Théorème limite pour des champs aléatoires à paramètres discrets

par

Sylvie Cantin

Thèse présentée
à l'Ecole des Etudes Supérieures
de l'Université d'Ottawa
pour l'obtention de la maîtrise ès sciences
en mathématiques

avril 1982

Table des matières

Remerciements

Au professeur Chandrakant M. Deo, qui proposa le sujet de cette thèse et fut une source d'inspiration essentielle, je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements.

Je tiens aussi à remercier le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie dont le support financier a rendu possible la réalisation de ce travail.

Finalement j'ai grandement apprécié le travail impeccable accompli par madame Madeleine Latour et madame Lucie LeBlanc lors de la dactylographie de ce travail.

1- Introduction

Soit $\{\xi_n ; n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi avec $E[\xi_1] = 0$ et $E[\xi_1^2] = 1$. Le théorème-limite central de Lévy dit que
$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ converge en loi vers une normale réduite. Skorohod [10] a généralisé ce résultat en prouvant que si u est une fonction continue et bornée de R dans R alors $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} u\left(\frac{S_i}{\sqrt{n}}\right) \xi_{i+1}$ converge en loi vers $\int_0^1 u(W(t))dW(t)$, où l'intégrale est une intégrale stochastique de Ito. En prenant $u(x) \equiv 1$ nous reconnaissons le théorème-limite central. La forme fonctionnelle du théorème-limite central a été donnée par Donsker [7]. Le théorème de Donsker a été généralisé à une suite de différences de martingales stationnaires et ergodiques par Billingsley [3]. Une forme fonctionnelle du théorème de Skorohod déjà mentionné a été démontrée par Takahata [12].

Dans les pages qui suivent, nous considérerons des champs aléatoires à paramètres discrets. Un analogue du théorème de Donsker pour de telles variables aléatoires à paramètres multiples a été prouvé par Wichura [13]. Un analogue du théorème de Billingsley a été récemment obtenu par Basu [2]. Ici nous généralisons les travaux sus-mentionnés de Skorohod et Takahata.

2- Définitions et énoncé du théorème

Soit Z^q l'ensemble de tous les q-tuples d'entiers ($q \geq 1$). Nous noterons les points de Z^q par j, k, etc., ou encore par $(j_1, j_2, \ldots, j_q)$, $(k_1, k_2, \ldots, k_q)$, etc. Z^q est partiellement ordonné par la relation $j \leq k$ si et seulement si $j_i \leq k_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, q$ et $j < k$ si et seulement si $j_i < k_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, q$. Nous écrirons 0 et 1 pour $(0, 0, \ldots, 0)$ et $(1, 1, \ldots, 1)$ respectivement. Pour $k = (k_1, k_2, \ldots, k_q)$ définissons $|k| = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_q$. Sur Z^q nous utiliserons la norme du maximum c'est-à-dire $\|k\| = \max\limits_{1 \leq i \leq q} |k_i|$. Nous noterons par $Z^{q+} = \{j \in Z^q;\ j \geq 1\}$.

Soit $\{\xi_j;\ j \in Z^{q+}\}$ un champ aléatoire sur un espace de probabilité (Ω, F, P). Nous dirons que le champ aléatoire est stationnaire si pour tout ensemble fini S inclus dans Z^{q+} et pour tout $m \in Z^{q+}$, la loi conjointe de $\{\xi_{j+m};\ j \in S\}$ est la même que celle de $\{\xi_j;\ j \in S\}$.

Appelons F_k la tribu engendrée par $\{\xi_j;\ j_i \leq k_i$ pour un $i \in \{1, 2, \ldots, q\}\}$. Nous dirons que le champ aléatoire est une différence de martingale forte si

1) $E|\xi_j| < \infty$ pour tout $j \in Z^{q+}$

2) $E[\xi_j \| F_k] = 0$ presque sûrement (p.s.) quand $k < j$.

Dans ce cas nous dirons que $\{S_k;\ k \in Z^{q+}\}$ est une martingale forte où $S_k = \sum_{1 \le j \le k} \xi_j$. Quand ce sera nécessaire nous étendrons le domaine de S_k pour inclure des k dont certaines coordonnées seraient zéro et nous définirons S_k comme étant zéro dans de telles situations. Nous pourrions définir une différence de martingale faible de la même façon en utilisant F'_k la tribu engendrée par $\{\xi_j;\ j \le k\}$, à la place de F_k et $\{S_k;\ k \in Z^{q+}\}$ deviendrait une martingale faible.

Pour définir l'ergodicité nous prendrons pour acquis, comme d'habitude, que l'ensemble d'indices du champ aléatoire stationnaire $\{\xi_k\}$ est Z^q en entier au lieu de Z^{q+}. Nous pouvons représenter le champ aléatoire comme une application de Ω dans $\mathbb{R}^{Z^q}$ et dans ce cas ξ_k devient la $k^{\text{ième}}$ projection. Pour chaque $i = 1,2,\ldots q$ définissons l'opérateur de translation des coordonnées, T_i, sur $\mathbb{R}^{Z^q}$ tel que: si $x \in \mathbb{R}^{Z^q}$ alors

$$\xi_k(T_i x) = \xi_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i,k_{i+1},\ldots,k_q}(T_i x) =$$

$$= \xi_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_q}(x)$$. Un borélien de $\mathbb{R}^{Z^q}$, A, est appelé invariant si $T_i^{-1}(A) = A$ pour tout

$1 \leq i \leq q$. Nous dirons que le champs aléatoire $\{\xi_k\}$ est ergodique si la probabilité de tout ensemble invariant est 0 ou 1.

Soit $\{W(s);\ 0 \leq s \leq 1\}$ un mouvement brownien à q paramètres sur l'espace de probabilité (Ω, F, P). Nous noterons par $\Delta W(s, s')$ les accroissements du processus sur la région délimitée par s et s', c'est-à-dire sur $[s, s') = [s_1, s_1') \times [s_2, s_2') \times \ldots \times [s_q, s_q')$. Les deux principales propriétés du processus, qui définissent le mouvement brownien, se résument à

1- les accroissements sont indépendants pour des régions disjointes
2- $\Delta W(s, s')$ à une loi normale centrée et de variance $\sigma^2 = \lambda([s, s'))$, λ étant la mesure de Lebesgue.

Définissons maintenant $S_{n;k} = \frac{1}{n^{q/2}} \sum_{1 \leq j \leq k} \xi_j$ et $S_{n;k} = 0$ si une des coordonnées de k est zéro. Pour $t = (t_1, t_2, \ldots, t_q)$ dans $[0,1]^q$ nous posons $[nt] = ([nt_1], [nt_2], \ldots, [nt_q])$ (où $[\cdot]$ dénote le plus grand entier inférieur ou égal à $\cdot$), $\| t \| = \max_{1 \leq i \leq q} |t_i|$

(c'est-à-dire la norme du maximum sur $[0,1]^q$),

$X_n(t) = \sum_{0\le k\le [nt]-1} u(S_{n;k}) \frac{\xi_{k+1}}{n^{q/2}}$ (u étant une fonction continue et bornée) et $X(t) = \int_0^t u(W(s))dW(s)$ une intégrale stochastique à q paramètres qui sera décrite au chapitre suivant.

Intuitivement nous pouvons dire que $D[0,1]^q$ est l'espace des fonctions de $[0,1]^q$ vers $\mathbb{R}$ "continues à droite avec limites à gauche". Plus formellement, si R_p représente la relation $<$ ou $\geq$ pour $1\le p\le q$ et

$Q_{R_1,\ldots,R_q}(t) = \{(s_1,\ldots,s_q) \in [0,1]^q \;;\; s_p R_p t_p \text{ pour } 1\le p\le q\}$

pour $t \in [0,1]^q$, nous dirons que la fonction

$x: [0,1]^q \to \mathbb{R} \in D[0,1]^q$ si et seulement si

(1) $x(Q(t)) = \lim_{\substack{s\to t \\ s\in Q(t)}} x(s)$ existe pour chacun des 2^q quadrants

$Q_{R_1,\ldots,R_q}(t) = Q(t)$

et

(2) $x(t) = x(Q_{\geq,\ldots,\geq}(t))$.

L'espace $D[0,1]^q$ devient un espace polonais si nous le munissons de la métrique de Skorohod. Une description de cet espace est donnée par Ivanoff [9] . Cependant, au lieu de travailler avec le module de continuité correspondant à la métrique de Skorohod, nous utiliserons le module de continuité uniforme plus fort,

$$\omega_\delta(x) = \sup\{|x(s)-x(t)| \;;\; \|s-t\| < \delta\}$$

et nous montrerons que l'ensemble des lois de probabilité est équitendu (reférer au lemme 4) par rapport à ce module plus puissant. Naturellement cela permettra de conclure à la convergence dans la topologie de Skorohod. Nous pourrions aussi tirer une conclusion semblable à celle du théorème 13.12 de Breiman [5]. Nous pouvons finalement constater que $X_n(t)$ est une fonction de $D[0,1]^q$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de cette thèse qui sera démontré plus loin.

Théorème 1 Soit $\{\xi_j;\ j\in Z^{q^+}\}$ une différence de martingale forte stationnaire et ergodique telle que $E[\xi_1^2] = 1$ et $E[\xi_1^{2+\gamma}] < \infty$ pour un γ réel positif. Si $u(x)$ est une fonction continue et bornée alors l'ensemble des lois de $\sum_{1\le k\le [nt]-1} u(S_{n;k}) \frac{\xi_{k+1}}{n^{q/2}}$ converge faiblement dans $D[0,1]^q$ muni de la topologie de Skorohod vers $\int_0^t u(W(s))\,dW(s)$ quand $n\to\infty$ pour $t \in [0,1]^q$.

