SERIES CHRONOLOGIQUES,
MOYENNES MOBILES
ET DESAISONNALISATION

par Pierre-Arthur Cholette

Thèse présentée à l'Ecole des Etudes Supérieures
de l'Université d'Ottawa en vue de l'obtention
de la maîtrise en Science Economique

Ottawa, Canada, 1978

RECONNAISSANCE

Cette thèse a été préparée sous la direction de Monsieur Camilo Dagum, professeur de science économique à la Faculté des Sciences Sociales.

Sincères remerciements à Monsieur Dagum ainsi qu'à Madame Estela Bee Dagum, directeur de la division de l'analyse des chroniques et de la désaisonnalisation de Statistique Canada, pour leur dévouement et leurs conseils relatifs à l'élaboration de ce travail. Remerciements également à Statistique Canada pour son support technique du projet.

CURRICULUM STUDIORUM

Pierre-Arthur Cholette est né à Ville Saint Pierre, province de Québec, le 30 juin 1948. En 1969, il obtint son Baccalauréat ès Arts de l'université de Montréal, grâce à des études classiques faites au Séminaire de Sainte Thérèse à Sainte Thérèse de Blainville, Qué.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES - suite

INTRODUCTION

Ce travail a pour objet la systématisation des connaissances accumulées au sujet des moyennes mobiles et la présentation d'une version modifiée de la méthode d'ajustement saisonnier "Census Method II, version X-11".

La connaissance spectrale des moyennes mobiles est relativement avancée. Par contre la connaissance temporelle, sur laquelle s'était d'abord élaborée la théorie des moyennes mobiles, a été abandonnée pour finalement demeurer peu structurée. Il s'agira ici de réhabiliter la connaissance temporelle des moyennes mobiles, car elle procure souvent une interprétation moins complexe et plus facilement intelligible des effets des moyennes mobiles sur les séries chronologiques et leurs composantes. Evidemment l'approche fréquentielle s'avère très utile dans l'analyse des effets des moyennes, qui n'ont pas été conçues en fonction d'une intelligence temporelle, ou dont l'interprétation temporelle est complexe. C'est à celà qu'elle servira dans ce travail, où on analyse les effets des moyennes mobiles saisonnières de la méthode étudiée d'ajustement des séries chronologiques pour variations saisonnières.

Ceci nous amène à l'autre but de ce travail. La "Census Method II, version X-11" estime mal la saisonnalité mobile aux extrémités des séries chronologiques, soit les trois premières et dernières années. La saisonnalité mobile se rencontre souvent dans notre monde en évolution, pour les séries canadiennes à tout le moins. Dans ces cas le preneur de décision doit parfois

2,
3,

attendre quatre années pour connaître avec le maximum de précision les estimés de la saisonnalité et de la tendance-cycle qui lui font besoin aujourd'hui. Il s'agissait donc pour nous de généraliser la méthode X-11 dans le sens d'une capacité d'estimer également aux extrémités la saisonnalité mobile. Il existe des circonstances où la méthode ainsi modifiée diminue très considérablement l'erreur d'estimation et le biais dans les estimés des coefficients saisonniers et de la tendance-cycle.

Nous commencerons par définir une série chronologique comme la réalisation d'échantillonnage d'un processus stochastique et à en examiner la représentation spectrale. Le deuxième chapitre définira temporellement les composantes des séries, en donnera l'interprétation économique et présentera brièvement les différentes approches possibles pour les estimer. Le troisième examine la théorie des moyennes mobiles du point de vue temporel; puis, spectral, lorsque les moyennes mobiles sont envisagées comme des filtres linéaires. On trouve dans le quatrième chapitre un bref historique de l'ajustement saisonnier, une description littéraire et algébrique détaillée de la "Census Method II, version X-11", pour terminer avec une critique ou diagnostic de celle-ci, surtout en ce qui a trait à ses moyennes mobiles saisonnières. Enfin le cinquième chapitre présente des moyennes mobiles saisonnières nouvelles incorporées à X-11 et leur mise à l'épreuve sur des séries artificielles et sur cent séries réelles.

CHAPITRE UN: SERIES CHRONOLOGIQUES, PROCESSUS STOCHASTIQUES ET REPRESENTATION SPECTRALE

1.1 DEFINITION D'UNE SERIE CHRONOLOGIQUE

Une <u>série chronologique ou chronique</u> est une suite d'observations ordonnées dans le temps. Ces observations mesurent un caractère donné d'un même phénomène à travers le temps. En ce qui nous concerne, ces mesures ont lieu à des dates régulières dans le temps ou bien pour des préiodes consécutives de durée à-peu-près égales, telles mois, semaines etc. Par exemple les mesures mensuelles du produit national brut et les mesures trimestrielles ou annuelles du nombre d'habitants dans un pays donné sont séries chronologiques.

Les séries statistiques peuvent se diviser en deux grandes catégories: les séries en coupes instantanées ou spatiales et les séries temporelles. Les premières ont comme attribut des variables autres que le temps et forment la base empirique du développement des modèles de distribution de probabilité. Les dernières ont comme attribut la variable temps et font l'objet de cette étude.

Dans ce travail, une série se compose de J mois et de I années; c'est-à-dire, de T=IJ observations. Ses observations se repèrent des deux façons suivantes:

(1.1.a) O_{ij} ou bien O_t,

où i désigne l'année et varie de 1 à I; j, le mois et varie de 1 à J; et t, l'ordre temporel des observations de 1 à T. Le premier indice peut être qualifié de chronolexicographique; et le second, de chronologique. La relation entre eux s'écrit $t = (i-1)J+j$.

1.2 SERIES CHRONOLOGIQUES ET PROCESSUS STOCHASTIQUES

Une façon très générale de représenter une série chronologique consiste à la concevoir comme une réalisation d'un processus stochastique ou fonction aléatoire. Il faut d'abord définir une variable aléatoire. Une variable aléatoire dépend des résultats d'une expérience (ou bien d'un phénomène) aléatoire. On nomme ensemble fondamental, noté Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles, ω, de l'expérience aléatoire. On nomme résultats élémentaires les éléments de cet ensemble. Par exemple l'expérience aléatoire consiste à jeter deux dés et à observer la configuration des points apparaissant à leur surface supérieure. Autre exemple l'expérience aléatoire consiste à brasser un jeu de carte, à en tirer une et à l'observer. Dans ce dernier cas l'ensemble fondamental comprend cinquante deux résultats élémentaires possibles:

(1.2.a) Ω = { as de pique, deux de pique, trois de pique, . . ., roi de pique, as de coeur, deux de coeur, . . ., roi de coeur, as de carreau, deux de carreau, . . ., roi de carreau, etc. }.

Noter que l'expérience aurait pu consister à tirer deux, ou trois cartes, avec ou sans remplacement, avec ou sans rebrassage, etc. Ceci n'a pour effet d'accroître le nombre de résultats élémentaires de l'ensemble fondamental.

Sur cet ensemble fondamental se définissent des événements, ζ_i. Dans l'exemple (1.2.a) une catégorie d'événements peut être "carreau", "pique" et "ni carreau ni pique".

(1.2.b) ζ_1 = { ω est carreau },

ζ_2 = { ω est pique },

ζ_3 = { ω est ni carreau ni pique }.

Une catégorie d'événements comprend des événements mutuellement exclusifs — à savoir que l'occurence de l'un exclut l'occurence de l'autre — et collectivement exhaustifs — c'est-à-dire que quelque soit le résultat, un des événements de la catégorie s'est produit. Par exemple dans (1.2.a et b) quelle que soit la carte tirée elle ne peut à la fois être "carreau" et "pique"; par contre elle doit être ou bien "carreau" ou bien "pique" ou bien "non carreau et non pique". Cependant on peut définir plus d'une catégorie d'événements sur l'ensemble fondamental (1.2.a): une seconde catégorie ayant trait à la couleur de la carte tirée, une troisième selon qu'il s'agisse d'une figure ou pas, etc. On a alors:

(1.2.c) $\zeta_{1\ 1} = \{\ \omega$ est carreau $\}$,

$\zeta_{2\ 1} = \{\ \omega$ est pique $\}$,

$\zeta_{3\ 1} = \{\ \omega$ est ni carreau ni pique$\}$,

$\zeta_{1\ 2} = \{\ \omega$ est rouge $\}$,

$\zeta_{2\ 2} = \{\ \omega$ est noire $\}$,

$\zeta_{1\ 3} = \{\ \omega$ est une figure $\}$,

$\zeta_{2\ 3} = \{\ \omega$ n'est pas une figure $\}$.

Chaque catégorie d'événements constitue une <u>partition</u> de l'ensemble fondamental Ω: les événements à l'intérieur de chacune étant mutuellement exclusifs et collectivement exhaustifs de Ω. Cependant deux ou plusieurs événements de différentes catégories ou partitions peuvent ne pas jouir de cette propriété. Dans l'exemple illustré les événements $\zeta_{2\ 2}$ et $\zeta_{2\ 1}$ peuvent se produire ensemble: la carte tirée peut être "noire" et "pique".

La variable aléatoire ξ se définie sur ces événements: elle fait correspondre au moins un nombre réel pour chaque événement résultant de l'expérience ou phénomène aléatoire. Cette correspondance se nomme <u>fonction de résultat</u>:

(1.2.d) $\xi = [\xi_1, \xi_2, \ldots] = [\xi_i(\zeta_i), i = 1,\ldots,n] = [\xi_i(\omega), i = 1,\ldots,n]$,

où n est le nombre de catégories d'événements définis sur l'ensemble fondamental Ω. La fonction aléatoire a autant de dimensions, n, qu'il y a de catégories, ou partitions, d'événements sur Ω. Dans notre exemple la fonction de résultat assigne à la première dimension un, si ζ_{11} se produit; deux, si ζ_{21}; trois, si ζ_{31}. Quant à la deuxième dimension elle prend les valeurs moins un, si ω est rouge (ζ_{12}); et plus un, si ω est noir (ζ_{22}); la troisième, les valeurs zéro, si ζ_{13}, et un si ζ_{23}.

Alors pour avoir une variable aléatoire il faut 1) une expérience au phénomène aléatoire produisant un ensemble fondamental de résultats possibles, 2) une fonction de résultat associant la variable aléatoire numérique aux résultats obtenus.

Selon Yaglom (1962) une variable aléatoire est totalement décrite si on connaît la correspondance entre l'ensemble fondamental et la variable aléatoire,

(1.2.e) $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \varepsilon \Omega$, (1)

ainsi que sa fonction de distribution définie comme suit:

(1.2.f) $F(x) = P(\xi \leq x)$,(1) pour tout x.

La fonction de distribution donne la probabilité que la variable ξ prenne une valeur inférieure ou égale à une valeur choisie de x. Il est bien évident que $F(\infty)$ vaut un et que $F(-\infty)$ vaut zéro.

(1) ξ et x ont généralement plus d'une dimension: trois dans l'exemple représenté par (1.2.a) et (1.2.c).

Si on ne connaît ni l'expérience aléatoire ni la fonction de résultats, la variable aléatoire est spécifiée par sa fonction de distribution:

(1.2.g) $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\ (\xi_1(\omega) \leq x_1,\ \xi_2(\omega) \leq x_2, \ldots,\ \xi_n(\omega) \leq x_n)$,

qui implique l'existence — quelle qu'en soit la forme — de la relation,

(1.2.h) $\xi(\omega) = \{\xi_1(\omega),\ \xi_2(\omega), \ldots,\ \xi_n(\omega)\}$,

associant la variable aléatoire multidimensionnelle à l'ensemble Ω inconnu des résultats possible de l'expérience au phénomène aléatoire.

D'une façon générale soit T un ensemble d'éléments quelconques, ou plutôt l'ensemble des valeurs prises par le temps, {1, 2,... } (puisque notre intérêt porte sur les séries chronologiques). On peut envisager $O(\omega) = \{O_1(\omega), O_2(\omega), \ldots\}$ comme une variable aléatoire multidimensionnelle; ou bien $O_t(\omega)$, $t \varepsilon T$, comme une famille de variables aléatoires individuelles possiblement interreliées. Selon Slutsky (Yaglom, 1962, p. 9) les variables aléatoires $O_t(\omega)$ sont spécifiées, si pour chaque élément $t \varepsilon T$ on connaît leur fonction de distribution

(1.2.i) $F_t(o) = P(O_t(\omega) < o)$,

et si pour tout sous-ensemble d'éléments de T, $\{t_1, \ldots, t_n\}$, on connaît le fonction de distribution

(1.2.j) $F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(o_1, o_2, \ldots, o_n) = P(O_1\ (\omega) \leq o_1,\ O_2\ (\omega) \leq o_2, \ldots,\ O_n \leq o_n)$.

Cette dernière fonction doit satisfaire les conditions de symétrie,

(1.2.k) $F_{t_{j_1}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_n}}(o_{j_1}, o_{j_2}, \ldots, o_{j_n}) = F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(o_1, o_2, \ldots, o_n)$,

où $j_1, j_2, \ldots, j_n$ représentent n'importe quelle permutation des indices 1, 2,..., n; et de compatibilité,

(1.2.1) $F_{t_1', t_2', \ldots, t_m', t_{m+1}, \ldots, t_n}(o_1, o_2, \ldots, o_m, \infty, \ldots, \infty) =$

$$F_{t_1, t_2, \ldots, t_m}(o_1, o_2, \ldots, o_m),$$

pour tout m<n. La condition de symétrie (1.2.k) signifie que la probabilité d'un nombre donné d'événements donnés est la même quelque soit l'ordre dans lequel on les considère. Pour comprendre la condition de compatibilité (1.2.1) il suffit de se rappeler que:

(1.2.m) $P(O_{t_{m+1}}(\omega) \leq \infty, O_{t_{m+2}}(\omega) \leq \infty, \ldots, O_{t_n}(\omega) \leq \infty) = 1.$

C'est-à-dire que si les variables aléatoires, $O_t(\omega)$, t=m+1,..., n, peuvent prendre n'importe quelle valeur, ce qui se produit avec certitude, elles n'influent en aucune façon sur la probabilité que les autres variables aléatoires O_t, t=1,..., m prennent des valeurs données (ou plus exactement, des valeurs inférieures ou égales à des valeurs données). Kolmogorov (1933) a démontré que les équations (1.2.i à l) définissent de façon unique la distribution probabiliste du processus stochastique.

On conclut de cet exposé stochastique que pour chaque oméga donné $\omega_o \varepsilon \Omega$, on a une réalisation de la série entière, c'est-à-dire une série temporelle $O_t(\omega_o)$ indexée sur t; et que pour quelque moment donné du temps t_o, on a une variable aléatoire ou stochastique $O_{t_o}(\omega)$ ayant une distribution de probabilité.

Pour alléger la notation une réalisation de la variable aléatoire $O_t(\omega)$ s'écrira le plus souvent O_t; et l'ensemble des T réalisations, O sans indice au lieu de $\{O_t(\omega_o), t = 1, \ldots, T\}$ (T redevient ici le nombre d'observations de la série).

1.3 QUELQUES CLASSES DE PROCESSUS STOCHASTIQUES

On divise souvent en quelques classes les processus stochastiques selon les propriétés de leur fonction de distribution, notamment en processus stationnaires et non-stationnaires. Il existe plusieurs critères de classification des processus stochastiques. Celle retenue ici a simplement l'avantage d'être pertinente au déroulement de l'exposé.

Les propriétés de la fonction de distribution peuvent être dépendantes ou indépendantes de l'origine temporelle. Considérons la fonction de distribution pour n ($n \leq T$) variables successives $O_{t_1}(\omega)$, $O_{t_2}(\omega), \ldots, O_{t_n}(\omega)$. On dit que le processus stochastique est <u>stationnaire au sens "strict"</u> si la fonction de distribution correspondante est identique à celle des variables $O_{t_{1+h}}(\omega)$, $O_{t_{2+h}}(\omega), \ldots, O_{t_{n+h}}(\omega)$, c'est-à-dire si la relation suivante est satisfaite pour h, $1 \leq h \leq T-h$:

(1.3.a) $F_{t_1, t_2 \ldots t_n}(o_{t_1}, o_{t_2}, \ldots, o_{t_n}) = F_{t_1+h, t_2+h, \ldots, t_n+h}(o_{t_1+h}, o_{t_2+h}, \ldots, o_{t_n+h})$.

