On dit que proj_W est la projection orthogonale de V sur W . En particulier, on a

$$\mathbf{v} = \text{proj}_W(\mathbf{v}) + \text{proj}_{W^\perp}(\mathbf{v})$$

pour tout $\mathbf{v} \in V$. Soient W_1, \dots, W_k des sous-espaces de V . On dit que W_1, \dots, W_k sont deux-à-deux orthogonaux si

$$W_i \subseteq W_j^\perp \quad (1 \leq i, j \leq k, \quad i \neq j).$$

Proposition 2.1.2. *Soient W_1, \dots, W_k des sous-espaces de V deux-à-deux orthogonaux avec*

$$V = W_1 + \dots + W_k.$$

Alors, pour tout $\mathbf{v} \in V$, on a

$$\mathbf{v} = \text{proj}_{W_1}(\mathbf{v}) + \dots + \text{proj}_{W_k}(\mathbf{v}) \quad (2.1.1)$$

et

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\|\text{proj}_{W_1}(\mathbf{v})\|_2^2 + \dots + \|\text{proj}_{W_k}(\mathbf{v})\|_2^2}.$$

Démonstration: Puisque W_1, \dots, W_k sont deux-à-deux orthogonaux, on a

$$W_1 + \dots + \widehat{W_i} + \dots + W_k \subseteq W_i^\perp \quad (1 \leq i \leq k).$$

Soit $\mathbf{v} \in V$. Puisque $V = W_1 + \dots + W_k$, il existe $\mathbf{w}_1 \in W_1, \dots, \mathbf{w}_k \in W_k$ tels que

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_k.$$

Comme $\mathbf{w}_i \in W_i$ satisfait

$$\mathbf{v} - \mathbf{w}_i \in W_1 + \dots + \widehat{W_i} + \dots + W_k \subseteq W_i^\perp,$$

on en déduit que

$$\mathbf{w}_i = \text{proj}_{W_i}(\mathbf{v}) \quad (1 \leq i \leq k)$$

et (2.1.1) s'ensuit. Puisque les W_1, \dots, W_k sont deux-à-deux orthogonaux, on a

$$\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j = \begin{cases} \|\mathbf{w}_i\|_2^2 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On a donc

$$\|\mathbf{v}\|_2^2 = (\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_k) \cdot (\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_k) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\|_2^2$$

tel que désiré. ■

Théorème 2.1.3 (Algorithme de Gram-Schmidt). *Soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$. Alors, il existe $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ deux-à-deux orthogonaux tels que*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1, \\ \mathbf{v}_2 &\in \mathbf{u}_2 + \langle \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{R}}, \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_k &\in \mathbf{u}_k + \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1} \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a

1. $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}}$;
2. $\|\mathbf{u}_i\|_2 = 0$ si et seulement si $\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle_{\mathbb{R}}$;
3. $\|\mathbf{u}_i\|_2 \leq \|\mathbf{v}_i\|_2$, avec l'égalité si et seulement si $\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$.

Si V' est également un espace euclidien, on rappelle que toute application linéaire $h : V \rightarrow V'$ possède une adjointe, c'est-à-dire une application linéaire $h^* : V' \rightarrow V$ telle que

$$h(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{v} \cdot h^*(\mathbf{v}')$$

pour tous $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v}' \in V'$. On note que $(h^*)^* = h$.

On dit qu'un endomorphisme linéaire Q de V est orthogonal si $Q \circ Q^* = Q^* \circ Q$ est l'identité sur V . Tout endomorphisme orthogonal de V est donc un automorphisme. En fait, un automorphisme Q de V est orthogonal si et seulement si on a

$$Q\mathbf{v} \cdot Q\mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad \text{et} \quad \|Q\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2$$

pour tous $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Proposition 2.1.4. *Soit \mathcal{I} un ensemble non vide quelconque. On suppose des familles de vecteurs $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ et $\{\mathbf{v}'_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ dans V avec*

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}'_j$$

pour tous $i, j \in \mathcal{I}$. Alors, il existe un automorphisme linéaire orthogonal Q de V tel que

$$\mathbf{v}'_i = Q\mathbf{v}_i$$

pour tout $i \in \mathcal{I}$.

Démonstration: Soit E le plus petit sous-espace de V qui contienne $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ et soit E' le plus petit sous-espace de V qui contienne $\{\mathbf{v}'_i\}_{i \in \mathcal{I}}$. On pose $k = \dim E$. Sans perte de généralité, on suppose $\{1, \dots, k\} \subseteq \mathcal{I}$ et $E = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{R}}$. Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ non tous nuls. Puisque $a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k \in E \setminus \{0\}$, il existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tel que

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \mathbf{v}_j \neq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{v}'_i \right) \cdot \mathbf{v}'_j \neq 0$$

et donc que $a_1\mathbf{v}'_1 + \dots + a_k\mathbf{v}'_k \neq 0$. On en déduit que $\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_k$ sont linéairement indépendants et $\dim E' \geq k$.

Par symétrie, on obtient $\dim E = \dim E' = k$ et donc $E' = \langle \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_k \rangle_{\mathbb{R}}$. On fixe $\{\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ et $\{\mathbf{u}'_{k+1}, \dots, \mathbf{u}'_n\}$ des bases orthonormées de E^\perp et $(E')^\perp$ respectivement. On pose Q l'endomorphisme linéaire de V donné par

$$Q\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1, \quad \dots, \quad Q\mathbf{v}_k = \mathbf{v}'_k, \quad Q\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}'_{k+1}, \quad \dots, \quad Q\mathbf{u}_n = \mathbf{u}'_n.$$

Soient $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=1}^k b_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=k+1}^n b_i \mathbf{u}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=k+1}^n c_i \mathbf{u}_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_i c_j (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j) + \sum_{i=k+1}^n b_i c_i \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_i c_j (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}'_j) + \sum_{i=k+1}^n b_i c_i \\
&= \left(\sum_{i=1}^k b_i \mathbf{v}'_i + \sum_{i=k+1}^n b_i \mathbf{u}'_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}'_i + \sum_{i=k+1}^n c_i \mathbf{u}'_i \right) \\
&= Q \left(\sum_{i=1}^k b_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=k+1}^n b_i \mathbf{u}_i \right) \cdot Q \left(\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=k+1}^n c_i \mathbf{u}_i \right).
\end{aligned}$$

On en déduit que Q est orthogonal.

On note que l'application linéaire de E' dans \mathbb{R}^k donnée par

$$\mathbf{v}' \mapsto (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'_k)$$

est un isomorphisme. Puisque

$$(Q\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_1, \dots, Q\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}'_k) = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_k) = (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}'_k),$$

on en conclut que $\mathbf{v}'_i = Q\mathbf{v}_i$ pour tout $i \in \mathcal{I}$ tel que désiré. ■

Finalement, on rappelle un fait fondamental sur les espaces normés.

Théorème 2.1.5 (Équivalence des normes). *Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|_a$. Alors, pour toute norme $\|\cdot\|_b$ sur V , il existe des constantes $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ telles que*

$$\kappa_1 \|\mathbf{v}\|_a \leq \|\mathbf{v}\|_b \leq \kappa_2 \|\mathbf{v}\|_a$$

pour tout $\mathbf{v} \in V$.

2.2 Produit extérieur

Soit S un ensemble, soit A un groupe abélien et soit $k \geq 1$ un entier. On rappelle qu'une fonction $f : S^k \rightarrow A$ est alternée si

$$f(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) f(s_1, \dots, s_k) \quad (s_1, \dots, s_k \in S)$$

pour toute permutation σ de $\{1, \dots, k\}$, où $\text{sgn}(\sigma)$ est la signature de σ .

Soit V un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et soit k un entier avec $1 \leq k \leq n$. La puissance extérieure k -ième de V est un espace vectoriel réel $\bigwedge^k V$ muni d'une application k -linéaire alternée

$$\begin{aligned} V^k &\longrightarrow \bigwedge^k V \\ (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) &\longmapsto \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

avec la propriété universelle que, pour tout espace vectoriel réel W et toute application k -linéaire alternée $\alpha : V^k \rightarrow W$, il existe une et une seule application linéaire $\alpha' : \bigwedge^k V \rightarrow W$ satisfaisant

$$\alpha'(\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k) = \alpha(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$$

pour tous $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$.

On fixe une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de V et on note

$$\mathcal{I}_{k,n} = \{\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}.$$

Alors, les vecteurs

$$\mathbf{E}_{\mathbf{i}} := \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_k} \quad (\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{k,n})$$

forment une base de $\bigwedge^k V$. On a donc

$$\dim \bigwedge^k V = \text{Card}(\mathcal{I}_{k,n}) = \binom{n}{k}.$$

Proposition 2.2.1. *Soit $\beta : V^{2k} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction multilinéaire donnée par*

$$\beta(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{w}_1 & \dots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{w}_k \end{pmatrix} \quad (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in V).$$

Alors, il existe une unique forme bilinéaire β' sur $\bigwedge^k V$ telle que

$$\beta'(\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{w}_k) = \beta(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) \quad (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in V).$$

De plus, β' est un produit scalaire sur $\bigwedge^k V$.

Cela découle du fait que β est $2k$ -linéaire, alternée en ses k -premières composantes et alternée en ses k -dernières composantes. On obtient donc β' en appliquant la propriété universelle de $\bigwedge^k V$ à β . Aussi, on peut voir que β' est un produit scalaire puisque

$$\beta'(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} \cdot \mathbf{e}_{j_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_1} \cdot \mathbf{e}_{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{e}_{i_k} \cdot \mathbf{e}_{j_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_k} \cdot \mathbf{e}_{j_k} \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{i} = \mathbf{j}, \\ 0 & \text{si } \mathbf{i} \neq \mathbf{j}. \end{cases}$$

Donc $\bigwedge^k V$ est un espace euclidien pour le produit scalaire

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \beta'(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \bigwedge^k V)$$

et l'ensemble $\{\mathbf{E}_i\}_{i \in \mathcal{I}_{k,n}}$ forme une base orthonormée. Plus généralement, pour toute base orthonormée $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de V , les vecteurs

$$\mathbf{u}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{i_k} \quad (\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{k,n})$$

forment une base orthonormée de $\bigwedge^k V$.

Proposition 2.2.2. *Soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$. Alors on a*

$$\|\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k\|_2 \leq \|\mathbf{v}_1\|_2 \cdots \|\mathbf{v}_k\|_2$$

avec l'égalité si et seulement si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sont deux-à-deux orthogonaux. De plus,

$$\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k = 0$$

si et seulement si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sont linéairement dépendants.

Démonstration: On applique l'algorithme de Gram-Schmidt aux vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ et on obtient $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ deux-à-deux orthogonaux comme dans l'énoncé du théorème 2.1.3. Alors, il découle des propriétés du produit extérieur que

$$\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k = \mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k,$$

ce qui donne

$$\|\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k\|_2 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \end{pmatrix}^{1/2} = \|\mathbf{u}_1\|_2 \cdots \|\mathbf{u}_k\|_2.$$

Alors, la propriété 3 du théorème 2.1.3 donne

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 \cdots \|\mathbf{u}_k\|_2 \leq \|\mathbf{v}_1\|_2 \cdots \|\mathbf{v}_k\|_2$$

avec l'égalité si et seulement si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sont deux-à-deux orthogonaux. De même, la propriété 2 du théorème 2.1.3 indique que

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 \cdots \|\mathbf{u}_k\|_2 = 0$$

si et seulement si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sont linéairement dépendants. ■

Proposition 2.2.3. *Soient $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ et $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ des ensembles de vecteurs linéairement indépendants dans V . Alors*

$$\langle \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{w}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_k \rangle_{\mathbb{R}} \quad (2.2.1)$$

si et seulement si

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \rangle_{\mathbb{R}}. \quad (2.2.2)$$

Démonstration: On suppose d'abord que (2.2.2) est vérifiée. Alors, il existe des $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathbf{v}_i = a_{i,1}\mathbf{w}_1 + \cdots + a_{i,k}\mathbf{w}_k \quad (1 \leq i \leq k).$$

Puisque $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sont linéairement indépendants, on a

$$\Delta := \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix} \neq 0.$$

En notant S_k l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, k\}$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k &= \sum_{\sigma \in S_k} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{k,\sigma(k)} (\mathbf{w}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_{\sigma(k)}) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{k,\sigma(k)} \right) \mathbf{w}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_k = \Delta \mathbf{w}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_k \end{aligned}$$

et, comme $\Delta \neq 0$, on en déduit (2.2.1).

On suppose maintenant que (2.2.1) est vérifiée. Si $k = n$, (2.2.2) est automatiquement vérifié puisque les deux espaces sont égaux à V . Autrement, si $k < n$, on note $h_1, h_2 : V \rightarrow \bigwedge^{k+1} V$ les applications linéaires données par

$$h_1(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k \quad \text{et} \quad h_2(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \wedge \mathbf{w}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_k \quad (\mathbf{y} \in V).$$

Puisque que (2.2.1) est vérifiée, il existe $\lambda \neq 0$ tel que

$$\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k = \lambda \mathbf{w}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_k$$

et donc $h_1 = \lambda h_2$. On a alors $\ker h_1 = \ker h_2$. Or, en vertu de la proposition 2.2.2, on a

$$\ker h_1 = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \ker h_2 = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \rangle_{\mathbb{R}}.$$

On en conclut que (2.2.2) est vérifiée. ■

On remarque que les ensembles $\mathcal{I}_{k,n}$ et $\mathcal{I}_{n-k,n}$ ont la même cardinalité $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. D'ailleurs, pour tout $\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{k,n}$ il existe un et un seul $\mathbf{i}^c \in \mathcal{I}_{n-k,n}$ tel que

$$\{i_1, \dots, i_k, i_1^c, \dots, i_{n-k}^c\} = \{1, \dots, n\}.$$

On définit alors

$$\varepsilon(\mathbf{i}) = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_k & i_1^c & \cdots & i_{n-k}^c \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.2.4. *Il existe une forme bilinéaire non-dégénérée $\psi_k : \bigwedge^k V \times \bigwedge^{n-k} V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \psi_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$$

pour tous $\mathbf{a} \in \bigwedge^k V, \mathbf{b} \in \bigwedge^{n-k} V$.

L'existence de ψ_k découle du fait que

$$\begin{aligned} \bigwedge^k V \times \bigwedge^{n-k} V &\longrightarrow \bigwedge^n V \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\longmapsto \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \end{aligned}$$

est bilinéaire et du fait que $\bigwedge^n V = \langle \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{R}}$. On note que

$$\mathbf{E}_i \wedge \mathbf{E}_j = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_k} \wedge \mathbf{e}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{j_{n-k}} = \begin{cases} \varepsilon(\mathbf{i}) \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n & \text{si } \mathbf{j} = \mathbf{i}^c, \\ 0 & \text{si } \mathbf{j} \neq \mathbf{i}^c \end{cases}$$

et donc

$$\psi_k(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j) = \begin{cases} \varepsilon(\mathbf{i}) & \text{si } \mathbf{j} = \mathbf{i}^c, \\ 0 & \text{si } \mathbf{j} \neq \mathbf{i}^c \end{cases}$$

pour tous $\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{k,n}, \mathbf{j} \in \mathcal{I}_{n-k,n}$. Puisque $\{\mathbf{E}_i\}_{i \in \mathcal{I}_{k,n}}$ forme une base de $\bigwedge^k V$ et que $\{\mathbf{E}_j\}_{j \in \mathcal{I}_{n-k,n}}$ forme une base de $\bigwedge^{n-k} V$, on en déduit que ψ_k est non-dégénérée.

Théorème 2.2.5. *Il existe un et un seul isomorphisme linéaire $\phi_k : \bigwedge^{n-k} V \rightarrow \bigwedge^k V$ telle que*

$$\mathbf{a} \cdot \phi_k(\mathbf{b}) = \psi_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

pour tout $\mathbf{a} \in \bigwedge^k V, \mathbf{b} \in \bigwedge^{n-k} V$.

De plus, ϕ_k est une isométrie, c'est-à-dire que

$$\phi_k(\mathbf{b}) \cdot \phi_k(\mathbf{b}') = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}'$$

pour tous $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \bigwedge^{n-k} V$.

Démonstration: Puisque $\bigwedge^{n-k} V$ et $(\bigwedge^k V)^*$ sont de même dimension, la forme bilinéaire non-dégénérée ψ_k induit un isomorphisme linéaire

$$\psi_k^{\text{droite}} : \bigwedge^{n-k} V \rightarrow (\bigwedge^k V)^*$$

donné par $[\psi_k^{\text{droite}}(\mathbf{b})](\mathbf{a}) = \psi_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ pour tous $\mathbf{a} \in \bigwedge^k V, \mathbf{b} \in \bigwedge^{n-k} V$. De même, le produit scalaire induit un isomorphisme linéaire

$$p : \bigwedge^k V \rightarrow (\bigwedge^k V)^*$$

donné par $[p(\mathbf{a}')](\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}'$ pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \bigwedge^k V$. On pose alors $\phi_k = p^{-1} \circ \psi_k^{\text{droite}}$, c'est-à-dire que ϕ_k complète le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{n-k} V & \xrightarrow{\phi_k} & \bigwedge^k V \\ & \searrow \psi_k^{\text{droite}} & \downarrow p \\ & & (\bigwedge^k V)^* \end{array}$$

Cela donne $p \circ \phi_k = \psi_k^{\text{droite}}$ donc

$$\mathbf{a} \cdot \phi_k(\mathbf{b}) = [(p \circ \phi_k)(\mathbf{b})](\mathbf{a}) = [\psi_k^{\text{droite}}(\mathbf{b})](\mathbf{a}) = \psi_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

pour tous $\mathbf{a} \in \bigwedge^k V, \mathbf{b} \in \bigwedge^{n-k} V$.

On remarque que

$$\mathbf{E}_i \cdot \phi_k(\mathbf{E}_j) = \psi_k(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j) = \begin{cases} \varepsilon(\mathbf{i}) & \text{si } \mathbf{j} = \mathbf{i}^c, \\ 0 & \text{si } \mathbf{j} \neq \mathbf{i}^c \end{cases}$$

pour tous $\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{k,n}, \mathbf{j} \in \mathcal{I}_{n-k,n}$ et on en déduit que $\phi_k(\mathbf{E}_{i^c}) = \varepsilon(\mathbf{i})\mathbf{E}_i$. On a donc

$$\phi_k(\mathbf{E}_{i_1^c}) \cdot \phi_k(\mathbf{E}_{i_2^c}) = \varepsilon(\mathbf{i}_1)\mathbf{E}_{i_1} \cdot \varepsilon(\mathbf{i}_2)\mathbf{E}_{i_2} = \begin{cases} \varepsilon(\mathbf{i}_1)\varepsilon(\mathbf{i}_2) = 1 & \text{si } \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2, \\ 0 & \text{si } \mathbf{i}_1 \neq \mathbf{i}_2, \end{cases}$$

pour tous $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 \in \mathcal{I}_{k,n}$. Puisque $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2$ si et seulement si $\mathbf{i}_1^c = \mathbf{i}_2^c$, on a donc

$$\phi_k(\mathbf{E}_{\mathbf{i}_1^c}) \cdot \phi_k(\mathbf{E}_{\mathbf{i}_2^c}) = \mathbf{E}_{\mathbf{i}_1^c} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{i}_2^c}.$$

Comme $\{\mathbf{E}_{\mathbf{i}^c}\}_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{k,n}}$ est une base orthonormée de $\bigwedge^{n-k} V$, on en déduit que ϕ_k est une isométrie. ■

On remarque que les relations

$$\phi_k(\mathbf{E}_{\mathbf{i}^c}) = \varepsilon(\mathbf{i})\mathbf{E}_{\mathbf{i}} \quad (\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{k,n})$$

suffisent à caractériser ϕ_k . Ces relations peuvent d'ailleurs être généralisées de la façon suivante.

Proposition 2.2.6. *Soit $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ une base orthonormée de V et soit $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que*

$$\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n = \varepsilon \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n.$$

Alors, on a

$$\phi_k(\mathbf{u}_{k+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n) = \varepsilon \mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_k.$$

Les relations

$$\mathbf{E}_{\mathbf{i}} \cdot \phi_k(\mathbf{E}_{\mathbf{i}^c}) = \varepsilon(\mathbf{i}) \quad (\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{k,n})$$

peuvent également être généralisées de la manière suivante.

Proposition 2.2.7. *Soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ et soient $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i, j \leq n$) tels que*

$$\mathbf{v}_i = a_{i,1}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{i,n}\mathbf{e}_n \quad (1 \leq i \leq n).$$

Alors, on a

$$\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k \cdot \phi_k(\mathbf{v}_{k+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_n) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On note que l'inverse de ϕ_k est $\pm\phi_{n-k}$. Cela suit du fait que

$$(\phi_{n-k} \circ \phi_k) \cdot (\mathbf{E}_{\mathbf{i}^c}) = \varepsilon(\mathbf{i})\phi_{n-k}(\mathbf{E}_{\mathbf{i}}) = \varepsilon(\mathbf{i})\varepsilon(\mathbf{i}^c)\mathbf{E}_{\mathbf{i}^c} \quad (\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{k,n})$$

et de la proposition suivante.

Proposition 2.2.8. *Pour tout $\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{k,n}$, on a*

$$\varepsilon(\mathbf{i})\varepsilon(\mathbf{i}^c) = (-1)^{k(n-1)}.$$

Démonstration: On remarque que la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-k & n-k+1 & \cdots & n \\ i_1^c & \cdots & i_{n-k}^c & i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

peut être décomposée sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_k & i_1^c & \cdots & i_{n-k}^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-k & n-k+1 & \cdots & n \\ k+1 & \cdots & n & 1 & \cdots & k \end{pmatrix}.$$

On note également que

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-k & n-k+1 & \cdots & n \\ k+1 & \cdots & n & 1 & \cdots & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^k.$$

Comme le membre de droite dans la dernière équation est la k -ième puissance d'un n -cycle, sa signature est égale à $(-1)^{k(n-1)}$. On a donc

$$\varepsilon(\mathbf{i}^c) = (-1)^{k(n-1)}\varepsilon(\mathbf{i})$$

et le résultat s'ensuit. ■

2.3 Mesure d'angle entre vecteurs

Les résultats de cette sections sont bien connus et la plupart se retrouvent également dans un article de Roy [9, §4], bien que l'écriture soit légèrement différente.

Soit V un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et soit k un entier avec $1 \leq k \leq n$. On rappelle que $\bigwedge^k V$ est un espace euclidien pour le produit scalaire donné à la proposition 2.2.2. Soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ des vecteurs non nuls dans V , on définit

$$\Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := \frac{\|\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k\|_2}{\|\mathbf{v}_1\|_2 \cdots \|\mathbf{v}_k\|_2}.$$

On note que Θ_k est continu sur l'espace métrique $(V \setminus \{0\})^k$. Il suit aussi de la proposition 2.2.2 que Θ_k prend des valeurs entre 0 et 1, avec

$$\Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = 0$$

si et seulement si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sont linéairement dépendants et avec

$$\Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = 1$$

si et seulement si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sont deux-à-deux orthogonaux. De plus, la valeur de $\Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ ne dépend que des classes respectives de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$, c'est-à-dire que

$$\Theta_k(\lambda_1 \mathbf{v}_1, \dots, \lambda_k \mathbf{v}_k) = \Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$$

pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}^*$. Finalement, Θ_k est symétrique, c'est-à-dire que

$$\Theta_k(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}) = \Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$$

pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, \dots, k\}$.

Il est bien connu que, dans \mathbb{R}^3 , les rotations et les réflexions préservent les angles et les distances. On veut étendre cette notion aux automorphismes orthogonaux de V . On sait déjà que ceux-ci préservent la distance induite par la norme euclidienne et, pour ce qui est des angles, on a le résultat suivant.

Proposition 2.3.1. *Soit Q un automorphisme linéaire orthogonal de V . Alors, on a*

$$\Theta_k(Q\mathbf{v}_1, \dots, Q\mathbf{v}_k) = \Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$$

pour tous $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ non nuls.

Cela découle du fait que, pour tous $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$, on a

$$\begin{aligned} \|Q\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge Q\mathbf{v}_k\|_2 &= \det \begin{pmatrix} Q\mathbf{v}_1 \cdot Q\mathbf{v}_1 & \dots & Q\mathbf{v}_1 \cdot Q\mathbf{v}_k \\ \vdots & & \vdots \\ Q\mathbf{v}_k \cdot Q\mathbf{v}_1 & \dots & Q\mathbf{v}_k \cdot Q\mathbf{v}_k \end{pmatrix}^{1/2} \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{pmatrix}^{1/2} = \|\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k\|_2 \end{aligned}$$

et

$$\|Q\mathbf{v}_i\|_2 = \|\mathbf{v}_i\|_2 \quad (1 \leq i \leq k).$$

On sait par équivalence des normes sur V que tout automorphisme linéaire T de V préserve essentiellement la norme euclidienne, au sens où il existe des constantes $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ telles que

$$\kappa_1 \|\mathbf{v}\|_2 \leq \|T\mathbf{v}\|_2 \leq \kappa_2 \|\mathbf{v}\|_2$$

pour tout $\mathbf{v} \in V$. On peut démontrer que Θ_k a un comportement similaire par rapport aux automorphismes linéaires de V .

Proposition 2.3.2. *Soit T un automorphisme linéaire de V , il existe des constantes $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ telles que*

$$\kappa_1 \Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \leq \Theta_k(T\mathbf{v}_1, \dots, T\mathbf{v}_k) \leq \kappa_2 \Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$$

pour tous $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ non nuls.

Démonstration: Puisque l'application de V^k dans $\bigwedge^k V$ donnée par

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \mapsto T\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge T\mathbf{v}_k$$

est k -linéaire et alternée, il existe une application linéaire $\bigwedge^k T : \bigwedge^k V \rightarrow \bigwedge^k V$ satisfaisant

$$\bigwedge^k T(\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k) = T\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge T\mathbf{v}_k$$

pour tous $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$. De plus, comme $\{T\mathbf{e}_1, \dots, T\mathbf{e}_n\}$ est une base de V , les vecteurs

$$\bigwedge^k T(\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_k}) = T\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge T\mathbf{e}_{i_k} \quad (\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{k,n})$$

forment une base de $\bigwedge^k V$. On en déduit que $\bigwedge^k T$ est un automorphisme linéaire de $\bigwedge^k V$. Dès, lors, par équivalence des normes sur $\bigwedge^k V$, il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$c_1 \|\mathbf{a}\|_2 \leq \left\| \bigwedge^k T\mathbf{a} \right\|_2 \leq c_2 \|\mathbf{a}\|_2$$

pour tout $\mathbf{a} \in \bigwedge^k V$. De même, par équivalence des normes sur V , il existe des constantes $c_3, c_4 > 0$ telles que

$$c_3 \|\mathbf{v}\|_2 \leq \|T\mathbf{v}\|_2 \leq c_4 \|\mathbf{v}\|_2$$

pour tout $\mathbf{v} \in V$. On obtient donc

$$\frac{c_1 \|\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k\|_2}{c_4^k \|\mathbf{v}_1\|_2 \dots \|\mathbf{v}_k\|_2} \leq \frac{\|T\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge T\mathbf{v}_k\|_2}{\|T\mathbf{v}_1\|_2 \dots \|T\mathbf{v}_k\|_2} \leq \frac{c_2 \|\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k\|_2}{c_3^k \|\mathbf{v}_1\|_2 \dots \|\mathbf{v}_k\|_2}$$

pour tous $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ non nuls. ■

Corollaire 2.3.3. *Soit W un espace euclidien avec $k \leq \dim W \leq n$ et soit $h : W \rightarrow V$ une application linéaire injective. On note que Θ_k est défini sur W . Alors il existe des constantes $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ telles que*

$$\kappa_1 \Theta_k(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) \leq \Theta_k(h(\mathbf{w}_1), \dots, h(\mathbf{w}_k)) \leq \kappa_2 \Theta_k(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$$

pour tous $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in W$ non nuls.