3- Intégrale stochastique

Nous retrouvons dans la littérature des discussions d'intégrales stochastiques par rapport à des processus à plusieurs paramètres (exemple: Cairoli et Walsh [6]). Cependant aucun développement n'est traité de façon simple et accessible. Ici nous construirons l'intégrale dans le cas $q = 2$ en suivant le même cheminement que Ash [1].

Soit $\{W(s,t);\ a \le s \le b,\ c \le t \le d\}$ un mouvement brownien sur l'espace de probabilité (Ω, F, P). Les accroissements de ce processus sur un carré $[s_1,s_2) \times [t_1,t_2)$ sont donnés par $\Delta W(s_1,t_1,s_2,t_2) = W(s_2,t_2) - W(s_2,t_1) - W(s_1,t_2) + W(s_1,t_1)$. Remarquons que ce ΔW est fonction de $\omega \in \Omega$ et que $\Delta W(s_1,t_1,s_2,t_2) \sim N(0,\sigma^2)$ où $\sigma^2 = |s_2 - s_1| \cdot |t_2 - t_1|$.

Nous voulons définir l'intégrale stochastique

$$\phi(f) = \int_a^b \int_c^d f(s,t,\omega)\, dW(s,t,\omega) = \int_a^b \int_c^d f(s,t)\, dW(s,t)$$

pour $f \in C$, la classe des fonctions réelles sur $[a,b] \times [c,d] \times \Omega$ telles que

(a) f est mesurable $\mathcal{B}[a,b] \times \mathcal{B}[c,d] \times F$ où $\mathcal{B}[a,b]$ est la tribu de Borel sur $[a,b]$

(b) pour chaque $(s,t) \in [a,b] \times [c,d]$, $f(s,t)$ comme fonction sur Ω est mesurable $F(s,t)$ où $F(s,t)$ est la tribu engendrée par $\{W(s',t');\ a \le s' \le s \text{ ou } c \le t' \le t\}$

(c) pour chaque $(s,t) \in [a,b] \times [c,d]$, $f(s,t) \in L^2(\Omega, F, P)$ et

$$\int_a^b \int_c^d E\{f(s,t)^2\}\, dt\, ds < \infty .$$

Nous appellerons fonctions en escalier les fonctions de C, $f(s,t,\omega)$, telles qu'il existe des partitions $a = s_0 < s_1 < \ldots\ldots < s_n = b$ et $c = t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_m = d$ et des variables aléatoires associées

$$\begin{array}{l} f_{00}, f_{01}, \ldots\ldots\ldots f_{0,m-1} \\ f_{10}, f_{11}, \ldots\ldots\ldots f_{1,m-1} \\ \vdots \\ f_{n-10}, f_{n-11}, \ldots f_{n-1,m-1} \end{array} \quad \text{sur } \Omega$$

telles que f_{ij} est mesurable $F(s_i,t_j)$

$$\text{avec } f(s,t,\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}(\omega)\, I_{[s_i,s_{i+1})\times[t_j,t_{j+1})}(s,t)$$

(Notons que pour faciliter la notation nous considérons $[s_{n-1},s_n) = [s_{n-1},b]$ et $[t_{m-1},t_m) = [t_{m-1},d]$).

Pour une fonction en escalier f, nous définissons l'intégrale stochastique

$$\phi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}(\omega)\, \Delta W(s_i,t_j,s_{i+1},t_{j+1}).$$

Le premier lemme nous fournira deux propriétés importantes de l'intégrale stochastique. Remarquons que si f et g sont deux fonctions en escalier nous pourrons utiliser la même partition pour les représenter.

<u>Lemme 1</u> Si f et g sont des fonctions en escalier alors

(a) $E\{\int_a^b \int_c^d f(s,t)dW(s,t)\} = 0$ et

(b) $E\{\int_a^b \int_c^d f(s,t)dW(s,t) \int_a^b \int_c^d g(s,t)dW(s,t)\}$

$$= \int_a^b \int_c^d E\{f(s,t)g(s,t)\}dtds .$$

<u>Preuve</u>

(a) par définition de l'intégrale stochastique

$$E\{\int_a^b \int_c^d f(s,t)dW(s,t)\} = E\{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}\Delta W(s_i,t_j,s_{i+1},t_{j+1})\}$$

$$= E\{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} E\{f_{ij}\Delta W(s_i,t_j,s_{i+1},t_{j+1}) || F(s_i,t_j)\}\}$$

$$= E\{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}\, E\{\Delta W(s_i,t_j,s_{i+1},t_{j+1}) || F(s_i,t_j)\}\}$$

par Billingsley [4] p.397

$$= E\{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}\, E\{\Delta W(s_i,t_j,s_{i+1},t_{j+1})\}\}$$

par indépendance des accroissements de W

$= 0$

(b) Nous pouvons considérer que f et g sont représentées par la même partition d'où

$$E\{\int_a^b\int_c^d f(s,t)dW(s,t)\int_a^b\int_c^d g(s,t)dW(s,t)\}$$

$$= E\{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} f_{ij}g_{kl}\ \Delta W(s_i,t_j,s_{i+1},t_{j+1})\Delta W(s_k,t_l,s_{k+1},t_{l+1})\}$$

$$= E\{\sum_{i,j,k,l} E\{f_{ij}g_{kl}\ \Delta W(i,j)\Delta W(k,l)\,||\,F(s_i \vee s_k, t_j \vee t_l)\}\}$$

où $a \vee b = \max\{a,b\}$.

Différents cas doivent être considérés pour évaluer l'espérance conditionnelle. Si $s_i<s_k$ et $t_j<t_l$ alors

$F(s_i \vee s_k,\ t_j \vee t_l) = F(s_k,t_l)$ et $\Delta W(i,j)$ est mesurable $F(s_k,t_l)$.

De plus, comme f et g sont dans C f_{ij} et g_{kl} sont mesurables $F(s_k,t_l)$. D'où, par Billingsley [4] p.397, l'espérance conditionnelle devient

$$f_{ij}g_{kl}\ \Delta W(i,j)E\{\Delta W(k,l)\,||\,F(s_k,t_l)\}$$

$$= f_{ij}g_{kl}\ \Delta W(i,j)E\{\Delta W(k,l)\}$$

par indépendance des accroissements de W

$$= 0 .$$

De la même façon, il est facile de voir que l'espérance conditionnelle s'annule chaque fois que $s_i \neq s_k$ ou $t_j \neq t_l$.

Ainsi

$$E\{\int_a^b\int_c^d f(s,t)dW(s,t) \int_a^b\int_c^d g(s,t)dW(s,t)\}$$

$$= E\{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} E\{f_{ij}g_{ij}\ \Delta W(i,j)^2 || F(s_i,t_j)\}\}$$

$$= E\{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}g_{ij}\ E\{\Delta W(s_i,t_j,s_{i+1},t_{j+1})^2\}\} ,$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} E\{f_{ij}g_{ij}\}(s_{i+1}-s_i)(t_{j+1}-t_j)$$

par définition de W

$$= \int_a^b\int_c^d E\{f(s,t)g(s,t)\}dtds$$

□

Nous savons que C est un sous-espace fermé de $L^2([a,b] \times [c,d] \times \Omega)$, un espace de Hilbert. D'où C est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b\int_c^d\int_\Omega f(s,t,\omega)g(s,t,\omega)dP(\omega)dtds$$

$$= \int_a^b\int_c^d E\{f(s,t)g(s,t)\}dtds .$$

Il est facile de voir que ϕ, définie sur les fonctions en escalier, S, est linéaire et préserve le produit scalaire. Ainsi si f et g sont des fonctions en escalier $\|\phi(f)-\phi(g)\| = \|\phi(f-g)\| = \|f-g\|$. D'où ϕ est uniformément continue sur S et ϕ possède une extension unique sur la fermeture de S dans C. L'extension sera aussi dénotée par ϕ.

<u>Lemme 2</u> Les fonctions en escalier sont denses dans C.

<u>Preuve</u> Nous montrerons que la fermeture $\overline{S}$ de S dans C contient

(a) les fonctions $f \in C$ telles que f est continue en L^2

(b) les fonctions $f \in C$ bornées

(c) les fonctions $f \in C$

(a) Soit $f \in C$ telle que f est continue en L^2 ce qui signifie que la fonction de $[a,b]\times[c,d] \to L^2(\Omega)$ telle que $(s,t) \to f(s,t,\cdot)$ est continue (et donc uniformément continue puisque $[a,b]\times[c,d]$ est compact). Ainsi $E|f(s,t)-f(s',t')|^2$ peut-être rendue arbitrairement petite pourvu que (s',t') soit suffisamment près de (s,t) et ce uniformément en (s,t).

Choisissons une partition de $[a,b]\times[c,d]$, $a = s_0<s_1<\ldots<s_n=b$ et $c = t_0<t_1<\ldots<t_m=d$, suffisamment fine pour que

$E|f(s,t)-f(s_i,t_j)|^2$ soit assez petite quand $s_i \le s < s_{i+1}$ et $t_j \le t < t_{j+1}$. Définissons

$$g(s,t,\omega) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(s_i,t_j,\omega)\, I_{[s_i,s_{i+1})\times[t_j,t_{j+1})}(s,t)$$

une fonction en escalier. Nous aurons $E|g(s,t)-f(s,t)|^2$ arbitrairement petite uniformément en (s,t). Donc

$\int_a^b \int_c^d E|g(s,t)-f(s,t)|^2\, dtds$ peut être rendue arbitrairement petite et $f\in\overline{S}$.