Une conséquence de cette relation est que l'espérance des T variables aléatoires $O_t(\omega)$ ainsi que leur variance et covariance sont indépendantes de la valeur absolue de t.

On dit que le processus est <u>stationnaire au sens "large"</u>, ou bien stationnaire au <u>second ordre</u> (ou encore <u>lato sensu</u>) si l'équation (1.3.a) se vérifie seulement pour les deux premiers moments de la distribution. C'est-à-dire si la moyenne, ou moment du premier ordre, $\mu(t)$, est une constante

(1.3.b) $\mu(t) = E(O_t) = m$,

et si la <u>fonction d'autocovariance</u>, ou moment du second ordre,

(1.3.c) $\sigma_{OO}(t_1, t_2) = E[O_{t_1} - \mu(t_1)][O(t_2) - \mu(t_2)]$,

est finie et dépend d'une seule variable, qui est la différence entre les deux points du temps t_2 et t_1. Ce qui s'exprime:

(1.3.d) $\sigma_{00}(t_1,t_2) = \sigma_{00}(t_1+h,t_2+h)$

et devient en posant $h=-t_1$

(1.3.e) $\sigma_{00}(t_1,t_2)=\sigma_{00}(0,t_2-t_1)= \sigma_{00}(\tau)$.

La distance temporelle entre les deux variables aléatoires est $\tau=t_2-t_1$. Pour $\tau=0$ l'équation (1.3.e) donne la variance du processus $\sigma_{00}(0)$. En divisant l'équation (1.3.c) par la variance on obtient la <u>fonction d'autocorrélation</u>:

(1.3.f) $\rho(\tau) = \sigma_{00}(\tau)/\sigma_{00}(0)$.[2]

Cette fonction d'autocorrélation s'avère très utile pour comparer les fonctions d'autocovariances de deux processus stochastiques différents, car elle élimine l'influence des unités de mesure de chacun.

Il faut constater qu'un processus stationnaire au sens large coïncide avec un processus stationnaire au sens strict, si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que la fonction de distribution du processus suit une loi de Gauss avec des moments du second ordre finis.

Tout processus stochastique qui ne satisfait pas les équations (1.3.b) et (1.3.e) est un <u>processus non-stationnaire</u>. Parmi les processus non-stationnaires Kolmogorov (1941) et Yaglom (1955) ont étudié les <u>processus</u> dits <u>non-stationnaires homogènes</u> ou processus à accroissements stationnaires. Ces processus sont ceux qui redeviennent stationnaires après un nombre fini de différences. Les processus non-stationnaires homogènes généralisent la théorie des fonctions aléatoires stationnaires.

(2) Pour désigner la variance d'une variable V on écrira indifféremment $\sigma_{VV}(0)$ ou bien σ_V^2.

Un sous-ensemble très important des processus stochastiques stationnaires est constitué par les processus linéaires. Le processus O est dit stationnaire linéaire s'il existe un processus purement aléatoire ε, et une suite de coefficients α, tel que

$$(1.3.g)\quad O_t = \sum_{s=0}^{k} \alpha_s \varepsilon_{t-s},\ \alpha_0=1,\ E(\varepsilon_t)=0,\ E(\varepsilon_t \varepsilon_s)=\begin{cases} 0, t\neq s, \\ \sigma_\varepsilon^2, t=s, \end{cases}$$

$$\text{avec } \sum_{s=0}^{k} \alpha_s \text{ convergente, } 0\leq k\leq\infty.$$

On peut démontrer que les processus linéaires stationnaires jouissent de la propriété <u>d'ergodicité</u>. Cette propriété est essentielle avant de procéder à l'estimation des moments d'un processus stochastique. En effet une série est envisagée ici comme une réalisation d'un processus stochastique comprenant T variables aléatoires différentes. Pour estimer les moments de l'une d'entre elles, il faudrait observer plusieurs de ses réalisations. Or les séries socio-économiques qui nous intéressent n'ont qu'une seule réalisation historique. Il en va autrement des séries décrivant des phénomènes reproductibles en laboratoire pour lesquelles on peut accumuler plusieurs réalisations. La propriété d'ergodicité est donc cruciale pour les séries socio-économiques à réalisation unique. Car elle assure la substitutivité de la moyenne temporelle du processus à réalisation unique à la moyenne dite "spatiale" ou "d'ensemble" du processus à réalisations multiples.

Les conditions d'ergodicité d'un processus existent et sont définies par Slutsky (1938), Birkhoff (1931) et Khinchin (1934). La propriété d'ergodicité est en quelque sorte une généralisation, pour les processus stochastiques, de

la propriété des estimateurs mieux connue sous le nom de convergence assymptotique (en moyenne quadratique) de la moyenne et de l'autocovariance à savoir:

(1.3.h) $\lim_{T\to\infty} E(\hat{\mu}_T-\mu)^2=0,$

$\lim_{T\to\infty} E(\hat{\sigma}_T^2(\tau)-\sigma^2(\tau))^2=0.$

Tous les processus linéaires sont ergodiques, mais tous les processus stationnaires ne sont pas ergodiques. C'est pourquoi il sera avantageux de ramener les processus stochastiques stationnaires à des processus linéaires stationnaires. Et en fait plus bas nous apparaîtra la généralité de la linéarité des processus stochastiques. Car plusieurs types de processus d'utilité empirique éprouvée équivalent à des processus linéaires.

1.4 REPRESENTATION SPECTRALE DES PROCESSUS STOCHASTIQUES

Dans la représentation spectrale un processus stationnaire est considéré comme une combinaison linéaire de composantes oscillant de façon aléatoire. Puisque toute fonction analytique, périodique ou non, peut s'approximer à n'importe quel degré d'exactitude par des fonctions périodiques[3], la représentation spectrale d'un processus stochastique stationnaire peut s'effectuer avec des séries de Fourier ou l'intégrale de Fourier, selon que le paramètre temporel est discret ou continu. Dans l'analyse de Fourier, les fonctions périodiques sont des sinus et des cosinus. Elles possèdent les propriétés importantes suivantes: l'approximation d'un nombre donné de termes donne l'erreur quadratique moyenne minimale entre la fonction et son approximation, elles sont orthogonales de sorte que les coefficients puissent se déterminer indépendamment les uns des autres.

(3) Une fonction du temps a une représentation de Fourier si elle a un nombre fini de points de discontinuité dans tout intervalle fini du temps.

L'utilisation des séries de Fourier pour décrire des phénomènes évoluant dans le temps a été proposée dans plusieurs études par Lagrange (1772-78), Buys-Ballot (1848) et Schuster (1898). Dans le domaine économique Moore (1914) et Beveridge (1922) utilisèrent le périodigramme. Mais l'analyse échoua, car le périodigramme supposait fixes les amplitudes, les phases et les fréquences des composantes de Fourier. L'analyse spectrale moderne utilise les séries de Fourier en supposant aléatoires leurs amplitudes et leurs phases.

On a démontré (Yaglom, 1962) la possibilité d'approximer tout processus stochastique stationnaire O_t par une combinaison linéaire d'oscillations harmoniques de la forme

(1.4.a) $$X_k(\omega)h(t) = X_k(\omega)R_k e^{i(\lambda_k t + \phi_k)},$$

où $X_k(\omega)$ est une variable aléatoire indépendante du temps; $h(t)$, une fonction périodique de t; ϕ_k, un déphasage aléatoire; et λ_k, une fréquence. Le scalaire R_k peut s'agréger au produit des variables aléatoires $X_k(\omega)$ et $e^{i\phi_k}$ qu'on dénote simplement par Z_k. La relation (1.4.a) devient alors

(1.4.b) $$X_k(\omega)h(t) = Z_k e^{i\lambda_k t},$$

où Z_k est une variable aléatoire complexe de moyenne nulle.

Chaque élément de la forme (1.4.b) décrit une oscillation périodique de fréquence angulaire λ_k (4), d'amplitude et de phase aléatoires. Z_k comprend ces éléments aléatoires; et $e^{i\lambda_k t}$, l'élément déterministe. La <u>représentation spectrale</u> d'un processus stochastique stationnaire O_t à paramètre temporel discret s'écrit alors comme la limite de la suite de processus discrets:

(4) La fréquence angulaire $\lambda_k = 2\pi f_k = 2\pi 1/T_k$ mesure le nombre de cycles autour du cercle unité par unité de temps. La fréquence f_k est simplement l'inverse de la période T_k, la durée nécessaire à une oscillation complète de la fonction périodique.

(1.4.c) $O_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} Z_k e^{i\lambda_k t}, \quad t=1,\ldots,T.$

La représentation spectrale de ce processus s'écrit alors

(1.4.d) $O_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dZ(\lambda), \quad t=1,\ldots,T,$

où $Z(\lambda)$ est une fonction complexe indexée sur λ. La représentation spectrale "décompose" donc un processus stationnaire en couples distincts d'oscillations périodiques non-corrélées.

Puisque tout processus stationnaire peut avoir une représentation spectrale, sa fonction d'autocovariance peut également prendre une forme spectrale. Ainsi pour l'équation (1.4.c) la <u>fonction d'autocovariance</u> peut s'écrire:

(1.4.e) $\sigma(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} E|Z_k|^2 e^{i\lambda_k \tau} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{i\lambda_k \tau}, \; b_k \geq 0.$ (5)

La fonction d'autocovariance existe seulement si la série converge, c'est-à-dire si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$. En posant $\tau=0$, l'expression (1.4.e) devient la <u>variance</u>

(1.4.f) $\sigma(0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$

ce qui montre que la variance totale du processus égale la somme des variances des différentes composantes périodiques non-correllées. Notons que ces dernières variances sont les moyennes des carrés des amplitudes Z_k des composantes harmoniques de (1.4.e).

Khinchin (1934) a généralisé la relation (1.4.e) et démontré que la fonction d'autocovariance de tout processus stationnaire peut prendre la forme

(1.4.g) $\sigma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dG(\lambda),$

(5) Nous allégeons la notation en écrivant parfois $\sigma(\tau)$ au lieu de $\sigma_{00}(\tau)$.

où $G(\lambda)$ est le spectre cummulatif ou fonction de distribution spectrale. Cette dernière est la transformée de Fourier-Stieltjes de la fonction d'autocorrélation $\sigma(\tau)$. La fonction de distribution spectrale $G(\lambda)$ est monotonique non-décroissante, symétrique par rapport à l'origine et bornée avec $G(-\infty)=0$ et $G(\infty)=\sigma(0)$. Puisque la fonction de densité spectrale $dG(\lambda)$ est une fonction paire, pour tout processus réel l'expression (1.4.g) se réduit à

$$(1.4.h)\quad \sigma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\cos(\lambda\tau)dG(\lambda) = \int_{0}^{\infty}\cos(\lambda\tau)dG_1(\lambda),$$

où $G_1(\lambda)=2G(\lambda)$. S'il s'agit d'un processus réel et discret, l'expression (1.4.h) change ses limites d'intégration et devient

$$(1.4.i)\quad \sigma(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(\lambda\tau)dG(\lambda) = \int_{0}^{\pi}\cos(\lambda\tau)dG_1(\lambda).$$

La dérivée $g(\lambda)$ de $G(\lambda)$ est la fonction de densité spectrale ou spectre. Le spectre d'un processus discret s'écrit alors

$$(1.4.j)\quad g(\lambda)= \frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\sigma(\tau)e^{-i\lambda\tau},\ -\pi\leq\lambda\leq\pi;$$

et, celui d'un processus discret réel,

$$(1.4.k)\quad g(\lambda)= \frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\sigma(\tau)\cos(\lambda\tau),\ -\pi\leq\lambda\leq\pi.$$

S'il s'agit de processus continu, λ varie de moins à plus l'infini et les sommations deviennent des intégrales dans les équations (1.4.j) et (1.4.k).

La section suivante traite plus en détail du spectre cummulatif et des spectres associés aux processus stochastiques stationnaires linéaires pertinents à notre étude.

1.5 PROCESSUS DE MOYENNES MOBILES ET PROCESSUS AUTOREGRESSIFS

Le processus stationnaire linéaire O défini par l'équation (1.3.g) peut s'interpréter comme l'extrant obtenu à partir d'un intrant ε (purement aléatoire) au moyen d'un "filtre", ou opérateur linéaire, qui transforme ε_t en O_t. En effet l'expression (1.3.g) peut — en utilisant l'opérateur de déphasage L, où $L^0=1$ et $L^s\varepsilon_\tau=\varepsilon_{\tau-s}$ — s'écrire sous la forme suivante:

$$(1.5.a)\quad O_t = \sum_{s=0}^{k} \alpha_s \varepsilon_{t-s} = \sum_{s=0}^{k} \alpha_s L^s \varepsilon_t = \alpha(L)\varepsilon_t,\ \alpha_0=1,\ \sum_{s=0}^{k} |\alpha_s| \leq M,\ M \text{ fini},\ 0\leq k\leq\infty,$$

où $\sum_{k=0}^{k} \alpha_s L^s=\alpha(L)$ est le <u>filtre</u> linéaire. On nomme également ce dernier <u>fonction de transfert</u> du système linéaire quand on substitue $e^{-i\lambda}$ à L. Pour que le processus (1.5.a) soit stationnaire au sens large, la fonction de transfert $\alpha(L)$ doit converger pour tout $|L|\leq 1$.

Le processus (1.5.a) s'appelle aussi <u>processus de moyenne mobile infinie</u>, si $k=\infty$, bien que la somme des coefficients α_s ne soit pas posée par hypothèse comme égale à un. Si le nombre de coefficients α_s égale un nombre h fini, cas le plus intéressant pour notre étude, l'expression (1.5.a) définit un <u>processus de moyenne mobile finie d'ordre h</u> s'écrivant

$$(1.5.b)\quad O_t = \sum_{s=0}^{h} \alpha_s L^s \varepsilon_t = \alpha(L)\varepsilon_t,\ \alpha_0=1.$$

La fonction d'autocovariance du processus (1.5.a) et sa variance sont respectivement, pour $k=\infty$:

$$(1.5.c)\quad \sigma_{OO}(\tau) = E(O_t O_{t+\tau}) = \sigma^2_\varepsilon \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \alpha_{s+\tau},$$

(1.5.d) $\sigma_{00}(0) = \sigma_{\varepsilon}^{2} \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s^2.$

Dans le cas du processus de moyenne mobile finie (1.5.b) la fonction d'autocovariance se réduit à

(1.5.e) $$\sigma_{00}(\tau) = \begin{cases} \sigma_{\varepsilon}^{2} \sum_{s=0}^{h-\tau} \alpha_s \alpha_{s+\tau}, & \tau \leq h, \\ 0, & \tau > h. \end{cases}$$

On peut plus facilement calculer la fonction d'autocovariance au moyen de la <u>fonction génératrice d'autocovariance</u>, qui sert également à exprimer le spectre de O en fonction de celui de ε. On définit ainsi la fonction génératrice d'autocovariance:

(1.5.f) $\sigma_{00}(L) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sigma_{00}(\tau) L^{\tau}.$

Etant donné que pour un processus réel $\sigma_{00}(\tau)$ est une fonction paire, L^{τ} et $L^{-\tau}$ ont des coefficients égaux: $\sigma_{00}(\tau)=\sigma_{00}(-\tau)$. Alors la fonction génératrice d'autocovariance du processus (1.5.a) peut se réécrire:

(1.5.g) $\sigma_{00}(L) = \sigma_{\varepsilon}^{2} \alpha(L)\alpha(L^{-1}).$

Si on pose $L=e^{-i\lambda}$, l'expression (1.5.f) prend la forme

(1.5.h) $\sigma_{00}(L) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sigma_{00}(\tau) e^{-i\lambda\tau},$

qui est précisément le spectre d'un processus discret, établi en (1.4.j), multiplié par 2π. Limitant λ à des valeurs non-négatives alors on a $\sigma_{00}(L)=\pi g(\lambda)$. Le spectre du processus linéaire (1.5.a) est alors

(1.5.i) $g_{00}(\lambda) = \frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}}{\pi} \alpha(e^{-i\lambda})\alpha(e^{i\lambda}) = \frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}}{\pi} |\alpha(e^{-i\lambda})|^2, 0 \leq \lambda \leq \pi,$

où $|\alpha(e^{-i\lambda})|^2$ est le gain du filtre égal au carré de la partie réelle de la fonction de transfert du filtre.