Démonstration: Soit $l = \dim W$. On fixe une base orthonormée $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l\}$ de W et une application linéaire injective $h_0 : W \rightarrow V$ telle que $\{h_0(\mathbf{u}_1), \dots, h_0(\mathbf{u}_l)\}$ est orthonormée. Il s'ensuit que

$$\Theta_k(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) = \Theta_k(h_0(\mathbf{w}_1), \dots, h_0(\mathbf{w}_k))$$

pour tous $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in W$ non nuls. Aussi, il existe un automorphisme linéaire T de V tel que $h = T \circ h_0$. Il suffit donc d'appliquer la proposition 2.3.2 pour obtenir le résultat désiré. ■

On note $\mathcal{S}(V)$ la sphère

$$\mathcal{S}(V) := \{\mathbf{v} \in V \mid \|\mathbf{v}\|_2 = 1\}.$$

Rappelons que, pour $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}(V)$, l'angle $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in [0, \pi]$ entre \mathbf{v} et \mathbf{w} est déterminé par la condition

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

De plus, \angle induit une distance sur $\mathcal{S}(V)$, c'est-à-dire que

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}(V)$. On définit

$$\angle_{\min}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \min\{\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \angle(\mathbf{v}, -\mathbf{w})\} \in [0, \pi/2]$$

de sorte que

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = \cos \angle_{\min}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

pour tous $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}(V)$. On peut montrer que Θ_2 est lié à \angle_{\min} par la formule suivante.

Proposition 2.3.4. *Soient $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}(V)$, on a*

$$\Theta_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sin \angle_{\min}(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Démonstration: Il existe $\mathbf{w}^\perp \in \mathcal{S}(V)$ tel que $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}^\perp \rangle_{\mathbb{R}}$ et $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}^\perp = 0$. On a donc

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp)\mathbf{w}^\perp$$

et on obtient

$$\Theta_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|_2 = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp| \|\mathbf{w}^\perp \wedge \mathbf{w}\|_2 = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp|.$$

Puisque

$$1 = \|\mathbf{v}\|_2^2 = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|^2 + |\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp|^2$$

on a

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp| = \sqrt{1 - |\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \angle_{\min}(\mathbf{v}, \mathbf{w})} = \sin \angle_{\min}(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

■

On peut également montrer que Θ_2 satisfait l'inégalité du triangle.

Proposition 2.3.5. *Pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ non nuls, on a*

$$\Theta_2(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq \Theta_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \Theta_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Démonstration: Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}(V)$. De plus, quitte à substituer $-\mathbf{v}$ à \mathbf{v} et $-\mathbf{w}$ à \mathbf{w} , on peut supposer que

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \angle_{\min}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{et} \quad \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \angle_{\min}(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

On observe que la fonction \sin est croissante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ et que, pour tous $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$ on a

$$\sin(\alpha + \beta) \leq \sin \alpha + \sin \beta.$$

Si l'on suppose $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq \pi/2$, on obtient

$$0 \leq \angle_{\min}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq \angle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq \pi/2$$

ce qui donne

$$\Theta_2(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq \sin(\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w})) \leq \sin \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sin \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \Theta_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \Theta_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Autrement, on a

$$0 \leq \pi/2 - \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) < \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq \pi/2$$

et donc

$$\Theta_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \Theta_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sin \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sin \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) > \sin \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sin(\pi/2 - \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})).$$

Il suffit alors d'observer que

$$\sin t + \sin(\pi/2 - t) = \sin t + \cos t \geq \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \geq \Theta_2(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

pour tout $t \in [0, \pi/2]$. ■

En conséquence, Θ_2 induit une distance sur $\mathbb{P}(V)$. D'ailleurs, Θ_k est bien défini et continu sur $(\mathbb{P}(V), \Theta_2)^k$

Proposition 2.3.6. *L'espace métrique $(\mathbb{P}(V), \Theta_2)$ est complet.*

Démonstration: On suppose une suite $\{\mathbf{v}_i\}_{i \geq 1}$ dans $\mathcal{S}(V)$ qui est Cauchy par rapport à Θ_2 , c'est-à-dire telle que

$$\sup_{j \geq i} \Theta_2(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0.$$

Quitte à omettre les premiers termes de la suite, on peut supposer que

$$\Theta_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i) \leq 1/2$$

pour tout $i \geq 1$. On en déduit que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i \neq 0$, donc il existe $\mathbf{w}_i \in \langle \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ tel que

$$\langle \mathbf{v}_i \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_i \rangle_{\mathbb{R}}$$

pour tout $i \geq 1$.

Pour ce choix de \mathbf{w}_i , on note que

$$\Theta_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i) = \Theta_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_i) = \frac{\|\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_i)\|_2}{\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_i\|_2} = \frac{\|\mathbf{w}_i\|_2}{\sqrt{1 + \|\mathbf{w}_i\|_2^2}}.$$

Comme, $\Theta_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i) \leq 1/2$, on a

$$\|\mathbf{w}_i\|_2^2 \leq \frac{1 + \|\mathbf{w}_i\|_2^2}{4}$$

ce qui donne $\|\mathbf{w}_i\|_2 \leq 3^{-1/2} \leq 1$ pour tout $i \geq 1$.

On a aussi

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_i) \wedge (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_j) = (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j) \wedge (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_j) = (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j) \wedge \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_i \wedge \mathbf{w}_j,$$

et, comme $\langle \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \wedge \langle \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ et $\wedge^2 \langle \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ sont des sous-espaces orthogonaux de $\wedge^2 V$, on a

$$\|(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_i) \wedge (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_j)\|_2 \geq \|(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j) \wedge \mathbf{v}_1\|_2 = \|\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j\|_2.$$

Puisque

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_i\|_2 = \sqrt{1 + \|\mathbf{w}_i\|_2^2} \leq \sqrt{2},$$

on obtient

$$\Theta_2(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \Theta_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_j) \geq \frac{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j\|_2}{2}$$

pour tous $i, j \geq 1$. Puisque $\{\mathbf{v}_i\}_{i \geq 1}$ est Cauchy par rapport à Θ_2 , on en déduit que $\{\mathbf{w}_i\}_{i \geq 1}$ est Cauchy par rapport à $\|\cdot\|_2$. Comme l'espace normé $(\langle \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}, \|\cdot\|_2)$ est complet, la suite $\{\mathbf{w}_i\}_{i \geq 1}$ converge donc vers un point $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$.

Comme

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_i\|_2 \geq 1$$

et que

$$\|(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_i) \wedge (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w})\|_2 = \|(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w})\|_2 \leq \|\mathbf{w}_i - \mathbf{w}\|_2 \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}\|_2,$$

on a

$$\Theta_2(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}) = \Theta_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}) \leq \|\mathbf{w}_i - \mathbf{w}\|_2.$$

Puisque $\{\mathbf{w}_i\}_{i \geq 1}$ tend vers \mathbf{w} par rapport à $\|\cdot\|_2$, on en déduit que $\{\mathbf{v}_i\}_{i \geq 1}$ converge vers $\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}$ par rapport à Θ_2 , ce qui termine la preuve. \blacksquare

Soit E un sous-espace non nul de V et soit $\mathbf{v} \in V$ non nul. On définit

$$\Theta_2(\mathbf{v}, E) := \inf\{\Theta_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in E, \mathbf{w} \neq 0\}.$$

On peut aussi définir $\Theta_2(\mathbf{v}, E)$ de la façon suivante.

Proposition 2.3.7. *Pour tout sous-espace non nul E de V et pour tout $\mathbf{v} \in V$ non nul, on a*

$$\Theta_2(\mathbf{v}, E) = \frac{\|\text{proj}_{E^{\perp}}(\mathbf{v})\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2}.$$

De plus, il existe $\mathbf{w}_0 \in E$ non nul tel que $\Theta_2(\mathbf{v}, E) = \Theta_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}_0)$.

Démonstration: Si $\mathbf{v} \in E^\perp$, on a

$$\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2 \|\mathbf{w}\|_2$$

pour tout $\mathbf{w} \in E$ et on obtient

$$\Theta_2(\mathbf{v}, E) = 1 = \frac{\|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v})\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2}$$

puisque $\mathbf{v} = \text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v})$.

On suppose maintenant que $\mathbf{v} \notin E^\perp$. Alors, $\text{proj}_E(\mathbf{v})$ est un vecteur non nul dans E et il s'ensuit que

$$\Theta_2(\mathbf{v}, E) \leq \frac{\|\mathbf{v} \wedge \text{proj}_E(\mathbf{v})\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2 \|\text{proj}_E(\mathbf{v})\|_2} = \frac{\|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v})\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2}$$

puisque

$$\|\mathbf{v} \wedge \text{proj}_E(\mathbf{v})\|_2 = \|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v}) \wedge \text{proj}_E(\mathbf{v})\|_2 = \|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v})\|_2 \|\text{proj}_E(\mathbf{v})\|_2.$$

On remarque que $\bigwedge^2 E$ et $E^\perp \wedge E$ sont des sous-espaces orthogonaux de $\bigwedge^2 V$. Donc, pour tout $\mathbf{w} \in E$ on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|_2 &= \|\text{proj}_E(\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} + \text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}\|_2 \geq \|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}\|_2 \\ &= \|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v})\|_2 \|\mathbf{w}\|_2. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\Theta_2(\mathbf{v}, E) \geq \frac{\|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v})\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2},$$

ce qui termine la preuve. ■

On peut alors donner une relation entre Θ_{k+1} et Θ_k .

Proposition 2.3.8. *On suppose que $k < n$. Alors, pour tous $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w} \in V$ non nuls, on a*

$$\Theta_{k+1}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}) = \Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \Theta_2(\mathbf{w}, E),$$

où $E = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{R}}$.

Démonstration: Puisque

$$\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k \wedge \text{proj}_E(\mathbf{w}) = 0,$$

on a

$$\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k \wedge \text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{w}).$$

Comme $\mathbf{v}_i \cdot \text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{w}) = 0$ ($1 \leq i \leq k$), on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k \wedge \mathbf{w}\|_2 &= \|\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k \wedge \text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{w})\|_2 \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{w})\|_2^2 \end{pmatrix}^{1/2} \\ &= \|\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k\|_2 \|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{w})\|_2. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \Theta_{k+1}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}) &= \frac{\|\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k \wedge \mathbf{w}\|_2}{\|\mathbf{v}_1\|_2 \cdots \|\mathbf{v}_k\|_2 \|\mathbf{w}\|_2} \\ &= \frac{\|\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k\|_2 \|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{w})\|_2}{\|\mathbf{v}_1\|_2 \cdots \|\mathbf{v}_k\|_2 \|\mathbf{w}\|_2} = \Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \Theta_2(\mathbf{w}, E). \end{aligned}$$

■

Une conséquence de la proposition 2.3.8 est que, pour tout $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w} \in V$, on a

$$\Theta_{k+1}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}) \leq \Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$$

avec l'égalité si et seulement si $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{R}}^\perp$.

2.4 Mesure d'angle entre sous-espaces vectoriels

Soit V un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On remarque que tout sous-espace E de V est également un espace euclidien. Il est donc naturel de noter $\mathcal{S}(E)$ la sphère

$$\mathcal{S}(E) := \{\mathbf{v} \in E \mid \|\mathbf{v}\|_2 = 1\} = E \cap \mathcal{S}(V).$$

Soient E et F des sous-espaces non nuls de V . On peut définir

$$\Theta_2(E, F) := \sup_{\mathbf{v} \in E} \Theta_2(\mathbf{v}, F).$$

En vertu de la proposition 2.3.8, la fonction de $\mathcal{S}(E)$ dans \mathbb{R} donnée par $\mathbf{v} \mapsto \Theta_2(\mathbf{v}, F)$ est continue. Puisque

$$\sup_{\mathbf{v} \in E} \Theta_2(\mathbf{v}, F) = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E)} \Theta_2(\mathbf{v}, F)$$

et que $\mathcal{S}(E)$ est compacte, il existe $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{S}(E)$, $\mathbf{w}_0 \in \mathcal{S}(F)$ tels que

$$\Theta_2(E, F) = \Theta_2(\mathbf{v}_0, F) = \Theta_2(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0).$$

Proposition 2.4.1. *Soient E, F, G des sous-espaces non nuls de V . Alors, on a*

$$\Theta_2(E, G) \leq \Theta_2(E, F) + \Theta_2(F, G).$$

Démonstration: On choisit $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(E)$, $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(F)$, $\mathbf{w} \in \mathcal{S}(G)$ tels que

$$\Theta_2(E, G) = \Theta_2(\mathbf{u}, G), \quad \Theta_2(\mathbf{u}, F) = \Theta_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{et} \quad \Theta_2(\mathbf{v}, G) = \Theta_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Alors, on a

$$\Theta_2(\mathbf{u}, G) \leq \Theta_2(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq \Theta_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \Theta_2(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

ce qui donne

$$\Theta_2(E, G) \leq \Theta_2(\mathbf{u}, F) + \Theta_2(\mathbf{v}, G) \leq \Theta_2(E, F) + \Theta_2(F, G).$$

■

Mais, bien qu'elle satisfasse l'inégalité du triangle, cette fonction Θ_2 ne constitue pas une distance sur l'ensemble des sous-espaces non nuls de V car elle n'est pas symétrique. Par exemple, si l'on a une chaîne de sous-espaces, $0 \subsetneq E \subsetneq F \subseteq V$, alors $\Theta_2(E, F) = 0$ mais $\Theta_2(F, E) > 0$. On remarque que dans cet exemple on a $\dim E \neq \dim F$.

Soit k un entier avec $1 \leq k \leq n$. On note $\mathbb{G}_k(V)$ la variété grassmannienne définie par

$$\mathbb{G}_k(V) := \{E \mid E \text{ est un sous-espace vectoriel de } V \text{ avec } \dim E = k\}.$$

Dans cette section, on montre que la restriction de Θ_2 à $\mathbb{G}_k(V)$ est symétrique et donc induit une distance sur $\mathbb{G}_k(V)$. Pour ce faire, on fait appel à une construction introduite par Schmidt dans [10, §II.6 et §II.7].

Soient $E_1, F_1 \in \mathbb{G}_k(V)$. Alors, il existe $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{S}(E_1), \mathbf{w}_1 \in \mathcal{S}(F_1)$ tels que

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = \max\{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \mid \mathbf{v} \in \mathcal{S}(E_1), \mathbf{w} \in \mathcal{S}(F_1)\}.$$

On pose alors

$$E_2 := E_1 \cap \langle \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \quad \text{et} \quad F_2 := F_1 \cap \langle \mathbf{w}_1 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp},$$

puis on observe le fait suivant.

Lemme 2.4.2 (Schmidt, [10, page 443]). *On a*

$$E_2, F_2 \subseteq \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}.$$

Démonstration: Par symétrie et comme $E_2 \subseteq \langle \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, il suffit de démontrer $E_2 \subseteq \langle \mathbf{w}_1 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$. Soit $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E_2)$ avec $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 \geq 0$. Pour tout $t > 0$, on a $\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v} \in E_1$ et $\|\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{1+t^2}$, donc

$$\frac{\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}}{\sqrt{1+t^2}} \in \mathcal{S}(E_1).$$

Alors, par choix de $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1$, on a

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 \geq \frac{\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 + t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)}{\sqrt{1+t^2}},$$

ce qui donne

$$0 \leq \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 \leq \frac{\sqrt{1+t^2} - 1}{t} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1) \leq t(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1).$$

En faisant tendre t vers zéro, on déduit que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 = 0$.

On en conclut qu'il n'existe aucun $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E_2)$ avec $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 > 0$, ce qui donne $E_2 \subseteq \langle \mathbf{w}_1 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$. \blacksquare

En répétant ce processus pour $E_2, F_2 \in \mathbb{G}_{k-1}(V)$ et ainsi de suite, on obtient des chaînes de sous-espaces

$$E_1 \supsetneq \cdots \supsetneq E_k \supsetneq 0, \quad F_1 \supsetneq \cdots \supsetneq F_k \supsetneq 0$$

ainsi que des vecteurs $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{S}(E_1), \dots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{S}(E_k), \mathbf{w}_1 \in \mathcal{S}(F_1), \dots, \mathbf{w}_k \in \mathcal{S}(F_k)$ tels que

$$E_i = E_{i-1} \cap \langle \mathbf{v}_{i-1} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}, \quad F_i = F_{i-1} \cap \langle \mathbf{w}_{i-1} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \quad (i = 2, \dots, k)$$

et

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_i = \max\{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \mid \mathbf{v} \in \mathcal{S}(E_i), \mathbf{w} \in \mathcal{S}(F_i)\} \quad (i = 1, \dots, k).$$

De plus, il suit du lemme 2.4.2 que

$$E_{i+1} + F_{i+1} \subseteq (E_i + F_i) \cap \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Donc, pour $1 \leq i < j \leq k$, on a

$$\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{w}_j \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq E_j + F_j \subseteq E_{i+1} + F_{i+1} \subseteq \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}.$$

On en déduit que les sous-espaces $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \rangle_{\mathbb{R}}, \dots, \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k \rangle_{\mathbb{R}}$ sont deux-à-deux orthogonaux, ce qui implique que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ et $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ sont des bases orthonormées de E_1 et F_1 respectivement. On obtient alors

$$E_i = \langle \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad F_i = \langle \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{w}_k \rangle_{\mathbb{R}}$$

ce qui donne la décomposition orthogonale

$$E_i + F_i = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k \rangle_{\mathbb{R}}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. On pose

$$\mu_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_i$$

pour $i \in \{1, \dots, k\}$ et, par choix des $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$, on obtient

$$1 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_k \geq 0.$$

Lemme 2.4.3. *Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a*

$$\text{proj}_{F_1}(\mathbf{v}_i) = \mu_i \mathbf{w}_i \quad \text{et} \quad \text{proj}_{E_1}(\mathbf{w}_i) = \mu_i \mathbf{v}_i.$$

Démonstration: Il suffit d'observer que, comme $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ est une base orthonormée de F_1 , on a

$$\text{proj}_{F_1}(\mathbf{v}_i) = \sum_{j=1}^k (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_j) \mathbf{w}_j = \mu_i \mathbf{w}_i$$

pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. On obtient également $\text{proj}_{E_1}(\mathbf{w}_i) = \mu_i \mathbf{v}_i$ par symétrie. ■

Il est important de noter que le k -uplet (μ_1, \dots, μ_k) est indépendant du choix des vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ et ne dépend donc que des sous-espaces initiaux E_1 et F_1 , comme le montre le résultat suivant.

Lemme 2.4.4 (Schmidt, [10, Lemme 12]). *Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a*

$$\mu_i = \sup_{U \in \mathbb{G}_i(E_1)} \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}(U)} \left\| \text{proj}_{F_1}(\mathbf{u}) \right\|_2.$$

Démonstration: Soit $U \in \mathbb{G}_i(E_1)$. Comme U est de codimension $k - i$ dans E_1 et que $\langle \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{R}}$ est de codimension $i - 1$ dans E_1 , on en déduit que le sous-espace $U \cap \langle \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{R}}$ est de codimension au plus $(k - i) + (i - 1) = k - 1$ dans E_1 . Dès lors

$$U \cap \langle \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{R}} \neq 0$$

et il existe donc $a_i, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{j=i}^k a_j \mathbf{v}_j \in \mathcal{S}(U).$$

On a donc $a_i^2 + \dots + a_k^2 = 1$ et le lemme 2.4.3 donne

$$\left\| \text{proj}_{F_1} \left(\sum_{j=i}^k a_j \mathbf{v}_j \right) \right\|_2 = \left\| \sum_{j=i}^k a_j \mu_j \mathbf{w}_j \right\|_2 = \sqrt{\sum_{j=i}^k a_j^2 \mu_j^2} \leq \mu_i.$$

Ainsi,

$$\inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}(U)} \left\| \text{proj}_{F_1}(\mathbf{u}) \right\|_2 \leq \mu_i.$$

Soit $U_i = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i \rangle_{\mathbb{R}} \in \mathbb{G}_i(E_1)$. Alors, tout élément de $\mathcal{S}(U_i)$ s'écrit $b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_i \mathbf{v}_i$ pour des $b_1, \dots, b_i \in \mathbb{R}$ avec $b_1^2 + \dots + b_i^2 = 1$. On observe que

$$\left\| \text{proj}_{F_1} \left(\sum_{j=1}^i b_j \mathbf{v}_j \right) \right\|_2 = \left\| \sum_{j=1}^i b_j \mu_j \mathbf{w}_j \right\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^i b_j^2 \mu_j^2} \geq \mu_i.$$

On a donc

$$\inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}(U_i)} \left\| \text{proj}_{F_1}(\mathbf{u}) \right\|_2 \geq \mu_i,$$

ce qui termine la preuve. ■

On obtient donc des applications $\mu_i : \mathbb{G}_k(V) \times \mathbb{G}_k(V) \rightarrow [0, 1]$ ($1 \leq i \leq k$) grâce à la construction de Schmidt. De plus, comme la construction des $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ est symétrique par rapport à la paire (E_1, F_1) , les μ_1, \dots, μ_k sont des fonctions symétriques. Pour démontrer que la restriction de Θ_2 à $\mathbb{G}_k(V)$ est symétrique, il suffit alors d'observer le fait suivant.

Lemme 2.4.5. *Soient $E, F \in \mathbb{G}_k(V)$. On a*

$$\Theta_2(E, F) = \sqrt{1 - \mu_k(E, F)^2}.$$

Démonstration: D'une part, la proposition 2.3.8 donne

$$\Theta_2(E, F) = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E)} \Theta_2(\mathbf{v}, F) = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E)} \|\text{proj}_{F^\perp}(\mathbf{v})\|_2.$$

D'autre part, comme $\mathbb{G}_k(E) = \{E\}$, le lemme 2.4.4 donne

$$\mu_k(E, F) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E)} \|\text{proj}_F(\mathbf{v})\|_2.$$

Puisque pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E)$ on a

$$\|\text{proj}_{F^\perp}(\mathbf{v})\|_2 = \sqrt{1 - \|\text{proj}_F(\mathbf{v})\|_2^2},$$

le résultat s'ensuit. ■

La symétrie de Θ_2 sur $\mathbb{G}_k(V)$ permet également de démontrer le résultat suivant.

Proposition 2.4.6. *Soient E, F des sous-espaces de V avec $1 \leq \dim E \leq \dim F$. Alors, on a $\Theta_2(E, F) \leq \Theta_2(F, E)$.*

Démonstration: On choisit un sous-espace G de F tel que $\dim G = \dim E$. Alors, on a

$$\Theta_2(E, F) \leq \Theta_2(E, G) = \Theta_2(G, E) \leq \Theta_2(F, E).$$
■

Dans son article [10], Schmidt montre que les applications μ_1, \dots, μ_k satisfont plusieurs propriétés. Ici, on présente deux de ces propriétés : un critère d'invariance et un principe de dualité.

Théorème 2.4.7 (Schmidt, [10, Théorème 5]). *Soient $E, F, E', F' \in \mathbb{G}_k(V)$. Alors, on a*

$$\mu_i(E, F) = \mu_i(E', F') \tag{2.4.1}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, si et seulement si il existe un automorphisme linéaire orthogonal Q de V tel que

$$E' = QE \quad \text{et} \quad F' = QF. \tag{2.4.2}$$

Démonstration: Par définition des applications μ_1, \dots, μ_k , il existe des bases orthonormées $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}, \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}, \{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_k\}, \{\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_k\}$ de E, F, E', F' respectivement telles que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{w}_1 & \cdots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{w}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1(E, F) & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_k(E, F) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{w}'_1 & \cdots & \mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{w}'_k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}'_k \cdot \mathbf{w}'_1 & \cdots & \mathbf{v}'_k \cdot \mathbf{w}'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1(E', F') & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_k(E', F') \end{pmatrix}.$$

On suppose d'abord que (2.4.1) soit vérifié. Alors, on a

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{w}_1 & \cdots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{w}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{w}'_1 & \cdots & \mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{w}'_k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}'_k \cdot \mathbf{w}'_1 & \cdots & \mathbf{v}'_k \cdot \mathbf{w}'_k \end{pmatrix}$$

et la proposition 2.1.4 garantit donc l'existence d'un automorphisme linéaire orthogonal Q de V tel que

$$Q\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1, \quad \dots, \quad Q\mathbf{v}_k = \mathbf{v}'_k, \quad Q\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}'_1, \quad \dots, \quad Q\mathbf{w}_k = \mathbf{w}'_k,$$

ce qui donne (2.4.2).