(b) Si $f\in C$ et f est bornée alors il existe $K<\infty$ tel que $|f(s,t)| \le K$ pour tout $(s,t)\in[a,b]\times[c,d]$. Définissons

$f_n(s,t,\omega) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x}e^{-y}\, f(s-\frac{x}{n},\ t-\frac{y}{n},\ \omega)dxdy$ en considérant

$f(s,t,\omega) = 0$ si $s\notin[a,b]$ ou $t\notin[c,d]$. Il est facile de constater que $f_n\in C$. Il suit aussi que f_n est continue en L^2 puisque $E|f_n(s+\Delta s,\ t+\Delta t)-f_n(s,t)|^2$

$$= E\left|\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x}e^{-y}[f(s+\Delta s-\tfrac{x}{n},t+\Delta t-\tfrac{y}{n})-f(s-\tfrac{x}{n},t-\tfrac{y}{n})]dxdy\right|^2$$

$$\le E\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x}e^{-y}[f(s+\Delta s-\tfrac{x}{n},t+\Delta t-\tfrac{y}{n})-f(s-\tfrac{x}{n},t-\tfrac{y}{n})]^2dxdy$$

par l'inégalité de Jensen

$$\le n^2E\int_0^\infty\int_0^\infty [f(s+\Delta s-u,t+\Delta t-v)-f(s-u,t-v)]^2dudv$$

avec $u = x/n$ et $v = y/n$ en considérant e^{-x} et $e^{-y} \leq 1$ car $x, y \geq 0$.

Ici une généralisation facile du lemme A2.3 de Ash [1] dit que si $g_s(t) = g(t-s)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^q)$ alors la fonction de $\mathbb{R}^q \to L^p(\mathbb{R}^q)$ telle que $s \to g_s$ est uniformément continue ce qui signifie que $\int_{\mathbb{R}^q} |g(s+\Delta s)-g(s)|^p ds \to 0$ quand $\Delta s \to 0$.

Dans notre cas $f \in L^2([0,\infty)^2)$, d'où

$$\int_0^\infty \int_0^\infty [f(s-u+\Delta s, t-v+\Delta t)-f(s-u,t-v)]^2 du dv \to 0 \quad \text{quand } \Delta s \to 0$$

et $\Delta t \to 0$ et, $E|f_n(s+\Delta s, t+\Delta t)-f_n(s,t)|^2 \to 0$ quand $\Delta s \to 0$ et $\Delta t \to 0$ par le théorème de convergence dominée de Lebesgue (TCD).

Ainsi par (a) $f_n \in \overline{S}$.

Montrons maintenant que $f_n \to f$ dans la norme de C.

$$\| f-f_n \|^2 = \int_a^b \int_c^d E|f(s,t)-f_n(s,t)|^2 dt ds$$

$$= E \int_a^b \int_c^d \left| f(s,t) - \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x} e^{-y} f(s-\tfrac{x}{n}, t-\tfrac{y}{n}) dx dy \right|^2 dt ds$$

par Fubini

$$\leq E \int_a^b \int_c^d \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x} e^{-y} [f(s,t)-f(s-\tfrac{x}{n}, t-\tfrac{y}{n})]^2 dx dy dt ds$$

par l'inégalité de Jensen

$$= E \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x} e^{-y} \int_a^b \int_c^d [f(s,t)-f(s-\tfrac{x}{n},t-\tfrac{y}{n})]^2 dt\,ds\,dx\,dy$$

$\longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$

par la généralisation déjà mentionnée et le TCD.

Ceci montre que $f_n \to f$ dans la norme de C et donc que $f \in \overline{S}$

(c) Si $f \in C$ définissons

$$f_n = \begin{cases} f & \text{si } |f| \le n \\ 0 & \text{si } |f| > n \end{cases}$$

f_n est bornée d'où $f_n \in \overline{S}$. De plus

$$\| f_n - f \|^2 = \int_a^b \int_c^d \int_\Omega (f_n(s,t,\omega)-f(s,t,\omega))^2 dP(\omega)\,dt\,ds$$

$$= \int_a^b \int_c^d \int_{\{\omega;|f|>n\}} f^2(s,t,\omega)\,dP(\omega)\,dt\,ds$$

$\longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$ par le TCD.

D'où $f_n \to f$ dans la norme de C ce qui permet de conclure que $f \in \overline{S}$.

<u>Théorème 2</u> L'intégrale stochastique

$\phi(f) = \int_a^b \int_c^d f(s,t)dW(s,t)$ pour les fonctions en escalier possède une extension unique sur C et les énoncés (a) et (b) du lemme 1 demeurent valides pour $f \in C$.

Considérons une partition de $[a,b]\times[c,d]$,

$a = s_0<s_1<\ldots<s_n = b$ et $c = t_0<t_1<\ldots<t_m = d$ avec

$$\delta = \max\left\{\max_{0\leq i\leq n-1}(s_{i+1}-s_i), \max_{0\leq j\leq m-1}(t_{j+1}-t_j)\right\}$$

représentant le diamètre de la partition. Le théorème 2 dit que si $f \in C$ alors

$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(s_i,t_j)\Delta W(s_i,t_j,s_{i+1},t_{j+1})$ converge en $L^2(\Omega)$ vers

$\int_a^b \int_c^d f(s,t)dW(s,t)$ quand $\delta \to 0$.

Maintenant définissons $X(s,t) = \int_a^s \int_c^t f(u,v)dW(u,v)$ pour $a\leq s\leq b$ et $c\leq t\leq d$ et montrons le théorème suivant qui nous donne deux propriétés de ce processus à temps continu.

<u>Théorème 3</u> Le processus $\{X(s,t);\ a\le s\le b,\ c\le t\le d\}$ est une martingale forte continue en L^2 au sens où

(1) $E|X(s,t)| < \infty$ pour tout $(s,t)\in[a,b]\times[c,d]$

(2) $X(s,t)$ est mesurable $F(s,t)$

(3) $E\{$accroissement de X entre (s,t) et $(s',t') \| F(s,t)\} = 0$ p.s. pour $s'>s$ et $t'>t$

c'est-à-dire

$$E\{X(s',t')-X(s,t')-X(s',t)+X(s,t)\,\|\,F(s,t)\} = 0 \quad \text{p.s.}$$

où les tribus $F(s,t)$ ont été définies pour le mouvement brownien (page 11).

<u>Preuve</u> 1° montrons que c'est une martingale forte.

(1) $[E|X(s,t)|]^2 \le E|X^2(s,t)|$

$$= \int_a^b\int_c^d Ef^2(s,t)\,dt\,ds \quad \text{par le théorème 2}$$

$$< \infty \quad \text{puisque } f\in\mathcal{C}.$$

(3) Pour $s'>s$ et $t'>t$ nous voulons que

$$E\{X(s',t')-X(s,t')-X(s',t)+X(s,t)\,\|\,F(s,t)\} = 0 \text{ p.s.}$$

ou encore $E\{\Delta X(s,t,s',t')\,\|\,F(s,t)\} = 0$ p.s.

D'abord supposons que f est une fonction en escalier, c'est-à-dire

$$\Delta X(s,t,s',t') = \int_s^{s'}\int_t^{t'} f(x,y)\,dW(x,y)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(s_i,t_j)\Delta W(s_i,t_j,s_{i+1},t_{j+1})$$

où $s = s_0 < s_1 < \dots s_n = s'$ et $t = t_0 < t_1 < \dots t_m = t'$.

Si nous posons $s = a$ et $t = c$ nous observons la mesurabilité $F(s',t')$ de $X(s',t')$. Enfin

$E\{\Delta X(s,t,s',t') \| F(s,t)\}$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} E\{E\{f(s_i,t_j)\Delta W(s_i,t_j,s_{i+1},t_{j+1}) \| F(s_i,t_j)\} \| F(s,t)\}$$

car $s \le s_i$ et $t \le t_j$ d'où $F(s,t) \subset F(s_i,t_j)$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} E\{f(s_i,t_j)E\{\Delta W(s_i,t_j,s_{i+1},t_{j+1}) \| F(s_i,t_j)\} \| F(s,t)\}$$

par Billingsley [4] p. 397

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} E\{f(s_i,t_j)E\{\Delta W(s_i,t_j,s_{i+1},t_{j+1})\} \| F(s,t)\}$$

par indépendance des accroissements de W

$= 0$ par définition de W.