L'équation (1.5.i) montre que le spectre de l'extrant O du processus linéaire (1.5.a) peut s'obtenir à partir du spectre uniforme σ_ε^2/π d'un processus purement aléatoire (bruit blanc), multiplié par un facteur, le gain du filtre, qui ne dépend que des seules caractéristiques du filtre. Les fréquences, pour lesquelles $|\alpha(e^{-i\lambda})|^2$ est supérieur à un, sont amplifiées dans l'extrant; celles, pour lesquelles le gain du filtre est inférieur à un, sont amorties.

La variance de O_t est

(1.5.j) $\sigma_0^2 = \int_0^\pi g_{00}(\lambda)d\lambda = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi}\int_0^\pi |\alpha(e^{-i\lambda})|^2 d\lambda.$

En divisant (1.5.i) par (1.5.j) on obtient le spectre normalisé $\gamma_{00}(\lambda)$, qui est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $\rho_{00}(\tau)$:

(1.5.k) $\gamma_{00}(\lambda) = |\alpha(e^{-i\lambda})|^2 \,/\, \int_0^\pi |\alpha(e^{-i\lambda})|^2 d\lambda.$

Pour le processus de moyenne mobile finie d'ordre h (1.5.b) le spectre et le spectre normalisés s'écrivent respectivement:

(1.5.l) $g_{00}(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi}|\alpha(e^{-i\lambda})|^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi}\left|\sum_{s=0}^{h} \alpha_s e^{-i\lambda s}\right|^2; \alpha_0=1, 0 \leq \lambda \leq \pi,$

$\gamma_{00}(\lambda) = g_{00}(\lambda)/\sigma_0^2.$

Avant de clore cette section on s'occupera brièvement d'une autre sous-ensemble des processus linéaires, les processus autorégressifs introduits par V. Yule (1921). Un processus est dit autorégressif d'ordre p si il peut se

mettre sous forme de combinaison linéaire de p valeurs précédentes du processus plus un élément purement aléatoire ε_t:

$$(1.5.m)\quad O_t + \beta_1 O_{t-1} + \beta_2 O_{t-2} \ldots \beta_p O_{t-p} = \varepsilon_t = \sum_{r=0}^{p} \beta_r L^r O_t,\ \beta_0 = 1.$$

Si le processus est stationnaire, l'expression (1.5.m) peut s'écrire sous forme de moyenne mobile infinie:

$$(1.5.n)\quad O_t = \frac{1}{\sum_{r=0}^{p} \beta_r L^r}\,\varepsilon_t = \beta^{-1}(L)\varepsilon_t = \sum_{r=0}^{\infty} h_r L^r \varepsilon_t,\quad \sum_{r=0}^{p} \beta_r L^r \neq 0.$$

Les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation du processus autorégressif (1.5.m) répondent à la même forme d'équation aux différences finies correspondant à la partie déterminable. En effet multipliant (1.5.m) par $O_{t-\tau}$ et prenant l'espérance mathématique dans les deux membres, on obtient la fonction d'autocovariance

$$(1.5.o)\quad \sigma(\tau) = -\beta_1\sigma(\tau-1) - \beta_2\sigma(\tau-2) \ldots -\beta_p\sigma(\tau-p),\ \tau \geq 0;$$

et la fonction d'autocorrélation $\rho(\tau)$, en divisant (1.5.o) par $\sigma_{00}(0)$.

Le spectre $g_{00}(\lambda)$ pour le processus (1.5.m) est:

$$(1.5.p)\quad g_{00}(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi|\beta(e^{-i\lambda})|^2},\ 0 \leq \lambda \leq \pi.$$

On obtient le spectre normalisé $\gamma_{00}(\lambda)$ en divisant $g_{00}(\lambda)$ par σ_0^2.

Les processus de moyennes mobiles et les processus autorégressifs tels qu'esquissés ici, ainsi que les processus à la fois de moyennes mobiles et autorégressifs ont une grande utilité empirique. Box et Jenkins et d'autres, qui

les suivirent, ont procédé à l'estimation de tels modèles. Ils ont pu ainsi simuler et prévoir avec succès le comportement d'un grand nombre de séries économiques. Il faut s'en réjouir car ce fait corrobore la vraisemblance des modèles de processus linéaires. La linéarité des processus demeurera une hypothèse fondamentale pour les prochains chapitres.

CHAPITRE 2: COMPOSANTES DES SERIES CHRONOLOGIQUES ET LEURS MODES D'ESTIMATION

2.1 DECOMPOSITION EN PARTIES DETERMINISTE ET STOCHASTIQUE

Dans ce chapitre-ci il s'agit de décomposer une série chronologique en composantes qui ont une interprétation socio-économique utile. C'est H. Wold (1938) qui a démontré que tout processus stationnaire O possédant un corrélogramme peut être décomposé en deux processus D et ε. Ces deux processus sont non-corrélés entre eux. D est déterminable; et ε, purement aléatoire:

$$(2.1.a) \quad O_t = D_t + \varepsilon_t, \quad E\{(D_t - E(D_t))(\varepsilon_{t+\tau} - E(\varepsilon_{t+\tau})\} = 0,$$

$$(2.1.b) \quad \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \nu_{t-j}, \quad E(\nu_t) = 0, \quad E(\nu_t \nu_{t+\tau}) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0, \\ \sigma_\nu^2, & \tau = 0. \end{cases}$$

A strictement parler D est de nature stochastique et non pas déterministe, parce qu'elle consiste en une combinaison linéaire de sinusoides d'amplitude et de phase aléatoires. Cependant une fois D réalisée jusqu'au moment t, les phases et amplitudes deviennent connues et permettent ainsi une prédiction sans erreur (Yaglom, 1962, p. 184), d'où l'épithète "déterminable" pour cette composante. Les deux composantes de la série ne sont pas observables - seule leur aggrégation l'est - et constituent donc des quantités théoriques.

Pour les fins du présent travail, nous posons comme déterministe la partie déterminable en supposant fixes et non-aléatoires les amplitudes et phases; et, comme indépendante la partie aléatoire ($\varepsilon_t = \nu_t$). Nous obtenons ainsi le modèle "classique" ou "d'erreurs", qui fut utilisé avec les moindres carrés par Gauss et d'autres en astronomie et en physique. Ainsi, par exemple si la série O mesure les taux mensuels d'ensoleillement pour un lieu donné, la partie déterministe ou systématique D peut intuitivement s'interpréter comme le taux d'ensoleillement normal observé en moyenne sur un assez grand nombre d'années pour cette

période de l'année. La partie aléatoire reflète alors les fluctuations dues au hasard et les écarts du climat par rapport à cette norme ainsi que les erreurs d'observation. La spécification exacte retenue pour la partie déterministe ne dépend pas seulement des observations, mais aussi de l'idée que s'en fait l'analyste à mesure qu'il accumule les données et qu'il augmente son savoir des mécanismes climatiques.

Comment s'interprète le temps dans la décomposition originale de Wold (2.1)? Une interprétation possible est que celui-ci se meut progressivement dans une seule direction: ce qui s'est produit hier pèse de façon irréversible sur ce qui se passera aujourd'hui et demain. Une autre interprétation qui n'exclut pas la première veut que les événements se produisant à des moments rapprochés du temps soient fortement corrélés, donnant ainsi une certaine inertie à la série, et que ceux se produisant à des moments éloignés le soient d'autant moins.

2.2 COMPOSANTES DE LA PARTIE DETERMINISTE

L'analyse temporelle des phénomènes économiques a distingué depuis longtemps divers types de composantes dans les séries, soit la tendance-cycle ou mouvement extra-saisonnier et le mouvement saisonnier, qui sont inclus dans la partie déterministe, et les fluctuations irrégulières, assimilées à la partie aléatoire ou stochastique.

2.2.1 COMPOSANTE EXTRA-SAISONNIERE OU CYCLO-TENDANCIELLE

Classiquement on conçoit la composante extra-saisonnière comme un mouvement lisse à oscillations supra-annuelles, qu'on peut entre autres façons approximer à l'aide de polynômes temporels

(2.2.1.a) $C_{ij} = C_t = C(t) = \sum_{k=0}^{k_c} a_k^c t^k, \quad t=1,\ldots,T,$

où a_k^c sont les coefficients affectés à la k-ième puissance du temps, et k_c est le degré du polynôme. Cette représentation ne sert ici qu'à fixer les idées, car en pratique les séries ne suivent pas des comportements polynômiaux parcimonieux sauf sur de cours segments de série.

Cette composante représente l'évolution fondamentale de période supérieure à un an du caractère du phénomène mesuré par la série. En théorie économique, on divise cette évolution fondamentale en deux: la tendance à long terme et les fluctuations à moyen terme. La tendance à long terme renseigne sur le comportement à long terme, voire séculaire, du phénomène. Les fluctuations à moyen terme ont trait aux cycles de l'activité économique. Pour le preneur de décision (par exemple le gouvernement, l'entreprise ou tout agent de la société) la connaissance de tendance-cycle est cruciale. Car il ne veut pas prendre de décisions de portée à long terme sur la base de données réflétant des mouvement accidentels et saisonniers ou cycliques à court ou moyen terme. Il risquerait fort ainsi de prendre de mauvaises décisions.

2.2.2 COMPOSANTE SAISONNIERE

La composante saisonnière comprend un ensemble de fluctuations qui se reproduisent chaque année et caractérisent ainsi chaque mois de l'année. Ces fluctuations peuvent ou bien se répéter d'année en année ou bien changer graduellement d'une façon systématique d'année en année. Dans le premier cas on dit avoir une saisonnalité stable; et dans le second, une saisonnalité mobile. On convient souvent que dans chaque année complète la somme des valeurs de cette composante s'annule. Comme la tendance-cycle, la composante

saisonnière peut s'approximer - encore une fois pour fixer les idées - comme un ensemble de polynômes qui décrivent pour chaque mois le coefficient saisonnier

(2.2.a) $$S_{ij} = \sum_{k=0}^{k_s} a_{kj}^{s} i^{k}, \quad i=1,\ldots,I, \; j=1,\ldots,J,$$ avec les contraintes

$$\sum_{j=1}^{J} a_{kj}^{s}=0, \quad k=1,\ldots,k_s,$$

qui assurent que la saisonnalité s'annule sur toute année entière i. k_s est le degré (peu élevé) du polynôme relatif au mois j et a_{kj}^{s} sont les coefficients affectés à la k-ième puissance du temps pour le mois j.

Le mouvement saisonnier représente les fluctuations, causées par le climat et les habitudes saisonnières des agents de la société, qui affectent le phénomène mesuré par la série. L'estimé du mouvement saisonnier renseigne l'observateur sur l'ampleur des fluctuations saisonnières relatives à chaque mois et sur l'évolution de ces fluctuations au cours des années. L'adaptation de la technologie aux saisons, l'évolution structurelle de l'économie, les changements d'habitudes sociales relatives à chaque mois ainsi que les politiques saisonnières des agents de la société peuvent provoquer cette évolution graduelle et systématique de la saisonnalité, souvent vers l'amenuisement, observée pour un grand nombre de séries économiques canadiennes. Dans de nombreuses sphères d'activité la saisonnalité n'est pas nécessaire ou inhérente et s'avère un phénomène indésirable pour ce qu'elle implique d'inventaires saisonniers, de goulots d'étranglement et de capacité non-utilisée(1). Pour le preneur de décision la connaissance des fluctuations saisonnières revêt une très grande importance, car elle lui permet de régler son activité pour faire face à ces mouvements. Par exemple le vendeur de parapluies y lira d'avance le niveau d'inventaires approprié à chaque mois de l'année.

(1) Pour des descriptions et explications des causes et des effets des mouvements saisonniers consulter Judek, S. (1975).

2.2.3 COMPOSANTE DE ROTATION DES JOURS

Certaines séries réagissent au nombre de jours ouvrables dans chaque mois et à l'incidence relative des uns par rapport aux autres. Ce mouvement tient au fait qu'une année ne contient pas un nombre entier de semaines. Par exemple le mois de mars d'une année peut contenir quatre samedis, dimanches, lundis, mardis, mais cinq mecredis, jeudis et vendredis; et une autre année, mars peut compter cinq samedis, dimanches et lundis mais quatre des autres jours; c'est-à-dire deux jours ouvrables de moins. Sachant aussi que les jours ont des taux d'activité différents — par exemple au Canada on achète le jeudi de l'essence à moteur dans une proportion supérieure de 56% à la moyenne hebdomadaire — on comprend l'importance de ce genre de fluctuations pour certaines séries. Cependant il ne sera plus fait mention de cette composante dans cette étude, n'ayant rien de neuf à apporter aux méthodes utilisées pour l'estimer[2]. Il s'agissait simplement ici d'en rappeler l'existence au lecteur.

2.3 PARTIE STOCHASTIQUE OU COMPOSANTE ACCIDENTELLE

La composante accidentelle comprend les fluctuations inexpliquées par les autres composantes déterministes de la série. Une distribution purement aléatoire et une espérance nulle a été retenue pour elle dans l'équation (2.1.b); de même qu'un comportement homoscédastique

(2.3.a) $E(\varepsilon_{ij}) = E(\varepsilon_t) = 0,$

(2.3.b) $E(\varepsilon_t \, \varepsilon_{t-\tau}) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0, \\ \sigma_\varepsilon^2, & \tau = 0, \end{cases}$

(2) Au sujet de l'estimation de la composante de rotation des jours, voir Young, A.H. (1965).

où σ_ε^2 est la variance de la composante accidentelle; et τ, un décalage. On nomme également irrégulier la composante accidentelle.

La composante accidentelle est souvent imprévisible et perturbe, par sa composition avec la partie déterministe, l'évolution systématique de la série. Elle représente l'effet de facteurs perturbateurs passagers, non-permanents, ainsi que les erreurs de mesure du phénomène étudié par la série. Son estimé renseigne par exemple sur l'effet des grèves inhabituelles, des saisons exceptionnellement chaudes ou froides, ou sur l'effet de tout autre événement passager pertinent faisant déroger la série de son comportement systématique.

2.4 SCHEMAS DE RELATION MUTUELLE DES COMPOSANTES D'UNE SERIE

Dans l'histoire de l'analyse des séries chronologiques on a retenu trois schémas de relation mutuelle des composantes: le schéma additif, le schéma multiplicatif et le schéma mixte.

2.4.1 LE SCHEMA ADDITIF

Le schéma le plus simple est l'additif. Ce schéma suppose que les composantes s'additionnent entre elles pour donner la série originale ou brute:

(2.4.a) $O_t = C_t + S_t + \varepsilon_t$, $t=1,\ldots,T$.

Dans le modèle additif les effets des composantes saisonnières et accidentelles sur la série O sont indépendants entre eux et indépendants aussi du niveau de la composante extra-saisonnière. La figure II.1 illustre cela en supposant quatre mois par année, une saisonnalité stable (k_s=0), un mouvement

extra-saisonnier linéaire et un mouvement accidentel inexistant. On voit que l'effet saisonnier de S sur la série O est indépendant du niveau de C et donc indépendant du temps. La composante saisonnière stable engendre des fluctuations d'amplitude constante (contenues entre les lignes pointillées) autour du mouvement extra-saisonnier. Il en est de même des autres composantes: le schéma additif engendre des fluctuations propres à chaque composante et indépendantes des fluctuations des autres.