On suppose maintenant que (2.4.2) soit vérifié pour un automorphisme linéaire orthogonal Q de V . Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ on a

$$\mathbb{G}_i(E') = Q\mathbb{G}_i(E)$$

et, pour tout $U \in \mathbb{G}_i(E)$, on a $\mathcal{S}(QU) = Q\mathcal{S}(U)$. On note également que, pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(U)$, on a

$$\|\text{proj}_{F'}(Q\mathbf{u})\|_2 = \|\text{proj}_{QF}(Q\mathbf{u})\|_2 = \|Q\text{proj}_F(\mathbf{u})\|_2 = \|\text{proj}_F(\mathbf{u})\|_2.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \sup_{U' \in \mathbb{G}_i(E')} \inf_{\mathbf{u}' \in \mathcal{S}(U')} \|\text{proj}_{F'}(\mathbf{u}')\|_2 &= \sup_{U \in \mathbb{G}_i(E)} \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}(U)} \|\text{proj}_{F'}(Q\mathbf{u})\|_2 \\ &= \sup_{U \in \mathbb{G}_i(E)} \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}(U)} \|\text{proj}_F(\mathbf{u})\|_2. \end{aligned}$$

En vertu du lemme 2.4.4, on en déduit que $\mu_i(E', F') = \mu_i(E, F)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. ■

Théorème 2.4.8 (Schmidt, [10, Théorème 6]). *Soient $E, F \in \mathbb{G}_k(V)$. On suppose $k \leq n/2$. Alors on a*

$$\mu_i(E, F) = \mu_{n-2k+i}(E^\perp, F^\perp)$$

pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. En particulier, on a

$$\Theta_2(E, F) = \Theta_2(E^\perp, F^\perp).$$

Démonstration: On pose $\mu_i := \mu_i(E, F)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. Il existe des bases orthonormées $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ et $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ de E et F respectivement telles que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{w}_1 & \cdots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{w}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_k \end{pmatrix}.$$

On pose $l = \dim E \cap F$ et on observe que

$$1 = \mu_1 = \cdots = \mu_l > \mu_{l+1} \geq \cdots \geq \mu_k.$$

On pose

$$\mathbf{v}_i^* = -\frac{\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{w}_i)}{\|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{w}_i)\|_2} = \frac{\mu_i \mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i}{\sqrt{1 - \mu_i^2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_i^* = \frac{\text{proj}_{F^\perp}(\mathbf{v}_i)}{\|\text{proj}_{F^\perp}(\mathbf{v}_i)\|_2} = \frac{\mathbf{v}_i - \mu_i \mathbf{w}_i}{\sqrt{1 - \mu_i^2}}$$

pour tout $i \in \{l+1, \dots, k\}$. On note que les ensembles $\{\mathbf{v}_{l+1}^*, \dots, \mathbf{v}_k^*\}$ et $\{\mathbf{w}_{l+1}^*, \dots, \mathbf{w}_k^*\}$ sont orthonormés et contenus dans $(E + F) \cap E^\perp$ et $(E + F) \cap F^\perp$ respectivement. Puisque

$$\dim E^\perp = \dim F^\perp = n - k \quad \text{et} \quad \dim(E + F)^\perp = n - \dim(E + F) = n - 2k + l$$

on déduit que

$$E^\perp = (E + F)^\perp \oplus \langle \mathbf{v}_{l+1}^*, \dots, \mathbf{v}_k^* \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad F^\perp = (E + F)^\perp \oplus \langle \mathbf{w}_{l+1}^*, \dots, \mathbf{w}_k^* \rangle_{\mathbb{R}}.$$

On fixe $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-2k+l}\}$ une base orthonormée de $(E + F)^\perp$. Alors,

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-2k+l}, \mathbf{v}_{l+1}^*, \dots, \mathbf{v}_k^*\} \quad \text{et} \quad \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-2k+l}, \mathbf{w}_{l+1}^*, \dots, \mathbf{w}_k^*\}$$

sont des bases orthonormées de E^\perp et F^\perp respectivement. Puisque

$$\mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{w}_i^* = \frac{\mu_i \|\mathbf{v}_i\|_2^2 - \mu_i^2 (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_i) - (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_i) + \mu_i \|\mathbf{w}_i\|_2^2}{1 - \mu_i^2} = \frac{\mu_i - \mu_i^3 - \mu_i + \mu_i}{1 - \mu_i^2} = \mu_i$$

et

$$\mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{w}_j^* = 0$$

pour tous $i, j \in \{l+1, \dots, k\}$ avec $i \neq j$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_{n-2k+l} & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w}_{l+1}^* & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w}_k^* \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}_{n-2k+l} \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_{n-2k+l} \cdot \mathbf{u}_{n-2k+l} & \mathbf{u}_{n-2k+l} \cdot \mathbf{w}_{l+1}^* & \cdots & \mathbf{u}_{n-2k+l} \cdot \mathbf{w}_k^* \\ \mathbf{v}_{l+1}^* \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{v}_{l+1}^* \cdot \mathbf{u}_{n-2k+l} & \mathbf{v}_{l+1}^* \cdot \mathbf{w}_{l+1}^* & \cdots & \mathbf{v}_{l+1}^* \cdot \mathbf{w}_k^* \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_k^* \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{v}_k^* \cdot \mathbf{u}_{n-2k+l} & \mathbf{v}_k^* \cdot \mathbf{w}_{l+1}^* & \cdots & \mathbf{v}_k^* \cdot \mathbf{w}_k^* \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \mu_{l+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_k \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$1 = \mu_1(E^\perp, F^\perp) = \cdots = \mu_{n-2k+l}(E^\perp, F^\perp)$$

et que

$$\mu_{n-2k+l+1}(E^\perp, F^\perp) = \mu_{l+1}, \quad \dots, \quad \mu_{n-k}(E^\perp, F^\perp) = \mu_k.$$

En particulier, il suit du lemme 2.4.5 que

$$\Theta_2(E, F) = \sqrt{1 - \mu_k^2} = \sqrt{1 - \mu_{n-k}(E^\perp, F^\perp)^2} = \Theta_2(E^\perp, F^\perp).$$

■

Le reste de la section porte sur la complétude de $(\mathbb{G}_k(V), \Theta_2)$ en tant qu'espace métrique. On note $\text{End}(V)$ l'espace vectoriel constitué des endomorphismes linéaires de V . On rappelle que l'on peut munir $\text{End}(V)$ de la norme d'opérateur $\|\cdot\|_{\text{op}}$ donnée par

$$\|T\|_{\text{op}} := \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}(V)} \|T\mathbf{v}\|_2$$

pour tout $T \in \text{End}(V)$. On montre d'abord que l'application de $(\mathbb{G}_k(V), \Theta_2)$ dans $(\text{End}(V), \|\cdot\|_{\text{op}})$ donnée par $E \mapsto \text{proj}_E$ est une isométrie d'espaces métriques.

Proposition 2.4.9. *Soient $E, F \in \mathbb{G}_k(V)$. Alors, on a*

$$\|\text{proj}_E - \text{proj}_F\|_{\text{op}} = \Theta_2(E, F).$$

Démonstration: On observe que

$$(\text{proj}_E - \text{proj}_F)|_E = \text{proj}_{F^\perp} \quad \text{et} \quad (\text{proj}_E - \text{proj}_F)|_{E^\perp} = -\text{proj}_F.$$

On a donc

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E)} \|(\text{proj}_E - \text{proj}_F)(\mathbf{v})\|_2 = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E)} \|\text{proj}_{F^\perp}(\mathbf{v})\|_2 = \Theta_2(E, F)$$

et

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E^\perp)} \|(\text{proj}_E - \text{proj}_F)(\mathbf{v})\|_2 = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E^\perp)} \|\text{proj}_F(\mathbf{v})\|_2 = \Theta_2(E^\perp, F^\perp) = \Theta_2(E, F).$$

Puisque $\mathcal{S}(E) \subseteq \mathcal{S}(V)$, on obtient $\Theta_2(E, F) \leq \|\text{proj}_E - \text{proj}_F\|_{\text{op}}$.

Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(V)$. On peut écrire $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ avec $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E)$, $\mathbf{w} \in \mathcal{S}(E^\perp)$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. On trouve

$$\begin{aligned} \|(\text{proj}_E - \text{proj}_F)(\mathbf{u})\|_2 &= \|(\text{proj}_E - \text{proj}_F)(a\mathbf{v} + b\mathbf{w})\|_2 = \|a\text{proj}_{F^\perp}(\mathbf{v}) - b\text{proj}_F(\mathbf{w})\|_2 \\ &= \sqrt{a^2 \|\text{proj}_{F^\perp}(\mathbf{v})\|_2^2 + b^2 \|\text{proj}_F(\mathbf{w})\|_2^2} \leq \Theta_2(E, F) \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Ensuite, on donne une méthode simple pour estimer la distance entre deux éléments de $\mathbb{G}_k(V)$. En fait, on énonce cette estimation de façon un peu plus générale, ce qui permet de l'appliquer à n'importe quelle paire de sous-espaces non nuls de V . À ce qu'on sache, cette estimation ne se retrouve pas dans la littérature.

Proposition 2.4.10. *Soient E, F des sous-espaces non-nuls de V . Alors, pour toute base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ de E , on a*

$$\Theta_2(E, F) \leq \frac{\Theta_2(\mathbf{v}_1, F) + \dots + \Theta_2(\mathbf{v}_k, F)}{\Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)}.$$

Démonstration: Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(E)$. On peut écrire $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k$ avec $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. On trouve

$$\begin{aligned} |a_i| &= \frac{\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{v}_i} \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k\|_2}{\|\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k\|_2} \leq \frac{\|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}_1\|_2 \dots \|\widehat{\mathbf{v}_i}\|_2 \dots \|\mathbf{v}_k\|_2}{\Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \|\mathbf{v}_1\|_2 \dots \|\mathbf{v}_k\|_2} \\ &= \frac{1}{\Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \|\mathbf{v}_i\|_2} \end{aligned}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. On peut alors estimer

$$\begin{aligned} \Theta_2(\mathbf{u}, F) = \|\text{proj}_{F^\perp}(\mathbf{u})\|_2 &\leq \sum_{i=1}^k |a_i| \|\text{proj}_{F^\perp}(\mathbf{v}_i)\|_2 = \sum_{i=1}^k |a_i| \|\mathbf{v}_i\|_2 \Theta_2(\mathbf{v}_i, F) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \frac{\Theta_2(\mathbf{v}_i, F)}{\Theta_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)}. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.4.11. *L'espace métrique $(\mathbb{G}_k(V), \Theta_2)$ est complet.*

Démonstration: Soient $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ orthonormés. Par continuité de Θ_k , il existe $\varepsilon \in (0, 1)$ tel que pour tous $\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_k \in V$ avec

$$\max_{1 \leq l \leq k} \|\mathbf{u}_l - \mathbf{u}'_l\|_2 < \varepsilon$$

on a

$$\Theta_k(\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_k) > 1/2.$$

Puisque la valeur de Θ_k est stable sous l'action des automorphismes orthogonaux de V (voir la proposition 2.3.1), on peut choisir ε indépendamment de $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

On observe que toute suite de Cauchy dans $(\mathbb{G}_k(V), \Theta_2)$ contient une sous-suite $\{E_i\}_{i \geq 1}$ avec

$$\sup_{j \geq i} \Theta_2(E_i, E_j) < 2^{-i} \varepsilon$$

pour tout $i \geq 1$. On fixe une base orthonormée $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ de E_1 et on pose

$$\mathbf{v}_{i,l} := \text{proj}_{E_i}(\mathbf{v}_l).$$

On note que, comme $\Theta_2(E_1, E_i) < 1$, on a

$$E_1 \cap E_i^\perp = 0$$

et donc $\mathbf{v}_{i,l} \neq 0$ pour tous $i \geq 1, l \in \{1, \dots, k\}$. De plus, puisque

$$\max_{1 \leq l \leq k} \|\mathbf{v}_{i,l} - \mathbf{v}_{j,l}\|_2 \leq \left\| \text{proj}_{E_i} - \text{proj}_{E_j} \right\|_{\text{op}} = \Theta_2(E_i, E_j) < 2^{-i} \varepsilon$$

pour tous i, j avec $1 \leq i \leq j$, on obtient k suites de Cauchy $\{\mathbf{v}_{i,1}\}_{i \geq 1}, \dots, \{\mathbf{v}_{i,k}\}_{i \geq 1}$ dans V . Comme $(V, \|\cdot\|_2)$ est complet, il existe $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in V$ tels que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{v}_{i,l} = \mathbf{w}_l$$

et on peut estimer

$$\|\mathbf{v}_l - \mathbf{w}_l\|_2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\mathbf{v}_{i,l} - \mathbf{v}_{i+1,l}\|_2 < \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \varepsilon = \varepsilon$$

pour tout $l \in \{1, \dots, k\}$. On obtient donc

$$\Theta_k(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) > 1/2.$$

Le sous-espace $F = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \rangle_{\mathbb{R}}$ est donc un élément de $\mathbb{G}_k(V)$ et la proposition 2.4.10 donne

$$\Theta_2(F, E_i) \leq \frac{\Theta_2(\mathbf{w}_1, E_i) + \dots + \Theta_2(\mathbf{w}_k, E_i)}{\Theta_k(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)} \leq 2k \max_{1 \leq l \leq k} \Theta_2(\mathbf{w}_l, \mathbf{v}_{i,l})$$

pour tout $i \geq 1$. Il découle alors de la continuité de Θ_2 que la suite $\{E_i\}_{i \geq 1}$ converge vers $F \in \mathbb{G}_k(V)$. Ainsi, toute suite de Cauchy dans $(\mathbb{G}_k(V), \Theta_2)$ contient une sous-suite convergente. On en conclut que $(\mathbb{G}_k(V), \Theta_2)$ est complet. ■

2.5 Domaines angulaires

Soit E un sous-espace non nul de V et soit $\delta \in (0, 1)$. On définit

$$\mathcal{A}(E, \delta) := \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \neq 0 \text{ et } \Theta_2(\mathbf{v}, E) < \delta\}.$$

On dit que $\mathcal{A}(E, \delta)$ est un domaine angulaire autour de E . En particulier, si $\dim E = 1$, on dit que $\mathcal{A}(E, \delta)$ est un cône autour de la droite vectorielle E .

Proposition 2.5.1. *Soit $\mathbf{v} \in V$. Alors $\mathbf{v} \in \mathcal{A}(E, \delta)$ si et seulement si*

$$\|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v})\|_2 < \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \|\text{proj}_E(\mathbf{v})\|_2.$$

Démonstration: On suppose sans perte de généralité que $\mathbf{v} \neq 0$. En vertu de la proposition 2.3.7, on a $\Theta_2(\mathbf{v}, E) < \delta$ si et seulement si

$$\|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v})\|_2 < \delta \|\mathbf{v}\|_2 = \delta \sqrt{\|\text{proj}_E(\mathbf{v})\|_2^2 + \|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v})\|_2^2},$$

ce qui équivaut à

$$(1 - \delta^2) \|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{v})\|_2^2 < \delta^2 \|\text{proj}_E(\mathbf{v})\|_2^2.$$

Le résultat s'ensuit. ■

On remarque que si l'on pose $\delta = \sin \theta \in (0, 1)$ pour un certain $\theta \in (0, \pi/2)$, alors $\tan \theta = \delta/\sqrt{1 - \delta^2}$.

Corollaire 2.5.2. *Soit E un sous-espace de V avec $0 \subsetneq E \subsetneq V$ et soit $\delta_1 \in (0, 1)$. Alors, on a*

$$\mathcal{A}(E, \delta_1)^c = \overline{\mathcal{A}(E^\perp, \delta_2)},$$

où $\delta_2 \in (0, 1)$ est donné par

$$\frac{\sqrt{1 - \delta_2^2}}{\delta_2} = \frac{\delta_1}{\sqrt{1 - \delta_1^2}}.$$

Finalement, on donne un résultat par rapport à l'intersection de deux domaines angulaires.

Proposition 2.5.3. *Soient E_1, E_2 des sous-espaces de V avec $E_1 \cap E_2 \neq 0$ et soit $\delta \in (0, 1)$. Alors, il existe $\delta_0 \in (0, 1)$ tels que*

$$\mathcal{A}(E_1, \delta_0) \cap \mathcal{A}(E_2, \delta_0) \subseteq \mathcal{A}(E_1 \cap E_2, \delta).$$

Pour démontrer la proposition 2.5.3, on rappelle quelques notions topologiques. D'abord, puisque $\mathcal{S}(V)$ est un espace métrique compact, il s'agit également d'un espace topologique normal, c'est-à-dire que, pour tout fermés disjoints $F_1, F_2 \subseteq \mathcal{S}(V)$, il existe des ouverts disjoints $U_1, U_2 \subseteq \mathcal{S}(V)$ avec $F_1 \subseteq U_1$ et $F_2 \subseteq U_2$.

Soit E un sous-espace de V et soit $\delta \in (0, 1)$. On observe que $\mathcal{S}(E) = E \cap \mathcal{S}(V)$ est un fermé de $\mathcal{S}(V)$ et que $\mathcal{A}(E, \delta) \cap \mathcal{S}(V)$ est un ouvert de $\mathcal{S}(V)$. Pour tous $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(V)$, $\rho > 0$, on note $\mathcal{B}(\mathbf{v}, \rho)$ la boule ouverte

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}, \rho) := \{\mathbf{w} \in \mathcal{S}(V) \mid \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_2 < \rho\}.$$

Le résultat suivant s'obtient facilement par calcul direct.

Proposition 2.5.4. *Soit E un sous-espace non nul de V et soit $\delta \in (0, 1)$. Alors, on a*

$$\mathcal{A}(E, \delta) \cap \mathcal{S}(V) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{S}(V) \mid \exists \mathbf{w} \in \mathcal{S}(E) \text{ tel que } \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2 < \rho\} = \bigcup_{\mathbf{w} \in \mathcal{S}(E)} \mathcal{B}(\mathbf{w}, \rho),$$

où $\rho = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \delta^2}} \in (0, \sqrt{2})$.

Lemme 2.5.5. *Soit E un sous-espace non nul de V et soit U un ouvert de $\mathcal{S}(V)$ avec $\mathcal{S}(E) \subseteq U$. Alors, il existe $\delta \in (0, 1)$ tel que $\mathcal{A}(E, \delta) \cap \mathcal{S}(V) \subseteq U$.*

Démonstration: Comme U est un ouvert contenant $\mathcal{S}(E)$, il s'ensuit que pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E)$ il existe $\rho(\mathbf{v}) \in (0, 1)$ tel que $\mathcal{B}(\mathbf{v}, \rho(\mathbf{v})) \subseteq U$. Puisque $\mathcal{S}(V)$ est compact et $\mathcal{S}(E)$ est fermé dans $\mathcal{S}(V)$, il s'ensuit que $\mathcal{S}(E)$ est compact. Puisque $\{\mathcal{B}(\mathbf{v}, \rho(\mathbf{v})/2)\}_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E)}$ est un recouvrement ouvert de $\mathcal{S}(E)$, on en déduit qu'il existe $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in \mathcal{S}(E)$ tel que

$$\mathcal{S}(E) \subseteq \bigcup_{i=1}^l \mathcal{B}(\mathbf{v}_i, \rho(\mathbf{v}_i)/2).$$

On pose $\delta = \rho \sqrt{1 - \rho^2/4} \in (0, 1)$ avec $\rho = \min\{\rho(\mathbf{v}_1), \dots, \rho(\mathbf{v}_l)\}/2$. On a alors

$$\mathcal{A}(E, \delta) \cap \mathcal{S}(V) = \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}(E)} \mathcal{B}(\mathbf{v}, \rho) \subseteq \bigcup_{i=1}^l \mathcal{B}(\mathbf{v}_i, \rho(\mathbf{v}_i)/2 + \rho) \subseteq \bigcup_{i=1}^l \mathcal{B}(\mathbf{v}_i, \rho(\mathbf{v}_i)) \subseteq U.$$

■

Démonstration: (de la proposition 2.5.3)

On pose $F_1 = E_1 \cap \mathcal{S}(V)$, $F_2 = E_2 \cap \mathcal{S}(V)$ et $U_0 = \mathcal{A}(E_1 \cap E_2, \delta) \cap \mathcal{S}(V)$. Comme U_0 est un ouvert de $\mathcal{S}(V)$ contenant $F_1 \cap F_2 = E_1 \cap E_2 \cap \mathcal{S}(V)$ et que F_1, F_2 sont des fermés, il s'ensuit que $F'_1 = F_1 \setminus U_0$ et $F'_2 = F_2 \setminus U_0$ sont des fermés disjoints de $\mathcal{S}(V)$. Il existe donc des ouverts disjoints $U_1, U_2 \subseteq \mathcal{S}(V)$ avec $F'_1 \subseteq U_1, F'_2 \subseteq U_2$.

Aussi, pour $i = 1, 2$, on a $E_i \cap \mathcal{S}(V) \subseteq F'_i \cup U_0 \subseteq U_i \cup U_0$ et il suit donc du lemme 2.5.5 qu'il existe $\delta_0 \in (0, 1)$ tel que

$$\mathcal{A}(E_i, \delta_0) \cap \mathcal{S}(V) \subseteq U_0 \cup U_i.$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{A}(E_1, \delta_0) \cap \mathcal{A}(E_2, \delta_0) \cap \mathcal{S}(V) \subseteq (U_1 \cup U_0) \cap (U_2 \cup U_0) \subseteq U_0 = \mathcal{A}(E_1 \cap E_2, \delta) \cap \mathcal{S}(V)$$

et on en conclut que

$$\mathcal{A}(E_1, \delta_0) \cap \mathcal{A}(E_2, \delta_0) \subseteq \mathcal{A}(E_1 \cap E_2, \delta).$$

■

Chapitre 3

Notions d'approximation diophantienne

Dans ce chapitre, on présente quelques concepts d'approximation diophantienne qui seront utiles plus loin dans le mémoire.

3.1 Exposants d'approximation diophantienne

On débute avec le théorème de Minkowski sur les corps convexes (voir [12, §II.2, Théorème 2B]).

Définition 3.1.1. Soit $n \geq 1$. Un corps convexe de Minkowski dans \mathbb{R}^n est un sous-ensemble compact $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ de volume non nul et tel que, pour tous $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{C}$ et pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ avec $|s| + |t| \leq 1$, on a $s\mathbf{v} + t\mathbf{w} \in \mathcal{C}$.

Théorème 3.1.2. Soit $n \geq 1$ et soit $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ un corps convexe de Minkowski avec $\text{Vol}(\mathcal{C}) \geq 2^n$. Alors, il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ non nul tel que $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$.

Le théorème des corps convexes de Minkowski permet de généraliser le principe des tiroirs de Dirichlet et on obtient alors le résultat suivant sur l'approximation par les formes linéaires.

Théorème 3.1.3. Soit $n \geq 2$, soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n . Alors, il existe une constante $\kappa > 0$ telle que le système d'inégalités

$$\|\mathbf{x}\| \leq X \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \kappa X^{-(n-1)} \quad (3.1.1)$$

admet une solution non nulle $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ pour tout $X \geq 1$ suffisamment grand. En particulier, l'inégalité

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \kappa \|\mathbf{x}\|^{-(n-1)} \quad (3.1.2)$$

admet une infinité de solutions $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$.

Démonstration: On note que le résultat est évident lorsque $\mathbf{u} = 0$. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que \mathbf{u} est unitaire. Alors, il existe une base orthonormée $\beta = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de \mathbb{R}^n avec $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}$. On pose $\|\cdot\|_\beta$ la norme sur \mathbb{R}^n donnée par

$$\|\mathbf{v}\|_\beta = \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i|$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Par équivalence des normes sur \mathbb{R}^n , il existe une constante $\kappa_1 \leq 1$ telle que $\|\mathbf{v}\|_\beta \leq \kappa_1 \|\mathbf{v}\|$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $X \geq 1$, on désigne par $\mathcal{P}_X \subseteq \mathbb{R}^n$ le parallélépipède constitué des vecteurs $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ avec

$$\max_{1 \leq i \leq n-1} |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i| \leq \kappa_1^{-1} X \quad \text{et} \quad |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_n| \leq \kappa_1^{n-1} X^{-(n-1)}.$$

On observe alors que \mathcal{P}_X est un corps convexe Minkowski dans \mathbb{R}^n de volume

$$\text{Vol}(\mathcal{P}_X) = X^{n-1} X^{-(n-1)} \text{Vol}(\mathcal{P}_1) = \text{Vol}(\mathcal{P}_1) = 2^n,$$

pour tout $X \geq 1$ et le théorème 3.1.2 garantit donc l'existence de $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ non nul avec $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_X$. Lorsque $X \geq \kappa_1$, ce \mathbf{x} satisfait

$$\|\mathbf{x}\| \leq \kappa_1 \|\mathbf{x}\|_\beta \leq \kappa_1 \max\{\kappa_1^{-1} X, \kappa_1^{n-1} X^{-(n-1)}\} = X$$

et

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_n| \leq \kappa_1^{n-1} X^{-(n-1)}.$$

■

Il est naturel ici de se demander si l'exposant $(n-1)$ apparaissant dans (3.1.1) et (3.1.2) peut être remplacé par un nombre plus grand pour un triplet $(n, \mathbf{u}, \|\cdot\|)$ donné. Cette question conduit à la définition suivante.

Définition 3.1.4. Soit $n \geq 2$, soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et soit $\|\cdot\|_\infty$ la norme du maximum sur \mathbb{R}^n . On définit $\hat{\omega}(\mathbf{u}) \in [0, +\infty]$ comme le suprémum des $\hat{\omega} \in \mathbb{R}$ pour lesquels le système d'inégalités

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq X \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq X^{-\hat{\omega}} \quad (3.1.3)$$

admet une solution non nulle $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ pour tout $X \geq 1$ suffisamment grand.
De façon similaire, on définit $\omega(\mathbf{u}) \in [0, +\infty]$ comme le suprémum des $\omega \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'inégalité

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty^{-\omega} \quad (3.1.4)$$

admet une infinité de solutions $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$.

Puisque toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes, il est possible de remplacer $\|\cdot\|_\infty$ par une norme quelconque dans la définition 3.2.3. Cela mène alors à une définition équivalente des exposants $\hat{\omega}$ et ω qui est plus flexible.

Proposition 3.1.5. *Soit $n \geq 2$, soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, soient $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ des constantes et soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n . Alors $\hat{\omega}(\mathbf{u})$ est égale au suprémum des $\omega \in \mathbb{R}$ tels que le système d'inégalités*

$$\|\mathbf{x}\| \leq \kappa_1 X \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \kappa_2 X^{-\omega} \quad (3.1.5)$$

admette une solution non nulle $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ pour tout $X \geq 1$ suffisamment grand.
De même, $\omega(\mathbf{u})$ est égal au suprémum des $\omega \in \mathbb{R}$ tels que le système d'inégalités (3.1.5) admette une solution non nulle $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ pour des $X \geq 1$ arbitrairement grands.

Soit $n \geq 2$ et soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Il découle de la proposition 3.1.5 et du théorème 3.1.3 que

$$\omega(\mathbf{u}) \geq \hat{\omega}(\mathbf{u}) \geq n - 1.$$

3.2 Suite des meilleures approximations

On débute en rappelant des notions de base de la théorie des fractions continues.

Définition 3.2.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un irrationnel. Il existe une et une seule suite $\{(p_i, q_i)\}_{i \geq 1}$ dans \mathbb{Z}^2 avec $q_1 = 1$ et telle que, pour tout $i \geq 1$, on a :*

1. $|q_i \alpha - p_i| = \min_{p \in \mathbb{Z}} |q_i \alpha - p|$;
2. $1 \leq q_i < q_{i+1}$;
3. $0 < |q_{i+1} \alpha - p_{i+1}| < |q_i \alpha - p_i| \leq 1$;
4. Pour tout $q \in \mathbb{Z}$ avec $1 \leq q < q_{i+1}$, on a $|q_i \alpha - p_i| \leq \min_{p \in \mathbb{Z}} |q \alpha - p|$.

On dit alors que $\{p_i/q_i\}_{i \geq 1}$ est la suite des réduites de α .

Le résultat suivant permet de lier la suite des réduites d'un nombre à son écriture en fraction continue (voir [3, Chapitre I, Théorème II]). On y énumère également quelques propriétés de la suite des réduites.