Maintenant si $f \in C$, f quelconque, nous pouvons choisir une suite de fonctions en escalier, $\{f_n\}$, convergeant vers f dans L^2 c'est-à-dire telles que

$\int_a^b \int_c^d E|f(s,t)-f_n(s,t)|^2 dtds \to 0$ quand $n\to\infty$. Définissons

$X_n(s,t) = \int_a^s \int_c^t f_n(u,v)dW(u,v)$. Nous savons que

$\{X_n(s,t);\ a\le s\le b,\ c\le t\le d\}$ est une martingale forte. Notons que

$$E\{\Delta X(s,t,s',t')\,||\,F(s,t)\} = E\{X(s',t')-X_n(s',t')\,||\,F(s,t)\}$$

$$+ E\{X_n(s,t')-X(s,t')\,||\,F(s,t)\}+E\{X_n(s',t)-X(s',t)\,||\,F(s,t)\}$$

$$+ E\{X(s,t)-X_n(s,t)\,||\,F(s,t)\}+E\{\Delta X_n(s,t,s',t')\,||\,F(s,t)\}.$$

Le dernier terme est égal à 0 puisque $\{X_n\}$ est une martingale forte. Les quatre premiers tendent vers 0 dans $L^2(\Omega)$ quand $n\to\infty$ puisque pour $s'\ge s$ et $t'\ge t$

$$E|E\{X(s',t')-X_n(s',t')\,||\,F(s,t)\}|^2$$

$$\le E\{E\{|X(s',t')-X_n(s',t')|^2\,||\,F(s,t)\}\}$$

par l'inégalité de Jensen

$$= E|X(s',t')-X_n(s',t')|^2 \tag{3.1}$$

$$= E\left|\int_a^{s'}\int_c^{t'} [f(u,v)-f_n(u,v)]dW(u,v)\right|^2$$

$$= \int_a^{s'}\int_c^{t'} E|f(u,v)-f_n(u,v)|^2 dvdu$$

par le théorème 2

$$\leq \int_a^b \int_c^d E|f(u,v)-f_n(u,v)|^2 dvdu$$

$\to 0$ quand $n\to\infty$ par choix des f_n .

(2) Nous savons que les $X_n(s',t')$ définis précédemment sont mesurables $F(s',t')$. De plus la relation (3.1) permet d'affirmer que $X_n(s',t') \to X(s',t')$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n\to\infty$ et donc que $X(s',t')$ est mesurable $F(s',t')$.

2° Montrons la continuité en L^2.

Soit $s'>s$ et $t'>t$

$E|X(s',t')-X(s,t)|^2$

$$= E\left|\int_s^{s'}\int_t^{t'} f(u,v)dW(u,v)+\int_s^{s'}\int_c^{t} f(u,v)dW(u,v)+\int_a^{s}\int_t^{t'} f(u,v)dW(u,v)\right|^2$$

$$\leq 4E\left|\int_s^{s'}\int_t^{t'} f(u,v)dW(u,v)\right|^2+4E\left|\int_s^{s'}\int_c^{t} f(u,v)dW(u,v)\right|^2 +$$

$$+ 4E\left|\int_a^{s}\int_t^{t'} f(u,v)dW(u,v)\right|^2$$

puisque $(a+b+c)^2\leq 4a^2+4b^2+4c^2$

$$= 4\int_s^{s'}\int_t^{t'} Ef^2(u,v)dvdu+4\int_s^{s'}\int_c^{t} Ef^2(u,v)dvdu + 4\int_a^{s}\int_t^{t'} Ef^2(u,v)dvdu$$

par le théorème 2

$\longrightarrow 0$ quand $s'\to s$ et $t'\to t$ par le TCD. □

Pour conclure sur l'intégrale stochastique nous citerons un dernier théorème.

<u>Théorème 4</u> Presque toutes les trajectoires du processus stochastique $\{X(s,t);\ a\leq s\leq b,\ c\leq t\leq d\}$ sont continues.

La preuve est une généralisation facile de celle du théorème équivalent de Ash [1] qui sera omise ici puisqu'elle nécessite l'introduction de nouveaux concepts qui ne feraient qu'alourdir la présentation.

Il est facile de voir que toute cette théorie pour l'intégrale stochastique à deux paramètres peut être généralisée à q paramètres.

4. Quelques lemmes

Cette section a pour but de généraliser deux résultats connus qui seront utiles subséquemment.

lemme 2 Si $\{\xi_n; n\geq 1\}$ est une différence de martingale forte alors

$$E\{\max_{k\leq n}|S_k|^\gamma\} \leq [\frac{\gamma}{\gamma-1}]^{q\gamma}E\{|S_n|^\gamma\} \quad .$$

où $n = (n_1,n_2,\ldots,n_q)$ et $\gamma > 1$.

preuve: Si $q=1$ alors S_k est une martingale et $|S_k|$ est une sous-martingale non-négative. L'inégalité, dans ce cas, a été démontrée par Doob [8] p.317 .

Nous procéderons par induction sur q. Supposons que le résultat est vrai pour $1,2,\ldots,q-1$ paramètres. Soit $k = (k_1,k_2,\ldots,k_q)$ et $n = (n_1,n_2,\ldots,n_q)$ que nous divisons en $k = k_1,k'$ et $n = n_1,n'$ avec $k' = (k_2,\ldots,k_q)$ et $n' = (n_2,\ldots,n_q)$. Nous avons

$$E\{\max_{k\leq n}|S_k|^\gamma\} = E\{\max_{k_1\leq n_1}\max_{k'\leq n'}|S_{k_1,k'}|^\gamma\}$$

$$= E\{\max_{k_1\leq n_1}\|S_{k_1}\|^\gamma\}$$

avec $S_{k_1} = (S_{k_1,k'}\ ;\ 1\leq k'\leq n') \in \mathbb{R}^{|n'|}$

et $\| S_{k_1} \| = \max_{k' \le n'} |S_{k_1,k'}|$. Ainsi $\{S_{k_1}; k_1 \ge 1\}$ est une martingale et $\{\| S_{k_1} \| ; k_1 \ge 1\}$ est une sous-martingale non-négative d'où. $E\{\max_{k_1 \le n_1} \| S_{k_1} \|^{\gamma}\} \le \left[\frac{\gamma}{\gamma-1}\right]^{\gamma} E\{\| S_{n_1} \|^{\gamma}\}$ par Doob [8] p.317. De plus $E\{\| S_{n_1} \|^{\gamma}\} = E\{\max_{k' \le n'} | S_{n_1,k'}|^{\gamma}\}$ avec $\{S_{n_1,k'}; 1 \le k' \le n'\}$ une martingale forte à q-1 paramètres. Ainsi, par hypothèse d'induction,

$E\{\| S_{n_1} \|^{\gamma}\} \le [\frac{\gamma}{\gamma-1}]^{(q-1)\gamma} E\{|S_{n_1,n'}|^{\gamma}\}$ d'où

$$E\{\max_{k \le n} |S_k|^{\gamma}\} \le [\frac{\gamma}{\gamma-1}]^{q\gamma} E\{|S_n|^{\gamma}\}$$

□

Le lemme suivant est la généralisation du théorème 3.7.8 de Stout [11].

<u>Lemme 3</u> Soit $\{\xi_k; k \ge 1\}$ une différence de martingale forte telle que $E|\xi_k|^{\gamma} \le C$ $\forall k \ge 1$ pour un $\gamma > 2$ et une constante $C < \infty$. Alors $E|S_{a,n}|^{\gamma} \le K|n|^{\gamma/2}$ $\forall a \ge 0$, $\forall n \ge 1$ et pour une constante $K < \infty$ où $S_{a,n} = \sum_{a+1 \le k \le a+n} \xi_k$

<u>Preuve</u> 1ère partie: montrons que, si $\{\xi_k;\ k\geq 1\}$ est un champ aléatoire tel que $E\{\xi_k \| F_j\} = 0$ p.s. quand $j<k$ alors $E|\sum_{k\leq n} \xi_k|^\gamma \leq C' \, |n|^{(\gamma/2)-1} \sum_{k\leq n} E|\xi_k|^\gamma$ où C' est une constante.

Si q=1 c'est l'équation 3.3.14 de Stout [10]. Supposons que c'est vrai pour 1,2,...,q-1 paramètres et montrons-le pour q paramètres. Soit $k' = (k_1,\ldots,k_{q-1})$ et $n' = (n_1,\ldots,n_{q-1})$ de telle sorte que $k', k_q = k$ et $n', n_q = n$.

Nous avons
$$E|\sum_{k\leq n} \xi_k|^\gamma = E|\sum_{k'\leq n'} \sum_{k_q\leq n_q} \xi_{k',k_q}|^\gamma$$

$$= E|\sum_{k'\leq n'} S_{k',n_q}|^\gamma \qquad (4.1)$$

où $\{S_{k',n_q};\ k'\geq 1\}$ est aussi un champ aléatoire (à q-1 paramètres) satisfaisant

$$E\{S_{k',n_q} \| F_{j'}\} = \sum_{k_q\leq n_q} E\{\xi_{k',k_q} \| F_{j',0}\}$$

$$= 0 \quad \text{p.s. puisque } j',0<k',k_q$$

d'où
$$E|\sum_{k'\leq n'} S_{k',n_q}|^\gamma \leq C'|n'|^{(\gamma/2)-1} \sum_{k'\leq n'} E|S_{k',n_q}|^\gamma \qquad (4.2)$$

par hypothèse d'induction.

Ici et pour la suite C' représente une constante pas nécessairement toujours la même. De plus, pour un k' fixe, $\{\xi_{k',k_q} ; k_q \geq 1\}$ est un champ aléatoire (à 1 paramètre) tel que $E\{\xi_{k',k_q} \| F_{j_q}\}=0$ p.s. quand $j_q<k_q$ d'où $E|S_{k',n_q}|^{\gamma} = E|\sum_{k_q\leq n_q} \xi_{k',k_q}|^{\gamma}$

$$\leq C' n_q^{(\gamma/2)-1} \sum_{k_q\leq n_q} E|\xi_{k',k_q}|^{\gamma} \quad (4.3).$$

Finalement en combinant (4.1), (4.2) et (4.3) nous obtenons le résultat.