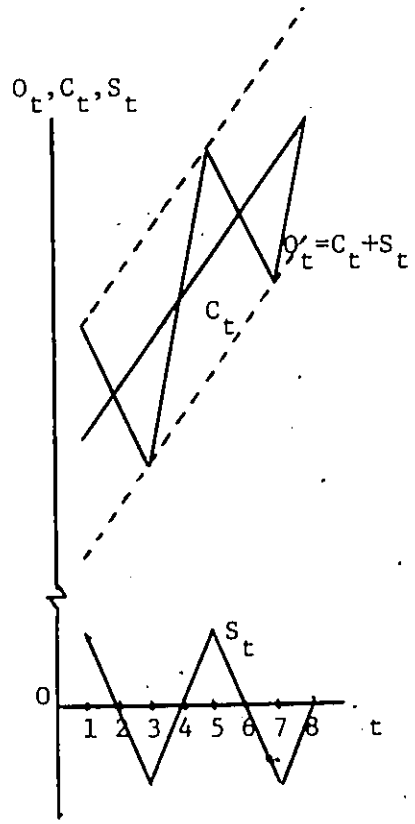


Figure II.1 Composition additive d'une saisonnalité stable avec une tendance-cycle linéaire

2.4.2 SCHEMA MULTIPLICATIF

Il en va autrement du schéma multiplicatif. Celui-ci assume que les composantes se multiplient entre elles pour générer la série O:

(2.4.b) $O_t = C_t \; S_t \; \varepsilon_t$.

Pour ce schéma la composante saisonnière a moyenne annuelle un au lieu de zéro; de même, l'espérance de la partie accidentelle.

Dans le modèle multiplicatif les effets des composantes saisonnière et accidentelle sur la série O sont dépendants du niveau de la composante extra-saisonnière. Dans la figure II.2, on considère quatre mois par année, une

composante saisonnière stable, un mouvement extra-saisonnier linéaire et un mouvement accidentel inexistant. L'effet de S_t sur O_t dépend du niveau C_t du mouvement extra-saisonnier et donc du temps: la composante saisonnière stable engendre des fluctuations d'amplitude variable (grandissante dans ce cas-ci) autour de la tendance-cycle. C'est là la principale distinction entre les schémas multiplicatif et additif: le schéma multiplicatif de relation mutuelle des composantes engendre des fluctuations des composantes qui dépendent aussi des fluctuations des autres composantes, tandis que ces fluctuations sont indépendantes dans le schéma additif. Pour simuler les séries chronologiques on emploie le schéma multiplicatif si on croit que les perturbations apportées à la tendance-cycle par les autres composantes sont proportionnelles au niveau de la tendance-cycle;

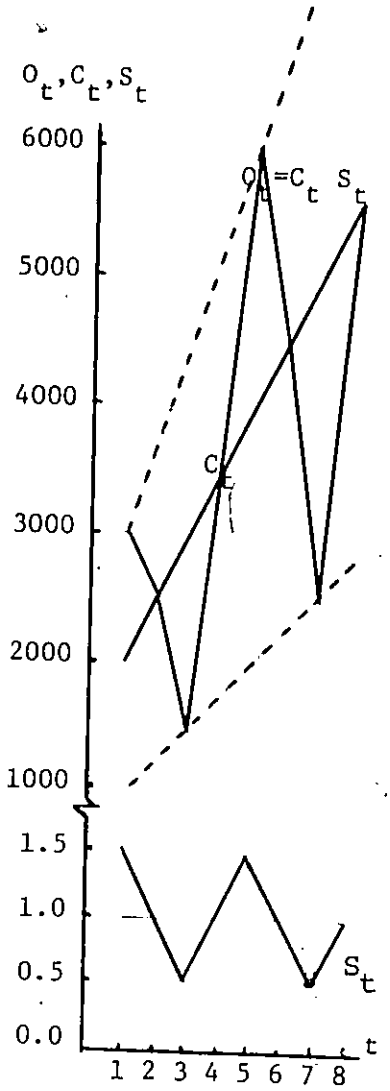


Figure II.2: Composition multiplicative d'une saisonnalité stable avec une tendance-cycle linéaire

et, le schéma additif, si on croit qu'elles sont indépendantes. Pour les séries économiques le schéma multiplicatif s'emploie — à tort ou à raison — plus souvent que le schéma additif.

Enfin une dernière réflexion inspirée par la figure II.2. Celle-ci montre également que même si la composante saisonnière stable a moyenne un pour chaque année, il en va autrement de l'effet saisonnier, c'est-à-dire de la surface entre les courbes O = CS et C. On dit que l'effet saisonnier s'annule si la portion de surface au-dessus de C égale l'autre portion au-dessous de C, c'est-à-dire si la somme des effets saisonniers égale zéro. Alors il apparaît évident que pour une année donnée l'effet saisonnier s'annule seulement dans les deux situations suivantes: ou bien la tendance-cycle est constante, ce qui est invraisemblable, ou bien la tendance-cycle prend une allure qui annule tout-à-fait par hasard les effets saisonniers pour année quelconque isolée, ce qui est très peu problable. C'est pourquoi il faut dans les schémas multiplicatifs bien spécifier ce qu'on entend par saisonnalité s'annulant annuellement: si c'est la composante qui s'annule annuellement, l'effet saisonnier ne sera généralement pas nul; et vice versa. A noter que ce sont les effets saisonniers qui doivent s'annuler pour que les totaux annuels des séries non-ajustées pour la saisonnalité également ceux des séries ajustées pour variations saisonnières.

Cette contradiction se trouve accentuée si l'on entend par annulation annuelle de la saisonnalité que la somme annuelle du logarithme de la composante égale zéro. En effet une telle hypothèse suppose que le produit annuel de la composante égale un. Une telle composante prendrait par exemple les valeurs [1/2,1,2,1,1/2,1,2,1] dans l'exemple de la figure II.2. On peut alors graphiquement démontrer que l'annulation des effets saisonniers se réaliserait encore plus difficilement: elle n'aurait pas lieu même pour une tendance-cycle constante.

De cette discussion ressort le caractère arbitraire de l'hypothèse d'annulation annuelle de la saisonnalité. Aux yeux des spécialistes de l'ajustement saisonnier elle a probablement servi de garde-fou à la tendance-cycle, en assurant que celle-ci passe au "milieu" (arbitrairement défini) des données brutes. Elle a aussi facilité le processus d'estimation des composantes: l'addition d'une contrainte à un système d'équations fait gagner un degré de liberté en lui ajoutant une "observation" ou bien en lui "retranchant" une variable.

2.4.3 SCHEMA MIXTE

Dans le schéma mixte on considère qu'il y a deux sortes de composantes perturbatrices du mouvement extra-saisonnier: une composante saisonnière additive ayant les propriétés de la saisonnalité additive définies plus haut, et une composante saisonnière multiplicative ayant les propriétés correspondantes définies plus haut. De même le modèle mixte peut comprendre deux parties stochastiques l'une additive, l'autre multiplicative. La série s'écrit alors:

(2.4.c) $O_t = C_t S_t^M \varepsilon_t^M + S_t^A + \varepsilon_t^A, \quad t=1,\ldots,T,$

où M et A indiquent qu'il s'agit respectivement des composantes multiplicatives et additives. Le schéma mixte réunit les propriétés des schémas multiplicatif et additif et réflète d'autant plus fidèlement la série. Mais en pratique on ne l'emploie guère, car il pose des difficultés supplémentaires d'estimation.

2.5 DIFFERENTES APPROCHES POUR ESTIMER LES COMPOSANTES DES SERIES

Dans cette section il s'agit de comparer d'une façon générale différentes approches pour estimer les composantes des séries chronologiques. L'exposition fait abstraction de la composante saisonnière et se concentre sur le modèle additif. Les conclusions ne perdront pas de leur généralité et le raisonnement s'en trouvera allégé. La série observée O se constitue donc d'un mouvement extra-saisonnier C, qui prend la forme d'un polynôme du temps, et d'un mouvement accidentel ε.

(2.5.a) $$O_t = C_t + \varepsilon_t,\ E(\varepsilon_t)=0,\ E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-\tau})=\begin{cases}\sigma_\varepsilon^2, \tau=0,\\ 0, \tau\neq 0,\end{cases}$$

(2.5.b) $$C_t = \sum_{k=0}^{k_c} a_k^c t^k.$$

2.5.1 MOINDRES CARRES ORDINAIRES ET SPECIFICATION TEMPORELLE POLYNOMIALE

La première méthode qui vient à l'esprit pour estimer un tel modèle est celle des moindres carrés traditionnels, avec laquelle on estime directement et explicitement les coefficients du polynôme C. Mais en dépit de toutes les propriétés théoriques d'optimalité reconnues des moindres carrés, ils ne donnent pas dans le contexte des chroniques économiques des résultants pratiques satisfaisants. En d'autres mots, le modèle (2.5) ne convient aux chroniques. Kendall (1973, p. 26) en résume succinctement quelques désavantages:

> "If the function contains several parameters the estimates of those parameters may be rather unreliable; for example, fitting a polynomial of order p depends on moments of order 2p."
>
> "If the fitted form is updated, the whole course of the series of fitted values may be affected, and it is undesirable that new observations at further points of time should require a reassessment of the past especially the distant past."

Cette réestimation des valeurs passées peut parfois être radicale quand l'addition de nouvelles observations entraîne une hausse du degré du polynôme, autre exemple de l'inadéquacité du modèle (2.5). Si le degré du polynôme est passablement élevé, les estimés du début et de la fin de la période d'observations auront vite tendance à s'échapper vers les infinis à mesure qu'on s'éloigne du centre de cette période. Ceci rend la prévision très volatile. L'estimation d'un polynôme sur toute la période couverte par la série manque également de flexibilité locale, de sorte que les mouvements cycliques de plus courte durée sont souvent escamotés.

Bref, la spécification (2.5.b) est en quelque sorte trop rigide. En effet, il se produit rarement que la tendance-cycle prenne une forme algébrique donnée sur toute l'étendue d'une série. Surtout lorsque la tendance-cycle n'a pas une forme très évidente, il vaut mieux utiliser des méthodes d'estimation plus simples: telles les moyennes mobiles.

2.5.2 MOYENNES MOBILES

Nous jettons ici un coup d'oeil superficiel sur les moyennes mobiles, réservant leur analyse en profondeur au chapitre trois. Pour contourner les difficultés de l'estimation d'un polynôme pour toute la série, Spencer (1904), Hardy (1909), Sheppard (1914), Henderson (1916 et 1924) et d'autres songèrent à lisser ou à "graduer" la série O de (2.5.a), avec des moyennes mobiles, pour la purger de son irrégularité, et à considérer la série lissée O^* comme un bon estimé du mouvement extra-saisonnier C. La valeur lissée O_t^* est une somme pondérée des valeurs originales O_{t+s} voisinant t:

$$(2.5.c) \quad O_t^* = \sum_{s=-h}^{+h} \alpha_s O_{t+s}.$$

L'obtention et la signification de ces poids α_s feront l'objet du chapitre trois.

Ces méthodes dites de moyennes mobiles offrent plusieurs avantages sur les moindres carrés appliqués à la spécification (2.5.b). Le problème de choisir un polynôme de degré valable pour toute l'étendue de la série est contourné grâce à une estimation plus empirique. On évite également des révisions des estimés passés par suite de l'addition de nouvelles observations à la série. Au contraire les estimés passés ont tendance à être définitifs, car les nouvelles observations n'entrent plus dans le calcul des estimés passés à partir d'un certain point. Autre avantage, la valeur lissée O_t^* étant fonction des valeurs voisines de O_t, on évite la rigidité locale d'un polynôme en vigueur pour toute la série. Enfin les extrapolations n'ont pas tendance à s'échapper vers les infinis.

2.5.3 MOINDRES CARRES ET SPECIFICATION FREQUENTIELLE DES COMPOSANTES

Il existe enfin une troisième approche à l'estimation des composantes d'une série. En quelques mots il s'agit de concevoir la série comme une somme de fonctions périodiques comme dans l'équation (1.4.c), d'estimer cette spécification par les moindres carrés, et de distribuer les différentes composantes fréquentielles aux différentes composantes de la série: les composantes à basse fréquence, à la tendance-cycle; celles à fréquence saisonnière, à la saisonnalité; et celles à haute fréquence, à l'irrégulier. Une telle approche est sujette à la plupart des reproches faits aux moindres carrés appliqués à la spécification polynômiale. Cependant au lieu de s'envoler, les prévisions nous ramènent exactement au début de la série.

CHAPITRE 3: THEORIE DES MOYENNES MOBILES

3.1 LES MOYENNES TEMPORELLES

Avant de passer aux moyennes mobiles proprement-dites, il est pédagogiquement avantageux de parler de moyennes temporelles. Les moyennes mobiles apparaîtront comme une application particulière des moyennes temporelles.

3.1.1 DEFINITION D'UNE MOYENNE TEMPORELLE

Une <u>moyenne temporelle</u> est une opération arithmétique définie sur un ensemble d'observations successives d'une série chronologique, appelé intervalle. Cette opération consiste à appliquer une somme pondérée à ces observations de l'intervalle. Le résultat de cette somme est identique à celui qu'aurait généré, pour une observation donnée, l'interpolation ou l'extrapolation au moyen d'un polynôme temporel d'ajustement, possiblement sujet à contraintes, estimé par les moindres carrés sur les observations de l'intervalle.(1) Ce polynôme d'ajustement implicite associé à la moyenne temporelle a comme variables indépendantes différentes puissances du temps et peut être de quelque degré (inférieur au nombre d'observations de l'intervalle). La variable dépendante est évidemment l'ensemble des valeurs prises par la série sur l'intervalle.

Sur un intervalle donné de la série, l'ajustement d'un polynôme repose sur l'hypothèse de continuité du phénomène à représenter et le théorème de Weiersstrass:

> "Si la fonction $\phi(x)$ est continue sur le segment $[a,b]$, alors pour tout $\varepsilon<0$ [arbitrairement petit] il existe un polynôme $P(x)$ tel qu'en chaque point de ce segment l'inégalité $|\phi(x) - P(x)| < \varepsilon$ est satisfaite." (Piskounov, 1966, p. 278)

L'hypothèse de continuité des composantes déterminstes est fort acceptable pour

(1) Puisqu'il est conceptuellement possible de définir des moyennes temporelles autrement que par référence à un polynôme, il s'agit ici d'un sous-ensemble de l'ensemble des moyennes temporelles possibles.

les séries chronologiques et le théorème mentioné constitue donc la justification à l'emploi des moyennes temporelles, puisque celles-ci reviennent par définition à estimer un polynôme sur un segment de série.

Dans les discussions qui suivent l'intervalle désigne l'ensemble des observations successives considérées de la série; l'étendue de la moyenne, le nombre d'observations dans cet intervalle; son degré, le degré du polynôme implicite; et la moyenne centrée, la génération par la moyenne temporelle appropriée de l'estimé correspondant à la moyenne algébrique du temps sur l'intervalle.

3.1.2 CALCUL DES POIDS D'UNE MOYENNE TEMPORELLE

Soit n l'étendue de la moyenne temporelle; k, son degré; Y, le vecteur des observations de l'intervalle considéré de la série. On a alors pour l'intervalle le modèle

(3.1.2.a) $Y = T\,B + \varepsilon, \quad E(\varepsilon) = 0, \quad E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma_\varepsilon^2\, I,$

dont l'estimation donne

(3.1.2.b) $\hat{Y} = T\,\hat{B} = T\left(T'T\right)^{-1} T'Y,$

où B et $\hat{B}$ sont respectivement les vrais coefficients et leurs estimés; $\hat{Y}$ sont les estimés du polynôme implicite. T est la matrice des puissances du temps dévié par rapport à sa moyenne $\bar{t}$ de l'intervalle

(3.1.2.c) $\underset{n\times(k+1)}{T} = \left((t_i - \bar{t})^j,\ \begin{matrix} j=0,\ldots,k; \\ i=1,\ldots,n \end{matrix}\right) = \left(((2i-n-1)/2)^j,\ \begin{matrix} j=0,\ldots,k; \\ i=1,\ldots,n \end{matrix}\right),$

où la dernière égalité fait l'objet de l'équation (III.A.d) de l'appendice A de ce chapitre.