Théorème 3.2.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un irrationnel avec $0 < \alpha < 1/2$ et soit $\{p_i/q_i\}_{i \geq 1}$ la suite des réduites de α . On pose $(p_0, q_0) = (1, 0)$ et, pour tout $i \geq 1$, on pose $a_i \geq 1$ l'entier tel que

$$a_i \leq \frac{|q_{i-1}\alpha - p_{i-1}|}{|q_i\alpha - p_i|} < a_i + 1.$$

Alors, pour tout $i \geq 1$, on a :

1. $|q_i\alpha - p_i| < q_{i+1}^{-1}$.
2. $q_{i+1}\alpha - p_{i+1}$ et $q_i\alpha - p_i$ de signes opposés ;
3. $(p_{i+1}, q_{i+1}) = a_i(p_i, q_i) + (p_{i-1}, q_{i-1})$;
4. $|p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i| = 1$.

De plus, on a

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}.$$

On définit maintenant ce qu'est une suite de meilleures approximations dans le contexte de l'approximation par les formes linéaires. Il s'agit essentiellement d'une généralisation de la suite des réduites d'un nombre, d'où la ressemblance avec la définition 3.2.1.

Définition 3.2.3. Soit un entier $n \geq 2$, soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} et soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n . Une suite de meilleures approximations de \mathbf{u} par rapport à $\|\cdot\|$ est une suite $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}$ dans \mathbb{Z}^n telle que, pour tout $i \geq 1$, on a :

1. $0 < \|\mathbf{x}_i\| < \|\mathbf{x}_{i+1}\|$;
2. $0 < |\mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{u}| < |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}|$;
3. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ avec $0 < \|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{x}_{i+1}\|$, on a $|\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}| \leq |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|$.

Pour le reste de la section, on fixe $(n, \mathbf{u}, \|\cdot\|)$ comme dans la définition 3.2.3. La proposition suivante montre que toutes les suites de meilleures approximations de \mathbf{u} par rapport à $\|\cdot\|$ sont les mêmes, à l'exception peut-être du point de départ et du choix des signes.

Proposition 3.2.4. Soient $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}, \{\mathbf{x}'_i\}_{i \geq 1}$ des suites de meilleures approximations de \mathbf{u} par rapport à $\|\cdot\|$. On suppose $\|\mathbf{x}_1\| \leq \|\mathbf{x}'_1\|$. Alors, il existe $k \geq 0$ et une suite $\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$ dans $\{\pm 1\}$ tels que

$$\mathbf{x}'_i = \varepsilon_i \mathbf{x}_{k+i} \quad (i \geq 1).$$

À partir d'ici, on fixe une suite de meilleures approximations $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}$ de \mathbf{u} par rapport à $\|\cdot\|$. On pose aussi

$$X_i := \|\mathbf{x}_i\|_2 \quad \text{et} \quad L_i := |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}|$$

pour tout $i \geq 1$. Avec cette notation, on peut réécrire le théorème d'approximation de Dirichlet (théorème 3.1.3) comme suit.

Proposition 3.2.5. *Il existe une constante $\kappa > 0$ telle que*

$$L_i \leq \kappa X_{i+1}^{-(n-1)}$$

pour tout $i \geq 1$ suffisamment grand.

Démonstration: Le théorème 3.1.3 garantit l'existence de constantes $\kappa > 0$ et $B > 1$ telles que, pour tout $X \geq B$, le système d'inégalités

$$\|\mathbf{x}\| \leq X \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \kappa X^{-(n-1)} \quad (3.2.1)$$

admette une solution non nulle $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$. Puisque $\{X_i\}_{i \geq 1}$ croît vers l'infini, il existe un entier $I \geq 1$ tel que $X_i \geq B$ pour tout $i \geq I$.

Soient $i \geq I$ et $X \in \mathbb{R}$ avec $X_i \leq X < X_{i+1}$. Alors, il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ non nulle qui satisfait le système d'inégalités (3.2.1). Pour ce \mathbf{x} , on a

$$\|\mathbf{x}\| \leq X < X_{i+1}$$

et, par définition de la suite $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}$, on obtient

$$L_i \leq |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \kappa X^{-(n-1)}.$$

En faisant tendre X vers X_{i+1} , on obtient

$$L_i \leq \kappa X_{i+1}^{-(n-1)},$$

ce qui termine la preuve. ■

On présente maintenant deux résultats importants de Davenport et Schmidt sur les suites de meilleures approximations.

Proposition 3.2.6 (Davenport et Schmidt [5, Preuve du Lemme 2]). *Pour tout $i \geq 1$, $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})$ est une paire primitive de points entiers, c'est-à-dire que*

$$\dim_{\mathbb{Q}} \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle_{\mathbb{Q}} = 2 \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle_{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{Z}^n = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Démonstration: On fixe un indice $i \geq 1$. Si $\mathbf{x}_{i+1} = r\mathbf{x}_i$ pour un certain $r \in \mathbb{Q}$, alors on a

$$\|\mathbf{x}_i\| < \|\mathbf{x}_{i+1}\| = |r| \|\mathbf{x}_i\| \quad \text{et} \quad |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}| > |\mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{u}| = |r| |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}|,$$

ce qui donne $1 < |r|$ et $1 > |r|$ respectivement (contradiction). On en déduit que $\dim\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle_{\mathbb{Q}} = 2$.

Maintenant, on suppose $s, t \in \mathbb{Q}$ tels que $\mathbf{y} := s\mathbf{x}_i + t\mathbf{x}_{i+1} \in \mathbb{Z}^n$. On choisit $s' \in \mathbb{Z} + s$ et $t' \in \mathbb{Z} + t$ avec $|s'|, |t'| \leq 1/2$ et on obtient

$$\mathbf{z} := s'\mathbf{x}_i + t'\mathbf{x}_{i+1} \in \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle_{\mathbb{Z}} + \mathbf{y} \subseteq \mathbb{Z}^n.$$

On a alors

$$\|\mathbf{z}\| \leq |s'| \|\mathbf{x}_i\| + |t'| \|\mathbf{x}_{i+1}\| < \|\mathbf{x}_{i+1}\| \quad \text{et} \quad |\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}| \leq |s'| |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}| + |t'| |\mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{u}| < |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}|,$$

ce qui implique que $\mathbf{z} = 0$ et donc que $s' = t' = 0$. Il s'ensuit que $s, t \in \mathbb{Z}$. \blacksquare

Pour le deuxième résultat, la démonstration proposée est légèrement différente de celle élaborée par Davenport et Schmidt dans [5], mais les idées sont les mêmes.

Proposition 3.2.7 (Davenport et Schmidt [5, Lemme 3]). *On suppose que $n \geq 3$. Alors, il existe une infinité d'indices $i \geq 2$ tels que $\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}$ soient linéairement indépendants sur \mathbb{Q} .*

Démonstration: D'abord, on suppose $i \geq 2$ tel que $\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}$ sont linéairement dépendants sur \mathbb{Q} . En vertu de la proposition 3.2.6, on a

$$\langle \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle_{\mathbb{Q}} = \langle \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i \rangle_{\mathbb{Q}} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle_{\mathbb{Q}}$$

ainsi que

$$\langle \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle_{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{Z}^n = \langle \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Donc, il existe $s, t \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\mathbf{x}_{i-1} \in \mathbb{Z}\mathbf{x}_i + s\mathbf{x}_{i+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{i+1} \in \mathbb{Z}\mathbf{x}_i + t\mathbf{x}_{i-1}.$$

On a alors $\mathbf{x}_{i-1} \in \mathbb{Z}\mathbf{x}_i + (st)\mathbf{x}_{i+1}$, d'où l'on déduit que $st = 1$. Il s'ensuit que $s = \pm 1$, ce qui donne $\mathbf{x}_{i-1} \in \mathbb{Z}\mathbf{x}_i \pm \mathbf{x}_{i+1}$ et donc

$$\mathbf{x}_{i-1} \wedge \mathbf{x}_i = \pm (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{x}_{i+1}).$$

On suppose qu'il existe $j \geq 2$ tel que $\{\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}\}$ est linéairement dépendant sur \mathbb{Q} pour tout $i \geq j$. Pour tout $i \geq j$, on a alors

$$\mathbf{x}_{j-1} \wedge \mathbf{x}_j = \pm (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{x}_{i+1}).$$

En posant $T : \wedge^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire donnée par

$$T(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n),$$

on obtient donc

$$\|T(\mathbf{x}_{j-1} \wedge \mathbf{x}_j)\| = \|T(\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{x}_{i+1})\| \leq L_i X_{i+1} + L_{i+1} X_i \leq \kappa X_{i+1}^{-(n-2)}$$

pour tout $i \geq j$. En faisant tendre i vers l'infini, on obtient donc $T(\mathbf{x}_{j-1} \wedge \mathbf{x}_j) = 0$ et, comme \mathbf{x}_{j-1} et \mathbf{x}_j sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} , on obtient $\mathbf{x}_{j-1} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{u} = 0$, ce qui est impossible. On conclut donc qu'il existe une infinité d'indices $i \geq 1$ tels que $\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . ■

La proposition 3.2.7 revient à dire que, si $n \geq 3$, alors on a

$$\dim\langle\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq I}\rangle_{\mathbb{R}} \geq 3$$

pour tout $I \geq 1$. En fait, le nombre 3 dans cette inégalité ne peut être remplacé par aucun entier plus grand, comme le montre ce résultat de Moshchevitin

Théorème 3.2.8 (Moshchevitin, [6, Théorème 1.3]). *Soit $m \geq 4$ un entier. On désigne par $\|\cdot\|_{\infty}$ la norme du maximum sur \mathbb{R}^m . Alors, il existe $\mathbf{u}' \in \mathbb{R}^m$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} et $\{\mathbf{x}'_i\}_{i \geq 1}$ une suite de meilleures approximations de \mathbf{u}' par rapport à $\|\cdot\|_{\infty}$ tels que*

$$\dim\langle\{\mathbf{x}'_i\}_{i \geq 1}\rangle_{\mathbb{R}} = 3.$$

3.3 Relation entre la suite des meilleures approximations et les exposants d'approximation

Dans cette section, on montre que comment calculer les exposants $\hat{\omega}$ et ω à partir d'une suite de meilleures approximation. Pour le reste de la section, on fixe $n \geq 2$ et

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . On fixe également $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n et $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}$ une suite de meilleures approximations de \mathbf{u} par rapport à $\|\cdot\|$. On pose aussi

$$X_i := \|\mathbf{x}_i\|_2 \quad \text{et} \quad L_i := |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}|$$

pour tout $i \geq 1$.

Proposition 3.3.1. $\hat{\omega}(\mathbf{u})$ est égal au suprémum des $\hat{\omega} \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait

$$L_i \leq X_{i+1}^{-\hat{\omega}}$$

pour tout $i \geq 1$ suffisamment grand.

Démonstration: Soit $\hat{\omega} \in \mathbb{R}$. On suppose d'abord que $0 < \hat{\omega} < \hat{\omega}(\mathbf{u})$. Alors, il existe $B > 1$ tel que, pour tout $X \geq B$, le système d'inégalités

$$\|\mathbf{x}\| \leq X \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq X^{-\hat{\omega}} \tag{3.3.1}$$

admette une solution $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ non nulle. Aussi, comme $\{X_i\}_{i \geq 1}$ croît vers l'infini, il existe $I \geq 1$ tel que $X_i \geq B$ pour tout $i \geq I$. Soient $i \geq I$ et $X \in \mathbb{R}$ avec $X_i \leq X < X_{i+1}$. Alors, il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ non nulle qui satisfait le système d'inégalités (3.3.1). Pour ce \mathbf{x} , on a

$$\|\mathbf{x}\| \leq X < X_{i+1}$$

et, par définition de la suite $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}$, on obtient

$$L_i \leq |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq X^{-\hat{\omega}}.$$

En faisant tendre X vers X_{i+1} , on obtient

$$L_i \leq X_{i+1}^{-\hat{\omega}}$$

pour tout $i \geq I$.

On suppose maintenant que $\hat{\omega} > \hat{\omega}(\mathbf{u})$. Alors, il existe une suite croissante de nombres réels $\{Y_j\}_{j \geq 1}$ qui tend vers l'infini et telle que, pour tout $j \geq 1$, le système d'inégalités

$$\|\mathbf{x}\| \leq Y_j \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq Y_j^{-\hat{\omega}}$$

n'admette aucune solution non nulle $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$. Quitte à omettre les premiers termes de la suite $\{Y_j\}_{j \geq 1}$, on peut supposer que $Y_1 \geq X_1$. Puisque $\{X_i\}_{i \geq 1}$ croît vers l'infini, il existe une suite croissante d'entiers positifs $\{i_j\}_{j \geq 1}$ qui tend vers l'infini et telle que

$$X_{i_j} \leq Y_j < X_{i_j+1}$$

pour tout $j \geq 1$. Alors, comme $\|\mathbf{x}_{i_j}\| \leq Y_j$, on obtient

$$L_{i_j} = |\mathbf{x}_{i_j} \cdot \mathbf{u}| > Y_j^{-\hat{\omega}} > X_{i_j+1}^{-\hat{\omega}}$$

pour tout $j \geq 1$. On en déduit que

$$L_i > X_{i+1}^{-\hat{\omega}}$$

pour une infinité de $i \geq 1$. ■

Proposition 3.3.2. $\omega(\mathbf{u})$ est égal au suprémum des $\omega \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait

$$L_i \leq X_i^{-\omega}$$

pour une infinité de $i \geq 1$.

Démonstration: Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On suppose d'abord que $\omega > \omega(\mathbf{u})$. Alors, il existe $B > 1$ tel que, pour tout $X \geq B$, le système d'inégalités

$$\|\mathbf{x}\| \leq X \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq X^{-\omega} \tag{3.3.2}$$

n'admette aucune solution $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ non nulle. Aussi, comme $\{X_i\}_{i \geq 1}$ croît vers l'infini, il existe $I \geq 1$ tel que $X_i \geq B$ pour tout $i \geq I$. Soient $i \geq I$ et $X \in \mathbb{R}$ avec $X_i \leq X < X_{i+1}$. Comme $\|\mathbf{x}_i\| = X_i \leq X$, on a

$$L_i = |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}| > X^{-\omega}.$$

En faisant tendre X vers X_i , on obtient

$$L_i > X_i^{-\omega}$$

pour tout $i \geq I$.

On suppose maintenant que $0 < \omega < \omega(\mathbf{u})$. Alors, il existe une suite $\{\mathbf{y}_j\}_{j \geq 1}$ d'éléments non nuls de \mathbb{Z}^n strictement croissante en norme et telle que

$$|\mathbf{y}_j \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{y}_j\|^{-\hat{\omega}}$$

pour tout $j \geq 1$. On note cette solution. Quitte à omettre les premiers termes de la suite $\{\mathbf{y}_j\}_{j \geq 1}$, on peut supposer que $\|\mathbf{y}_1\| \geq X_1$. Puisque $\{X_i\}_{i \geq 1}$ croît vers l'infini, il existe une suite croissante d'entiers positifs $\{i_j\}_{j \geq 1}$ qui tend vers l'infini et telle que

$$X_{i_j} \leq \|\mathbf{y}_j\| < X_{i_j+1}$$

pour tout $j \geq 1$. On a donc

$$L_{i_j} \leq |\mathbf{y}_j \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{y}_j\|^{-\omega} \leq X_{i_j}$$

pour tout $j \geq 1$. On en déduit que

$$L_i < X_i^{-\omega}$$

pour une infinité de $i \geq 1$. ■

Les deux dernières propositions permettent de calculer le rapport $\omega/\hat{\omega}$ à partir d'une suite de meilleures approximations.

Proposition 3.3.3. *On suppose $\hat{\omega}(\mathbf{u}) < +\infty$. Alors, on a*

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\log X_{i+1}}{\log X_i} = \frac{\omega(\mathbf{u})}{\hat{\omega}(\mathbf{u})},$$

où l'on convient que le membre de droite est égal à $+\infty$ lorsque $\omega(\mathbf{u}) = +\infty$.

Démonstration: Soient $\hat{\omega}_+, \omega_-$ des nombres réels positifs avec

$$\hat{\omega}(\mathbf{u}) < \hat{\omega}_+ \quad \text{et} \quad \omega_- < \omega(\mathbf{u}).$$

Alors, les propositions 3.3.1 et 3.3.2 donnent

$$X_{i+1}^{-\hat{\omega}_+} < L_i \leq X_i^{-\omega_-}$$

pour une infinité de $i \geq 1$. On obtient donc

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\log X_{i+1}}{\log X_i} \geq \frac{\omega_-}{\hat{\omega}_+}.$$

Si $\omega(\mathbf{u}) = +\infty$, on obtient donc le résultat souhaité en fixant ω_+ et en faisant tendre ω_- vers l'infini.

On suppose donc à partir d'ici que $\omega(\mathbf{u}) < +\infty$. Soient $\hat{\omega}_-, \omega_+$ des nombres réels positifs avec

$$\hat{\omega}_- < \hat{\omega}(\mathbf{u}) \quad \text{et} \quad \omega(\mathbf{u}) < \omega_+.$$

Dans ce cas, les propositions 3.3.1 et 3.3.2 donnent

$$X_i^{-\omega_+} < L_i \leq X_{i+1}^{-\hat{\omega}_-}$$

pour tout $i \geq 1$ suffisamment grand. On obtient donc

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\log X_{i+1}}{\log X_i} \leq \frac{\omega_+}{\hat{\omega}_-}.$$

Il suffit alors de prendre les paires $\hat{\omega}_- < \hat{\omega}_+$ et $\omega_- < \omega_+$ de plus en plus près de $\hat{\omega}(\mathbf{u})$ et $\omega(\mathbf{u})$ respectivement pour obtenir le résultat. ■

Chapitre 4

Approximation par les formes linéaires dans un cône

Les résultats de ce chapitre sont nouveaux et généralisent un théorème de Schmidt sur l'approximation avec contrainte de signes.

4.1 Théorème de Schmidt sur l'approximation avec contrainte de signes

Le théorème de Schmidt s'énonce comme suit, où $\gamma = (1 + \sqrt{5})/2$ désigne le nombre d'or.

Théorème 4.1.1 (Schmidt, [11, Théorème 1]). *Soient $1, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ avec $x_1, x_2 > 0$ tels que*

$$|x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2| \leq \varepsilon \max\{x_1, x_2\}^{-\gamma}.$$

Ici, on remarque que pour tout $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ non nul avec

$$|x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2| \leq \frac{1}{2},$$

on a $\max\{|x_1|, |x_2|\} \geq 1$ et donc

$$|x_0| \leq |x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2| + 1/2 \leq \kappa \max\{|x_1|, |x_2|\},$$

pour $\kappa = |\alpha_1| + |\alpha_2| + 1/2$. Cela donne

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{\kappa^2 + 2} \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Alors, en notant $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et en posant $\mathbf{u} = (1, \alpha_1, \alpha_2)$, le théorème 4.1.1 se reformule en disant que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ tel que

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 > 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2 > 0 \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma}.$$

En faisant agir les opérateurs linéaires de \mathbb{R}^3 définis sur \mathbb{Q} , on arrive au résultat plus général suivant.

Lemme 4.1.2. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} et soient $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{Q}^3$ linéairement indépendants sur \mathbb{R} . Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ tel que*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1 > 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2 > 0 \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma}.$$

Démonstration: D'abord, on note qu'il existe un automorphisme linéaire T de \mathbb{R}^3 défini sur \mathbb{Q} tel que

$$T\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 \quad \text{et} \quad T\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2.$$

On observe que son adjointe T^* est également un automorphisme linéaire de \mathbb{R}^3 . De plus, T^* est défini sur \mathbb{Q} puisque pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^3$ on a

$$\mathbf{e}_i \cdot T^*\mathbf{v} = T\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{Q} \quad (i = 1, 2, 3)$$

et donc $T^*\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^3$. Comme $T^*(\mathbb{Z}^3)$ est un sous- \mathbb{Z} -module de type fini de \mathbb{Q}^3 , il existe un entier $q > 0$ tel que

$$qT^*(\mathbb{Z}^3) \subseteq \mathbb{Z}^3.$$

De plus, par équivalence des normes sur \mathbb{R}^3 , il existe une constante $\kappa > 0$ telle que

$$\|qT^*\mathbf{v}\|_2 \leq \kappa \|\mathbf{v}\|_2,$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

On observe maintenant que les coordonnées du vecteur $T\mathbf{u}$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . En effet, si $\mathbf{y} \cdot T\mathbf{u} = 0$ avec $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}^3$, alors $T^*\mathbf{y} \cdot \mathbf{u} = 0$ donc $T^*\mathbf{y} = \mathbf{y} = 0$. On peut donc écrire

$$T\mathbf{u} = r\mathbf{u}',$$

pour un nombre réel $r \neq 0$ et un vecteur $\mathbf{u}' \in \mathbb{R}^3$ de la forme $\mathbf{u}' = (1, \alpha_1, \alpha_2)$ avec $1, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} .

Pour $\varepsilon > 0$ donné, la remarque qui suit le théorème 4.1.1 garantit l'existence d'un point $\mathbf{x}' \in \mathbb{Z}^3$ satisfaisant

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_1 > 0, \quad \mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_2 > 0 \quad \text{et} \quad |\mathbf{x}' \cdot \mathbf{u}'| \leq \left(\frac{\varepsilon}{q|r|\kappa^\gamma} \right) \|\mathbf{x}'\|_2^{-\gamma}.$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 60

Alors, le point $\mathbf{x} = qT^*\mathbf{x}' \in \mathbb{Z}^3$ satisfait

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_i = q\mathbf{x}' \cdot T\mathbf{w}_i = q\mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_i > 0, \quad (i = 1, 2)$$

et

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| = q|\mathbf{x}' \cdot T\mathbf{u}| = q|r|\mathbf{x}' \cdot \mathbf{u}'| \leq \left(\frac{\varepsilon}{\kappa^\gamma}\right) \|\mathbf{x}'\|_2^{-\gamma} \leq \varepsilon \|qT^*\mathbf{x}'\|_2^{-\gamma} = \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma}.$$

■

On cherche maintenant à éliminer la condition de rationalité sur $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ dans le lemme 4.1.2. On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 4.1.3. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} et soient $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^3$ avec $\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ tel que*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1 > 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2 > 0 \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma}.$$

Remarque : Lorsque $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ a des coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , on a nécessairement $\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$ pour toute paire de vecteurs $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{Q}^3$ linéairement indépendants sur \mathbb{R} . Cela suit du fait que $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ est une droite définie sur \mathbb{Q} qui contient donc un point rationnel non nul, donc $\mathbf{u} \notin \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_{\mathbb{R}}$. Ainsi, le théorème 4.1.3 généralise le lemme 4.1.2.

Lemme 4.1.4. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} et soient $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^3$ avec $\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$. Alors, il existe $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{Q}^3$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} ainsi qu'une constante $C > 0$ tels que pour tout $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ satisfaisant*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_2 \geq 0 \tag{4.1.1}$$

on a

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 \geq C \|\mathbf{v}\|_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2 \geq C \|\mathbf{v}\|_2.$$

Démonstration : Soit T l'automorphisme linéaire de \mathbb{R}^3 défini par

$$T(a_1, a_2, b) = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + b\mathbf{u}.$$

Comme T est un homéomorphisme, $T^{-1}\mathbb{Q}^3$ est un sous-ensemble dense de \mathbb{R}^3 . Il s'ensuit que

$$\mathcal{E} = \{(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4 \mid \text{pour } i = 1, 2, \text{ il existe } b_i \in \mathbb{R} \text{ tel que } T(a_{i1}, a_{i2}, b_i) \in \mathbb{Q}^3\}$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 61

est un sous-ensemble dense de \mathbb{R}^4 . Aussi, l'ensemble

$$\mathcal{O} = \{(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4 \mid a_{11}, a_{22} > 0, \quad a_{12}, a_{21} < 0, \quad \text{et} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0\}$$

est un ouvert non vide de \mathbb{R}^4 . On trouve donc un élément $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ dans $\mathcal{E} \cap \mathcal{O}$ et on pose

$$\mathbf{z}_i = a_{i1}\mathbf{w}_1 + a_{i2}\mathbf{w}_2 + b_i\mathbf{u} \in \mathbb{Q}^3 \quad (i = 1, 2)$$

pour un choix convenable de $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. L'indépendance linéaire de \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 suit directement du fait que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Alors, pour tout $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ on obtient

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_i = a_{i1}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1) + a_{i2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2) \quad (i = 1, 2).$$

Comme $\Delta := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$, ces équations sont équivalentes au système

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 &= \frac{a_{22}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_1) - a_{12}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_2)}{\Delta} = \frac{|a_{22}|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_1) + |a_{12}|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_2)}{|\Delta|}, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2 &= \frac{-a_{21}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_1) + a_{11}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_2)}{\Delta} = \frac{|a_{21}|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_1) + |a_{11}|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_2)}{|\Delta|}. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Soient $\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2 \in \mathbb{R}^3$ les vecteurs tels que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}_1 \cdot \mathbf{u} &= 0, & \tilde{\mathbf{z}}_1 \cdot \mathbf{z}_1 &= 1, & \tilde{\mathbf{z}}_1 \cdot \mathbf{z}_2 &= 0, \\ \tilde{\mathbf{z}}_2 \cdot \mathbf{u} &= 0, & \tilde{\mathbf{z}}_2 \cdot \mathbf{z}_1 &= 0, & \tilde{\mathbf{z}}_2 \cdot \mathbf{z}_2 &= 1. \end{aligned}$$

Alors $\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2 \in \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} et les formules (4.1.2) appliquées à $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{z}}_i$ ($i = 1, 2$) livrent

$$\kappa_1 := \min_{1 \leq i, j \leq 2} \{\tilde{\mathbf{z}}_i \cdot \mathbf{w}_j\} = \Delta^{-1} \min_{1 \leq i, j \leq 2} |a_{i,j}| > 0.$$

Aussi, comme $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} = \langle \tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2 \rangle_{\mathbb{R}}$, on obtient par équivalence des normes sur $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ qu'il existe $\kappa_2 > 0$ tel que

$$\max\{|t_1|, |t_2|\} \geq \kappa_2 \|t_1\tilde{\mathbf{z}}_1 + t_2\tilde{\mathbf{z}}_2\|_2,$$

pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Donc, si un vecteur $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ satisfait (4.1.1), alors on a $\mathbf{v} = t_1\tilde{\mathbf{z}}_1 + t_2\tilde{\mathbf{z}}_2$ pour des nombres réels $t_1, t_2 \geq 0$ et on obtient

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i = t_1(\tilde{\mathbf{z}}_1 \cdot \mathbf{w}_i) + t_2(\tilde{\mathbf{z}}_2 \cdot \mathbf{w}_i) \geq \max\{t_1, t_2\} \min\{(\tilde{\mathbf{z}}_1 \cdot \mathbf{w}_i), (\tilde{\mathbf{z}}_2 \cdot \mathbf{w}_i)\} \geq \kappa_1\kappa_2 \|\mathbf{v}\|_2$$

pour $i = 1, 2$. Donc $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ satisfont la condition du lemme avec $C = \kappa_1\kappa_2 > 0$. ■

Pour déduire le théorème 4.1.3 à partir du lemme 4.1.2, on utilise le résultat suivant.