2ième partie: Pour montrer le lemme, observons que $E|\xi_k|^{\gamma} \leq C \quad \forall k \geq 1$. Ainsi

$$\sum_{k\leq n} E|\xi_k|^{\gamma} \leq \sum_{k\leq n} C = C|n|$$

d'où $E|\sum_{k\leq n} \xi_k|^{\gamma} \leq C'|n|^{(\gamma/2)-1} \cdot C|n|$

$\leq K|n|^{\gamma/2}$ et le lemme est obtenu en renumérotant les ξ_k.

□

Nous pouvons maintenant commencer la démonstration du théorème principal qui sera effectuée en deux parties.

5- Démonstration du théorème 1 (première partie)

Lemme 4 Sous les conditions du théorème 1, l'ensemble des lois de $X_n(\mathcal{t})$ est équitendu.

Preuve Nous ferons la démonstration dans le cas $d=2$, le cas général se traitant de la même façon.

Le champ aléatoire devient $\{\xi_{j_1 j_2};\ j_1, j_2 \in \mathbb{Z}^+\}$ et le mouvement brownien $\{W(s,t);\ s,t \in [0,1]\}$. Nous avons

$$S_{n;k} = S_{n;k_1 k_2} = \frac{1}{n} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \xi_{j_1 j_2}$$

$$X_n(s,t) = \frac{1}{n} \sum_{j_1=0}^{[ns]-1} \sum_{j_2=0}^{[nt]-1} u(S_{n;j_1 j_2}) \xi_{j_1+1\ j_2+1}$$

et nous définissons

$$Y_{n;i} = Y_{n;i_1 i_2} = n^{q/2} X_n(s,t) \quad \text{quand } i_1 \leq ns < i_1+1$$

$$. \quad \text{et} \quad i_2 \leq nt < i_2+1$$

$$= nX_n(s,t)$$

$$= \sum_{j_1=0}^{i_1-1} \sum_{j_2=0}^{i_2-1} u(S_{n;j_1 j_2}) \xi_{j_1+1\ j_2+1}$$

$$= \sum_{0 \leq j \leq i-1} u(S_{n;j}) \xi_{j+1} \quad .$$

Le module de continuité devient

$$\omega_\delta(x) = \sup_{\left\{\begin{array}{l} s_1,s_2,t_1,t_2 \\ ;|s_1-t_1|<\delta \\ \text{et } |s_2-t_2|<\delta \end{array}\right\}} |x(s_1,s_2)-x(t_1,t_2)| \ .$$

Comme $X_n(0,0) = 0$ pour tout n, l'ensemble des distributions de $\{X_n(0,0);n\geq 1\}$ est équitendu et le lemme 4 sera démontré si pour tout $\epsilon>0$ $\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P\{\omega_\delta(X_n)>\epsilon\} = 0$.

Mais

$$\omega_\delta(X_n) \leq \sup_{\left\{\begin{array}{l} s_1,s_2,t_1,t_2 \\ ;|s_1-t_1|<\delta \\ \text{et } |s_2-t_2|<\delta \end{array}\right\}} [|X_n(s_1,s_2)-X_n(s_1,t_2)|+|X_n(s_1,t_2)-X_n(t_1,t_2)|]$$

$$\leq \sup_{\left\{\begin{array}{l} s_1,s_2,t_2 \\ ;|s_2-t_2|<\delta \end{array}\right\}} |X_n(s_1,s_2)-X_n(s_1,t_2)|$$

$$+ \sup_{\left\{\begin{array}{l} s_1,t_1,t_2 \\ ;|s_1-t_1|<\delta \end{array}\right\}} |X_n(s_1,t_2)-X_n(t_1,t_2)|$$

$$= \sup_{\left\{\begin{array}{l} s,t \text{ avec même} \\ \text{1re coordonnée} \\ \text{et } \|s-t\|<\delta \end{array}\right\}} |X_n(s)-X_n(t)|$$

$$+ \sup_{\left\{\begin{array}{l} s,t \text{ avec même} \\ \text{2me coordonnée} \\ \text{et } \|s-t\|<\delta \end{array}\right\}} |X_n(s)-X_n(t)|$$

c'est-à-dire $\omega_\delta(X_n) \le \omega_\delta^{(1)}(X_n)+\omega_\delta^{(2)}(X_n)$ d'où

$$P[\omega_\delta(X_n)>\epsilon] \le P[\omega_\delta^{(1)}(X_n)>\epsilon/2]+P[\omega_\delta^{(2)}(X_n)>\epsilon/2]$$

et il suffit de montrer que pour tout $\epsilon>0$

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P[\omega_\delta^{(1)}(X_n)>\epsilon] = 0 \tag{5.1}$$

et $$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P[\omega_\delta^{(2)}(X_n)>\epsilon] = 0 \tag{5.2}$$

Comme (5.2) se montrerait de la même façon que (5.1) nous ne prouverons ici que cette dernière assertion (5.1). Fixons $\epsilon>0$ nous devons montrer que

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P[\sup_{\left\{\substack{s_1,s_2,t_2\\ ;|s_2-t_2|<\delta}\right\}} |X_n(s_1,s_2)-X_n(s_1,t_2)|>\epsilon] = 0 .$$

Comme ici une seule coordonnée varie, nous pouvons utiliser les mêmes arguments que Billingsley [3] page 56 et il suffit de montrer que

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\delta} P[\max_{\left\{\substack{s_1,s_2,t_2\\ ;t_2\le s_2\le t_2+\delta}\right\}} |X_n(s_1,s_2)-X_n(s_1,t_2)|>\epsilon] = 0 .$$

En utilisant à nouveau la même argumentation que Billingsley [3] page 59, il suffira de montrer que

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\delta} P[\max_{\left\{\substack{0\le i\le n\\ 1\le j\le n\delta}\right\}} |\frac{Y_{n;i\ k+j}}{n} - \frac{Y_{n;i\ k}}{n}| > \epsilon] = 0$$

pour $k = 0,1,2,\ldots,n-1$, c'est-à-dire que

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\delta} P\left[\max_{\substack{0\le i\le n \\ 1\le j\le n\delta}} |Y_{n;i\,k+j} - Y_{n;i\,k}| > \epsilon n\right] = 0 \qquad (5.3)$$

pour $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Maintenant fixons k et notons que

$$Y_{n;i\,k+j} - Y_{n;i\,k} = \sum_{j_1=0}^{i-1} \sum_{j_2=k}^{k+j-1} u(S_{n;j_1 j_2})\xi_{j_1+1\; j_2+1}$$

$$= \sum_{j_1=1}^{i} \sum_{j_2=k+1}^{k+j} u(S_{n;j_1-1\; j_2-1})\xi_{j_1 j_2} \quad .$$

Appelons $\partial_{j_1 j_2} = u(S_{n;j_1-1\; j_2-1})\xi_{j_1 j_2}$ et observons que

$$E\{\partial_{j_1 j_2} \| F_{j_1-1\; j_2-1}\} = u(S_{n;j_1-1\; j_2-1})E\{\xi_{j_1 j_2} \| F_{j_1-1\; j_2-1}\}$$

puisque $u(S_{n;j_1-1\; j_2-1})$ est mesurable $F_{j_1-1\; j_2-1}$

$= 0$ p.s.

Ainsi si $k_1<j_1$ et $k_2<j_2$

$$E\{\partial_{j_1 j_2} \| F_{k_1 k_2}\} = E\{E\{\partial_{j_1 j_2} \| F_{j_1-1\; j_2-1}\} \| F_{k_1 k_2}\} = 0 \text{ p.s.}$$

et de plus

$$E|\partial_{j_1 j_2}|^{2+\gamma} = E|u(S_{n;j_1-1\cdot j_2-1})\xi_{j_1 j_2}|^{2+\gamma}$$

$$\leq K^{2+\gamma}\, E|\xi_{j_1 j_2}|^{2+\gamma} \quad \text{puisque } u \text{ est bornée par } K$$

$$\leq C \quad \text{une constante.}$$

D'où le lemme 3 peut être appliqué, ce qui donne

$$E\Big|\sum_{j_1=a_1+1}^{a_1+n_1}\ \sum_{j_2=a_2+1}^{a_2+n_2} \partial_{j_1 j_2}\Big|^{2+\gamma} \leq C(n_1\cdot n_2)^{\frac{2+\gamma}{2}}$$

pour tout $a_1, a_2 \geq 0$, $n_1, n_2 \geq 1$ avec C une constante.

En particulier prenons $a_1=0$, $a_2=k$, $n_1=i$ et $n_2=j$. Nous avons

$$E\Big|\sum_{j_1=1}^{i}\ \sum_{j_2=k+1}^{k+j} \partial_{j_1 j_2}\Big|^{2+\gamma} \leq C(ij)^{\frac{2+\gamma}{2}} \qquad \text{pour tout } i,j\geq 1$$

c'est-à-dire

$$E|Y_{n;i\,k+j} - Y_{n;i\,k}|^{2+\gamma} \leq C(ij)^{1+\gamma/2} \tag{5.4}$$

pour tout $i,j\geq 1$.