L'équation (3.1.2.b) peut se récrire:

(3.1.2.d) $\hat{Y} = P\,Y, \quad \text{où} \quad P = \underset{n\times n}{\left(T\left(T'T\right)^{-1}T'\right)}.$

On appelle la matrice P la <u>matrice des poids</u> de la moyenne temporelle de degré k et d'étendue n. La i-ème rangée de P ($1 \leq i \leq n$) constitue l'ensemble des poids de la moyenne temporelle générant (par somme pondérée sur les Y) l'estimé de la i-ème observation de l'intervalle. La matrice des poids P donne ainsi tous les poids nécessaires au calcul de tous les estimés correspondant à chaque observation de l'intervalle. L'expression <u>moyenne de degré k, d'étendue n, i-ième observation</u>, désignera les poids de la i-ième rangée de la matrice des poids de cette moyenne.

Pour une moyenne du premier degré et d'étendue n, l'appendice III.A (III.A.i) donne P:

$$(3.1.2.e) \quad P = \underset{n\times n}{\left[1/n\right]} + \frac{12}{(n^3-n)4} \underset{n\times n}{\left[\begin{matrix}(-n-1+2i)(-n-1+2j) \\ i=1,\ldots n;\ j=1,\ldots,n\end{matrix}\right]}.$$

Pour une moyenne temporelle de degré zéro ces poids deviennent, selon le même appendice (III.A.c):

$$(3.1.2.f) \quad P = \underset{n\times n}{\left[1/n\right]}.$$

On retrouve ces poids dans le premier terme de droite de (3.1.2.e) de la moyenne de degré un, c'est-à-dire que les poids de cette dernière sont ceux de la moyenne de degré zéro plus d'autres poids. On remarque également que quelque soit n ou k les poids sont indépendants des valeurs Y_i des observations ainsi que des valeurs absolues du temps sur l'intervalle.

3.1.3 CALCUL DES POIDS DES MOYENNES TEMPORELLES CENTREES

La moyenne centrée génère l'observation située au milieu de l'intervalle. Ses poids se trouvent donc dans la rangée milieu de la matrice des poids de (3.1.2.d). Cette rangée milieu existe si l'étendue n de la moyenne, la dimension de P, est impaire; mais non, si elle est paire. Il faut donc généraliser la notion de moyenne centrée pour les cas d'étendue paire.

En appendice III.B la deuxième propriété de la matrice T dit que les colonnes de la matrice T de (3.1.2.c) ont moyenne algébrique zéro pour j plus grand que zéro; et un, pour j égal à zéro. Alors le vecteur d'interpolation $t^*=[1,0,\ldots 0]$ mesurant un par (k+1) est le milieu de T quelque soit l'étendue n de la moyenne. La multiplication de ce vecteur par celui des coefficients $\hat{B}=[T'T]^{-1}T'Y$ donnera l'estimé de l'observation située au milieu de l'intervalle. Les poids de la <u>moyenne centrée</u>, pour n pair ou impair, sont donc:

(3.1.3.a) $\underset{1\times n}{t^*}[T'T]^{-1}T'$.

L'ensemble de ces poids se retrouvent dans la première rangée de $[T'T]^{-1}T'$, puisque la pré-multiplication par t^*, tel que construit, répète la première rangée de cette matrice. Une façon équivalente de trouver les poids de la moyenne centrée découle du fait que sa valeur, $\hat{Y}_{(n+1)/2}$, égale $\hat{B}_0+\hat{B}_1 0+\ldots\hat{B}_k 0^k$, ce qui vaut $\hat{B}_0$. $\hat{B}_0$ étant le premier coefficient du vecteur de coefficients $\hat{B}=[T'T]^{-1}T'Y$, les poids à appliquer à Y pour l'obtenir se trouvent dans la première rangée de $[T'T]^{-1}T'$. On nomme "<u>poids centraux</u>" les poids de la moyenne temporelle centrée et "<u>poids terminaux</u>" les autres poids.

3.1.4 UNE PROPRIETE FONDAMENTALE DES MOYENNES TEMPORELLES CENTREES

Une propriété fondamentale des moyennes centrées s'énonce ainsi. Une moyenne centrée de degré k pair donne identiquement le même estimé et a exactement les mêmes poids que la moyenne centrée de degré impair (k+1) immédiatement supérieur (à étendues égales).

Ceci se prouve en examinant les équations normales des moindres carrés:

(3.1.4.a) $[T'T]B = T'Y.$

De l'appendice III.C équation (III.C.d) on connaît les éléments de la matrice $[T'T]$. Choisissant (k+1) égal à trois l'expression (3.1.4.a) prend la forme extensive suivante:

$$
(3.1.4.b)\quad
\begin{aligned}
n\,B_0 + 0\,B_1 + \Sigma t_i'^2\,B_2 + 0\,B_3 &= \Sigma\,Y_i \\
0\,B_0 + \Sigma t_i'^2\,B_1 + 0\,B_2 + \Sigma t_i'^4\,B_3 &= \Sigma t_i'\,Y_i \\
\Sigma t_i'^2\,B_0 + 0\,B_1 + \Sigma t_i'^4\,B_2 + 0\,B_3 &= \Sigma t_i'^2\,Y_i \\
0\,B_0 + \Sigma t_i'^4\,B_1 + 0\,B_2 + \Sigma t_i'^6\,B_3 &= \Sigma t_i'^3\,Y_i
\end{aligned}
$$

où t_i' égale $(t_i-\bar{t})$. (Voir Whittaker et Robinson, 1924, p. 291-296.)

Cherchant la valeur $\hat{Y}_{(n+1)/2} = \hat{B}_0$ on doit résoudre ce système pour B_0 seulement. A l'examen de (3.1.4.b) il apparaît que B_0 et B_2 sont absents des deuxième et quatrième équations où B_3 et B_1 se trouvent; et, que B_0 et B_2 se trouvent seulement dans les première et troisième équations où B_3 et B_1 sont absents. On peut donc résoudre pour B_0 ainsi que pour B_2 avec un système d'équations se réduisant aux première et troisième équations. Ce sous-système d'équations peut s'écrire:

(3.1.4.c) $T_r'T_r\hat{B}_r = T_r'Y,$

où $\hat{B}_r$ comprend $[\hat{B}_0,\hat{B}_2]$. La clef de la démonstration réside dans le fait que le sous-système (3.1.4.c) serait identiquement le même si la quatrième équation de (3.1.4.b) n'existait pas, c'est-à-dire si le polynôme était du deuxième degré. En effet et pour un polynôme de degré deux et pour un polynôme de degré trois, B_3 se trouve exclu du sous-système d'équations servant à estimer B_0 et B_2. Dans les deux cas on a le même estimé central

(3.1.4.d) $\hat{Y}_{\frac{n+1}{2}} = \hat{B}_0 = t_r^*[T_r'T_r]^{-1}T_r'Y,$

et les mêmes poids, qui sont dans la première rangée de $[T_r'T_r]^{-1}T_r'$. De là on généralise facilement: on trouve des estimés centraux et des poids identiques pour un polynôme de degré quatre ou cinq; pour un polynôme de degré six ou sept; et pour un polynôme de quelque degré pair k ou de degré impair (k+1). On note aussi que dans ces circonstances non seulement les estimés de B_0 seraient indentiques, mais aussi ceux de B_2, B_4, etc. A noter que d'après l'équation (3.1.2.f) une moyenne de degré zéro aura tous ses poids identiques aux poids centraux d'une moyenne du premier degré de même étendue, puisque les poids de celle de degré zéro sont tous identiques entre eux.

3.1.5 TEST DE STUDENT SUR LA SPECIFICATION DU POLYNÔME IMPLICITE ASSOCIE

Dans les sections précédentes nous avons pris pour acquis le degré du polynôme implicite associé à la moyenne temporelle. Mais il est également possible de tester le degré du polynôme sur l'intervalle considéré de la série, de façon à employer les poids réflétant le mieux la vraie spécification du comportement des données et à réduire les erreurs de spécification. Soit k le degré assumé pour le polynôme implicite; et $\hat{B}_k$, le coefficient de signification statistique douteuse qu'on retrouve dans l'expression

$$(3.1.5.a) \quad \hat{Y}_t = \sum_{j=0}^{k} \hat{B}_j (t-\bar{t})^j .$$

Ajoutant la normalité aux hypothèses représentées par (3.1.2.a), la valeur calculée de Student (par rapport à zéro) concernant le coefficient $\hat{B}_k$ s'obtient par

$$(3.1.5.b) \qquad t = \frac{\hat{B}_k}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_\varepsilon}/\sqrt{[T'T]^{-1}_{k+1,k+1}}} ,$$

où $[T'T]^{-1}_{k+1,k+1}$ désigne l'élément des dernières rangée et colonne de $[T'T]^{-1}$; et $\hat{\sigma}^2_\varepsilon$, la variance de la régression. Celle-ci se calcule ainsi

$$(3.1.5.c) \quad \hat{\sigma}^2_\varepsilon = Y'[I-T[T'T]^{-1}T']Y \,/(n-(k+1)),^{(2)}$$
$$= Y'[I - P]Y \,/(n-(k+1)),$$

où se retrouve la matrice des poids P. Si la valeur du t de Student calculée en (3.1.5.b) dépasse la valeur, t_α, pour un niveau de signification α et n-k-1 degrés de liberté, on accepte que les données se comportent

(2) En effet: $\hat{\varepsilon} = Y-\hat{Y} = Y-T\hat{B} = Y-T[T'T]^{-1}T'Y = [I-P]Y$,
$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}/(n-(k+1)) = Y'[I-P]Y/(n-(k+1))$, puisque $[I-P]$ est idempotente.

sur l'intervalle comme un polynôme de degré k avec une certitude $(1-\alpha)$. Sinon on applique les poids d'une moyenne de degré $(k-1)$.

En ce qui concerne cet exposé les tests de Student serviront à déterminer s'il s'agit de polynôme du premier degré ou de degré zéro, ce qui simplifie énormément les calculs (3.1.5.b) et (3.1.5.c). Dans ce cas k égale un et $\hat{B}_1$ vaut

$$(3.1.5.d) \quad \hat{B}_1 = \frac{12}{(n^3-n)} \sum_{j=1}^{n} ((-n-1+2j)/2)Y_j,$$

grâce à la deuxième rangée de la matrice de l'expression (III.B.g) de l'appendice III.B. L'élément des deuxièmes rangée et colonne de $[T'T]^{-1}$ est, selon l'équation (III.B.f), $12/(n^3-n)$. La variance $\hat{\sigma}^2_\varepsilon$ de (3.1.5.c) s'écrit

$$(3.1.5.e) \quad \hat{\sigma}^2_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}Y_iY_j \;/\; (n-(k+1))$$

où M_{ij} sont les éléments de la matrice $M = [I-P]^{(3)}_{n\times n}$, P prenant ses valeurs de l'expression (III.B.i). La valeur calculée de Student se réduit donc à

$$(3.1.5.f) \quad t = \frac{(12/(n^3-n)) \sum_{j=1}^{n} ((-n-1+2j)/2)Y_j}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} M_{ij}Y_iY_j)} \;/\; \sqrt{(12/(n^3-n))}} .$$

(3) L'écriture extensive des M_{ij} est simple mais très encombrante:

$$M_{ij} = (\delta_{ij} - 1/n - (-n-1+2i)\,(-n-1+2j)\,(3/(n^3-n)), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i\neq j, \\ 1, i=j. \end{cases}$$

3.2 LES MOYENNES MOBILES SIMPLES

Les moyennes mobiles simples apparaîtront comme une application particulière des moyennes temporelles.

3.2.1 DEFINITION D'UNE MOYENNE MOBILE SIMPLE

Une moyenne mobile simple de degré k et d'étendue impaire[4] n est une opération arithmétique qui consiste à appliquer les poids d'une moyenne temporelle de degré k et d'étendue n à des intervalles successifs d'une série chronologique de la façon suivante. On applique aux observations 1 à n de la série les poids centraux pour trouver l'estimé correspondant à la ((n+1)/2)-ième observation de la série; puis aux observations 2 à (n+1) pour l'estimé de la ((n+1)/2+1)-ième observation; et ainsi de suite, et enfin aux observations (T-n+1) à T pour l'estimé de la (T-(n-1)/2)-ième observation de la série. On nomme <u>estimés centraux</u> de la moyenne mobile ces estimés, qui proviennent de l'application des poids centraux de la moyenne temporelle. Au début et à la fin de la série les poids centraux de la moyenne temporelle ne peuvent s'appliquer parce que l'intervalle déborderait la série. Alors pour générer les estimés correspondants aux ((n+1)/2-1) premières et dernières observations de la série, on applique les poids terminaux correspondant respectivement aux ((n+1)/2-1) premières et dernières observations de la moyenne temporelle. On nomme ces estimés <u>estimés terminaux</u> de la moyenne mobile.

Désignant P_{ij} les éléments de la matrice P des poids de la moyenne temporelle, on construit ainsi la matrice $\underline{P}$ des poids de la moyenne mobile, qui

(4) On verra plus bas pourquoi il faut limiter les moyennes mobiles simples à des étendues impaires.

s'aplique directement à la série O pour produire l'estimé $\hat{O}$:

$$
(3.2.1.a)\quad \underline{P} = \begin{bmatrix}
P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
P_{n_1 1} & P_{n_1 2} & \cdots & P_{n_1 n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & P_{n_1 1} & P_{n_1 2} & \cdots & P_{n_1 n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & P_{n_1 1} & P_{n_1 2} & \cdots & P_{n_1 n} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & P_{n_1 1} & P_{n_1 2} & \cdots & & & \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & P_{n_1 1} & P_{n_1 2} & \cdots & P_{n_1 n} & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & P_{n_1 1} & P_{n_1 2} & \cdots & P_{n_1 n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & P_{n_2 1} & P_{n_2 2} & \cdots & P_{n_2 n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn}
\end{bmatrix}_{T\times T},
$$

où n_i égale $((n+i)/2)$. On a alors

$$
(3.2.1.b)\quad \underset{T\times 1}{\hat{O}} = \underset{T\times T}{\underline{P}}\ \underset{T\times 1}{O}\ .
$$

En haut à gauche de la matrice P se trouvent les poids terminaux du haut de la matrice des poids de la moyenne temporelle; en bas à droite, ceux du bas; et au centre, ceux du centre. Nous nommons ces derniers poids poids centraux de la moyenne mobile; et les autres poids, poids terminaux de la moyenne mobile. Grâce à la propriété des moyennes temporelles centrées démontrée à la section 3.1.4, les poids centraux d'une moyenne mobile de degré pair k seront identiques à ceux de la moyenne de degré impair (k+1) immédiatement supérieur; et tous les poids d'une moyenne mobile de degré zéro seront identiques aux poids centraux de la moyenne mobile de degré un.