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 62

Lemme 4.1.5. *Soient $\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^3$ comme au lemme 4.1.4. Alors, il existe une constante $\varepsilon_0 > 0$ telle que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant*

1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_1 > 0$ et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_2 > 0$,
2. $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon_0 \|\mathbf{v}\|_2$,

on a

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2 > 0.$$

Démonstration: On note que $Z := \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ est une droite vectorielle de \mathbb{R}^3 définie sur \mathbb{Q} . Dès lors, Z contient un point non nul de \mathbb{Q}^3 et il s'ensuit que $Z \not\subseteq \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ puisque les coordonnées de \mathbf{u} sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . On en conclut que $\mathbb{R}^3 = \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \oplus Z$. Comme Z est une droite vectorielle, on a

$$|\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{y}| = \|\text{proj}_Z(\mathbf{y})\|_2 \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2$$

pour tous $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \tilde{\mathbf{v}} \in Z$. On pose

$$\lambda = \|\text{proj}_Z(\mathbf{u})\|_2 > 0, \quad \lambda_1 = \|\text{proj}_Z(\mathbf{w}_1)\|_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \|\text{proj}_Z(\mathbf{w}_2)\|_2 \geq 0.$$

On fixe pour l'instant un nombre $\varepsilon_0 > 0$ arbitraire et on suppose que $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ satisfait les conditions 1 et 2. Comme $\mathbb{R}^3 = \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \oplus Z$, on peut écrire \mathbf{v} sous la forme $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \tilde{\mathbf{v}}$ avec $\mathbf{v}' \in \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et $\tilde{\mathbf{v}} \in Z$. On obtient alors

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_1 = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{z}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_2 = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{z}_2.$$

En appliquant le lemme 4.1.4 au vecteur \mathbf{v}' , on obtient

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}_i \geq C \|\mathbf{v}'\|_2,$$

ce qui donne

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i \geq C \|\mathbf{v}'\|_2 - |\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w}_i| \geq C(\|\mathbf{v}\|_2 - \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2) - \lambda_i \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2 = C \|\mathbf{v}\|_2 - (C + \lambda_i) \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2$$

pour $i = 1, 2$. En notant que

$$\|\tilde{\mathbf{v}}\|_2 = \lambda^{-1} |\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u}| = \lambda^{-1} |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}| \leq \lambda^{-1} \varepsilon_0 \|\mathbf{v}\|_2,$$

on obtient alors

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i \geq (C - (C + \lambda_i) \lambda^{-1} \varepsilon_0) \|\mathbf{v}\|_2 \quad (i = 1, 2).$$

Comme ε_0 est un nombre positif arbitraire, on peut le choisir tel que

$$(C + \max\{\lambda_1, \lambda_2\})\lambda^{-1}\varepsilon_0 < C,$$

et, puisque $\|\mathbf{v}\|_2 > 0$, on conclut que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i > 0 \quad (i = 1, 2)$$

tel que désiré. ■

Démonstration: (du théorème 4.1.3)

Comme les hypothèses sur $\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^3$ au théorème 4.1.3 sont les mêmes qu'au lemme 4.1.4, on peut choisir $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{Q}^3$ et $\varepsilon_0 > 0$ comme aux lemmes 4.1.4 et 4.1.5. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, \varepsilon_0\}$. Alors, en vertu du lemme 4.1.2, il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ tel que

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}_1 > 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}_2 > 0 \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon' \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma}.$$

Comme \mathbf{x} est un point entier non nul, on a nécessairement $\|\mathbf{x}\|_2 \geq 1$ donc

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon' \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma} \leq \varepsilon_0 \|\mathbf{x}\|_2.$$

Alors le lemme 4.1.5 donne

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1 > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2 > 0.$$

On a également

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon' \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma} \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma},$$

tel que désiré. ■

4.2 Théorème général pour l'approximation dans un cône

Le résultat qui suit généralise le théorème 4.1.3 en remplaçant l'ensemble

$$\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2 > 0\},$$

par un cône autour d'une droite de $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ (voir la définition des cônes et des domaines angulaires à la section 2.5).

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 64

Théorème 4.2.1. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , soit D une droite vectorielle dans $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et soit $\delta \in (0, 1)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \cap \mathcal{A}(D, \delta)$ tel que*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma}.$$

D'abord, on montre que le théorème 4.2.1 implique le théorème 4.1.3. Pour ce faire, il suffit de démontrer le lemme suivant (voir la définition du symbole Θ_2 à la section 2.3).

Lemme 4.2.2. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} et soient $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^3$ avec $\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$. Alors, il existe $\delta \in (0, 1)$ et un vecteur non nul $\mathbf{d} \in \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ tels que, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{d} > 0 \quad \text{et} \quad \Theta_2(\mathbf{v}, \mathbf{d}) < \delta, \tag{4.2.1}$$

on a

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2 > 0. \tag{4.2.2}$$

Démonstration: On rappelle qu'il existe un isomorphisme linéaire

$$\phi_1 : \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tel que

$$\mathbf{v}_1 \cdot \phi_1(\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$$

pour tout $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ (voir le théorème 2.2.5 et la proposition 2.2.7). On pose

$$\mathbf{d} = \varepsilon \phi_1(\mathbf{u} \wedge (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)),$$

où $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ est le signe de $\Delta := \det(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$. Alors, puisque

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{d} = \varepsilon \det(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2, \mathbf{v})$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, on obtient directement

$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{d} = \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{d} = |\Delta| > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{d} = 0.$$

Tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ s'écrit sous la forme $\mathbf{v} = t\mathbf{d} + \mathbf{v}'$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{v}' \in \langle \mathbf{d} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$. Alors, par définition de $\mathcal{A}(\langle \mathbf{d} \rangle_{\mathbb{R}}, \delta)$ (voir proposition 2.5.1), le vecteur \mathbf{v} satisfait (4.2.1) pour un $\delta \in (0, 1)$ donné si et seulement si on a

$$t > 0 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}'\|_2 < \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} |\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}| = \frac{\delta |t| \|\mathbf{d}\|_2}{\sqrt{1 - \delta^2}},$$

ce qui donne

$$t > \frac{\sqrt{1 - \delta^2} \|\mathbf{v}'\|_2}{\delta \|\mathbf{d}\|_2}.$$

Pour $i = 1, 2$, on trouve

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i = t(\mathbf{d} \cdot \mathbf{w}_i) + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}_i \geq t|\Delta| - \|\mathbf{v}'\|_2 \|\mathbf{w}_i\|_2 > \left(\frac{\sqrt{1 - \delta^2} |\Delta|}{\delta \|\mathbf{d}\|_2} - \|\mathbf{w}_i\|_2 \right) \|\mathbf{v}'\|_2.$$

Ainsi, il suffit de choisir $\delta \in (0, 1)$ avec

$$\frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} \geq \frac{\|\mathbf{d}\|_2 \max\{\|\mathbf{w}_1\|_2, \|\mathbf{w}_2\|_2\}}{|\Delta|}$$

pour obtenir (4.2.2). ■

Maintenant, on montre que le théorème 4.1.3 implique le théorème 4.2.1.

Lemme 4.2.3. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , soit D une droite dans $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et soit $\delta \in (0, 1)$. Alors, il existe une constante $\varepsilon_0 > 0$ et $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^3$ avec $\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$ tels que, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant*

1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 > 0$ et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2 > 0$,
2. $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon_0 \|\mathbf{v}\|_2$,

on a $\mathbf{v} \in \mathcal{A}(D, \delta)$.

Démonstration: On choisit $\mathbf{d}, \mathbf{d}^{\perp} \in \mathbb{R}^3$ unitaires tels que

$$D = \langle \mathbf{d} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}^{\perp} = 0 \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} = \langle \mathbf{d}, \mathbf{d}^{\perp} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

On fixe pour l'instant un nombre $\rho \in (0, 1)$ arbitraire et on pose

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{d}^{\perp} + \rho \mathbf{d} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_2 = -\mathbf{d}^{\perp} + \rho \mathbf{d}.$$

On observe que

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 2\rho \det(\mathbf{u}, \mathbf{d}^{\perp}, \mathbf{d}) \neq 0.$$

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur quelconque que l'on écrit sous la forme $\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{d} + c\mathbf{d}^{\perp}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On peut donc calculer

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 &= b\rho + c, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2 &= b\rho - c. \end{aligned}$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 66

Dès lors, si \mathbf{v} satisfait la condition 1, on doit avoir

$$b > 0 \quad \text{et} \quad |c| < \rho b.$$

On fixe aussi un nombre $\tau \in (0, 1)$ arbitraire et on pose $\varepsilon_0 = \|\mathbf{u}\|_2 \rho \tau > 0$. Alors, si \mathbf{v} satisfait la condition 2, on obtient

$$\|a\mathbf{u}\|_2 = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}|}{\|\mathbf{u}\|_2} \leq \rho \tau \|\mathbf{v}\|_2.$$

Donc, si \mathbf{v} satisfait les conditions 1 et 2, on a

$$\|\mathbf{v}\|_2^2 = \|a\mathbf{u}\|_2^2 + b^2 + c^2 \leq \rho^2 \tau^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 + b^2 + \rho^2 b^2,$$

ce qui permet d'estimer

$$b \geq \sqrt{\frac{1 - \rho^2 \tau^2}{1 + \rho^2}} \|\mathbf{v}\|_2. \quad (4.2.3)$$

Si \mathbf{v} satisfait les conditions 1 et 2, on a

$$\|\text{proj}_{D^\perp}(\mathbf{v})\|_2 = \sqrt{\|a\mathbf{u}\|_2^2 + c^2} \leq \sqrt{\rho^2 \tau^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 + \rho^2 b^2} \leq \sqrt{2} \rho \max\{\tau \|\mathbf{v}\|_2, b\}. \quad (4.2.4)$$

Comme $\rho, \tau \in (0, 1)$ sont des nombres arbitraires, on peut les choisir de sorte que

$$\sqrt{2} \rho < \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \quad \text{et} \quad \tau \leq \sqrt{\frac{1 - \rho^2 \tau^2}{1 + \rho^2}}.$$

Dès lors, si \mathbf{v} satisfait les conditions 1 et 2, on obtient grâce à (4.2.3) et (4.2.4) que

$$\|\text{proj}_{D^\perp}(\mathbf{v})\|_2 \leq \sqrt{2} \rho \max\{\tau \|\mathbf{v}\|_2, b\} < \left(\frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \right) b = \left(\frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \right) \|\text{proj}_D(\mathbf{v})\|_2.$$

En vertu de la proposition 2.5.1, cela signifie que $\mathbf{v} \in \mathcal{A}(D, \delta)$. ■

Démonstration: (du théorème 4.2.1)

Comme le lemme 4.2.3 reprend les hypothèses du théorème 4.2.1, on peut choisir $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^3$ et $\varepsilon_0 > 0$ comme au lemme 4.2.3.

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 67

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, \varepsilon_0\}$. Alors, en vertu du théorème 4.1.3, il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ tel que

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1 > 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2 > 0 \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon' \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma}.$$

Comme \mathbf{x} est un point entier non nul, on a nécessairement $\|\mathbf{x}\|_2 \geq 1$ et donc

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon' \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma} \leq \varepsilon_0 \|\mathbf{x}\|_2.$$

Alors, le lemme 4.2.3 donne $\mathbf{x} \in \mathcal{A}(D, \delta)$ et on trouve

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon' \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma} \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma}.$$

■

On peut étendre le théorème 4.2.1 en dimension supérieure. Pour le reste de cette section, on fixe un entier $n \geq 3$ et on cherche à démontrer le résultat suivant.

Théorème 4.2.4. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , soit D une droite vectorielle dans $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et soit $\delta \in (0, 1)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{A}(D, \delta)$ tel que*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma}.$$

Pour la démonstration du théorème 4.2.4, on introduit d'abord la notion de rang d'un sous-espace de \mathbb{R}^n .

Définition 4.2.5. *Soit E un sous-espace de \mathbb{R}^n . On définit le rang de E , noté $\text{rg } E$, comme la dimension du plus petit sous-espace F de \mathbb{R}^n défini sur \mathbb{Q} tel que $E \subseteq F$.*

On remarque que, pour tout sous-espace E de \mathbb{R}^n , on a $\text{rg } E \geq \dim E$, avec l'égalité si et seulement si E est défini sur \mathbb{Q} .

Lemme 4.2.6. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , soit E un sous-espace non nul de $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et soit $\delta \in (0, 1)$. Alors, il existe un sous-espace E' de $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et un nombre $\delta' \in (0, 1)$ tels que :*

1. $\dim E' = \dim E$,
2. $\text{rg } E' = \dim E' + 1$,
3. $\mathcal{A}(E', \delta') \subseteq \mathcal{A}(E, \delta)$.

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 68

Démonstration: On fixe une droite vectorielle \tilde{Z} de \mathbb{R}^n définie sur \mathbb{Q} . On pose $Z' = (\tilde{Z})^\perp$, lequel est également un sous-espace de \mathbb{R}^n défini sur \mathbb{Q} , et on obtient $\mathbb{R}^n = Z' \oplus \tilde{Z}$. Puisque \tilde{Z} est une droite et que $\text{proj}_{\tilde{Z}}(\mathbf{u}) \neq 0$, on a

$$\|\tilde{\mathbf{v}}\|_2 = \lambda |\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u}|$$

pour tout $\tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{Z}$ avec

$$\lambda = \|\text{proj}_{\tilde{Z}}(\mathbf{u})\|_2^{-1} > 0.$$

Soit $k := \dim E$ et soit $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ une base de E . Puisque $\mathbb{R}^n = Z' \oplus \tilde{Z}$, il existe $\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_k \in Z'$ et $\tilde{\mathbf{w}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{w}}_k \in \tilde{Z}$ tels que

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}'_i + \tilde{\mathbf{w}}_i \quad (1 \leq i \leq k).$$

On fixe un nombre $\rho > 0$ arbitraire. Puisque Z' est défini sur \mathbb{Q} , l'ensemble $Z' \cap \mathbb{Q}^n$ est dense dans Z' . De plus, $(Z' \setminus W) \cap \mathbb{Q}^n$ est dense dans Z' pour tout sous-espace propre $W \subsetneq Z'$. Donc, comme la dimension de Z' est supérieure ou égale à k , on peut choisir $\mathbf{z}'_1, \dots, \mathbf{z}'_k \in Z' \cap \mathbb{Q}^n$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} tels que

$$\|\mathbf{w}'_i - \mathbf{z}'_i\|_2 \leq \rho \quad (1 \leq i \leq k).$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on choisit maintenant $\tilde{\mathbf{z}}_i \in \tilde{Z}$ tels que

$$(\mathbf{z}'_i + \tilde{\mathbf{z}}_i) \cdot \mathbf{u} = 0,$$

et on pose

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{z}'_i + \tilde{\mathbf{z}}_i \in \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^\perp.$$

On note que l'espace $\langle \mathbf{z}'_1, \dots, \mathbf{z}'_k \rangle_{\mathbb{R}} + \tilde{Z}$ est défini sur \mathbb{Q} et qu'il est de dimension $k + 1$ puisque $\tilde{Z} \not\subseteq Z'$ et $\langle \mathbf{z}'_1, \dots, \mathbf{z}'_k \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq Z'$. En posant $E' = \langle \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^\perp$, on a

$$E' \subsetneq E' + \tilde{Z} = \langle \mathbf{z}'_1, \dots, \mathbf{z}'_k \rangle_{\mathbb{R}} + \tilde{Z},$$

donc $\dim E' = k$ et $\text{rg } E' \leq k + 1$. De plus, comme aucun sous-espace non nul de $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^\perp$ n'est défini sur \mathbb{Q} , E' n'est pas défini sur \mathbb{Q} , donc $\text{rg } E' = k + 1$.

Maintenant, comme $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in E \subseteq \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^\perp$ et $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \in \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^\perp$, on a

$$\|\tilde{\mathbf{w}}_i - \tilde{\mathbf{z}}_i\|_2 = \lambda |(\tilde{\mathbf{w}}_i - \tilde{\mathbf{z}}_i) \cdot \mathbf{u}| = \lambda |(\mathbf{w}'_i - \mathbf{z}'_i) \cdot \mathbf{u}| \leq \lambda \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{w}'_i - \mathbf{z}'_i\|_2$$

et donc

$$\|\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i\|_2 = \sqrt{\|\mathbf{w}'_i - \mathbf{z}'_i\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{w}}_i - \tilde{\mathbf{z}}_i\|_2^2} \leq \sqrt{1 + \lambda^2 \|\mathbf{u}\|_2^2} \|\mathbf{w}'_i - \mathbf{z}'_i\|_2 \leq \kappa_1 \rho,$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 69

pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, où $\kappa_1 = \sqrt{1 + \lambda^2 \|\mathbf{u}\|_2^2} > 0$. On obtient donc que \mathbf{z}_i tend vers \mathbf{w}_i lorsque ρ tend vers zéro. La proposition 2.4.10 donne alors

$$\Theta_2(E, E') \leq \frac{\Theta_2(\mathbf{w}_1, E') + \dots + \Theta_2(\mathbf{w}_k, E')}{\Theta_k(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)} \leq k \Theta_k(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)^{-1} \max_{1 \leq i \leq k} \Theta_2(\mathbf{w}_i, \mathbf{z}_i).$$

Par continuité de Θ_2 , on déduit que $\Theta_2(E, E')$ tend vers zéro lorsque ρ tend vers zéro. En notant que E et E' sont de même dimension, on obtient

$$\Theta_2(E', E) = \Theta_2(E, E') \leq \delta' := \frac{\delta}{2},$$

en choisissant $\rho > 0$ suffisamment petit. Alors, pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{A}(E', \delta')$, on a

$$\Theta_2(\mathbf{v}, E) \leq \Theta_2(\mathbf{v}, E') + \Theta_2(E', E) < \delta' + \delta' = \delta.$$

On en conclut que $\mathcal{A}(E', \delta') \subseteq \mathcal{A}(E, \delta)$. ■

Lemme 4.2.7. *Soit F un sous-espace non nul de \mathbb{R}^n défini sur \mathbb{Q} de dimension l . Alors, il existe une application linéaire injective $h : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $h(\mathbb{Z}^l) = F \cap \mathbb{Z}^n$. De plus, l'application adjointe $h^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ est telle que, pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , les coordonnées de $h^*(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^l$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} .*

Démonstration: Comme F est défini sur \mathbb{Q} de dimension l , il existe $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_l \in \mathbb{Z}^n$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} tels que $F \cap \mathbb{Z}^n = \langle \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_l \rangle_{\mathbb{Z}}$. Il suit directement que $F = \langle \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_l \rangle_{\mathbb{R}}$. Soit $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l\}$ la base canonique de \mathbb{R}^l , on choisit $h : \mathbb{R}^l \rightarrow F$ l'application linéaire satisfaisant

$$h(\mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_i, \quad (1 \leq i \leq l).$$

Ainsi, h est injective puisque $h(\mathbf{e}_1), \dots, h(\mathbf{e}_l)$ sont linéairement indépendants et on a

$$h(\mathbb{Z}^l) = h(\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l \rangle_{\mathbb{Z}}) = \langle h(\mathbf{e}_1), \dots, h(\mathbf{e}_l) \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_l \rangle_{\mathbb{Z}} = F \cap \mathbb{Z}^n.$$

Enfin, soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . Si $\mathbf{y} \cdot h^*(\mathbf{u}) = 0$ pour un certain $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^l$, on a $h(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u} = 0$ avec $h(\mathbf{y}) \in F \cap \mathbb{Z}^n$ et donc $h(\mathbf{y}) = 0$. Mais, comme h est injective, cela signifie que $\mathbf{y} = 0$. On en conclut que les coordonnées de $h^*(\mathbf{u})$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . ■

Démonstration: (du théorème 4.2.4)

En vertu du lemme 4.2.6 il existe une droite $D' \subseteq \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et $\delta' \in (0, 1)$ tels que

$$\operatorname{rg} D' = 2 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(D', \delta') \subseteq \mathcal{A}(D, \delta).$$

Comme $\operatorname{rg} D' \leq 3$, il existe un sous-espace F de \mathbb{R}^n défini sur \mathbb{Q} de dimension 3 tel que $D' \subseteq F$. Puisque F satisfait les hypothèses du lemme 4.2.7 avec $l = 3$, il existe une application linéaire injective $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $h(\mathbb{Z}^3) = F \cap \mathbb{Z}^n$.

Comme h est injective d'image F et que D' est une droite vectorielle dans F , l'image réciproque de D' , $\tilde{D} := h^{-1}(D')$, est une droite vectorielle dans \mathbb{R}^3 . Comme les coordonnées de \mathbf{u} sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , les coordonnées de $\tilde{\mathbf{u}} := h^*(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . Aussi, puisque $D' \subseteq \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, on a $h^{-1}(D') \subseteq \langle h^*(\mathbf{u}) \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, donc $\tilde{D} \subseteq \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$.

Par équivalence des normes sur \mathbb{R}^3 , il existe une constante $\kappa_1 > 0$ telle que

$$\|h(\mathbf{v})\|_2 \leq \kappa_1 \|\mathbf{v}\|_2$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Aussi, comme h est injective, il suit du corollaire 2.3.3 qu'il existe une constante $\kappa_2 > 0$ telle que

$$\Theta_2(h(\mathbf{v}_1), h(\mathbf{v}_2)) \leq \kappa_2 \Theta_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

pour tous $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ non nuls. On choisit $\tilde{\delta} \in (0, 1)$ tel que $\kappa_2 \tilde{\delta} \leq \delta'$. Soit $\varepsilon > 0$. En vertu du théorème 4.2.1, il existe $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}^3$ non nul avec

$$\Theta_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{D}) < \tilde{\delta} \quad \text{et} \quad |\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}| \leq (\kappa_1^{-\gamma} \varepsilon) \|\tilde{\mathbf{x}}\|_2^{-\gamma}.$$

On pose $\mathbf{x} = h(\tilde{\mathbf{x}}) \in F \cap \mathbb{Z}^n$. Comme h est injective, \mathbf{x} est non nul. De plus, on a

$$\Theta_2(\mathbf{x}, D') = \Theta_2(h(\tilde{\mathbf{x}}), h(\tilde{D})) \leq \kappa_2 \Theta_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{D}) < \delta',$$

donc $\mathbf{x} \in \mathcal{A}(D', \delta') \subseteq \mathcal{A}(D, \delta)$. Enfin, \mathbf{x} satisfait

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| = |h(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{u}| = |\tilde{\mathbf{x}} \cdot h^*(\mathbf{u})| = |\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}| \leq (\kappa_1^{-\gamma} \varepsilon) \|\tilde{\mathbf{x}}\|_2^{-\gamma} \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2^{-\gamma},$$

puisque $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \kappa_1 \|\tilde{\mathbf{x}}\|_2$. Cela termine la preuve. ■

4.3 Optimalité du résultat

Dans cette section, on démontre que le théorème 4.2.4 est optimal en généralisant la construction de Roy dans [8].

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 71

Théorème 4.3.1. *Soit $n \geq 2$ un entier et soit $\psi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ une fonction croissante qui tend vers l'infini. Alors, il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , une droite vectorielle $D \subseteq \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et un nombre $\delta \in (0, 1)$ tels que*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \geq \frac{1}{\psi(\|\mathbf{x}\|_2) \|\mathbf{x}\|_2^{\gamma}}$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n+1} \cap \mathcal{A}(D, \delta)$, sauf peut-être un nombre fini.

Pour le reste de la section, on fixe un entier $n \geq 2$. Avant de démontrer le théorème 4.3.1, on rappelle d'abord la définition suivante.

Définition 4.3.2. *Soit $k \in \{1, \dots, n+1\}$. Un k -uplet $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ dans \mathbb{Z}^{n+1} est primitif si*

$$\dim \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle_{\mathbb{R}} = k \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}^n.$$

En particulier, dans le cas $k = 1$, \mathbf{x}_1 est primitif si et seulement si ses coordonnées n'admettent aucun diviseur commun non-trivial.

On remarque aussi qu'un k -uplet $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$ dans \mathbb{Z}^{n+1} est primitif si et seulement si il existe $\mathbf{y}_{k+1}, \dots, \mathbf{y}_{n+1} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tels que $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n+1}\}$ forme une base de \mathbb{Z}^{n+1} .

La démonstration du théorème 4.3.1 nécessite également que l'on fixe un nombre mal approchable α avec $0 < \alpha < 1/2$. Lorsque l'on dit de α qu'il est mal approchable, on entend qu'il existe une constante $A > 1$ tel que

$$|q\alpha - p| \geq \frac{1}{A|q|},$$

pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q \neq 0$. On pose également $\{p_m/q_m\}_{m \geq 1}$ la suite des réduites de α . Alors, pour tout $m \geq 1$, les entiers p_m et q_m sont premiers entre eux avec $0 \leq p_m < q_m$. Comme $|q_m\alpha - p_m| < q_{m+1}^{-1}$, le fait que α soit mal approchable donne

$$\frac{1}{Aq_m} \leq |q_m\alpha - p_m| < q_{m+1}^{-1}$$

et donc $q_m < q_{m+1} < Aq_m$ pour tout $m \geq 1$. On a aussi le résultat suivant.

Proposition 4.3.3. *Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ et soit $m \geq 1$ avec $1 \leq |q| < q_m$. Alors*

$$|p_m q - p q_m| \geq \frac{q_m}{2A|q|}. \tag{4.3.1}$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 72

Démonstration: Puisque q_m et p_m sont premiers entre eux, on a $p_m q - p q_m = 0$ si et seulement si (p, q) est un multiple entier de (p_m, q_m) . Comme $1 \leq |q| < q_m$, on a donc $p_m q - p q_m \neq 0$, ce qui donne

$$|p_m q - p q_m| \geq 1.$$

Ainsi, (4.3.1) est vérifiée lorsque $q_m \leq 2A|q|$. Autrement, on a $|q| < q_m/2A$ et on obtient

$$\begin{aligned} |p_m q - p q_m| &= |q_m(q\alpha - p) - q(q_m\alpha - p_m)| \geq q_m|q\alpha - p| - |q||q_m\alpha - p_m| \\ &\geq \frac{q_m}{A|q|} - \frac{|q|}{q_{m+1}} > \frac{q_m}{A|q|} - \frac{q_m}{2Aq_{m+1}} \geq \frac{q_m}{2A|q|}. \end{aligned}$$

■

Lemme 4.3.4. *On suppose $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ un n -uplet primitif dans \mathbb{Z}^{n+1} . Soient un entier $m \geq 2$ et des paramètres $X, Y, Z > 1$ satisfaisant*

$$\max\{\|\mathbf{x}_1\|_2, \dots, \|\mathbf{x}_n\|_2\} \leq X, \quad 2nX \leq Y \leq Z \quad \text{et} \quad q_{m-1} \leq \frac{2Z}{Y} < q_m.$$

Alors il existe $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ possédant les propriétés suivantes :

1. $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\}$ forme une base de \mathbb{Z}^{n+1} ;
2. $(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{z})$ est un n -uplet primitif et

$$\mathbf{z} \in p_m \mathbf{x}_1 + \langle \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \rangle_{\mathbb{Z}} + q_m \mathbf{y};$$

3. $Y \leq \|\mathbf{y}\|_2 \leq 2Y$ et $Z \leq \|\mathbf{z}\|_2 \leq 5AZ$;

$$4. \Theta_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}) \leq \frac{nX}{Z} + \frac{2A}{\|\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n\|_2 Y};$$

Démonstration: Comme $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ est un n -uplet primitif , il existe $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ qui satisfait la propriété 1. On fixe un tel point entier et on le note \mathbf{y}_0 . On fixe également $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle_{\mathbb{R}}$. Dès lors, on peut écrire \mathbf{y}_0 sous la forme

$$\mathbf{y}_0 = r\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \dots + s_n\mathbf{x}_n + t\mathbf{u}$$

avec $r, s_2, \dots, s_n, t \in \mathbb{R}$. Puisque $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_0\}$ est une base de \mathbb{Z}^{n+1} , on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= |\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_0)| = \|\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n \wedge \mathbf{y}_0\|_2 \\ &= \|\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n \wedge (t\mathbf{u})\|_2 = |t| \|\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n\|_2, \end{aligned}$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 73

ce qui donne $|t| = \|\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n\|_2^{-1} \leq 1$.