Maintenant, pour $\epsilon>0$,

$$P[\max_{\substack{0\le i\le n\\ 1\le j\le n\delta}} |Y_{n;i\,k+j} - Y_{n;i\,k}| > \epsilon n]$$

$$= P[\max_{\substack{0\le i\le n\\ 1\le j\le n\delta}} |Y_{n;i\,k+j} - Y_{n;i\,k}|^{2+\gamma} > \epsilon^{2+\gamma}\, n^{2+\gamma}]$$

$$= \int_{\left\{\max_{\substack{0\le i\le n\\ 1\le j\le n\delta}} |Y_{n;i\,k+j} - Y_{n;i\,k}|^{2+\gamma} > \epsilon^{2+\gamma}\, n^{2+\gamma}\right\}} dP$$

$$\le \frac{1}{\epsilon^{2+\gamma}\, n^{2+\gamma}} \int_{\left\{\max_{\substack{0\le i\le n\\ 1<j\le n\delta}} |Y_{n;i\,k+j} - Y_{n;i\,k}|^{2+\gamma} > \epsilon^{2+\gamma}\, n^{2+\gamma}\right\}} |Y_{n;i\,k+j} - Y_{n;i\,k}|^{2+\gamma}\, dP$$

$$\le \frac{1}{\epsilon^{2+\gamma}\, n^{2+\gamma}}\, E\left\{\max_{\substack{0\le i\le n\\ 1\le j\le n\delta}} |Y_{n;i\,k+j} - Y_{n;i\,k}|^{2+\gamma}\right\}$$

$$\le \frac{1}{\epsilon^{2+\gamma}\, n^{2+\gamma}} \left(\frac{2+\gamma}{2+\gamma-1}\right)^{2(2+\gamma)} E|Y_{n;n\,k+n\delta} - Y_{n;n\,k}|^{2+\gamma}$$

par le lemme 2

$$\le \frac{1}{\epsilon^{2+\gamma}\, n^{2+\gamma}} \left(\frac{2+\gamma}{1+\gamma}\right)^{2(2+\gamma)} C\,(n\cdot n\delta)^{1+\gamma/2} \quad \text{par} \quad (5.4)$$

$$\le \frac{C' n^{2(1+\gamma/2)}\, \delta^{1+\gamma/2}}{\epsilon^{2+\gamma}\, n^{2+\gamma}} \quad \text{où } C' \text{ est une constante}$$

$$= \frac{C'\,\delta\,\delta^{\gamma/2}}{\epsilon^{2+\gamma}}$$

$$\text{Donc} \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\delta} P \left[\max_{\substack{0\le i\le n \\ 1\le j\le n\delta}} |Y_{n;i\,k+j} - Y_{n;i\,k}| > \epsilon n \right]$$

$$\le \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{C'\ \delta^{\gamma/2}}{\epsilon^{2+\gamma}}$$

$$= 0$$

ce pour tout $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ et pour ϵ positif arbitraire ce qui complète la démonstration du lemme 4.

□

6. Démonstration du théorème 1 (deuxième partie)

<u>Lemme 5</u> Sous les conditions du théorème 1 l'ensemble des lois fini-dimensionnelles de $X_n(t)$ converge faiblement vers celles de $\int_0^t u(W(s))\, dW(s)$ quand $n\to\infty$.

<u>Preuve</u> Ici aussi la preuve sera faite dans le cas où $q = 2$, le cas général se traitant de façon similaire. Les mêmes définitions et notations qu'au lemme 4 seront utilisées.

De plus $W_n(s,t) = S_{n;[ns][nt]} = \frac{1}{n} \sum_{j_1=0}^{[ns]} \sum_{j_2=0}^{[nt]} \cdot \xi_{j_1 j_2}$

$$\text{et } X(s,t) = \int_0^s \int_0^t u(W(x,y))dW(x,y).$$

<u>$1^{\text{ère}}$ étape</u>: Montrons que $X_n(1,1) \Rightarrow X(1,1)$ quand $n\to\infty$ ($\Rightarrow$ signifie converge faiblement vers).

Divisons l'intervalle $[0,1]$ en m intervalles tels que

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1 \quad \text{et posons} \quad \delta = \max_{0\le i\le m-1} (t_{i+1}-t_i) .$$

Ceci nous donne une partition de $[0,1]\times[0,1]$ de diamètre δ. Soit

$$\Delta_{n\delta} = E\{X_n(1,1) - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} u(W_n(t_i,t_j)) \Delta W_n(t_i,t_j)\}^2$$

où $\Delta W_n(t_i,t_j) = W_n(t_{i+1},t_{j+1}) - W_n(t_i,t_{j+1}) - W_n(t_{i+1},t_j)+W_n(t_i,t_j)$

c'est-à-dire

$$\Delta_{n\delta} = E\{ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} u(S_{n;ij}) \frac{\xi_{i+1\ j+1}}{n} - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} u(W_n(t_i,t_j)) \Delta W_n(t_i,t_j)\}^2.$$

Notons que $\Delta W_n(t_i,t_j) = \frac{1}{n} \sum_{k_1=[nt_i]+1}^{[nt_{i+1}]} \sum_{k_2=[nt_j]+1}^{[nt_{j+1}]} \xi_{k_1\ k_2}$

et $\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k_1=[nt_i]}^{[nt_{i+1}]-1} \alpha_{k_1} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i$ puisque $t_0=0$ et $t_m=1$.

D'où

$$\Delta_{n\delta} = E\{ \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k_1=[nt_i]}^{[nt_{i+1}]-1} \sum_{k_2=[nt_j]}^{[nt_{j+1}]-1}$$

$$[u(S_{n;k_1k_2}) \frac{\xi_{k_1+1\ k_2+1}}{n} - u(S_{n;[nt_i][nt_j]}) \frac{\xi_{k_1+1\ k_2+1}}{n}]\}^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k_1=[nt_i]}^{[nt_{i+1}]-1} \sum_{k_2=[nt_j]}^{[nt_{j+1}]-1}$$

$$E\{[u(S_{n;k_1k_2}) - u(S_{n;[nt_i]\ [nt_j]})]^2\ \xi^2_{k_1+1\ k_2+1}\}$$

par la propriété de différences de martingale forte des ξ_k.

Maintenant définissons

$$\xi_{i;\alpha} = \begin{cases} \xi_i & \text{si } |\xi_i| \leq \alpha \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$$\eta_{i;\alpha} = \xi_{i;\alpha} - E\{\xi_{i;\alpha} \| F_{i-1}\}$$

et $\delta_{i;\alpha} = \xi_i - \eta_{i;\alpha}$.

Notons que $|\eta_{i;\alpha}| \leq |\xi_{i;\alpha}| + |E\ \xi_{i;\alpha}| \leq 2\alpha$

et $E\{\delta_{k+1;\alpha}^2\} = E\{\delta_{1;\alpha}^2\}$ par stationnarité

$$= E\{\xi_1 - \eta_{1;\alpha}\}^2$$

$$= E\{\xi_1 - \xi_{1:\alpha} + E[\xi_{1;\alpha} \| F_0] - E[\xi_1 \| F_0]\}^2$$

$$= E\{\xi_1 - \xi_{1;\alpha} - E[\xi_1 - \xi_{1;\alpha}]\}^2$$

puisque F_0 est la tribu triviale

$$= E\{\xi_1 - \xi_{1;\alpha}\}^2 - [E\{\xi_1 - \xi_{1;\alpha}\}]^2$$

$$\leq E\{\xi_1 - \xi_{1;\alpha}\}^2$$

$$= \int_{\{\xi_1^2 > \alpha^2\}} (\xi_1 - \xi_{1;\alpha})^2 dP + \int_{\{\xi_1^2 \leq \alpha^2\}} (\xi_1 - \xi_{1;\alpha})^2 dP$$

$$= \int_{\{\xi_1^2 > \alpha^2\}} \xi_1^2 \, dP$$

$$= E_{\alpha^2}\{\xi_1^2\} .$$

Aussi $\xi_k = \delta_{k;\alpha} + \eta_{k;\alpha}$ c'est-à-dire

$$\xi^2_{k_1+1\ k_2+1} \leq 2\ \delta^2_{k_1+1\ k_2+1;\alpha} + 2\ \eta^2_{k_1+1\ k_2+1;\alpha} \quad \text{d'où}$$

$$\Delta_{n\delta} \leq \frac{2}{n^2} \sum_{i,j,k_1,k_2} E\{[u(S_{n;k_1k_2}) - u(S_{n;[nt_i][nt_j]})]^2 \eta^2_{k_1+1\ k_2+1;\alpha}\}$$

$$+ \frac{2}{n^2} \sum_{i,j,k_1,k_2} E\{[u(S_{n;k_1k_2}) - u(S_{n;[nt_i][nt_j]})]^2 \delta^2_{k_1+1\ k_2+1;\alpha}\} .$$

Nous savons que $u(x)$ est bornée c'est-à-dire que $|u(x)| \leq K$ pour tout x d'où $|u(\ )-u(\ )| \leq 2K$. Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons α assez grand pour que $E\{\delta^2_{k_1+1\ k_2+1;\alpha}\} \leq E_{\alpha^2}\{\xi^2_{11}\} < \varepsilon$.