3.2.2 INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE LA MOYENNE MOBILE SIMPLE ET PROPRIETES STATISTIQUES DE SES ESTIMES

Les différentes moyennes temporelles de degré k et d'étendue n "forment" en quelque sorte la moyenne mobile correspondante. Elles donnent les estimés locaux d'un polynôme local (c'est-à-dire dont l'estimation a lieu sur l'intervalle considéré de la série) de degré k et d'étendue n. La moyenne mobile adopte les estimés centraux de la moyenne temporelle locale, quand l'intervalle de cette-dernière ne déborde pas la série; et ses estimés terminaux, autrement. La moyenne mobile est donc l'ensemble des estimés centraux

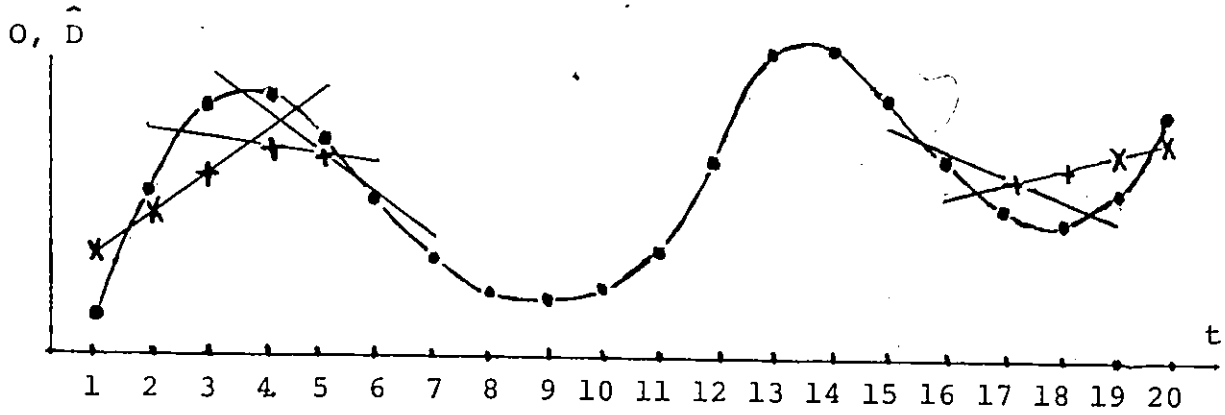


Figure III.1 Interprétation géométrique d'une moyenne mobile d'étentue cinq de degré un

de polynômes locaux au centre de la série; et des estimés terminaux de deux polynômes locaux à chaque extrémité de la série. Choisissant dans la figure III.1 une moyenne mobile de degré un et d'étendue cinq on estime $\hat{O}$ grâce à la formule (3.2.1.b). Les observations O_t sont repérées par '.'; les estimés centraux $\hat{O}_t$ (t=3,...,18), par '+'; et les estimés terminaux $\hat{O}_t$, (t=1,2,19,20) par 'x'.

Il faut ajouter à la lumière du théorème démontré à la section 3.1.4, que si on retient pour la série O de la figure III.1 une moyenne mobile de degré zéro, au lieu de un, et d'étendue cinq, les estimés centraux seront identiques à ceux de la moyenne du premier degré. Les seules différences dans $\hat{O}$ résideront aux extrémités de la série dans les estimés terminaux. Ceux-ci répéteront les estimés centraux les plus rapprochés, car les poids d'une moyenne temporelle de degré zéro sont tous égaux entre eux (voir (3.1.2.f)) et égaux aux poids centraux de la moyenne temporelle de degré un.

Les moyennes mobiles et ainsi les moyennes temporelles étant des applications particulières des moindres carrés, on peut mettre à profit toute l'inférence statistique classique développée pour les moindres carrés. Localement on a $Y = TB + \varepsilon$, $E(\varepsilon)=0$, $E(\varepsilon\varepsilon')=\sigma_\varepsilon^2 I$. Une interpolation ou une prévision quelconque peut s'écrire

(3.2.2.a) $Y_p = t_p B + \varepsilon_p$,

où t_p est un vecteur d'interpolation ou de prévision et ε_p est une erreur de variance σ_ε^2. La variance de cette prévision s'écrit

(3.2.2.b) $E([t_pB-Y_p][t_pB-Y_p]') = \sigma_\varepsilon^2[t_p[T'T]^{-1}t_p+I]$.

On peut donc ainsi calculer la variance de chacun des estimés de l'intervalle de la moyenne temporelle en donnant à t_p la valeur correspondant à la rangée appropriée de la matrice T; et éventuellement aussi, la variance d'estimés entre les observations de l'intervalle ou en dehors de l'intervalle. La variance des estimés aura son minimum quand t_p aura le sien (en supposant que l'erreur d'approximation implicite à l'application du théorème de Weierstrass soit négligeable), puisque la matrice $(T'T)^{-1}$ est positive semi-définie. Le minimum de t_p se trouve au milieu de T, c'est-à-dire pour t_o égal à $t^* = (1,0,\ldots,0)$ qui est le vecteur d'interpolation de la valeur de la moyenne centrée utilisé dans (3.1.3.a). On conlcut que moyenne temporelle centrée produit une erreur plus petite que tout autre moyenne temporelle de l'intervalle.

Puisque le régime d'homoschédasticité reste en vigueur pour toute la longueur de la série, deux conséquences découlent de la variance minimum de la moyenne centrée. Premièrement, les moyennes mobiles uniformisent en quelque sorte les intervalles de confiance des estimés centraux, si on les compare à ceux qui résulteraient de l'estimation par les moindres carrés d'un seul polynôme pour toute la série. Deuxièmement, les moyennes mobiles minimisent en quelque sorte les intervalles de confiance des estimés centraux, puisque ceux-ci sont minimums au centre de chaque moyenne temporelle.

3.3 LES MOYENNES MOBILES COMPOSEES

On rencontre souvent dans la littérature des moyennes mobiles composées dont la définition suit.

3.3.1 DEFINITION DES MOYENNES MOBILES COMPOSEES

On appelle <u>moyenne mobile composée</u> l'opération arithmétique équivalant à appliquer une moyenne mobile à une série chronologique et de réappliquer une seconde moyenne mobile sur ces résultats intermédiaires. Pour des raisons à éclaircir bientôt l'étendue de chaque moyenne reste pour le moment impaire. Les deux moyennes mobiles simples sont les moyennes <u>composantes</u> de la moyenne composée. Nommant $\underline{P}_1$ la matrice des poids de la première moyenne mobile composante appliquée aux observations O selon la formule (3.2.1.a), et $\underline{P}_2$, la matrice des poids de la deuxième moyenne mobile composante appliquée aux résultats intermédiaires, on a alors

$$(3.3.1.a) \quad \hat{O} = \underset{T\times T}{\underline{P}_2} \; \underset{T\times T}{\underline{P}_1} \; O = \underline{P}O,$$

où le produit matriciel $\underline{P}_2 \, \underline{P}_1 = \underline{P}O$ donne la matrice des poids à appliquer directement aux observations afin de générer les estimés $\hat{O}$ de la moyenne composée.

Soient k_1 et k_2, n_1 et n_2 respectivement les degrés et les étendues des première et deuxième moyennes mobiles composantes, on dit que la moyenne composée résultante est une <u>moyenne mobile n_2 de degré k_2 d'une n_1 de degré k_1</u>. On ajoute <u>i-ième observation</u> à cette expression pour désigner les poids correspondant à la i-ième observation de l'intervalle d'application de la moyenne. Cet intervalle comprend $(n_1 + n_2 - 1)$ observations. Ce nombre mesure <u>l'étendue totale</u> de la moyenne composée. Lorsque le degré de chaque moyenne composante est zéro on dit simplement une moyenne mobile n_2 d'une n_1, par exemple une "deux de douze".

3.3.2 CALCUL DES POIDS DES MOYENNES MOBILES COMPOSEES A COMPOSANTES D'ETENDUE PAIRE

Quand une moyenne temporelle a une étendue paire, l'observation centrale de l'intervalle n'existe pas. Cependant la section 3.1.3 donne le moyen de générer les poids centraux produisant par interpolation cette observation "manquante". On peut de façon analogue interpoler entre toutes les observations de l'intervalle. Mais les estimés situés entre deux données observées, obtenus de moyennes mobiles centrées simples d'étendue paire appliquées aux séries chronologiques, n'ont souvent aucune utilité empirique. C'est pourquoi on a jusqu'ici retenu des étendues impaires pour les moyennes mobiles. Mais dans le cas des moyennes composées, on peut avoir une composante d'étendue paire à condition que l'autre composante soit également d'étendue paire. Les estimés de la première moyenne mobile d'étendue paire se trouvent entre les dates d'observations; et ceux de la seconde, entre les estimés de la première. Ainsi les estimés finaux coïncident avec les dates d'observations.

Soit $[T_1'T_1]^{-1}T_1'Y$ l'ensemble des coefficients estimés du polynôme associé à la première moyenne temporelle d'étendue paire n_1, appliquée aux observations Y de l'intervalle. Les estimés intermédiaires $\hat{Y}_1$ se situant entre les observations s'obtiennent ainsi

$$(3.3.2.a) \quad \hat{Y}_1 = \underset{(n_1+1)\times(k_1+1)}{T_1^+} \; \underset{(k_1+1)\times n_1}{[T_1'T_1]^{-1}T_1'Y},$$

où T_1 est la matrice temporelle des variables indépendantes de la première moyenne temporelle, et T_1^+ est la matrice d'interpolation des valeurs entre

les observations, de rangée milieu $t^{*}_{1\times(k_1+1)}=[1,0,\ldots,0]$, construite de la façon suivante:

$$(3.3.2.b)\quad T_1^{+} = \left[\begin{array}{l}((2i-(n_1+1)-1)/2)^{j},\ j=0,\ldots k_1 \\ \quad i=1,\ldots,(n_1+1)\end{array}\right].$$

Cette matrice contient (n_1+1) rangées au lieu de n_1, parce qu'elle doit produire, des estimés non seulement entre les n_1 observations mais aussi de chaque côté de celles-ci comme dans la figure suivante. La matrice des poids intermédiaires est donc:

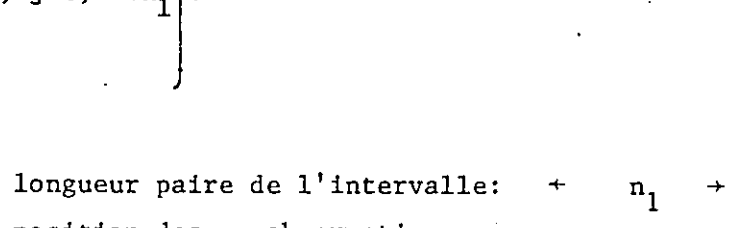


Figure III.2 Encadrement par la première moyenne temporelle des observations de l'intervalle

$$(3.3.2.c)\qquad \underset{(n_1+1)\times n_1}{P_1} = \underset{(n_1+1)\times n_1}{T_1^{+}[T_1'T_1]^{-1}T_1'},$$

et les poids $\underline{P}_1$ de la première moyenne mobile simple se construisent à partir de P_1 selon la formule (3.2.1.a). Les estimés intermédiaires $\hat{O}_1$ pour toute la série s'obtiennent grâce au produit

$$(3.3.2.d)\quad \hat{O}_1 = \underset{(T+1)\times T}{\underline{P}_1}\ \underset{T\times 1}{O}\ .$$

La deuxième moyenne temporelle doit produire les estimés entre ceux de la première moyenne. Les poids de cette deuxième moyenne s'obtiennent par le produit

$$(3.3.2.e) \qquad \underset{(n_2-1)\times n_2}{P_2} = \underset{(n_2-1)\times(k_2+1)}{T_2^-} \; \underset{(k_2+1)\times n_2}{[T_2'T_2]^{-1}T_2'},$$

où T_2 est la matrice temporelle des variables indépendantes de la deuxième moyenne temporelle; et T_2^-, la matrice d'interpolation entre n_2 estimés successifs, inclus dans $\hat{O}_1$:

$$(3.3.2.f) \qquad T_2^- = \left[\begin{matrix} ((2i-(n_2-1)-1)/2)^j, \; j=0,\ldots,k_2 \\ i=1,\ldots,(n_2-1) \end{matrix} \right].$$

Cette dernière matrice comprend (n_2-1) rangées de sorte à produire des estimés entre n_2 estimés intermédaires successifs de la première moyenne mobile, comme illustré dans la figure III.3. La matrice des poids de la deuxième moyenne mobile est donc $\underline{P}_2$ et se construit comme $\underline{P}_1$. La matrice $\underline{P}$ des poids de la moyenne mobile composée s'appliquant directement aux observations de la série résulte du produit

position des observations:	× × ··· × ×
position des n_2 estimés intermédiaires:	× × × ··· × ×
position des (n_2-1) estimés finaux:	× × ··· × ×

Figure III.3 Position des estimés finaux par rapport aux estimés intermédiaires

$$(3.3.2.g) \qquad \underset{T\times T}{\underline{P}} = \underset{T\times(T+1)}{\underline{P}_2} \; \underset{(T+1)\times T}{\underline{P}_1}$$

Les estimés $\hat{O}$ de la moyenne composée s'obtiennent par

$$(3.3.2.h) \qquad \hat{O} = \underset{T\times T}{\underline{P}_2 \, \underline{P}_1} O = \underline{P} \, O.$$

Ces estimés finaux coïncident avec les dates d'observation et ceci s'illustre par la figure III.3 en y lisant T au lieu de (n_2-1) et (T+1) au lieu de n_2.

3.3.3 INTERPRETATION GEOMETRIQUE DES MOYENNES COMPOSEES

Dans la figure III.4, on a une série de cinq observations disposées paraboliquement. Sur cet intervalle on produit les estimés d'une moyenne mobile simple[5] de degré un et d'étendue cinq, représentés sur la droite par des 'x'.

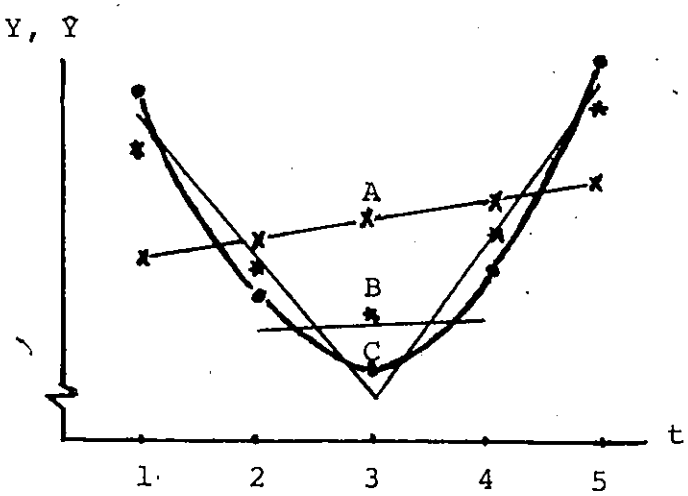


Figure III.4: Estimés des moyennes simples (x) et des moyennes composées(*)

Son estimé central est au point A. L'estimé central de la moyenne composée de degré un d'étendue trois d'une de degré un d'étendue trois (étendue totale cinq) se trouve au point B. L'erreur d'estimation de la moyenne simple mesure AC; celle de la moyenne composée, BC. L'erreur de la moyenne composée est beaucoup plus petite. On pourrait en dire autant des estimés terminaux en comparant l'éloignement des données observées (notées '.') des estimés de la moyenne simple (notés 'x') à l'éloignement des données observées des estimés de la moyenne composée (notés '*'). On conclut qu'à étendue et degré égaux les moyennes composées sont beaucoup moins sensibles que les moyennes simples aux erreurs de spécification ayant trait au comportement réel des observations. Dans le cas illustré la moyenne composée de degrés un est un compromis en quelque sorte entre la moyenne simple de degré un et la moyenne simple de degré deux (qui reproduirait dans la figure III.4 exactement les

(5) Lorsque la série ne contient qu'un seul intervalle, la moyenne temporelle et la moyenne mobile correspondante sont identiques l'une à l'autre.

observations). La moyenne composée ajusterait exactement une ligne droite. Mais si les observations sont disposées autrement, elle les reproduira plus fidèlement que la moyenne simple. Par contre pour les mêmes raisons, si les vraies observations se meuvent linéairement mais se trouvent masquées aussi d'irrégularité, l'estimateur composé s'avérera moins efficace et plus sensible à cette irrégularité.