Maintenant, on note r' l'unique élément positif de $r + \mathbb{Z}$ satisfaisant

$$Y + \frac{\|\mathbf{x}_2\|_2}{2} + \cdots + \frac{\|\mathbf{x}_n\|_2}{2} + 1 \leq r' \|\mathbf{x}_1\|_2 < Y + \|\mathbf{x}_1\|_2 + \frac{\|\mathbf{x}_2\|_2}{2} + \cdots + \frac{\|\mathbf{x}_n\|_2}{2} + 1$$

et, on choisit $s'_i \in s_i + \mathbb{Z}$ avec $|s'_i| \leq 1/2$ pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$. On pose ensuite

$$\mathbf{y} = r'\mathbf{x}_1 + s'_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s'_n\mathbf{x}_n + t\mathbf{u}. \quad (4.3.2)$$

Cela donne

$$\|\mathbf{y}\|_2 \geq \|r'\mathbf{x}_1\|_2 - \|s'_2\mathbf{x}_2\|_2 - \cdots - \|s'_n\mathbf{x}_n\|_2 - \|t\mathbf{u}\|_2 \geq \|r'\mathbf{x}_1\|_2 - \frac{\|\mathbf{x}_2\|_2}{2} - \cdots - \frac{\|\mathbf{x}_n\|_2}{2} - 1 \geq Y,$$

et

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}\|_2 &\leq \|r'\mathbf{x}_1\|_2 + \|s'_2\mathbf{x}_2\|_2 + \cdots + \|s'_n\mathbf{x}_n\|_2 + \|t\mathbf{u}\|_2 \leq Y + \|\mathbf{x}_1\|_2 + \cdots + \|\mathbf{x}_n\|_2 + 1 \\ &\leq Y + 2nX \leq 2Y. \end{aligned}$$

Ainsi, \mathbf{y} satisfait la propriété 3 et, comme il s'agit d'un élément de $\mathbf{y}_0 + \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle_{\mathbb{Z}}$, il satisfait également la propriété 1.

On pose enfin

$$\mathbf{z} = p_m\mathbf{x}_1 + l_2\mathbf{x}_2 + \cdots + l_n\mathbf{x}_n + q_m\mathbf{y},$$

où l_2, \dots, l_n sont des entiers tels que

$$|q_ms'_i + l_i| \leq 1/2, \quad (2 \leq i \leq n).$$

Ce point satisfait nécessairement la propriété 2 puisque q_m et p_m sont premiers entre eux. Pour estimer la norme de \mathbf{z} , on note d'abord que

$$|l_i| \leq |q_ms'_i| + 1/2 \leq \frac{q_m + 1}{2} \leq q_m,$$

d'où

$$\|\mathbf{z} - q_m\mathbf{y}\|_2 \leq p_m \|\mathbf{x}_1\|_2 + |l_2| \|\mathbf{x}_2\|_2 + \cdots + |l_n| \|\mathbf{x}_n\|_2 \leq q_m(nX) \leq \frac{q_m Y}{2}.$$

Comme $Y \leq \|\mathbf{y}\|_2 \leq 2Y$, on en tire

$$\frac{q_m Y}{2} \leq q_m \|\mathbf{y}\|_2 - \|\mathbf{z} - q_m\mathbf{y}\|_2 \leq \|\mathbf{z}\|_2 \leq q_m \|\mathbf{y}\|_2 + \|\mathbf{z} - q_m\mathbf{y}\|_2 \leq \frac{5q_m Y}{2}.$$

Puisque

$$\frac{2Z}{Y} \leq q_m \leq Aq_{m-1} \leq \frac{2AZ}{Y},$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 74

on en déduit que \mathbf{z} satisfait la propriété 3. Pour ce qui est de la propriété 4, on commence d'abord par utiliser la décomposition de \mathbf{y} donnée en (4.3.2) pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{z}\|_2 &= \left\| \mathbf{x}_1 \wedge \left((q_m r' + p_m)\mathbf{x}_1 + (q_m s'_2 + l_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + (q_m s'_n + l_n)\mathbf{x}_n + q_m t\mathbf{u} \right) \right\|_2 \\ &\leq \|\mathbf{x}_1\|_2 \left\| (q_m s'_2 + l_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + (q_m s'_n + l_n)\mathbf{x}_n + q_m t\mathbf{u} \right\|_2 \\ &\leq \|\mathbf{x}_1\|_2 \left(\frac{(n-1)X}{2} + q_m |t| \right). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\Theta_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}) = \frac{\|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{x}_1\|_2 \|\mathbf{z}\|_2} \leq \frac{(n-1)X}{2Z} + \frac{q_m |t|}{Z} \leq \frac{nX}{Z} + \frac{2A}{\|\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n\|_2 Y}.$$

■

Lemme 4.3.5. Soit $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ un n -uplet primitif dans \mathbb{Z}^{n+1} avec

$$\|\mathbf{x}_1\|_2 \leq \cdots \leq \|\mathbf{x}_n\|_2,$$

et soient $\{X_i\}_{i \geq 1}, \{Y_i\}_{i \geq n}$ des suites de nombres réels positifs satisfaisant :

$$\begin{aligned} X_i &= \|\mathbf{x}_i\|_2 && \text{pour } 1 \leq i \leq n, \\ 10AnX_{i+n} &\leq Y_{i+n} \leq X_{i+n+1} && \text{pour } i \geq 0. \end{aligned}$$

Alors, il existe une suite $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}$ dans \mathbb{Z}^{n+1} qui étend $\{\mathbf{x}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et une suite $\{\mathbf{y}_i\}_{i \geq n}$ dans \mathbb{Z}^{n+1} telles que, pour tout $i \geq 0$, on a :

1. $\{\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}, \mathbf{y}_{i+n}\}$ forme une base de \mathbb{Z}^{n+1} ;
2. $(\mathbf{x}_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_{i+n+1})$ est un n -uplet primitif et

$$\mathbf{x}_{i+n+1} \in p_m \mathbf{x}_{i+1} + \langle \mathbf{x}_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_{i+n} \rangle_{\mathbb{Z}} + q_m \mathbf{y}_{i+n},$$

où $m \geq 2$ est l'entier tel que $q_{m-1} \leq 2X_{i+n+1}/Y_{i+n} < q_m$;

3. $Y_{i+n} \leq \|\mathbf{y}_{i+n}\|_2 \leq 2Y_{i+n}$ et $X_{i+n+1} \leq \|\mathbf{x}_{i+n+1}\|_2 \leq 5AX_{i+n+1}$;

4. $\Theta_2(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+n+1}) \leq \frac{5AnX_{i+n}}{X_{i+n+1}} + \frac{2A}{\theta_i X_{i+1} \cdots X_{i+n} Y_{i+n}}$, où $\theta_i := \Theta_n(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n})$.

Démonstration: On suppose $j \geq 0$ tel que l'on ait déjà construit des points $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j+n}, \mathbf{y}_n, \dots, \mathbf{y}_{j+n-1} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ satisfaisant les propriétés énoncées pour tout indice i avec $0 \leq i < j$. On pose

$$X := 5AX_{j+n}, \quad Y := Y_{j+n} \quad \text{et} \quad Z := X_{j+n+1},$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 75

de sorte que

$$\max\{\|\mathbf{x}_{j+1}\|_2, \dots, \|\mathbf{x}_{j+n}\|_2\} \leq 5AX_{j+n} = X \quad \text{et} \quad 2nX = 10AnX_{j+n} \leq Y \leq Z.$$

On peut alors appliquer le lemme 4.3.4 pour construire les points $\mathbf{y}_{j+n} := \mathbf{y}$ et $\mathbf{x}_{j+n+1} := \mathbf{z}$.

En répétant ce processus, on produit ainsi deux suites infinies de points entiers $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}$, $\{\mathbf{y}_i\}_{i \geq n}$ telles que désiré. La validité des propriétés 1 à 4 suit alors des propriétés correspondantes du lemme 4.3.4 en observant que

$$\|\mathbf{x}_{i+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{i+n}\|_2 = \Theta_n(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}) \|\mathbf{x}_{i+1}\|_2 \cdots \|\mathbf{x}_{i+n}\|_2 \geq \theta_i X_{i+1} \cdots X_{i+n},$$

pour tout $i \geq 0$. ■

Lemme 4.3.6. *On suppose de plus que les suites $\{X_i\}_{i \geq 1}$, $\{Y_i\}_{i \geq n}$ satisfont*

$$X_{i+n+1} \geq X_{i+1} \cdots X_{i+n-1} X_{i+n}^2 Y_{i+n}, \quad (4.3.3)$$

$$X_{i+n+1} Y_{i+n+1} \geq 4X_{i+1} Y_{i+n}, \quad (4.3.4)$$

pour tout $i \geq 0$, ainsi que la condition initiale

$$\frac{7An}{\theta_0 X_1 \cdots X_n Y_n} \leq \frac{\theta_0}{3}. \quad (4.3.5)$$

Alors, on a $\theta_i \geq \theta_0/3$ pour tout $i \geq 0$ et il existe un n -uplet de vecteurs unitaires $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, que l'on prolonge en une suite de vecteurs unitaires $\{\mathbf{v}_i\}_{i \geq 1}$ qui est périodique modulo n (c'est-à-dire que $\mathbf{v}_{i+n} = \mathbf{v}_i$ pour tout $i \geq 1$), tel que

$$\Theta_2(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}) \leq \frac{28An}{\theta_0 X_{i+1} \cdots X_{i+n} Y_{i+n}} \quad (4.3.6)$$

pour tout $i \geq 0$. De plus, les vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ satisfont $\Theta_n(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \geq \theta_0/3$.

Démonstration: On remarque que, si l'on pose

$$B_i := \frac{1}{X_{i+1} \cdots X_{i+n} Y_{i+n}},$$

les conditions (4.3.3) et (4.3.4) équivalent respectivement à

$$\frac{X_{i+n}}{X_{i+n+1}} \leq B_i \quad \text{et} \quad B_{i+1} \leq B_i/4$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 76

pour tout $i \geq 0$. Comme $\theta_i \leq 1$, le lemme 4.3.5 donne

$$\Theta_2(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+n+1}) \leq 5AnB_i + \frac{2AB_i}{\theta_i} \leq \frac{7AnB_i}{\theta_i}, \quad (4.3.7)$$

pour tout $i \geq 0$. En notant $F_i := \langle \mathbf{x}_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_{i+n} \rangle_{\mathbb{R}}$, la proposition 2.3.8 fournit

$$\begin{aligned} \theta_{i+1} &= \Theta_{n-1}(\mathbf{x}_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}) \Theta_2(\mathbf{x}_{i+n+1}, F_i) \\ &\geq \Theta_{n-1}(\mathbf{x}_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}) (\Theta_2(\mathbf{x}_{i+1}, F_i) - \Theta_2(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+n+1})) \\ &\geq \Theta_n(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}) - \Theta_2(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+n+1}) \geq \theta_i - \frac{7AnB_i}{\theta_i}. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Pour en déduire $\theta_i \geq \theta_0/3$, on commence par démontrer que

$$\frac{7AnB_i}{\theta_i} \leq \frac{\theta_i}{2} \leq \theta_{i+1} \quad (4.3.9)$$

pour tout $i \geq 0$. Grâce à (4.3.8), la première inégalité dans (4.3.9) implique la deuxième. De plus, puisque la condition (4.3.5) équivaut à

$$\frac{7AnB_0}{\theta_0} \leq \frac{\theta_0}{3},$$

on voit que (4.3.9) est vérifié en $i = 0$. On procède ensuite par récurrence en supposant que (4.3.9) est vérifié pour un certain $i \geq 0$. On trouve

$$\frac{7AnB_{i+1}}{\theta_{i+1}} \leq \frac{7An(B_i/4)}{\theta_i/2} = \frac{7AnB_i}{2\theta_i} \leq \frac{\theta_i}{4} \leq \frac{\theta_{i+1}}{2}$$

tel que désiré. Cela complète la preuve de (4.3.9). On déduit de (4.3.9) que

$$\frac{B_{i+1}}{\theta_{i+1}} \leq \frac{(B_i/4)}{(\theta_i/2)} = \frac{B_i}{2\theta_i}$$

pour tout $i \geq 0$, et donc que le quotient B_i/θ_i converge géométriquement vers zéro lorsque i tend vers l'infini. Il suit alors de (4.3.5) et (4.3.8) que

$$\theta_i \geq \theta_0 - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{7AnB_j}{\theta_j} \geq \theta_0 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{7AnB_0}{2^j \theta_0} = \theta_0 - 2 \left(\frac{7AnB_0}{\theta_0} \right) \geq \frac{\theta_0}{3}.$$

Il suit de (4.3.7) et de la convergence géométrique du quotient B_i/θ_i que, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, la suite $\{\mathbf{x}_{j+n+k}\}_{j \geq 0}$ converge géométriquement, au sens projectif, vers un point de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, que l'on représente par un vecteur unitaire $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{n+1}$. On obtient

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 77

ainsi un n -uplet $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ que l'on prolonge en une suite périodique modulo n . On peut alors estimer

$$\begin{aligned} \Theta_2(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}) &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \Theta_2(\mathbf{x}_{i+jn+1}, \mathbf{x}_{i+(j+1)n+1}) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{7AnB_{i+jn}}{\theta_{i+jn}} \\ &\leq \frac{21An}{\theta_0} \sum_{j=0}^{\infty} B_{i+jn} \leq \frac{21AnB_i}{\theta_0} \sum_{j=0}^{\infty} 4^{-jn} \leq \frac{28AnB_i}{\theta_0}. \end{aligned}$$

Le fait que $\Theta_n(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \geq \theta_0/3$ découle de la continuité de Θ_n . ■

Pour le reste de la section, on se place sous les hypothèses du lemme 4.3.6 et on note

$$\begin{aligned} E_i &:= \langle \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n} \rangle_{\mathbb{R}}, & E &:= \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{R}} \\ F_i &:= \langle \mathbf{x}_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_{i+n} \rangle_{\mathbb{R}}, & G_i &:= \langle \mathbf{v}_{i+2}, \dots, \mathbf{v}_{i+n} \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

pour tout $i \geq 0$.

Lemme 4.3.7. *On a*

$$\Theta_2(E_i, E) \leq \frac{84An^2}{\theta_0^2 X_{i+1} \cdots X_{i+n} Y_{i+n}} \quad (4.3.10)$$

et

$$\Theta_2(F_i, G_i) \leq \frac{84An^2}{\theta_0^2 X_{i+2} \cdots X_{i+n+1} Y_{i+n+1}} \quad (4.3.11)$$

pour tout $i \geq 0$.

Démonstration: Soit $i \geq 0$. La proposition 2.4.10 fournit

$$\Theta_2(E_i, E) \leq \frac{\Theta_2(\mathbf{x}_{i+1}, E) + \cdots + \Theta_2(\mathbf{x}_{i+n}, E)}{\Theta_n(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n})} \leq (3n/\theta_0) \max_{1 \leq k \leq n} \Theta_2(\mathbf{x}_{i+k}, \mathbf{v}_{i+k})$$

et, de la même façon, on obtient

$$\Theta_2(F_i, G_i) \leq (3n/\theta_0) \max_{2 \leq k \leq n} \Theta_2(\mathbf{x}_{i+k}, \mathbf{v}_{i+k})$$

puisque

$$\Theta_{n-1}(\mathbf{x}_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}) \geq \Theta_n(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}) \geq \theta_0/3.$$

Alors, (4.3.10) et (4.3.11) découlent directement de (4.3.6). ■

À partir d'ici, on fixe un vecteur unitaire $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ perpendiculaire à E .

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 78

Lemme 4.3.8. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Alors, pour tout $i \geq 0$, on a

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \geq \frac{1}{X_{i+1} \cdots X_{i+n}} \left(\frac{|\det(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}, \mathbf{x})|}{(5A)^n} - \frac{84An^2 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 Y_{i+n}} \right).$$

Démonstration: Soit $\|\cdot\|_{\text{op}}$ la norme d'opérateur sur $\text{End}(\mathbb{R}^{n+1})$. On sait grâce au théorème 2.4.8 et à la proposition 2.4.9 que

$$\begin{aligned} \left\| \text{proj}_{E_i^\perp}(\mathbf{x}) - \text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{x}) \right\|_2 &\leq \left\| \text{proj}_{E_i^\perp} - \text{proj}_{E^\perp} \right\|_{\text{op}} \|\mathbf{x}\|_2 \\ &= \Theta_2(E_i^\perp, E^\perp) \|\mathbf{x}\|_2 = \Theta_2(E_i, E) \|\mathbf{x}\|_2. \end{aligned}$$

Par choix de \mathbf{u} , on a donc

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| = \|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{x})\|_2 &\geq \left\| \text{proj}_{E_i^\perp}(\mathbf{x}) \right\|_2 - \left\| \text{proj}_{E_i^\perp}(\mathbf{x}) - \text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{x}) \right\|_2 \\ &\geq \left\| \text{proj}_{E_i^\perp}(\mathbf{x}) \right\|_2 - \Theta_2(E_i, E) \|\mathbf{x}\|_2. \end{aligned}$$

Le résultat découle alors de (4.3.10) et de l'observation que

$$\begin{aligned} \left\| \text{proj}_{E_i^\perp}(\mathbf{x}) \right\|_2 &= \frac{\|\mathbf{x}_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{i+n} \wedge \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{i+n}\|_2} = \frac{|\det(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}, \mathbf{x})|}{\theta_i \|\mathbf{x}_{i+1}\|_2 \cdots \|\mathbf{x}_{i+n}\|_2} \\ &\geq \frac{|\det(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}, \mathbf{x})|}{(5A)^n X_{i+1} \cdots X_{i+n}}. \end{aligned}$$

■

Lemme 4.3.9. On suppose $\theta_0^2 X_n \geq C_1 := 420A^2 n^2 (5A)^n$. Alors, pour tout $i \geq 0$, on a

$$\frac{1}{(5A)^n X_{i+2} \cdots X_{i+n} Y_{i+n}} \leq |\mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{u}| \leq \frac{140A^2 n}{\theta_0 X_{i+2} \cdots X_{i+n} Y_{i+n}}.$$

Démonstration: Il suit de (4.3.6) que

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{u}| = \|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{x}_{i+1})\|_2 &= \|\mathbf{x}_{i+1}\|_2 \Theta_2(\mathbf{x}_{i+1}, E) \leq 5AX_{i+1} \Theta_2(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}) \\ &\leq \frac{140A^2 n}{\theta_0 X_{i+2} \cdots X_{i+n} Y_{i+n}}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\mathbf{x}_{i+n+1} \in p_m \mathbf{x}_{i+1} + \langle \mathbf{x}_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_{i+n} \rangle_{\mathbb{Z}} + q_m \mathbf{y}_{i+n}$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 79

où $m \geq 2$ est l'entier tel que $q_{m-1} \leq 2X_{i+n+1}/Y_{i+n} < q_m$, on obtient

$$\begin{aligned} |\det(\mathbf{x}_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_{i+n+1}, \mathbf{x}_{i+1})| &= |\det(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}, \mathbf{x}_{i+n+1})| \\ &= |\det(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}, q_m \mathbf{y}_{i+n})| = q_m. \end{aligned}$$

De plus, puisque $X_{i+n+1} \geq X_n X_{i+1}$ (c'est une conséquence faible de (4.3.3)), on a

$$\frac{\|\mathbf{x}_{i+1}\|_2}{X_{i+n+1} Y_{i+n+1}} < \frac{5A X_{i+1}}{X_{i+n+1} Y_{i+n}} \leq \frac{5A}{X_n Y_{i+n}}.$$

En appliquant le lemme 4.3.8 avec i remplacé par $i+1$, on obtient donc

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{u}| &\geq \frac{q_m}{(5A)^n X_{i+2} \cdots X_{i+n+1}} - \frac{84A n^2 \|\mathbf{x}_{i+1}\|_2}{\theta_0^2 X_{i+2} \cdots X_{i+n+1} Y_{i+n+1}} \\ &\geq \frac{2}{(5A)^n X_{i+2} \cdots X_{i+n} Y_{i+n}} - \frac{420A^2 n^2}{(\theta_0^2 X_n) X_{i+2} \cdots X_{i+n} Y_{i+n}} \\ &\geq \frac{1}{(5A)^n X_{i+2} \cdots X_{i+n} Y_{i+n}}. \end{aligned}$$

■

On rappelle que, comme au théorème 4.2.4, le nombre d'or $(1 + \sqrt{5})/2$ est représenté par γ .

Lemme 4.3.10. *On suppose que $Y_i = X_i^\gamma$ pour tout $i \geq n$ et que les conditions (4.3.3) et (4.3.4) du lemme 4.3.6 sont satisfaites pour tout $i \geq 0$. On suppose également que $\theta_0^2 X_n \geq 2C_1$. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ et soit $i \geq 0$ avec*

$$\frac{X_{i+n}}{X_n} \leq \|\mathbf{x}\|_2 < \frac{X_{i+n+1}}{X_n}.$$

Alors, on a

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \geq \frac{1}{X_n^4 X_{i+1} \cdots X_{i+n-1} \|\mathbf{x}\|_2^\gamma} \cdot \begin{cases} \min_{1 \leq k \leq n} \Theta_2(\mathbf{x}, G_k) & \text{si } \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n} \rangle_{\mathbb{Z}}, \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \notin \langle \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n} \rangle_{\mathbb{Z}}. \end{cases}$$

Démonstration: D'abord, comme $\{\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}, \mathbf{y}_{i+n}\}$ forme une base de \mathbb{Z}^{n+1} , il existe $p, q, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\mathbf{x} = p\mathbf{x}_{i+1} + r_2\mathbf{x}_{i+2} + \cdots + r_n\mathbf{x}_{i+n} + q\mathbf{y}_{i+n}.$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 80

Puisque $\det(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}, \mathbf{y}_{i+n}) = \pm 1$, la valeur absolue d'un déterminant calculé dans la bases $\{\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}, \mathbf{y}_{i+n}\}$ est égale à la valeur absolue du même déterminant calculer dans la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} . On a donc

$$|\det(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}, \mathbf{x})| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \right| = |q|$$

et

$$|\det(\mathbf{x}_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_{i+n+1}, \mathbf{x})| = \left| \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_m & p \\ 1 & \ddots & \vdots & * & * \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & q_m & q \end{pmatrix} \right| = |p_m q - p q_m|.$$

Ici, les * désignent des coefficients n'ayant aucun impact sur la valeur du déterminant et $m \geq 2$ est l'entier tel que

$$q_{m-1} \leq 2X_{i+n+1}/Y_{i+n} < q_m.$$

On pose $C_2 = 84An^2(5A)^n$ et on remarque que $C_1 = 5AC_2$. En appliquant le lemme 4.3.8, on trouve

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \geq \frac{1}{(5A)^n X_{i+1} \cdots X_{i+n}} \left(|q| - \frac{C_2 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 Y_{i+n}} \right). \quad (4.3.12)$$

En appliquant ce même lemme avec i remplacé par $i + 1$, on trouve

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \geq \frac{1}{(5A)^n X_{i+2} \cdots X_{i+n+1}} \left(|p_m q - p q_m| - \frac{C_2 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 Y_{i+n+1}} \right). \quad (4.3.13)$$

On sépare le reste de la preuve en quatre cas. Dans les deux premiers cas, on suppose $q \neq 0$, c'est-à-dire que $\mathbf{x} \notin \langle \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n} \rangle_{\mathbb{Z}}$.

1^{er} Cas.

D'abord, on suppose que l'on a

$$|q| \geq \frac{2C_2 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 Y_{i+n}}.$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 81

Alors, (4.3.12) donne

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \geq \frac{C_2 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 (5A)^n X_{i+1} \cdots X_{i+n} Y_{i+n}}.$$

Ainsi, comme $X_{i+n} Y_{i+n} = X_{i+n}^{1+\gamma} \leq (X_n \|\mathbf{x}\|_2)^{1+\gamma}$ et $C_2 \geq \theta_0^2 (5A)^n$ on obtient

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \geq \frac{1}{X_n^{1+\gamma} X_{i+1} \cdots X_{i+n-1} \|\mathbf{x}\|_2^\gamma}.$$

2ème Cas.