Alors

$$\Delta_{n\delta} \leq \frac{2}{n^2} \sum_{i,j,k_1,k_2} 4\,\alpha^2 E\{u(S_{n;k_1k_2}) - u(S_{n;[nt_i][nt_j]})\}^2$$

$$+ \frac{2}{n^2} \sum_{i,j,k_1,k_2} 4\,K^2\varepsilon$$

$$\leq \; 8k^2\varepsilon + \frac{8\alpha^2}{n^2} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k_1=[nt_i]}^{[nt_{i+1}]-1} \sum_{k_2=[nt_j]}^{[nt_{j+1}]-1} E\{u(S_{n;k_1k_2}) - u(S_{n;[nt_i][nt_j]})\}^2 . \qquad (6.1)$$

<u>Note 1</u>: Basu et Dorea [2] ont montré que

$$S_{n;[ns][nt]} \Longrightarrow W(s,t) \quad \text{quand } n\to\infty .$$

Si $f: D[0,1]^2 \longrightarrow R$

$: f(x) = \sup\limits_{0\leq s,t\leq 1} |x(s,t)|$ alors f est continue

d'où $\sup\limits_{0\leq s,t\leq 1} |S_{n;[ns][nt]}|$ converge faiblement, c'est-à-dire

$\max\limits_{0\leq i_1,i_2\leq n} |S_{n;i_1i_2}|$ converge faiblement, donc l'ensemble des lois de $\max\limits_{0\leq i_1,i_2\leq n} |S_{n;i_1i_2}|$ est équitendu.

Ainsi pour $\varepsilon>0$ et α donnés, il existe c tel que

$P\{\max_{0\le i_1,i_2\le n} |S_{n;i_1 i_2}| > c\} < \frac{\varepsilon}{\alpha^2}$ pour tout n, c'est-à-dire

$$P(A_n^c) < \varepsilon/\alpha^2 \text{ pour tout } n \text{ où } A_n^c = \{\max_{0\le i_1,i_2\le n} |S_{n;i_1 i_2}| > c\}. \quad (6.2)$$

Note 2: u est une fonction continue de R vers R donc u est uniformément continue sur $[-c,c]$ et pour $\varepsilon>0$, α et c fixés, il existe $\gamma > 0$ tel que $|x|, |y| \le c$ et $|x-y| < \gamma \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon/\alpha$.

Note 3: Basu et Dorea [2] ont montré que $W_n(s,t) = S_{n;[ns][nt]}$ converge faiblement, donc que l'ensemble des lois de $W_n(s,t)$ est équitendu. Ainsi pour γ donné

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P[\omega_\delta(W_n) > \gamma] = 0$$

c'est-à-dire que pour ε, α et γ donnés il existe δ_0 et n_0 tels que $P[\omega_{\delta_0}(W_n) > \gamma] < \varepsilon/\alpha^2$ pour $n\ge n_0$ et nous pouvons nous arranger pour avoir $n_0 < 3/\delta_0$ en prenant δ_0 assez petit d'où il existe δ_0 tel que

$$P[B_{n,\gamma}(\delta_0)] < \varepsilon/\alpha^2 \text{ pour } n > 3/\delta_0 \quad (6.3)$$

où $B_{n,\gamma}(\delta_0) = \{\omega_{\delta_0}(W_n) > \gamma\}$.

Maintenant remarquons que

$$\Omega = A_n^c \cup [\overline{A_n^c} \cap B_{n,\gamma}(\delta_0)] \cup [\overline{A_n^c} \cap \overline{B_{n,\gamma}(\delta_0)}]$$

et que les trois parties sont disjointes d'où

$$E[u(S_{n;k_1k_2}) - u(S_{n;[nt_i][nt_j]})]^2$$

$$= \int_{A_n^c} [u(S_{n;k_1k_2}) - u(S_{n;[nt_i][nt_j]})]^2 \, dP \qquad \mathrm{I}$$

$$+ \int_{\overline{A_n^c} \cap B_{n,\gamma}(\delta_0)} [u(S_{n;k_1k_2}) - u(S_{n;[nt_i][nt_j]})]^2 \, dP \qquad \mathrm{II}$$

$$+ \int_{\overline{A_n^c} \cap \overline{B_{n,\gamma}(\delta_0)}} [u(S_{n;k_1k_2}) - u(S_{n;[nt_i][nt_j]})]^2 \, dP \qquad \mathrm{III}$$

$$(6.4).$$

Pour I et II remarquons que $(u(\;)-u())^2 \leq 4K^2$, d'où

$$\mathrm{I} \leq \int_{A_n^c} 4K^2 \, dP = 4K^2 P(A_n^c) \leq \frac{4K^2\varepsilon}{\alpha^2} \qquad \text{par (6.2)}$$

$$\text{et } \mathrm{II} \leq \int_{\overline{A_n^c} \cap B_{n,\gamma}(\delta_0)} 4K^2 dP = 4K^2 P(\overline{A_n^c} \cap B_{n,\gamma}(\delta_0)) \leq 4K^2 P(B_{n,\gamma}(\delta_0)) \;.$$

$$\leq \frac{4K^2\varepsilon}{\alpha^2} \qquad \text{par (6.3)}$$

pour δ_0 suffisamment petit et n grand.

Pour III remarquons que sur $\overline{A_n^c} \cap \overline{B_{n,\gamma}(\delta_0)}$ nous avons

$$\max_{0 \leq i_1, i_2 \leq n} |S_{n;i_1i_2}| \leq c \qquad \text{et} \qquad \omega_{\delta_0}(W_n) \leq \gamma \;.$$

c'est-à-dire

$$|S_{n;i_1i_2}| \leq c \quad \forall\, 0 \leq i_1, i_2 \leq n \quad \text{et} \quad \omega_{\delta_0}(W_n) \leq \gamma.$$

Considérons (t_i, t_j) fixe dans une partition de $[0,1]\times[0,1]$ de diamètre δ_0. k_1 peut être $[nt_i]$, $[nt_i]+1, \ldots$ ou $[nt_{i+1}]-1$ et k_2 peut être $[nt_j]$, $[nt_j]+1, \ldots$ ou $[nt_{j+1}]-1$. En choisissant n suffisamment grand nous aurons que $k_1 = [n\, r_1]$ et $k_2 = [n\, r_2]$ avec $t_i \leq r_1 < t_{i+1}$ et $t_j \leq r_2 < t_{j+1}$ c'est-à-dire de telle façon que $|r_1 - t_i| < \delta_0$ et $|r_2 - t_j| < \delta_0$.

Ainsi $|S_{n;k_1k_2} - S_{n;[nt_i][nt_j]}| = |W_n(r_1,r_2) - W_n(t_i,t_j)|$

$$\leq \sup_{\substack{s,s' \\ ;\|s-s'\|<\delta_0}} |W_n(s_1,s_2) - W_n(s'_1, s'_2)|$$

$$= \omega_{\delta_0}(W_n)$$

$$< \gamma \quad .$$

Comme de plus $|S_{n;k_1k_2}| \leq c$ et $|S_{n;[nt_i][nt_j]}| \leq c$ la note 2 permet d'affirmer que

$$|u(S_{n;k_1k_2}) - u(S_{n;[nt_i][nt_j]})| < \varepsilon/\alpha \quad \text{et ainsi}$$

$$\text{III} \leq \int_{\overline{A_n^c} \cap \overline{B_{n,\gamma}(\delta_0)}} \varepsilon^2/\alpha^2 \, dP = \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} P[\overline{A_n^c \cap B_{n,\gamma}(\delta_0)}] \leq \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}$$

pour δ_0 suffisamment petit et n grand. En remplaçant dans (6.4) nous obtenons

$$E\{u(S_{n;k_1k_2}) - u(S_{n;[nt_i][nt_j]})\}^2 \leq \frac{4K^2\varepsilon}{\alpha^2} + \frac{4K^2\varepsilon}{\alpha^2} + \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}$$

et en remplaçant de nouveau dans (6.1) nous obtenons pour δ_0 suffisamment petit et n grand

$$\begin{aligned}\Delta_{n\delta_0} &\leq 8K^2\varepsilon + \frac{8\alpha^2}{n^2} \cdot n^2 \left[\frac{8K^2\varepsilon}{\alpha^2} + \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\right] \\ &\leq 72K^2\varepsilon + 8\varepsilon^2 .\end{aligned}$$

Donc $\Delta_{n\delta}$ peut être rendu arbitrairement petit en choisissant δ petit et n grand ce qui signifie que si $n\to\infty$ et $\delta\to 0$ alors

$$X_n(1,1) - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} u(W_n(t_i,t_j))\, \Delta W_n(t_i,t_j) \to 0 \quad (6.5)$$

dans $L^2(\Omega)$ et donc aussi en probabilité.

Tel que mentionné à la note 1, nous savons que $W_n(s,t) \Longrightarrow W(s,t)$ quand $n\to\infty$ d'où le théorème de représentation de Skorohod dit qu'il existe des processus $\tilde{W}_n(s,t)$ et $\tilde{W}(s,t)$ tels que

(1) les lois fini-dimensionnelles de $\tilde{W}_n$ (respectivement $\tilde{W}$) coïncident avec celles de W_n (respectivement W)

(2) pour chaque (s,t), $\widetilde{W}_n(s,t)$ converge vers $\widetilde{W}(s,t)$ en probabilité quand $n\to\infty$.

A ce moment (6.5) devient

$$\widetilde{X}_n(1,1) - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} u(\widetilde{W}_n(t_i,t_j))\,\Delta\widetilde{W}_n(t_i,t_j) \xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}]{} 0 \qquad (6.6)$$

en probabilité où $\widetilde{X}_n(1,1)$ est défini de la même façon que $X_n(1,1)$ avec le nouveau champ aléatoire $\{\widetilde{\xi}_i, i\geq 1\}$ qui provient des $\widetilde{S}_k$ qui sont équivalents à $\widetilde{W}_n(s,t)$ avec $k_1 = [ns]$ et $k_2 = [nt]$.