3.3.4 MOYENNES MOBILES SIMPLES A POIDS CENTRAUX IDENTIQUES A CEUX DES MOYENNES MOBILES COMPOSEES

Pour simplifier l'exposition qui suit, on pose $k_1 = k_2 = 1$ et $n_1 = n_2 = 3$. Il s'agit de trouver les poids centraux de la moyenne composée correspondante. Puisque les moyennes mobiles composées équivalent par définition à des applications successives de moyennes mobiles simples, on a respectivement les estimés intermédiaires centraux et finaux centraux suivant:

(3.3.4.a) $\hat{O}_{1t} = (O_{t-1} + O_t + O_{t+1}) / 3,$

(3.3.4.b) $\hat{O}_t = (\hat{O}_{1t-1} + \hat{O}_{1t} + \hat{O}_{1t+1}) / 3.$

Substituant (3.3.4.a) dans (3.3.4.b) on trouve:

(3.3.4.c) $\hat{O}_t = (O_{t-2} + 2\,O_{t-1} + 3\,O_t + 2\,O_{t+1} + O_{t+2}) / 9.$

Donc les poids centraux de la moyenne composée d'étendue trois de degré un d'une trois de degré un sont $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right)$. Pour $n_1 = 5$, $n_2 = 3$ et $k_1 = k_2 = 1$, on démontre facilement que ces poids deviennent $\left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \frac{3}{15}, \frac{3}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)$. De façon générale, on obtient pour $k_1 = k_2 = 1$ ($k_1 = k_2 = 0$) et n_1 et n_2 quelconques ($n_1 \geq n_2$) les poids centraux suivant

(3.3.4.d) $$\left(\frac{1}{n^*}, \frac{2}{n^*}, \ldots, \frac{n_2}{n^*}, \underbrace{\frac{n_2}{n^*}, \ldots, \frac{n_2}{n^*}}_{1\times n^{**}}, \frac{n_2-1}{n^*}, \frac{n_2-2}{n^*}, \ldots, \frac{1}{n^*}\right),$$

où n^* vaut $n_1 n_2$; et n^{**}, $n_1 - n_2 + 1$. Ceci suggère d'envisager les poids centraux de la moyenne non plus comme ceux d'une moyenne composée avec $k_1 = k_2 = 1$,

mais comme ceux d'une moyenne mobile simple d'étendue $n=n_1+n_2-1$ de degré un, dont le polynôme est estimé par les moindres carrés pondérés de pondération donnée par (3.3.4.d).

On a alors le modèle suivant sur l'intervalle de longueur impaire n de la série:

(3.3.4.e) $Y = TB + \varepsilon,\ E(\varepsilon) = 0,\ E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma_\varepsilon^2 V,$

où V est une matrice diagonale dont les éléments (diagonaux) sont donnés par (3.3.4.d). L'estimation donne

(3.3.4.f) $\hat{Y} = T\hat{B} = T[T'VT]^{-1}T'VY.$

La matrice des poids correspondante est donc

(3.3.4.g) $P = T[T'VT]^{-1}T'V.$

Cette matrice des poids reproduira une ligne droite estimée sur (n_1+n_2-1) observations par les moindres carrés pondérés. Cependant l'estimé central sera identique à celui d'une n_2 de degré un (ou zéro) d'une n_1 de degré un (ou zéro), estimé par les moindres carrés simples. On pourra alors considérer une moyenne composée centrée comme une moyenne simple centrée, estimée par les moindres carrés pondérés.

3.4 MOYENNES MOBILES ET FILTRES LINEAIRES

Cette section approfondit et applique aux moyennes mobiles la notion de filtre linéaire ébauchée à la section 1.5. On peut en effet concevoir les poids d'une moyenne comme un filtre linéaire. Contrairement aux hypothèses de la section 1.5 l'intrant du système linéaire ne se limite plus à être purement aléatoire. Soit n l'étendue impaire de la moyenne (égale à $n = (2m+1) = m_1 + m_2 + 1$); p_{ts} les éléments de la grande matrice des poids $\underline{P}$ de (3.2.1.a) ou bien de (3.3.2.h) selon qu'il s'agisse de moyennes mobiles simples ou composées; et T, la longueur de la série. Le filtrage de O s'exprime

$$(3.4.a) \quad \hat{O}_t = \sum_{s=1}^{T} p_{ts} O_{t+s-1}, \quad t=1,\ldots,T,$$

où au plus n des poids p_{ts} sont différents de zéro par construction de $\underline{P}$. Pour faciliter l'exposition qui suit, seulement ces n poids sont retenus pour une rangée donnée de $\underline{P}$ avec la notation du chapitre un: α_s, $s=-m_1,\ldots,m_2$. On écrit indifféremment

$$(3.4.b) \quad \hat{O}_t = \sum_{s=-m_1}^{m_2} \alpha_s O_{t+s}, \text{ ou bien } \hat{O}_t = \alpha(L) O_t,$$

où L est l'opérateur de retard; et $\alpha(L)$, un polynôme en L de degré $(1+m_1+m_2)$ avec coefficients α_s, $s=-m_1,\ldots,m_2$, représentant le filtre du système linéaire.

Selon Koopmans (1974, p. 81), les filtres linéaires possèdent trois propriétés fondamentales: la préservation de l'échelle, la superposition et l'invariance temporelle. La première propriété de préservation de l'échelle signifie que l'amplification de l'input par un facteur c_o provoque la même amplification de l'output:

$$(3.4.c) \quad \alpha(L)(c_o O_t) = c_o \alpha(L) O_t.$$

La deuxième propriété de superposition en est une d'associativité. Si on a deux séries $O_1(t)$ et $O_2(t)$, le filtrage de la somme des deux égale la somme des deux séries filtrées:

(3.4.d) $\alpha(L)\ (O_1(t) + O_2(t)) = \alpha(L)O_1(t) + \alpha(L)O_2(t).$

Enfin selon la propriété d'invariance temporelle l'effet du filtre ne change pas par suite d'un déplacement temporel des input et output:

(3.4.e) $\hat{O}_t = \alpha(L)O_t \rightarrow \hat{O}_{t+h} = \alpha(L)O_{t+h}.$

Autrement-dit le filtre modifie l'input de façon homogène dans le temps. Les deux premières propriétés se combinent pour constituer la linéarité du filtre. De manière générale on a:

(3.4.f) $\alpha(L)\ (\sum_k c_{ok}\ O_k(t)) = \sum_k c_{ok}\ \alpha(L)O_k(t),$

où c_{ok} et $O_k(t)$ représentent respectivement différentes constantes et différentes séries.

Selon Chatfield (1975, p. 193), l'effet d'un filtre peut être décrit par sa fonction de transfert définie par:

(3.4.g) $A(\lambda) = \sum_{s=-m_1}^{m_2} \alpha_s\ e^{-i\lambda s}\ (0 \leq \lambda \leq \pi).$

Celle-ci se peut elle-même décomposer en deux parties: soit la fonction de gain $|A(\lambda)|$ du filtre et la fonction de déphasage $\theta(\lambda)$

(3.4.h) $A(\lambda) = |A(\lambda)|\ e^{i\theta(\lambda)} \equiv |A(\lambda)|\ (\cos(\theta(\lambda) + i\ \sin(\theta(\lambda))),$

qui valent respectivement:

(3.4.i) $|A(\lambda)| = \{(\sum_{s=-m_1}^{m_2} \alpha_s \cos(\lambda s))^2 + (\sum_{s=-m_1}^{m_2} \alpha_s \sin(\lambda s))^2\}^{1/2},$

(3.4.j) $\theta(\lambda) = \tan^{-1}\{(\sum_{s=-m_1}^{m_2} \alpha_s \sin(\lambda s)) / (\sum_{s=-m_1}^{m_2} \alpha_s \cos(\lambda s))\}.$

57,
58-59,

Cette représentation repose sur deux théorèmes démontrés par le même auteur (p. 194 et 204).

"THEOREM 9.1 A sinusidal input to a linear system gives rise, in the steady-state, to a sinusoidal output at the same frequency. The amplitude of the sinusoid may change and there may also be a phase shift."

"THEOREM 9.2 Consider a stable linear system with gain function, $|A(\lambda)|$. Suppose that the input $O(t)$ is a stationary process with continuous power spectrum $g_O(\lambda)$. Then the output $\hat{O}(t)$ is also a stationary process, whose power spectrum, $g_{\hat{O}}(\lambda)$, is given by $g_{\hat{O}}(\lambda) = |A(\lambda)|^2 g_O(\lambda)$",

où la notation adoptée jusqu'ici a prévalu. Le premier théorème assure la présence dans l'output du filtre de toute fluctuation sinusoidale présente dans l'input - mais possiblement avec amplitude nulle. Le deuxième statue que le spectre de l'output vaut, par chaque fréquence, celui de l'input multiplié par le carré du gain du filtre. En d'autres mots, la fonction de transfert décrit l'effet inhérent du filtre sur un input quelconque.

APPENDICE III.A: STRUCTURE ET PROPRIETES DE LA MATRICE DES DEVIATIONS DU TEMPS PAR RAPPORT A SA MOYENNE

Soit la matrice du temps dévié par rapport à sa moyenne de l'intervalle:

$$\text{(III.A.a)} \quad \underset{n\times(k+1)}{T} = \left\{ (t_i-\bar{t})^j,\ j=0,\ldots,k \atop i=1,\ldots,n \right\},$$

où t_i désignent les n valeurs successive du temps sur l'intervalle considéré de la série; $\bar{t}$, la moyenne de ces t_i; i et j repèrent respectivement les rangées et les colonnes de T; k est le degré du polynôme associé à la moyenne temporelle. La première colonne de T contient des un, car elle a la puissance zéro. La deuxième colonne contient $(t_i-\bar{t})$, i=1,...,n. Cette suite peut s'écrire:

$$\text{(III.A.b)} \quad t_i-\bar{t} = t_i - \frac{1}{n}\Sigma t_i = (t_i-(t_1+t_n)/2 = \frac{2t_i-t_1-t_n}{2}$$

$$= \frac{2t_i-t_1-(t_1+n-1)}{2} = \frac{2t_i-2t_1-n+1}{2},\ i=1,\ldots,n.$$

Pour i égal à un cette dernière expression vaut (-n+1)/2; pour i égal à deux, elle vaut (-n+3)/2; pour i égal à n, (n-1)/2. D'une façon générale la suite (III.A.b) s'écrit

$$\text{(III.A.c)} \quad (t_i-\bar{t}) = (-n-1+2i)/2,\ i=1,\ldots,n.$$

Et la matrice T vaut:

$$\text{(III.A.d)} \quad T = \left\{ ((-n-1+2i)/2)^j,\ j=0,\ldots,k \atop i=1,\ldots,n \right\}.$$

Si l'étendue vaut n=2m+1 (étendue impaire) T se simplifie à:

(III.A.e) $T = \begin{pmatrix} (-m+i-1)^j, & j=0,\ldots,k \\ & i=1,\ldots,n \end{pmatrix}$;

et la suite (III.A.c), à : $-m,-(m-1),-(m-2),\ldots,0,1,2,\ldots m$. De l'expression (III.A.d) on peut énoncer la propriété suivante.

Propriété 1 de la matrice T:

Les éléments de la matrice des déviations du temps prennent des valeurs indépendantes des valeurs absolues t_i, prises par le temps sur l'intervalle. Ces éléments prennent des valeurs qui sont uniquement fonction de l'étendue n et du degré k du polynôme associé à la moyenne temporelle.

Les éléments de la suite $(t_i-\bar{t})$ sont symétriques par rapport à zéro. En effet le i-ème élément $(t_i-\bar{t})$ du début de cette suite est opposé par le signe au i-ème élément $(t_{n+1-i}-\bar{t})$ de la fin de la suite. Selon (III.A.c) ces éléments valent respectivement

(III.A.f) $(t_i-\bar{t}) = (-n-1+2i)/2$

(III.A.g) $(t_{n+1-i}-\bar{t}) = (-n-1+2(n+1-i))/2 = (n+1-2i)/2 = -(-n-1+2i)/2$,

et sont bien de signes opposés: ainsi s'énonce une autre propriété de la matrice T.

Propriété 2 de la matrice T:

Les colonnes de T à puissance impaire sont symétriques par rapport à zéro et ont donc moyenne zéro; et celles à puissance paire le sont par rapport à l'ordonnée et ont donc moyenne supérieure à zéro. La "rangée milieu" de T

a valeur $\underset{1\times(k+1)}{[1,0,\ldots,0]}$. (Si l'étendue n est paire cette rangée milieu ne fait pas partie de T, telle que construite. Elle se situerait entre deux observations.)

APPENDICE III.B: ETABLISSEMENT DE LA MATRICE DES POIDS D'UNE MOYENNE TEMPORELLE D'ETENDUE n ET DE DEGRES ZERO, UN ET DEUX

La matrice des poids cherchée est $P = T[T'T]^{-1}T'$, pour une moyenne d'étendue n et de degré k quelconques. Si le degré k du polynôme associé à la moyenne temporelle est zéro, T, T'T et $[T'T]^{-1}$ valent respectivement:

$$\text{(III.B.a)} \quad T = \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{1\times 1}{T'T=[n]}, \quad \underset{1\times 1}{[T'T]^{-1} = [1/n]}.$$

De là se calculent facilement $[T'T]^{-1}T'$ et $P = T[T'T]^{-1}T'$:

$$\text{(III.B.b)} \quad \underset{1\times 1}{[T'T]^{-1}}\underset{1\times n}{T'} = \underset{1\times n}{[1/n \ 1/n \ \ldots \ 1/n]},$$

$$\text{(III.B.c)} \quad P = T[T'T]^{-1}T' = \underset{n\times n}{\begin{pmatrix} 1/n & 1/n & \ldots & 1/n \\ 1/n & 1/n & \ldots & 1/n \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 1/n & 1/n & \ldots & 1/n \end{pmatrix}}.$$

Si le polynôme associé est du premier degré, on a d'après (III.A.d):

$$\text{(III.B.d)} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & (-n-1+2)/2 \\ 1 & (-n-1+4)/2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & (-n-1+2n)/2 \end{pmatrix}.$$

Puis d'après (III.C.c) T'T vaut:

$$\text{(III.B.e)} \quad T'T = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \sum_i ((-n-1+2i)/2)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & (n^3-n)/12 \end{bmatrix},$$

où la sommation s'est simplifiée de la sorte grâce à (III.D.1). L'inversion de cette matrice diagonale donne

$$\text{(III.B.f)} \quad [T'T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 12/(n^3-n) \end{bmatrix}.$$

Effectuant le produit $[T'T]^{-1}T'$ on trouve:

$$\text{(III.B.g)} \quad [T'T]^{-1}T' = \begin{bmatrix} 1/n & 1/n & \dots & 1/n \\ \frac{(-n-1+2)/2}{(n^3-n)/12} & \frac{(-n-1+4)/2}{(n^3-n)/12} & \dots & \frac{(-n-1+2n)/2}{(n^3-n)/12} \end{bmatrix}.$$

A noter que la prémultiplication de cette matrice par le vecteur des observations de l'intervalle donne le vecteur des coefficients du polynôme implicite associé. Donc les poids à appliquer à Y pour obtenir $\hat{B}_0$ sont dans la première rangée de cette matrice; et ceux pour $\hat{B}_1$, dans la deuxième. Enfin P s'obtient en post-multipliant T par la dernière expression:

$$\text{(III.B.h)} \quad \underset{n\times n}{P} = T[T'T]^{-1}T' = \begin{bmatrix} 1/n & 1/n & \dots & 1/n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \\ \vdots & & & \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{bmatrix} +$$

$$\frac{3}{n^3-n} \begin{bmatrix} (n'+2)(n'+2) & (n'+2)(n'+4) & \dots & (n'+2)(n'+2n) \\ (n'+4)(n'+2) & (n'+4)(n'+4) & \dots & (n'+4)(n'+2n) \\ \vdots & & & \vdots \\ (n'+2n)(n'+2) & (n'+2n)(n'+4) & \dots & (n'+2n)(n'+2n) \end{bmatrix}_{n\times n},$$

où n' égale (-n-1) afin d'alléger la notation. Cette dernière expression s'écrit aussi:

$$\text{(III.B.i)} \quad P = \begin{bmatrix} 1/n & 1/n & \dots & 1/n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \\ \vdots & & & \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{bmatrix}_{n\times n} + \frac{3}{n^3-n} \left[(-n-1+2i)(-n-1+2j), j=1,\dots,n \right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ n\times n}}.$$

Les deux dernières représentations montrent que les poids de la moyenne temporelle du premier degré sont ceux de la moyenne de degré zéro plus d'autres poids, dont l'expression générale se trouve dans le dernier terme de (III.B.i).