Ensuite, on suppose que

$$1 \leq |q| < \frac{2C_2 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 Y_{i+n}}.$$

Puisque $\theta_0^2 X_n \geq C_2$, on obtient

$$\frac{|q|}{q_m} < \frac{Y_{i+n}|q|}{2X_{i+n+1}} < \frac{C_2 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 X_{i+n+1}} \leq \frac{C_2}{\theta_0^2 X_n} \leq 1,$$

ce qui donne $1 \leq |q| < q_m$. Alors, la proposition 4.3.3 permet d'estimer

$$|p_m q - p q_m| \geq \frac{q_m}{2A|q|} > \frac{X_{i+n+1}}{A Y_{i+n} |q|} > \frac{\theta_0^2 X_{i+n+1}}{2AC_2 \|\mathbf{x}\|_2}.$$

Alors, (4.3.13) donne

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| &\geq \frac{1}{(5A)^n X_{i+2} \cdots X_{i+n+1}} \left(\frac{\theta_0^2 X_{i+n+1}}{2AC_2 \|\mathbf{x}\|_2} - \frac{C_2 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 Y_{i+n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{(5A)^n X_{i+2} \cdots X_{i+n}} \left(\frac{\theta_0^2}{2AC_2 \|\mathbf{x}\|_2} - \frac{C_2 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 X_{i+n+1} Y_{i+n+1}} \right). \end{aligned}$$

Puisqu'on a $X_{i+n+1} Y_{i+n+1} \geq X_{i+n+1}^2 > (X_n \|\mathbf{x}\|_2)^2$ et que $\theta_0^2 X_n \geq 4AC_2$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\theta_0^2}{2AC_2 \|\mathbf{x}\|_2} - \frac{C_2 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 X_{i+n+1} Y_{i+n+1}} &\geq \frac{\theta_0^2}{2AC_2 \|\mathbf{x}\|_2} - \frac{C_2}{\theta_0^2 X_n^2 \|\mathbf{x}\|_2} \\ &= \frac{1}{X_n \|\mathbf{x}\|_2} \left(\frac{\theta_0^2 X_n}{2AC_2} - \frac{C_2}{\theta_0^2 X_n} \right) \geq \frac{1}{X_n \|\mathbf{x}\|_2}. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \geq \frac{1}{(5A)^n X_n X_{i+2} \cdots X_{i+n} \|\mathbf{x}\|_2}.$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 82

Aussi, il suit de l'hypothèse sur $|q|$ que

$$1 < \frac{2C_2 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 Y_{i+n}}.$$

Comme $\theta_0^2 > 2C_2 X_n^{-1}$, cela donne

$$X_{i+n} = Y_{i+n}^{1/\gamma} < \left(\frac{2C_2 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2} \right)^{1/\gamma} < (X_n \|\mathbf{x}\|_2)^{1/\gamma}.$$

Puisque $X_n \geq (5A)^n$ et que $X_{i+1} > 1$, on obtient

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \geq \frac{1}{(5A)^n X_n^{1+1/\gamma} X_{i+2} \cdots X_{i+n-1} \|\mathbf{x}\|_2^{1+1/\gamma}} \geq \frac{1}{X_n^{1+\gamma} X_{i+1} \cdots X_{i+n-1} \|\mathbf{x}\|_2^\gamma}$$

en utilisant l'égalité $1 + 1/\gamma = \gamma$.

3^{ème} Cas.

On suppose maintenant que $q = 0$ mais $p \neq 0$. On a alors

$$|p_m q - p q_m| = q_m |p| > \frac{2X_{i+n+1}|p|}{Y_{i+n}}.$$

Comme $\|\mathbf{x}\|_2 < X_n^{-1} X_{i+n+1}$ et $\theta_0^2 X_n \geq C_2$, (4.3.13) donne

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| &\geq \frac{1}{(5A)^n X_{i+2} \cdots X_{i+n+1}} \left(|p_m q - p q_m| - \frac{C_2 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 Y_{i+n+1}} \right) \\ &\geq \frac{1}{(5A)^n X_{i+2} \cdots X_{i+n+1}} \left(\frac{2X_{i+n+1}|p|}{Y_{i+n}} - \frac{C_2 X_{i+n+1}}{\theta_0^2 X_n Y_{i+n+1}} \right) \\ &\geq \frac{|p|}{(5A)^n X_{i+2} \cdots X_{i+n} Y_{i+n}}. \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \Theta_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_{i+n}) &= \frac{\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}_{i+2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{i+n}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{x}_{i+2}\|_2 \cdots \|\mathbf{x}_{i+n}\|_2} = \frac{|p| \|\mathbf{x}_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{i+n}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{x}_{i+2}\|_2 \cdots \|\mathbf{x}_{i+n}\|_2} \\ &\leq \frac{|p| \|\mathbf{x}_{i+1}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq \frac{5A|p|X_{i+1}}{\|\mathbf{x}\|_2}, \end{aligned}$$

et donc on a

$$\Theta_2(\mathbf{x}, F_i) = \frac{\Theta_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_{i+n})}{\Theta_{n-1}(\mathbf{x}_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_{i+n})} \leq \frac{15A|p|X_{i+1}}{\theta_0 \|\mathbf{x}\|_2}.$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 83

Puisque $\theta_0^2 X_{i+n+1} \geq \theta_0^2 X_n \|\mathbf{x}\|_2 \geq 84An^2 \|\mathbf{x}\|_2$, le lemme 4.3.7 donne

$$\begin{aligned} \Theta_2(\mathbf{x}, G_i) &\leq \Theta_2(\mathbf{x}, F_i) + \Theta_2(F_i, G_i) \leq \frac{15A|p|X_{i+1}}{\theta_0 \|\mathbf{x}\|_2} + \frac{84An^2}{\theta_0^2 X_{i+2} \cdots X_{i+n+1} Y_{i+n+1}} \\ &\leq \frac{15A|p|X_{i+1}}{\theta_0 \|\mathbf{x}\|_2} + \frac{84An^2}{\theta_0^2 X_{i+n+1}} \\ &\leq \frac{15A|p|X_{i+1}}{\theta_0 \|\mathbf{x}\|_2} + \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2} \\ &\leq \frac{16A|p|X_{i+1}}{\theta_0 \|\mathbf{x}\|_2}. \end{aligned}$$

En notant que $\theta_0 \geq \theta_0^2 > 16A(5A)^n X_n^{-1}$, on obtient

$$|p| \geq \frac{\theta_0 \|\mathbf{x}\|_2 \Theta_2(\mathbf{x}, G_i)}{16AX_{i+1}} \geq \frac{(5A)^n \|\mathbf{x}\|_2 \Theta_2(\mathbf{x}, G_i)}{X_n X_{i+1}}.$$

En substituant cette dernière estimation dans (4.3.14) et en utilisant $X_{i+n} Y_{i+n} = X_{i+n}^{1+\gamma} \leq (X_n \|\mathbf{x}\|_2)^{1+\gamma}$, on obtient

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \geq \frac{\|\mathbf{x}\|_2 \Theta_2(\mathbf{x}, G_i)}{X_n X_{i+1} \cdots X_{i+n} Y_{i+n}} \geq \frac{\Theta_2(\mathbf{x}, G_i)}{X_n^{2+\gamma} X_{i+1} \cdots X_{i+n-1} \|\mathbf{x}\|_2^\gamma}.$$

4^{ème} Cas.

On suppose finalement que $p = q = 0$. Dans ce cas, on a $\mathbf{x} \in F_i$ et on observe que

$$\begin{aligned} |r_k| &= \frac{\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}_{i+2} \wedge \cdots \widehat{\mathbf{x}}_{i+k} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{i+n}\|_2}{\|\mathbf{x}_{i+2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{i+n}\|_2} \\ &\leq \frac{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{x}_{i+2}\|_2 \cdots \|\widehat{\mathbf{x}}_{i+k}\|_2 \cdots \|\mathbf{x}_{i+n}\|_2}{\theta_i \|\mathbf{x}_{i+2}\|_2 \cdots \|\mathbf{x}_{i+n}\|_2} = \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\theta_i \|\mathbf{x}_{i+k}\|_2} \leq \frac{3 \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0 X_{i+k}} \end{aligned}$$

pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$. Soit j le plus petit élément parmi $\{2, \dots, n\}$ tel que $r_j \neq 0$. Pour tout $k \in \{j+1, \dots, n\}$, le lemme 4.3.9 donne

$$\begin{aligned} |r_k| \|\mathbf{x}_{i+k} \cdot \mathbf{u}\| &\leq \frac{140A^2 n |r_k|}{\theta_0 X_{i+k+1} \cdots X_{i+k+n-1} Y_{i+k+n-1}} \leq \frac{420A^2 n \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 X_{i+k} \cdots X_{i+k+n-1} Y_{i+k+n-1}} \\ &\leq \frac{420A^2 n \|\mathbf{x}\|_2}{\theta_0^2 X_{i+j+1} \cdots X_{i+j+n} Y_{i+j+n}} \leq \frac{420A^2 n}{(\theta_0^2 X_n) X_{i+j+1} \cdots X_{i+j+n-1} Y_{i+j+n-1}} \\ &\leq \frac{1}{2n(5A)^n X_{i+j+1} \cdots X_{i+j+n-1} Y_{i+j+n-1}} \end{aligned}$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 84

puisque $\theta_0^2 X_n \geq 2C_1 = 840A^2 n^2 (5A)^n$. En combinant cette dernière estimation au lemme 4.3.9, on obtient

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| &\geq |r_j| |\mathbf{x}_{i+j} \cdot \mathbf{u}| - \sum_{k=j+1}^n |r_k| |\mathbf{x}_{i+k} \cdot \mathbf{u}| \\ &\geq \frac{1}{(5A)^n X_{i+j+1} \cdots X_{i+j+n-1} Y_{i+j+n-1}} - n \left(\frac{1}{2n(5A)^n X_{i+j+1} \cdots X_{i+j+n-1} Y_{i+j+n-1}} \right) \\ &\geq \frac{1}{2(5A)^n X_{i+j+1} \cdots X_{i+j+n-1} Y_{i+j+n-1}}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{x} \in F_{i+j-2}$, il suit du lemme 4.3.7 que

$$\begin{aligned} \Theta_2(\mathbf{x}, G_{i+j-2}) &\leq \Theta_2(F_{i+j-2}, G_{i+j-2}) \leq \frac{84An^2}{\theta_0^2 X_{i+j} \cdots X_{i+j+n-1} Y_{i+j+n-1}} \\ &= \frac{2C_2}{\theta_0^2 X_{i+j}} \left(\frac{1}{2(5A)^n X_{i+j+1} \cdots X_{i+j+n-1} Y_{i+j+n-1}} \right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \geq \frac{\theta_0^2 X_{i+j}}{2C_2} \Theta_2(\mathbf{x}, G_{i+j-2}) \geq \frac{\Theta_2(\mathbf{x}, G_{i+j-2})}{X_n}$$

puisque $\theta_0^2 \geq 2C_2 X_n^{-1}$ et $X_{i+j} > 1$. ■

Corollaire 4.3.11. *Les coordonnées du vecteur \mathbf{u} sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} .*

Démonstration: Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ non-nul tel que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0$. Comme $X_{i+n+1} \geq Y_{i+n} = X_{i+n}^\gamma$, la longueur de l'intervalle $[X_n^{-1} X_{i+n}, X_n^{-1} X_{i+n+1})$ tend vers l'infini lorsque i tend vers l'infini. On en déduit que, pour tout $i \geq 0$ suffisamment grand, il existe un entier $l \geq 1$ tel que

$$\frac{X_{i+n}}{X_n} \leq l \|\mathbf{x}\|_2 < \frac{X_{i+n+1}}{X_n}. \quad (4.3.15)$$

Alors, il suit du lemme 4.3.10 que $(l\mathbf{x}) \in \langle \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n} \rangle_{\mathbb{Z}}$. Mais, comme $(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n})$ est primitif, cela revient à dire que $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n} \rangle_{\mathbb{Z}}$. Il suit de cette observation qu'il existe $i \geq 0$ tel que

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \langle \mathbf{x}_{i+j+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+j+n} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

4. APPROXIMATION PAR LES FORMES LINÉAIRES DANS UN CÔNE 85

On rappelle que $\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n+1}$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} . Par récurrence sur $k \geq 1$, on trouve que

$$\bigcap_{j=0}^k \langle \mathbf{x}_{i+j+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+j+n} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{x}_{i+k+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+n} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

On a donc

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \langle \mathbf{x}_{i+j+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+j+n} \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \bigcap_{j=0}^n \langle \mathbf{x}_{i+j+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+j+n} \rangle_{\mathbb{R}} = 0,$$

ce qui contredit $\mathbf{x} \neq 0$. ■

Démonstration: (du théorème 4.3.1)

On fixe un $(n-1)$ -uplet primitif $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ dans \mathbb{Z}^{n+1} avec

$$\|\mathbf{x}_1\|_2 \leq \dots \leq \|\mathbf{x}_{n-1}\|_2.$$

Alors, il existe une paire primitive $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ dans \mathbb{Z}^{n+1} telle que $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ forme une base de \mathbb{Z}^{n+1} . On pose $\mathbf{x}_n = \mathbf{z}_1 + l\mathbf{z}_2 \in \mathbb{Z}^{n+1}$ pour un entier $l \geq 1$ à déterminer. On observe que $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ est un n -uplet primitif puisque $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{z}_2\}$ est une base de \mathbb{Z}^{n+1} . On pose

$$X_1 = \|\mathbf{x}_1\|_2, \quad \dots, \quad X_n = \|\mathbf{x}_n\|_2, \quad \theta_0 = \Theta_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

et on observe que

$$X_n \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad \theta_0 \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \Theta_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{z}_2) > 0$$

par continuité projective de Θ_n . Il s'ensuit donc que

$$\theta_0^2 X_n \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} +\infty.$$

En choisissant $l \geq 1$ suffisamment grand, on peut supposer que

- $X_n \geq \max\{X_{n-1}, (10An)^\gamma\}$;
- $\theta_0^2 X_n \geq 2C_1$;
- $\frac{7An}{\theta_0 X_1 \cdots X_{n-1} X_n^{1+\gamma}} \leq \frac{\theta_0}{3}$.

On construit maintenant les suites $\{X_i\}_{i \geq 1}$ et $\{Y_i\}_{i \geq n}$ par récurrence. Pour tout $i \geq 0$, on pose $Y_{i+n} = X_{i+n}^\gamma$ et on choisit $X_{i+n+1} > 1$ tel que

- $X_{i+n+1} \geq X_{i+1} \cdots X_{i+n-1} X_{i+n}^2 Y_{i+n}$;
- $X_{i+n+1}^{1+\gamma} \geq 4X_{i+1} Y_{i+n}$;
- $\psi\left(\frac{X_{i+n+1}}{X_n}\right) \geq (6n/\theta_0) X_n^4 X_{i+2} \cdots X_{i+n}$.

Ainsi, on obtient un n -uplet de points entiers $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ et des suites $\{X_i\}_{i \geq 1}$ et $\{Y_i\}_{i \geq n}$ satisfaisant les hypothèses des lemmes 4.3.5 à 4.3.10 et on peut donc produire les vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ apparaissant dans ces lemmes.

On pose maintenant $D = \langle \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq E = \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$. On obtient

$$\begin{aligned} \Theta_2(D, G_k) &= \frac{\left\| \text{proj}_{G_k^{\perp}}(\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n) \right\|_2}{\|\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n\|_2} \geq \frac{\left\| \text{proj}_{G_k^{\perp}}(\mathbf{v}_{k+1}) \right\|_2}{n} = \frac{\Theta_2(\mathbf{v}_{k+1}, G_k)}{n} \\ &= \frac{\Theta_n(\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_{k+n})}{n\Theta_{n-1}(\mathbf{v}_{k+2}, \dots, \mathbf{v}_{k+n})} \geq \frac{\theta_0}{3n} \end{aligned}$$

pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. On pose $\delta = \theta_0/6n$.

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n+1} \cap \mathcal{A}(D, \delta)$ avec $\|\mathbf{x}\|_2 \geq X_{n+1}/X_n$. Alors, il existe $i \geq 0$ tel que

$$\frac{X_{i+n+1}}{X_n} \leq \|\mathbf{x}\|_2 < \frac{X_{i+n+2}}{X_n}.$$

Puisque

$$\min_{1 \leq k \leq n} \Theta_2(\mathbf{x}, G_k) \geq \min_{1 \leq k \leq n} \{\Theta_2(D, G_k) - \Theta_2(\mathbf{x}, D)\} \geq \frac{\theta_0}{3n} - \delta = \frac{\theta_0}{6n},$$

le lemme 4.3.10 donne

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \geq \frac{1}{X_n^4 X_{i+2} \cdots X_{i+n} \|\mathbf{x}\|_2^{\gamma}} \left(\frac{\theta_0}{6n} \right) \geq \frac{1}{\psi(X_{i+n+1}/X_n) \|\mathbf{x}\|_2^{\gamma}} \geq \frac{1}{\psi(\|\mathbf{x}\|_2) \|\mathbf{x}\|_2^{\gamma}}$$

tel que désiré. ■

Chapitre 5

Approximation par les formes linéaires dans un domaine angulaire

Dans ce chapitre, on donne une nouvelle démonstration d'une version simplifiée du théorème de Thurnheer (voir théorème 1.1.4). Cette démonstration se décompose en deux principes de transfert que l'on présente séparément. On conclut avec un résultat général sur l'approximation dans un domaine angulaire.

5.1 Exposant d'approximation restreint à un sous-ensemble

La plupart des résultats de ce chapitre sont énoncés en termes d'exposants d'approximation diophantienne. On a défini les exposants $\hat{\omega}$ et ω au chapitre 3 et, dans cette section, on définit un exposant semblable à ω mais où les approximations sont restreintes à un sous-ensemble donné. Pour le reste du chapitre, on fixe un entier $n \geq 3$.

Définition 5.1.1. Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tels que l'inégalité

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq 1$$

possède une infinité de solutions $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \cap S$. On définit $\omega_S(\mathbf{u}) \in [0, +\infty]$ comme le suprémum des $\omega \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe une infinité de points $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \cap S$ satisfaisant

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{x}\|_2^{-\omega}.$$

On observe que $\omega_S(\mathbf{u}) \leq \omega(\mathbf{u})$.

Comme pour les exposants $\hat{\omega}$ et ω , on peut donner une définition plus flexible pour l'exposant ω_S (voir la proposition 3.1.5).

Proposition 5.1.2. *Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et $S \subseteq \mathbb{R}^n$ satisfaisant les hypothèses de la définition 5.1.1. On suppose une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n et des constantes $\kappa_1, \kappa_2 > 0$. Alors, $\omega_S(\mathbf{u})$ est égal au suprémum des $\omega \in \mathbb{R}$ pour lesquels que le système*

$$\|\mathbf{x}\| \leq \kappa_1 X \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \kappa_2 X^{-\omega}$$

admet une solution $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \cap S$ non nulle pour des $X \geq 1$ arbitrairement grands.

Aussi, on remarque que la valeur de $\omega_S(\mathbf{u})$ ne dépend que de l'ensemble des points entiers de S qui sont *proches* de $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$. On obtient le résultat suivant.

Proposition 5.1.3. *Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et $S \subseteq \mathbb{R}^n$ satisfaisant les hypothèses de la définition 5.1.1. Alors, pour tout $\delta \in (0, 1)$, on a*

$$\omega_{S_{\delta}}(\mathbf{u}) = \omega_S(\mathbf{u}),$$

où $S_{\delta} := S \cap \mathcal{A}(\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}, \delta)$.

Démonstration: On suppose ω avec $0 < \omega < \omega_S(\mathbf{u})$ si $\omega_S(\mathbf{u}) > 0$ et $\omega = 0$ autrement. Alors, il existe une suite $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}$ d'éléments non nuls de $\mathbb{Z}^n \cap S$ avec $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}_i\|_2 = +\infty$ et

$$|\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{x}_i\|_2^{-\omega}$$

pour tout $i \geq 1$. Alors

$$\Theta_2(\mathbf{x}_i, \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}) = \frac{\|\text{proj}_{\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}}(\mathbf{x}_i)\|_2}{\|\mathbf{x}_i\|_2} = \frac{|\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}|}{\|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{x}_i\|_2} \leq \frac{1}{\|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{x}_i\|_2^{1+\omega}} \quad (i \geq 1).$$

On en déduit que $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}(\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}, \delta)$ pour tout indice i suffisamment grand. On a donc $\omega \leq \omega_{S_{\delta}}(\mathbf{u})$ et en faisant tendre ω vers $\omega_S(\mathbf{u})$ on obtient

$$\omega_S(\mathbf{u}) \leq \omega_{S_{\delta}}(\mathbf{u}).$$

L'inégalité dans l'autre sens suit du fait que $S_{\delta} \subseteq S$ et le résultat s'ensuit. ■

On observe que, pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, on a $\omega_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{u}) = \omega(\mathbf{u})$, donc $\omega_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{u}) \geq n - 1$. On montre que cette minoration peut être étendue en remplaçant \mathbb{R}^n par un sous-espace défini sur \mathbb{Q} .

Proposition 5.1.4. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , soit F un sous-espace non nul de \mathbb{R}^n défini sur \mathbb{Q} . Alors, on a*

$$\omega_F(\mathbf{u}) \geq \dim F - 1.$$

Démonstration: Soit $l = \dim F$, le lemme 4.2.7 garantit l'existence d'une application linéaire injective $h : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $h(\mathbb{Z}^l) = F \cap \mathbb{Z}^n$. Par équivalence des normes sur \mathbb{R}^l , il existe une constante $\kappa_1 > 0$ telle que

$$\|h(\mathbf{v})\|_2 \leq \kappa_1 \|\mathbf{v}\|_2$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^l$. Par le théorème de Dirichlet (voir théorème 3.1.3), il existe une infinité de $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^l$ tels que

$$|\mathbf{x} \cdot h^*(\mathbf{u})| \leq \kappa_2 \|\mathbf{x}\|_2^{-(l-1)}$$

pour une certaine constante $\kappa_2 > 0$. Comme h est injective, cela fournit une infinité de $\mathbf{x}' = h(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}^n$ tels que

$$|\mathbf{x}' \cdot \mathbf{u}| = |\mathbf{x} \cdot h^*(\mathbf{u})| \leq \kappa_2 \|\mathbf{x}\|_2^{-(l-1)} \leq \kappa_1^{l-1} \kappa_2 \|\mathbf{x}'\|_2^{-(l-1)}.$$

On en conclut que $\omega_F(\mathbf{u}) \geq l - 1$ tel que désiré. ■

La proposition 5.1.4 permet de donner une borne minimale pour l'exposant d'approximation dans un domaine angulaire.

Lemme 5.1.5. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , soit E un sous-espace non nul de $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et soit $\delta \in (0, 1)$. Alors, on a*

$$\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u}) \geq \dim E.$$

Démonstration: Le lemme 4.2.6 garantit l'existence d'un sous-espace $E' \subseteq \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et d'un $\delta' \in (0, 1)$ tels que

$$\text{rg } E' = \dim E' + 1, \quad \dim E' = \dim E \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(E', \delta') \subseteq \mathcal{A}(E, \delta).$$

Par définition du rang, il existe un sous-espace F de \mathbb{R}^n défini sur \mathbb{Q} tel que

$$E' \subseteq F \quad \text{et} \quad \dim F = \dim E' + 1 = \dim E + 1.$$

Puisque $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \cap \mathbb{Q}^n = 0$, on doit avoir $F \not\subseteq \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et donc $E' = F \cap \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$. Alors, la proposition 2.5.3 garantit l'existence de $\delta_1 \in (0, 1)$ tel que

$$\mathcal{A}(F, \delta_1) \cap \mathcal{A}(\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}, \delta_1) \subseteq \mathcal{A}(E', \delta'),$$

ce qui donne $\omega_{\mathcal{A}(F, \delta_1)}(\mathbf{u}) \leq \omega_{\mathcal{A}(E', \delta')}(\mathbf{u})$ en appliquant la proposition 5.1.3. Les inclusions

$$\mathcal{A}(E', \delta') \subseteq \mathcal{A}(E, \delta) \quad \text{et} \quad F \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{A}(F, \delta_1)$$

donnent alors

$$\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u}) \geq \omega_{\mathcal{A}(E', \delta')}(\mathbf{u}) \geq \omega_{\mathcal{A}(F, \delta_1)}(\mathbf{u}) \geq \omega_F(\mathbf{u})$$

et il suffit finalement d'appliquer la proposition 5.1.4 pour obtenir

$$\omega_F(\mathbf{u}) \geq \dim F - 1 = \dim E.$$

■

5.2 Premier principe de transfert

Le premier principe de transfert relie l'exposant d'approximation dans un domaine angulaire à l'exposant d'approximation uniforme $\hat{\omega}$. Celui-ci apparaît implicitement dans la démonstration du théorème 4.1.1 donnée par Schmidt dans [11] et est mentionné explicitement par Bugeaud et Kristensen dans [2].

Théorème 5.2.1. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , soit E un sous-espace de $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ avec $0 \subsetneq E \subsetneq \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et soit $\delta \in (0, 1)$. En notant k la dimension de E , on obtient*

$$\hat{\omega}(\mathbf{u}) \geq \frac{(n - k - 1)\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u})}{\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u}) - k}, \quad (5.2.1)$$

en convenant que le membre de droite est égal à $+\infty$ lorsque $\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u}) = k$.

Démonstration: Comme $\hat{\omega}(\mathbf{u}) \geq n - 1$, l'inégalité (5.2.1) est satisfaite lorsque $\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u}) \geq n - 1$. On peut donc supposer que $\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u}) < n - 1$. On suppose un nombre $\omega \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u}) < \omega < n - 1.$$

On remarque qu'en vertu du lemme 5.1.5 on a $\omega_{\mathcal{A}(E,\delta)}(\mathbf{u}) \geq k$ et donc $\omega > k$. On pose alors

$$\hat{\omega} = \frac{(n-k-1)\omega}{\omega-k} > \omega.$$

On pose $E' = E^\perp \cap \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^\perp$ de sorte que $E \oplus E' \oplus \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}$ est une décomposition orthogonale de \mathbb{R}^n . Pour tout $Q \geq 1$, on définit \mathcal{C}_Q comme l'ensemble des $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\|\text{proj}_E(\mathbf{v})\|_2 \leq \kappa_1 Q^{\hat{\omega}/\omega}, \quad \|\text{proj}_{E'}(\mathbf{v})\|_2 \leq Q \quad \text{et} \quad |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}| \leq Q^{-\hat{\omega}},$$

où $\kappa_1 > 0$ est une constante ne dépendant que de E et de \mathbf{u} choisie de telle sorte que $\text{Vol}(\mathcal{C}_1) = 2^n$. Alors \mathcal{C}_Q est un corps convexe de Minkowski dans \mathbb{R}^n avec

$$\text{Vol}(\mathcal{C}_Q) = Q^t \text{Vol}(\mathcal{C}_1) = Q^t (2^n)$$

où

$$t = \frac{\hat{\omega}}{\omega} \dim E + \dim E' - \hat{\omega} = \frac{k(n-k-1)}{\omega-k} + \frac{(n-k-1)(\omega-k)}{\omega-k} - \frac{(n-k-1)\omega}{\omega-k} = 0.$$

On a donc $\text{Vol}(\mathcal{C}_Q) = 2^n$ et le théorème de Minkowski (voir théorème 3.1.2) garantit alors l'existence d'un point $\mathbf{x}_Q \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{C}_Q$ avec $\mathbf{x}_Q \neq 0$ pour chaque $Q \geq 1$. Par définition de \mathcal{C}_Q , on a

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_Q \cdot \mathbf{u}| = 0$$

et, comme les coordonnées de \mathbf{u} sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , on en déduit que

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_Q\|_2 = +\infty.$$

Puisque $\hat{\omega}/\omega > 1$, la définition de \mathcal{C}_Q permet d'estimer

$$\|\mathbf{x}_Q\|_2 = \sqrt{\|\text{proj}_E(\mathbf{x}_Q)\|_2^2 + \|\text{proj}_{E'}(\mathbf{x}_Q)\|_2^2 + \|\text{proj}_{\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}}(\mathbf{x}_Q)\|_2^2} \leq \kappa_2 Q^{\hat{\omega}/\omega} \quad (Q \geq 1),$$

où $\kappa_2 = \sqrt{\kappa_1^2 + 1 + \|\mathbf{u}\|_2^{-2}} > 0$. Puisque $Q^{-\hat{\omega}} = (Q^{\hat{\omega}/\omega})^{-\omega}$, le système

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq \kappa_2 Q^{\hat{\omega}/\omega} \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq (Q^{\hat{\omega}/\omega})^{-\omega}$$

admet la solution non nulle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_Q \in \mathbb{Z}^n$ pour tout $Q \geq 1$. Comme $\omega > \omega_{\mathcal{A}(E,\delta)}(\mathbf{u})$, on en déduit qu'il existe $Q_0 \geq 1$ tel que $\mathbf{x}_Q \notin \mathcal{A}(E,\delta)$ pour tout $Q \geq Q_0$. Lorsque $\mathbf{x}_Q \notin \mathcal{A}(E,\delta)$, on a par définition

$$\frac{\|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{x}_Q)\|_2}{\|\mathbf{x}_Q\|_2} \geq \delta$$

ce qui donne

$$\|\mathbf{x}_Q\|_2 \leq \delta^{-1} \|\text{proj}_{E^\perp}(\mathbf{x}_Q)\|_2 = \delta^{-1} \sqrt{\|\text{proj}_{E'}(\mathbf{x}_Q)\|_2^2 + \|\text{proj}_{\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}}(\mathbf{x}_Q)\|_2^2} \leq \kappa_3 Q,$$

où $\kappa_3 = \delta^{-1} \sqrt{1 + \|\mathbf{u}\|_2^{-2}} > 0$.