Comme $\widetilde{W}_n(s,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \widetilde{W}(s,t)$ en probabilité pour chaque (s,t), nous avons que

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} u(\widetilde{W}_n(t_i,t_j))\,\Delta\widetilde{W}_n(t_i,t_j) \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} u(\widetilde{W}(t_i,t_j))\Delta\widetilde{W}(t_i,t_j) \text{ en probabilité }. \quad (6.7)$$

Finalement, par définition de l'intégrale stochastique, nous avons que

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} u(\widetilde{W}(t_i,t_j))\,\Delta\widetilde{W}(t_i,t_j) \xrightarrow[\delta\to 0]{} \int_0^1\int_0^1 u(\widetilde{W}(s,t))d\widetilde{W}(s,t) \qquad (6.8)$$

en probabilité, ce qui donne, en regroupant (6.6), (6.7) et (6.8) que

$$\widetilde{X}_n(1,1) \xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}]{} \int_0^1\int_0^1 u(\widetilde{W}(s,t))\,d\widetilde{W}(s,t) \quad \text{en probabilité}$$

d'où $X_n(1,1) \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ \delta\to 0}]{} \int_0^1\int_0^1 u(W(s,t))dW(s,t)$ en probabilité

par construction des $\tilde{W}_n$ et $\tilde{W}$. Ceci permet de conclure que $X_n(1,1) \Longrightarrow X(1,1)$ quand $n\to\infty$ et $\delta\to 0$ soit la fin de la première étape.

2$^{\text{ième}}$ étape : Montrons que $X_n(s,t) \Longrightarrow X(s,t)$ quand $n\to\infty$ et $\delta\to 0$.

Pour ceci nous utilisons le même raisonnement que pour la première étape avec

$$\Delta_{n\delta} = E\{X_n(s,t) - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m'-1} u(W_n(s_i,t_j))\,\Delta W_n(s_i,t_j)\}^2$$

et une partition $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = s$

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m'} = t \text{ de } [0,s]\times[0,t]$$

de diamètre $\delta = \max\{\max\limits_{0\le i\le m-1}(s_{i+1}-s_i),\ \max\limits_{0\le j\le m'-1}(t_{j+1}-t_j)\}$.

3$^{\text{ième}}$étape: Montrons la convergence des lois fini-dimensionnelles.

Fixons $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots \mathfrak{s}_l \in [0,1]\times[0,1]$ $(\mathfrak{s}_k = (s_{k1}, s_{k2})$.

Il faut montrer que

$$L(X_n(\mathfrak{s}_1), X_n(\mathfrak{s}_2), \ldots, X_n(\mathfrak{s}_l)) \Longrightarrow L(X(\mathfrak{s}_1), X(\mathfrak{s}_2), \ldots, X(\mathfrak{s}_l))$$

quand $n\to\infty$ où $L(\ )$ signifie "la loi de". Le théorème de Cramér-Wold nous dit qu'il est équivalent de montrer que $L(\sum_{k=1}^{l} a_k X_n(s_k)) \Longrightarrow L(\sum_{k=1}^{l} a_k X(s_k))$ quand $n\to\infty$ pour tout choix de nombres réels $a_1,a_2,\dots,a_l$. Fixons $a_1,a_2,\dots,a_l$ des constantes réelles. Nous savons qu'il suffit de montrer la convergence des fonctions caractéristiques, c'est-à-dire que

$$E\{e^{i\sum_{k=1}^{l} a_k X_n(s_k)}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} E\{e^{i\sum_{k=1}^{l} a_k X(s_k)}\} \quad . \qquad (6.9)$$

Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ une partition de $[0,1]$ telle que s_{k1} et s_{k2} sont dans la partition pour $k = 1,2,\dots l$, et soit $\delta = \max_{0\le i\le m-1} (t_{i+1}-t_i)$ le diamètre de la partition.

La deuxième étape nous a montré que

$$E\{X_n(s_{k1},s_{k2}) - \sum_{\{\substack{i=0\\ t_i\le s_{k1}}\}}^{m-1} \sum_{\{\substack{j=0\\ t_j\le s_{k2}}\}}^{m-1} u(W_n(t_i,t_j))\ \Delta W_n(t_i,t_j)\}^2 \longrightarrow 0$$

quand $n\to\infty$ et $\delta\to 0$. Ainsi il suit facilement que

$$\left|E\{e^{i\sum_{k=1}^{\ell} a_k X_n(s_{k1},s_{k2})}\} - E\{e^{i\sum_{k=1}^{\ell} a_k \sum_i \sum_j u(W_n(t_i,t_j))\Delta W_n(t_i,t_j)}\}\right|$$

$\longrightarrow 0$ quand $n\to\infty$ et $\delta\to 0$. D'où

$$\left|E\{e^{i\sum_k a_k \tilde{X}_n(s_{k1},s_{k2})}\} - E\{e^{i\sum_k a_k \sum_i \sum_j u(\tilde{W}_n(t_i,t_j))\Delta\tilde{W}_n(t_i,t_j)}\}\right|$$

$\longrightarrow 0$ quand $n\to\infty$ et $\delta\to 0$ par construction des $\tilde{W}_n$. (6.10)

De plus comme $\tilde{W}_n(s,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{W}(s,t)$ en probabilité pour chaque $(s,t) \in [0,1]^2$, nous savons que

$$\sum_i \sum_j u(\tilde{W}_n(t_i,t_j))\Delta\tilde{W}_n(t_i,t_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_i \sum_j u(\tilde{W}(t_i,t_j))\Delta\tilde{W}(t_i,t_j)$$

en probabilité, où le domaine de i et j servant aux sommes est le même que précédemment. D'où

$$\sum_k a_k \sum_i \sum_j u(\tilde{W}_n(t_i,t_j))\Delta\tilde{W}_n(t_i,t_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_k a_k \sum_i \sum_j u(\tilde{W}(t_i,t_j))\Delta\tilde{W}(t_i,t_j)$$

et les fonctions caractéristiques convergent, c'est-à-dire

$$E\{e^{i\sum_k a_k \sum_i \sum_j u(\tilde{W}_n(t_i,t_j))\Delta\tilde{W}_n(t_i,t_j)}\}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} E\{e^{i\sum_k a_k \sum_i \sum_j u(\tilde{W}(t_i,t_j))\Delta\tilde{W}(t_i,t_j)}\}. \qquad (6.11)$$

Finalement par définition de l'intégrale stochastique, quand $\delta\to 0$

$$\sum_i \sum_j u(\tilde{W}(t_i,t_j))\Delta\tilde{W}(t_i,t_j) \longrightarrow \int_0^{s_{k1}}\int_0^{s_{k2}} u(\tilde{W}(s,t))\,d\tilde{W}(s,t)$$

d'où

$$E\{e^{i\sum_k a_k \sum_i \sum_j u(\tilde{W}(t_i,t_j))\Delta\tilde{W}(t_i,t_j)}\} \xrightarrow[\delta\to 0]{}$$

$$E\{e^{i\sum_k a_k \int_0^{s_{k1}}\int_0^{s_{k2}} u(\tilde{W}(s,t))d\tilde{W}(s,t)}\} \qquad (6.12)$$

En combinant (6.10), (6.11) et (6.12) nous obtenons que

$$E\{e^{i\sum_k a_k \cdot \tilde{X}_n(s_{k1},s_{k2})}\} \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ \delta\to 0}]{} E\{e^{i\sum_k a_k \int_0^{s_{k1}}\int_0^{s_{k2}} u(\tilde{W}(s,t))d\tilde{W}(s,t)}\}$$

ou encore que

$$E\{e^{i\sum_{k=1}^{\ell} a_k X_n(s_{k1},s_{k2})}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} E\{e^{i\sum_{k=1}^{\ell} a_k X(s_{k1},s_{k2})}\}$$

ce qui complète la preuve du lemme 5.

□

Pour résumer disons que le lemme 4 nous montre que l'ensemble des distributions de $X_n(t)$ est équitendu en utilisant la topologie uniforme sur $D[0,1]^q$ ce qui entraine que le même ensemble est équitendu par rapport à la topologie de Skorohod. De plus le lemme 5 nous dit que les lois fini-dimensionnelles convergent faiblement ce qui complète la preuve du théorème 1.

Bibliographie

[1] Ash, Robert B. (1975). Topics in stochastic processes. Academic Press, New-York.

[2] Basu, A.K. and Dorea, C.C.Y. (1979). On functional central limit theorem for stationary martingale random fields. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 33 307-316.

[3] Billingsley, Patrick (1968). Convergence of Probability Measures. Wiley, New-York.

[4] Billingsley, Patrick (1979). Probability and Measure. Wiley, New-York.

[5] Breiman, L. (1968). Probability. Addison Wesley, New-York.

[6] Cairoli, R. and Walsh, J. (1975). Stochastic integrals in the plane. Acta Mathematica. 134 111-183.

[7] Donsker, M. (1951). An invariance principle for certain probability limit theorems. Mem. Amer. Math. Soc. 6.

[8] Doob, J.L. (1953). Stochastic Processes. Wiley, New-York.

[9] Ivanoff, B. Gail (1980). The function space $D([0,\infty)^q,E)$. La Revue Canadienne de Statistique. 8,2 179-191.

[10] Skorohod, A.B. and Slobodeneuk, N.P. (1970). Limit theorems for random walks. Kiev, Nauk.

[11] Stout, William F. (1974). Almost sure convergence. Academic Press, New-York.

[12] Takahata, Hiroshi (1976). A note on functionals for martingale sequences. Bulletin of Tokyo Gakugei University Serv. IV-28 17-21.

[13] Wichura, M.J. (1969). Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters. The Annals of Mathematical Statistics. 40 681-687.