Donc, pour tout $Q \geq Q_0$, le système

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq \kappa_3 Q \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq Q^{-\hat{\omega}}$$

admet la solution non nulle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_Q \in \mathbb{Z}^n$. On doit donc avoir $\hat{\omega}(\mathbf{u}) \geq \hat{\omega}$. En faisant tendre ω vers $\omega_{\mathcal{A}(E,\delta)}(\mathbf{u})$ on obtient donc (5.2.1) si $\omega_{\mathcal{A}(E,\delta)}(\mathbf{u}) > k$ et $\hat{\omega}(\mathbf{u}) = +\infty$ autrement. ■

On remarque que la conclusion du théorème 5.2.1 équivaut à

$$\omega_{\mathcal{A}(E,\delta)}(\mathbf{u}) \geq \frac{k\hat{\omega}(\mathbf{u})}{\hat{\omega}(\mathbf{u}) - (n - k - 1)},$$

en convenant que le membre de droite est égal à k lorsque $\hat{\omega}(\mathbf{u}) = +\infty$.

5.3 Deuxième principe de transfert

On reprend les hypothèses du théorème 5.2.1 en prenant E de dimension maximale $k = n - 2$. Dans ce cas, on va démontrer un deuxième principe de transfert qui montre que l'exposant d'approximation dans le domaine angulaire est au moins égal à $\hat{\omega} - 1$, où $\hat{\omega}$ est l'exposant d'approximation uniforme. Ce principe de transfert a été énoncé par Bugeaud et Kristensen dans [2], mais, comme pour le premier principe de transfert, il apparaît d'abord de façon implicite dans la démonstration du théorème 4.1.1 donnée par Schmidt dans [11]. Cependant, la méthode utilisée par Schmidt ne fonctionne que pour $n = 3$. Le cas avec n général découle plutôt des arguments de Thurnheer dans [14]. Dans cette section, on présente une version simplifiée de la méthode de Thurnheer.

Théorème 5.3.1. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , soit E un sous-espace de codimension 1 dans $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^\perp$ et soit $\delta \in (0, 1)$. Alors, on a*

$$\omega_{\mathcal{A}(E,\delta)}(\mathbf{u}) \geq \hat{\omega}(\mathbf{u}) - 1 + \begin{cases} \hat{\omega}(\mathbf{u})/\omega(\mathbf{u}) & \text{si } \omega(\mathbf{u}) < +\infty, \\ 0 & \text{si } \omega(\mathbf{u}) = +\infty. \end{cases}$$

Soit D la droite donnée par $D = \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \cap E^{\perp}$. Comme $D^{\perp} \cap \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} = E$, la proposition 2.5.3 garantit l'existence de $\delta_1 \in (0, 1)$ tel que

$$\mathcal{A}(D^{\perp}, \delta_1) \cap \mathcal{A}(\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}, \delta_1) \subseteq \mathcal{A}(E, \delta).$$

De plus, en vertu de la corollaire 2.5.2, il existe $\delta_2 \in (0, 1)$ tel que

$$\mathcal{A}(D, \delta_2)^c \subseteq \mathcal{A}(D^{\perp}, \delta_1).$$

Alors, la proposition 5.1.3 donne

$$\omega_{\mathcal{A}(D, \delta_2)^c}(\mathbf{u}) \leq \omega_{\mathcal{A}(D^{\perp}, \delta_1)}(\mathbf{u}) = \omega_{\mathcal{A}(D^{\perp}, \delta_1) \cap \mathcal{A}(\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}, \delta_1)}(\mathbf{u}) \leq \omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u}).$$

Ainsi, pour démontrer le théorème 5.3.1, il suffit de démontrer la proposition suivante.

Proposition 5.3.2. *Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , soit D une droite vectorielle dans $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et soit $\delta \in (0, 1)$. Alors, pour toute paire de nombres réels $(\hat{\omega}, \rho)$ satisfaisant*

$$0 < \hat{\omega} < \hat{\omega}(\mathbf{u}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 < \rho < \hat{\omega}(\mathbf{u})/\omega(\mathbf{u}) & \text{si } \omega(\mathbf{u}) < +\infty \\ \rho = 0 & \text{si } \omega(\mathbf{u}) = +\infty \end{cases} \quad (5.3.1)$$

on a

$$\omega_{\mathcal{A}(D, \delta)^c}(\mathbf{u}) \geq \hat{\omega} - 1 + \rho. \quad (5.3.2)$$

Pour démontrer la proposition 5.3.2, on procède par contradiction en supposant qu'il existe une paire de nombres réels $(\hat{\omega}, \rho)$ satisfaisant (5.3.1) mais pas (5.3.2).

On fixe la norme $\| \cdot \|_D$ sur \mathbb{R}^n donnée par

$$\|\mathbf{v}\|_D = \max \left\{ \|\text{proj}_D(\mathbf{v})\|_2, \left(\frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{4\delta} \right) \|\text{proj}_{D^{\perp}}(\mathbf{v})\|_2 \right\} \quad (\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n).$$

On observe alors que

$$\|\mathbf{v}\|_D = \|\text{proj}_D(\mathbf{v})\|_2$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{A}(D, \delta)$. On fixe $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}$ une suite de meilleures approximations de \mathbf{u} par rapport à $\| \cdot \|_D$ (voir la définition 3.2.3). On pose

$$X_i = \|\mathbf{x}_i\|_D \quad \text{et} \quad L_i = |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}|$$

pour tout $i \geq 1$. On fixe un vecteur unitaire $\mathbf{d} \in D$ et, quitte à remplacer \mathbf{x}_i par $(-\mathbf{x}_i)$, on suppose que

$$\|\text{proj}_D(\mathbf{x}_i)\|_2 = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{d} \geq 0$$

pour tout $i \geq 1$. Les propositions 3.3.1 et 3.3.2 permettent alors de calculer $\omega(\mathbf{u})$ et $\hat{\omega}(\mathbf{u})$ en termes des suites $\{X_i\}_{i \geq 1}$ et $\{L_i\}_{i \geq 1}$.

Lemme 5.3.3. *Il existe $I_1 \geq 1$ tel que*

$$L_i \leq X_{i+1}^{-\hat{\omega}} \quad (5.3.3)$$

et

$$X_{i+1}^\rho < X_i \quad (5.3.4)$$

pour tout $i \geq I_1$.

Démonstration: L'inégalité (5.3.3) découle directement de la proposition 3.3.1. Lorsque $\rho = 0$, l'inégalité (5.3.4) est triviale puisque la suite $\{X_i\}_{i \geq 1}$ tend vers l'infini. Autrement, on a $\hat{\omega}(\mathbf{u}) \leq \omega(\mathbf{u}) < +\infty$ et $0 < \rho < \hat{\omega}(\mathbf{u})/\omega(\mathbf{u})$. La proposition 3.3.3 donne alors

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\log X_{i+1}}{\log X_i} = \frac{\omega(\mathbf{u})}{\hat{\omega}(\mathbf{u})} < \rho^{-1}.$$

Il s'ensuit que, pour tout indice $i \geq 1$ suffisamment grand, on a

$$\frac{\log X_{i+1}}{\log X_i} < \rho^{-1}$$

et donc on obtient (5.3.4). ■

Lemme 5.3.4. *Il existe $I_2 \geq I_1$ tel que pour tout $i \geq I_2$ on a $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}(D, \delta)$ ainsi que*

$$\|\text{proj}_D(a\mathbf{x}_i + b\mathbf{x}_{i+1} + c\mathbf{x}_{i+2})\|_2 = |aX_i + bX_{i+1} + cX_{i+2}|$$

pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Démonstration: Il suit du lemme 5.3.3 que

$$|\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}| = L_i \leq X_{i+1}^{-\hat{\omega}} < \|\mathbf{x}_i\|_D^{-\hat{\omega}}$$

pour tout $i \geq I_1$. Puisque par hypothèse, on a

$$\omega_{\mathcal{A}(D, \delta)^c}(\mathbf{u}) < \hat{\omega} - 1 + \rho \leq \hat{\omega},$$

on en déduit qu'il n'existe qu'un nombre fini d'indices $i \geq I_1$ tels que $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}(D, \delta)^c$. Ainsi, il existe $I_2 \geq I_1$ tel que $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}(D, \delta)$ pour tout $i \geq I_2$. Pour ces valeurs de i , on a

$$X_i = \|\mathbf{x}_i\|_D = \|\text{proj}_D(\mathbf{x}_i)\|_2 = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{d}.$$

Dès lors, pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a aussi

$$\begin{aligned} \|\text{proj}_D(ax_i + bx_{i+1} + cx_{i+2})\|_2 &= |(ax_i + bx_{i+1} + cx_{i+2}) \cdot \mathbf{d}| \\ &= |a(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{d}) + b(\mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{d}) + c(\mathbf{x}_{i+2} \cdot \mathbf{d})|. \\ &= |aX_i + bX_{i+1} + cX_{i+2}| \end{aligned}$$

■

Les deux prochains lemmes s'inspirent de la théorie des fractions continues.

Lemme 5.3.5. *Pour tout $i \geq I_2$, les nombres $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}$ et $\mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{u}$ sont de signes opposés.*

Démonstration: On fixe un indice $i \geq I_2$ et on considère le point $\mathbf{y} = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i \in \mathbb{Z}^n$. On a $\mathbf{y} \neq 0$ puisque $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}$ sont linéairement indépendants (voir proposition 3.2.6).

Puisque $i \geq I_2$ il suit du lemme 5.3.3 et de la définition de $\mathcal{A}(D, \delta)$ que, pour $j = i$ et $j = i + 1$, on a

$$\|\text{proj}_{D^\perp}(\mathbf{x}_j)\|_2 \leq \left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \right) \|\text{proj}_D(\mathbf{x}_j)\|_2 = \left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \right) X_j$$

et donc que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{4\delta} \right) \|\text{proj}_{D^\perp}(\mathbf{y})\|_2 &\leq \left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{4\delta} \right) (\|\text{proj}_{D^\perp}(\mathbf{x}_{i+1})\|_2 + \|\text{proj}_{D^\perp}(\mathbf{x}_i)\|_2) \\ &\leq \frac{X_{i+1} + X_i}{4} < X_{i+1}. \end{aligned}$$

Le lemme 5.3.3 donne également

$$\|\text{proj}_D(\mathbf{y})\|_2 = |X_{i+1} - X_i| < X_{i+1}$$

et donc $0 < \|\mathbf{y}\|_D < X_{i+1}$. Alors, par définition de la suite $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}$, on obtient

$$\begin{aligned} L_i \leq |\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}| &= |(\mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u})| \\ &= \begin{cases} L_i - L_{i+1} & \text{si } \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{u} \text{ sont de mêmes signes,} \\ L_i + L_{i+1} & \text{si } \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{u} \text{ sont de signes opposés.} \end{cases} \end{aligned}$$

Le lemme s'ensuit. ■

Lemme 5.3.6. *Il existe $I_3 \geq I_2$ tel que*

$$\mathbf{x}_{i+2} \in \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle_{\mathbb{Z}} \quad (i \geq I_3).$$

Démonstration: Pour tout $i \geq I_2$, on note $r_i, s_i \geq 1$ les entiers satisfaisant

$$r_i \leq \frac{L_i}{L_{i+1}} < r_i + 1 \quad \text{et} \quad s_i \leq \frac{X_{i+2}}{X_{i+1}} < s_i + 1$$

et on pose $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + r_i \mathbf{x}_{i+1} \in \mathbb{Z}^n$, lequel est non nul. Sachant grâce au lemme 5.3.5 que $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}$ et $\mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{u}$ sont de signes opposés, on obtient

$$|\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{u}| = |L_i - r_i L_{i+1}| < L_{i+1}$$

par définition de r_i . Par définition de la suite $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}$, cela implique que $X_{i+2} \leq \|\mathbf{y}_i\|_D$. On en déduit

$$s_i \leq \frac{X_{i+2}}{X_{i+1}} \leq \frac{\|\mathbf{y}_i\|_D}{X_{i+1}} \leq \frac{X_i + r_i X_{i+1}}{X_{i+1}} < r_i + 1,$$

donc $s_i \leq r_i$ pour tout $i \geq I_2$.

Pour $i \geq I_2$, on pose $\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_{i+2} - s_i \mathbf{x}_{i+1}$, lequel est également non nul. On obtient

$$\|\mathbf{z}_i\|_D \leq X_{i+2} + s_i X_{i+1} \leq 2X_{i+2}$$

et, en vertu du lemme 5.3.3, on a

$$|\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{u}| \leq L_{i+2} + s_i L_{i+1} \leq 2s_i L_{i+1} \leq 2X_{i+2} X_{i+1}^{-1} L_{i+1} \leq 2X_{i+2}^{-(\hat{\omega}-1+\rho)}.$$

Puisque par hypothèse on a

$$\omega_{\mathcal{A}(D, \delta)^c}(\mathbf{u}) < \hat{\omega} - 1 + \rho,$$

on en déduit qu'il existe $I_3 \geq I_2$ tel que

$$\mathbf{z}_i \in \mathcal{A}(D, \delta)$$

pour tout $i \geq I_3$. Donc, pour tout $i \geq I_3$, on obtient par définition de s_i que

$$\|\mathbf{z}_i\|_D = \|\text{proj}_D(\mathbf{z}_i)\|_2 = |X_{i+2} - s_i X_{i+1}| < X_{i+1}$$

et donc

$$L_i \leq |\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{u}| \leq L_{i+2} + s_i L_{i+1}.$$

Alors, on a

$$r_i \leq \frac{L_i}{L_{i+1}} \leq s_i + \frac{L_{i+2}}{L_{i+1}} < s_i + 1,$$

donc $r_i \leq s_i$ pour tout $i \geq I_3$. Puisque $I_3 \geq I_2$, on conclut que $r_i = s_i$ pour tout $i \geq I_3$.

Finalement, on pose $\mathbf{w}_i = \mathbf{x}_{i+2} - s_i \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i \in \mathbb{Z}^n$ pour tout $i \geq I_3$. Puisque $I_3 \geq I_2$, il suit du lemme 5.3.3 et de la définition de $\mathcal{A}(D, \delta)$ que, pour $j \geq I_3$, on a

$$\|\text{proj}_{D^\perp}(\mathbf{x}_j)\|_2 \leq \left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \right) \|\text{proj}_D(\mathbf{x}_j)\|_2 = \left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \right) X_j$$

et donc que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{4\delta} \right) \|\text{proj}_{D^\perp}(\mathbf{w}_i)\|_2 \\ & \leq \left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{4\delta} \right) (\|\text{proj}_{D^\perp}(\mathbf{x}_{i+2})\|_2 + s_i \|\text{proj}_{D^\perp}(\mathbf{x}_{i+1})\|_2 + \|\text{proj}_{D^\perp}(\mathbf{x}_i)\|_2) \\ & \leq \frac{X_{i+2} + s_i X_{i+1} + X_i}{4} \leq \frac{2X_{i+2} + X_i}{4} < X_{i+2}. \end{aligned}$$

Puisque $s_i X_{i+1} + X_i < 2X_{i+2}$, le lemme 5.3.4 donne

$$\|\text{proj}_D(\mathbf{w}_i)\|_2 = |X_{i+2} - s_i X_{i+1} - X_i| < X_{i+2}$$

et donc $\|\mathbf{w}_i\|_D < X_{i+2}$ pour tout $i \geq I_3$.

Par ailleurs, comme le signe du nombre $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}$ est le même que celui de $\mathbf{x}_{i+2} \cdot \mathbf{u}$ mais l'opposé de celui de $\mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{u}$, on a

$$|\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{u}| = |L_{i+2} + s_i L_{i+1} - L_i| = |L_{i+2} + r_i L_{i+1} - L_i|.$$

Puisque $0 \leq L_i - r_i L_{i+1} < L_{i+1}$, on obtient

$$|\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{u}| = \max\{L_{i+2} - (L_i - r_i L_{i+1}), L_i - r_i L_{i+1} - L_{i+2}\} \leq \max\{L_{i+2}, L_{i+1} - L_{i+2}\} < L_{i+1}.$$

Par définition de la suite $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}$, on conclut que $\mathbf{w}_i = 0$ et donc que

$$\mathbf{x}_{i+2} = \mathbf{x}_i + s_i \mathbf{x}_{i+1} \in \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle_{\mathbb{Z}} \quad (i \geq I_3).$$

■

Démonstration: (de la proposition 5.3.2)

On rappelle que la proposition 3.2.7 donne

$$\dim \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+2} \rangle_{\mathbb{R}} = 3$$

pour une infinité de $i \geq 1$. Le lemme 5.3.6 apporte donc la contradiction recherchée, ce qui termine la preuve. ■

Ici, les lemmes 5.3.4 et 5.3.5 de même que leurs preuves reprennent des arguments de Thurnheer, bien que ce soit dans un contexte légèrement différent (voir [14, p. 244] et la preuve de [14, II.v] respectivement). L'idée de considérer le point $\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_{i+2} - r_i \mathbf{x}_{i+1}$ avec $r_i \approx X_{i+2}/X_{i+1}$ comme dans la preuve du lemme 5.3.6 est également due à Thurnheer (voir la preuve de [14, II.iv]). Par contre, notre lemme 5.3.6 n'apparaît aucunement dans [14] et permet ici de grandement simplifier la méthode de Thurnheer.

5.4 Conclusion

En combinant les principes de transferts des sections précédentes, on obtient une nouvelle minoration pour l'exposant d'approximation dans un domaine angulaire qui ne dépend pas de l'exposant $\hat{\omega}$. Cela donne une version faible du théorème de Thurnheer.

Théorème 5.4.1 (Thurnheer, [14, Théorème 1.b]). *Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , soit E un sous-espace de codimension 1 dans $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et soit $\delta \in (0, 1)$. Alors, on a*

$$\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u}) \geq \frac{(n-2) + \sqrt{n^2 - 4}}{2}.$$

Démonstration: D'une part, puisque $\dim E = n - 2$, la remarque suivant le théorème 5.2.1 donne

$$\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u}) \geq \frac{(n-2)\hat{\omega}(\mathbf{u})}{\hat{\omega}(\mathbf{u}) - 1}.$$

D'autre part, il suit du théorème 5.3.1 que

$$\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u}) \geq \hat{\omega}(\mathbf{u}) - 1.$$

Comme on a $\hat{\omega}(\mathbf{u}) \geq n - 1$, il s'ensuit que

$$\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u}) \geq \inf_{\hat{\omega} \geq n-1} \max \left\{ \frac{(n-2)\hat{\omega}}{\hat{\omega} - 1}, \hat{\omega} - 1 \right\} = \frac{(n-2) + \sqrt{n^2 - 4}}{2}.$$

■

Finalement, on montre que la condition sur la dimension de E dans le théorème 5.4.1 n'est pas nécessaire. On obtient alors la généralisation suivante.

Théorème 5.4.2. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , soit E un sous-espace avec $0 \subsetneq E \subsetneq \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et soit $\delta \in (0, 1)$. Alors, on a

$$\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)}(\mathbf{u}) \geq \frac{k + \sqrt{k(k+4)}}{2},$$

où $k = \dim E$.

Démonstration: En vertu du lemme 4.2.6 il existe un sous-espace $E' \subseteq \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et un nombre $\delta' \in (0, 1)$ tels que

$$\dim E' = k, \quad \text{rg } E' = k + 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(E', \delta') \subseteq \mathcal{A}(E, \delta).$$

Comme $\text{rg } E' \leq k + 2$, il existe un sous-espace F de \mathbb{R}^n défini sur \mathbb{Q} de dimension $k + 2$ tel que $E' \subseteq F$. Puisque F satisfait les hypothèses du lemme 4.2.7 avec $l = k + 2$, il existe une application linéaire injective $h : \mathbb{R}^{k+2} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $h(\mathbb{Z}^{k+2}) = F \cap \mathbb{Z}^n$.

Comme h est injective d'image F et que E' est un sous-espace de F de dimension k , l'image réciproque de E' , $\tilde{E} := h^{-1}(E')$, est un sous-espace de \mathbb{R}^{k+2} de dimension k . Comme les coordonnées de \mathbf{u} sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , les coordonnées de $\tilde{\mathbf{u}} := h^*(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{k+2}$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . Aussi, puisque $E' \subseteq \langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, on a $h^{-1}(E') \subseteq \langle h^*(\mathbf{u}) \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, donc $\tilde{E} \subseteq \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$.

Par équivalence des normes sur \mathbb{R}^{k+2} , il existe une constante $\kappa_1 > 0$ telle que

$$\|h(\mathbf{v})\|_2 \leq \kappa_1 \|\mathbf{v}\|_2$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{k+2}$. Il suit aussi du corollaire 2.3.3 qu'il existe une constante $\kappa_2 > 0$ telle que

$$\Theta_2(h(\mathbf{v}_1), h(\mathbf{v}_2)) \leq \kappa_2 \Theta_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

pour tous $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^{k+2}$ non nuls. On choisit $\tilde{\delta} \in (0, 1)$ tel que $\kappa_2 \tilde{\delta} \leq \delta'$.

Comme $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ est de dimension $k + 1$, \tilde{E} est sous-espace de codimension 1 dans $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$. Soit $0 < \omega < \left(k + \sqrt{k(k+4)}\right) / 2$. En vertu du théorème 5.4.1, on a

$$\omega < \frac{k + \sqrt{k(k+4)}}{2} \leq \omega_{\mathcal{A}(\tilde{E}, \tilde{\delta})}(\tilde{\mathbf{u}})$$

et donc il existe une suite $\{\tilde{\mathbf{x}}_i\}_{i \geq 1}$ dans $\mathbb{Z}^n \cap \mathcal{A}(\tilde{E}, \tilde{\delta})$ avec $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|\tilde{\mathbf{x}}_i\|_2 = +\infty$ et

$$|\tilde{\mathbf{x}}_i \cdot \tilde{\mathbf{u}}| \leq \|\tilde{\mathbf{x}}_i\|_2^{-\omega}$$

pour tout $i \geq 1$. On pose alors $\{\mathbf{x}_i\}_{i \geq 1}$ la suite de \mathbb{Z}^n donnée par $\mathbf{x}_i = h(\tilde{\mathbf{x}}_i)$ ($i \geq 1$). On obtient

$$\Theta_2(\mathbf{x}_i, E') = \Theta_2(h(\tilde{\mathbf{x}}_i), h(\tilde{E})) \leq \kappa_2 \Theta_2(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{E}) < \kappa_2 \tilde{\delta} \leq \delta',$$

donc $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}(E', \delta') \subseteq \mathcal{A}(E, \delta)$ pour tout $i \geq 1$.

Comme h est injective, on a $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}_i\|_2 = +\infty$. Aussi, on a

$$|\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}| = |h(\tilde{\mathbf{x}}_i) \cdot \mathbf{u}| = |\tilde{\mathbf{x}}_i \cdot h^*(\mathbf{u})| = |\tilde{\mathbf{x}}_i \cdot \tilde{\mathbf{u}}| \leq \|\tilde{\mathbf{x}}_i\|_2^{-\omega} \leq \kappa_1^\omega \|\mathbf{x}_i\|_2^{-\omega},$$

puisque $\|\mathbf{x}_i\|_2 \leq \kappa_1 \|\tilde{\mathbf{x}}_i\|_2$. On en déduit que $\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)} \geq \omega$ et, en faisant tendre ω vers $(k + \sqrt{k(k+4)})/2$, on obtient

$$\omega_{\mathcal{A}(E, \delta)} \geq \frac{k + \sqrt{k(k+4)}}{2}.$$

■

Bibliographie

- [1] D. Badziahin et Y. Bugeaud, On simultaneous rational approximation to a real number and its integral powers, II., *New York J. Math* **26** (2020), 362 – 377.
- [2] Y. Bugeaud et S. Kristensen, Diophantine exponents for mildly restricted approximation, *Ark. Mat.* **47** (2009), 243 – 266.
- [3] J.W.S. Cassels, *An introduction to Diophantine approximation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1957.
- [4] J. Champagne et D. Roy, A transference inequality for rational approximation to points in geometric progression, *Hardy-Ramanujan J.* **42** (2019), 70 – 72.
- [5] H. Davenport et W. M. Schmidt, Approximation to real numbers by quadratic irrationals, *Acta Arith.* **13** (1967/68), 169 – 176.
- [6] N. G. Moshchevitin, Best Diophantine approximations : the phenomenon of degenerate dimension, *Surveys in geometry and number theory : reports on contemporary Russian mathematics*, 158 – 182, London Math. Soc. Lecture Note Ser. vol. 338, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [7] N. G. Moshchevitin, Positive integers : counterexample to W.M. Schmidt’s conjecture, *Mosc. J. Comb. Number Theory* **2** (2012), 63 – 84.
- [8] D. Roy, Diophantine approximation with sign constraints, *Monats. Math.* **173** (2014), 417 – 432.
- [9] D. Roy, On Schmidt and Summerer parametric geometry of numbers, *Ann. of Math.* **182** (2015), 739 – 786.
- [10] W. M. Schmidt, On heights of algebraic subspaces and Diophantine approximation, *Ann. of Math.* **85** (1967), 430 – 472.
- [11] W. M. Schmidt, Two questions in Diophantine approximation, *Monats. Math.* **82** (1976), 237 – 245.
- [12] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Mathematics vol. 785, Springer, Berlin, 1980.
- [13] W. M. Schmidt, Open problems in Diophantine approximation, *Approximations Diophantiennes et nombres transcendants* (Luminy, 1982), Progress in Mathematics vol. 31, Birkhäuser 1983, 271 – 289.

-
- [14] P. Thurnheer, On Dirichlet's theorem concerning diophantine approximation,
Acta Arithmetica **54** (1990), 241 – 250.