Si le polynôme implicite associé est du deuxième degré on a:

$$\text{(III.B.j)} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & t'_1 & t'^2_1 \\ 1 & t'_2 & t'^2_2 \\ \vdots & & \\ 1 & t'_n & t'^2_n \end{pmatrix},$$

où $t'_i = (t_i - \bar{t}) = (-n-1+2i)/2$ d'après (III.A.d),

$$\text{(III.B.k)} \quad T'T = \begin{pmatrix} n & 0 & \Sigma t'^2_i \\ 0 & \Sigma t'^2_i & 0 \\ \Sigma t'^2_i & 0 & \Sigma t'^4_i \end{pmatrix}, \text{ d'après (III.C.c).}$$

Le déterminant de cette matrice et son inverse sont:

$$\text{(III.B.l)} \quad \Delta = n(\Sigma t'^2_i)(\Sigma t'^4_i) - (\Sigma t'^2_i)^3,$$

$$\text{(III.B.n)} \quad [T'T]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} (\Sigma t'^2_i)(\Sigma t'^4_i) & 0 & -(\Sigma t'^2_i)^2 \\ 0 & n(\Sigma t'^4_i) - (\Sigma t'^2_i)^2 & 0 \\ -(\Sigma t'^2_i)^2 & 0 & n(\Sigma t'^2_i) \end{pmatrix}$$

On trouve $[T'T]^{-1}T'$ et $P = T[T'T]^{-1}T'$:

$$\text{(III.B.o)}\quad [T'T]^{-1}T' = \begin{pmatrix} ((\sum_i t_i'^2)(\sum_i t_i'^4) - (\sum_i t_i'^2)t_j'^2)/\Delta;\ j=1,\ldots,n \\ ((n(\sum_i t_i'^4) - (\sum_i t_i'^2)^2)t_j')/\Delta;\ j=1,\ldots,n \\ (-(\sum_i t_i'^2)^2 + n(\sum_i t_i'^2)t_j'^2)/\Delta;\ j=1,\ldots,n \end{pmatrix},$$

$$\text{(III.B.p)}\quad T[T'T]^{-1}T' = \underset{n\times n}{\begin{pmatrix} ((\sum_i t_i'^2)(\sum_i t_i'^4) - (\sum_i t_i'^2)t_j'^2)/\Delta;\ j=1,\ldots,n \\ \text{rangée répétée n fois} \end{pmatrix}} +$$

$$\underset{n\times n}{\begin{pmatrix} t_k'((n(\sum_i t_i'^4) - (\sum_i t_i'^2)^2)t_j')/\Delta;\ j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n \end{pmatrix}} + \underset{n\times n}{\begin{pmatrix} t_k'^2(-(\sum_i t_i'^2)^2 + n(\sum_i t_i'^2)t_j'^2)/\Delta;\ j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n \end{pmatrix}}$$

$$= \underset{n\times n}{\begin{pmatrix} \frac{A}{\Delta} + \frac{Bt_j'^2}{\Delta};\ j=1,\ldots,n \\ \text{(n fois)} \end{pmatrix}} + \underset{n\times n}{\begin{pmatrix} t_k'(\frac{C}{\Delta} + \frac{Dt_j'}{\Delta});\ j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n \end{pmatrix}} + \underset{n\times n}{\begin{pmatrix} t_k'^2(\frac{E}{\Delta} + \frac{Ft_j'^2}{\Delta});\ j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n \end{pmatrix}},$$

où $t_i' = (-n-1+2i)/2$. Cette dernière équation montre que les poids de la moyenne temporelle de degré deux sont indépendants des valeurs absolues du temps; mais surtout qu'on peut les calculer à partir de quelques constantes A, B, C, D, E et F. Ces constantes se simplifient certainement davantage si on leur substitue les identités $\Sigma t_i'^k$ de l'appendice III.D. Les poids centraux de la moyenne

temporelle de degré deux se trouvent dans le premier terme du membre de droite puisqu'alors $t'_k = t'^2_k = 0$. Ces poids sont symétriques par rapport à l'ordonnée parce que t'^2_j l'est à cause de la propriété deux de l'appendice III.A.

APPENDICE III.C: STRUCTURE DE LA MATRICE T'T

Si on envisage T comme n'importe quelle matrice de variables indépendantes dans le contexte de l'estimation d'une courbe par les moindres carrés, le produit matriciel [T'T] est une matrice positive semi-définie. Mais [T'T] a également une structure spéciale. On a

$$\text{(III.C.a)} \quad T = \left\{ (t_i - \bar{t})^j, \; \begin{matrix} j=1,\ldots,k \\ i=1,\ldots,n \end{matrix} \right\},$$

d'où on tire

$$\text{(III.C.b)} \quad T'T = \left\{ \Sigma (t_i - \bar{t})^{(j+i)}, \; \begin{matrix} j=0,\ldots,k \\ i=0,\ldots,k \end{matrix} \right\}.$$

De la propriété deux de l'appendice III.A, on déduit que

$$\text{(III.C.c)} \quad \Sigma (t_i - \bar{t})^{(j+i)} \begin{cases} =0 \text{ pour } (j+i) \text{ impair,} \\ >0 \text{ pour } (j+i) \text{ pair.} \end{cases}$$

La matrice T'T a donc l'allure suivante:

$$\text{(III.C.d)} \quad T'T = \underbrace{\begin{Bmatrix} n & 0 & \Sigma t_i'^2 & \ldots & \Sigma t_i'^k \\ 0 & \Sigma t_i'^2 & 0 & \ldots & \Sigma t_i'^{(k+1)} \\ \Sigma t_i'^2 & 0 & \Sigma t_i'^4 & \ldots & \Sigma t_i'^{(k+2)} \\ 0 & \Sigma t_i'^4 & 0 & \ldots & \Sigma t_i'^{(k+3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma t_i'^k & \Sigma t_i'^{(k+1)} & \Sigma_i'^{(k+2)} & \ldots & \Sigma t_i'^{(k+k)} \end{Bmatrix}}_{(k+1) \times (k+1)}, \text{ où } t_i' = (t_i - \bar{t}) = (-n-1+2i)/2.$$

APPENDICE III.D: QUELQUES IDENTITES CONCERNANT $\sum_{i=1}^{n} i^k$ et $\Sigma(t_i-\bar{t})^k$

Des tables mathématiques[1] on tire les identités (III.D.a) à (III.D.h) qui suivent:

(III.D.a) $1+2+3+\ldots+n = \frac{n}{2}(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$

(III.D.b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3,$

(III.D.c) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2,$

(III.D.d) $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4 = \frac{6n^5}{30} + \frac{15n^4}{30} + \frac{10n^3}{30} - \frac{1}{30}n,$

(III.D.e) $1^5+2^5+3^5+\ldots+n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12},$

(III.D.f) $1^6+2^6+3^6+\ldots+n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}.$

D'une façon générale on a:

(III.D.g) $$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{(k+1)}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \frac{B_1}{2!}kn^{(k-1)} - \frac{B_2}{4!}k(k-1)(k-2)n^{(k-3)} + \frac{B_3}{6!}k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)n^{(k-5)}\ldots,$$

(1) Dwight H.B., (1966), pp. 7-11.

où on laisse tomber les termes comprenant n^0 et les termes qui suivent n^0; et où les B_j sont les nombres de Bernouilli, dont voici quelques-uns:

(III.D.h) $B_1=\frac{1}{6}$, $B_2=\frac{1}{30}$, $B_3=\frac{1}{42}$, $B_4=\frac{1}{30}$, $B_5=\frac{5}{66}$, $B_6=\frac{691}{2,730}$, $B_7=\frac{7}{6}$, $B_8=\frac{3,617}{510}$, $B_9=\frac{43,867}{798}$.

Des identités (III.D.a) à (III.D.g) on tire de nouvelles identités concernant les sommes des déviations du temps $\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^k$. De l'appendice III.A on sait que $(t_i-\bar{t}) = t_i' = (-n-1+2i)/2$. On a

(III.D.i) $$\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^k = \sum_{i=1}^{n}((-n-1+2i)/2)^k = 0,\ k=1,3,5...,$$

de par la deuxième propriété de l'appendice III.A (somme de nombres symétriques par rapport à zéro). Pour k égal à 2,4,6..., on doit résoudre

(III.D.j) $$\sum_{i=1}^{n}((-n-1+2i)/2)^k,$$

qui devient en posant k égal à deux:

(III.D.k) $$\sum_{i=1}^{n} t_i'^2 = \sum_{i=1}^{n}((n^2+2n-4ni+4i^2-4i+1)/2)^2.$$

Avec un peu de persévérance on trouve, en substituant les identités (III.D.a à f):

(III.D.l) $\Sigma t_i'^2 = (n^3-n)/12.$

De même on obtient

(III.D.m) $\Sigma t_i'^4 = (3n^5 - 10n^3 + 7n)/240,$

(III.D.n) $\Sigma t_i'^6 = \frac{n^7}{448} - \frac{n^5}{64} + \frac{7n^3}{192} - \frac{31n}{1,344}$.

CHAPITRE 4: DIAGNOSTIC DES METHODES D'AJUSTEMENT SAISONNIER DU TYPE RAPPORT A LA MOYENNE MOBILE

4.1 BREF HISTORIQUE DE L'AJUSTEMENT SAISONNIER

Les premières institutions à produire des données sur une grande échelle furent les bourses de valeurs, les banques ainsi que les companies d'assurance. La production de données était un sous-produit de leur activité-même. En effet la plus grande partie de la première littérature sur le traitement des séries se retrouve dans les publication se l'Actuarial Society of America et de l'Institute of Actuaries[1].

A ses débuts, cette littérature s'attaque aux problèmes du lissage des séries, c'est-à-dire à l'élimination des irrégularités. Puis à mesure que plus de données trimestrielles, mensuelles, voire hebdomadaires apparaissent, elle s'intéresse - ou du moins tient compte - des problèmes de saisonnalité. C'est la naissance de l'ajustement saisonnier. On imagine bien l'intérêt que les actuaires, c'est-à-dire les compagnies d'assurance, pouvaient porter au lissage des données: il leur fallait étudier les séries de mortalité et autres purgées de leur irrégularité, de sorte à charger à leurs clients des primes suffisantes mais aussi concurrentielles. C'est d'ailleurs l'impression que donnent des titres comme "The Theory of the Construction of Tables of Mortality" (Hardy, 1909), "On the Construction of Tables of Sickness and Mortality" (Spencer,1904) et plusieurs autres titres semblables.

---

(1) Ainsi en témoignent les références de Macaulay (1931) et de Whittaker et Robinson (1924) qui remontent parfois jusqu'à 1870.

Voici ce que Macauly (1931, p. 17) écrit dans son introduction. Son livre a pour objet l'étude et la comparaison historique de taux d'intérêt et de prix d'obligations au moyen de séries remontant à janvier 1857. La comparaison de différentes séries nécessite souvent l'élimination des variations saisonnières. Les séries ainsi "graduées" n'ont pas pour but de remplacer les séries brutes, mais de les complémenter ("supplement the data"). Se référant plus tard à cet ouvrage Shiskin (1968, p. 82) écrira que les méthodes d'ajustement saisonnier du type "rapport à la moyenne mobile" ("ratio-to-moving-average") originent de cette étude de Macauly, du National Bureau of Economic Research, faite à la demande du Federal Research Board; tandis que la méthode "link relative" provient de Persons (1919, 1923) de l'Université Harvard. Shiskin préfère la méthode du rapport à la moyenne mobile, parce qu'elle permet une mesure plus exacte des composantes des séries tout en procurant une plus grande flexibilité. C'est pour ces raisons que presque toutes les institutions impliquées dans l'ajustement saisonnier sur une grande échelle l'adoptèrent malgré qu'elle fût relativement laborieuse.

En 1954 - c'est toujours Shiskin qui parle - le U. S. Bureau of the Census mit sur le marché une version de cette méthode (une version mère de la version actuelle "X-11") programmée pour ordinateur. Elle fut rapidement adoptée pour l'ajustement de la plupart des séries publiées aux Etats-Unis, au Canada, au Japon et d'autres pays, ainsi que par l'Organisation de Coopération et de Développement Economique et par plusieurs organismes privés. L'usage des

ordinateurs permit par la suite des rafinements auparavant impensables de cette méthode, tels des moyennes mobiles pondérées, des statistiques pour juger de la qualité des ajustements effectués, des options de traitement déclenchées automatiquement pour s'adapter aux différentes séries, des options d'ajustement pour rotation des jours ouvrables (Young, A.H., 1965), etc. En 1960 le U.S. Bureau of Labor Statistics adopta également une version semblable de cette méthode (U.S. Bureau of Labor Statistics, 1964), mais elle devint vite caduque devant les versions sans cesse améliorées du U.S. Bureau of the Census.

Selon Shiskin les différentes variantes de la méthode de rapport à la moyenne mobile donnent toutes sensiblement les mêmes résultats. Il apparaît manifestement que cette méthode peut ajuster une grande proportion de toutes les séries, sauf celles qui sont trop irrégulières et celles dont la saisonnalité change trop vite. De l'aveu même de l'auteur le principal problème à résoudre maintenant semble être d'améliorer les facteurs saisonniers pour l'année en cours et l'année à venir (c'est-à-dire pour la dernière année d'observation de la série et l'année de prévision qui la suit), car ces années sont très importantes dans l'analyse des tendances en cours et à venir (Shiskin, J., 1968 p. 84-85). Les italiques sont de nous, car c'est précisément à ce problème, reconnu par Shiskin, auquel ce travail s'attaque.

Enfin Shiskin (1968, p. 85) glisse un mot des méthodes d'ajustement par régression(3). L'ère de l'informatique a également vu apparaître de telles méthodes. Mais jusqu'ici on s'en est servi pour un petit nombre de séries et

(3) Jorgenson, D.W. (1964), Burman, J.P. (1973), Duvall, R.M. (1966), Henshaw, R.C. (1966), Jones, H.L. (1943), etc.

on n'a pas suffisamment testé leur pouvoir de prévision. Même si la méthode de rapport à la moyenne mobile ne procure pas certains avantages statistiques des méthodes régressives, elles ont donné en pratique de bons résultats, ne différant pas sensiblement des résultats obtenus par des méthodes régressives pour la partie historique. Quant aux prévisions les méthodes régressives ont produit des facteurs saisonniers et une tendance-cycle moins précis.

4.2 BREVE DESCRIPTION DES METHODES D'AJUSTEMENT SAISONNIER AU MOYEN DU RAPPORT A LA MOYENNE MOBILE

Comme mentionné plus haut, il y a différentes versions de la méthode d'ajustement saisonnier par "rapport à la moyenne mobile", toutes ces versions donnent sensiblement les mêmes résultats(4). Ainsi une brève description de la version la plus récente du U.S. Bureau of the Census, dite "X-11", sera valable pour toutes les versions relevant de cette même méthodologie.

On retient le modèle mensuel et multiplicatif. On lira les mots "deux de quatre" au lieu de "deux de douze" pour se représenter le modèle trimestriel correspondant; et, "additionner et soustraire", au lieu de "multiplier et diviser" pour le modèle additif correspondant; et, "différences" au lieu de "rapports"; etc. On a la série originale:

(42.a) $O_t = C_t \, S_t \, I_t, \; t=1,\ldots,T,$

(4) L'avantage décisif de la version du U.S. Bureau of the Census sur les autres réside moins dans la méthodologie que dans sa flexibilité informatique à accepter les données sous à-peu-près n'importe quelle forme mécanisable, ainsi que dans les options qui furent ajoutées à la méthodologie de base, telles l'ajustement multiplicatif ou additif, mensuel ou trimestriel, l'ajustement pour rotation de jours ouvrables, etc. Une bonne mise en marché explique également sa diffusion généralisée.

où T est le nombre d'observations dans la série, constituée de 12 mois et I années. La méthode consiste d'abord à prendre une moyenne mobile deux de douze centrée[5] de la série originale, dans le but d'éliminer la saisonnalité (stable dans ses effets) et l'irrégularité de la série. Ceci produit un premier estimé de la tendance-cycle:

$$(4.2.b) \quad \hat{C}_t = [2\times12]_c \; O_t, \; t=7,\ldots,T-6,$$

où la notation $[2\times12]_c$ indique qu'il s'agit de la deux de douze centrée. Puis la division par $\hat{C}$ de la série originale donne les "rapports saisonniers-irréguliers", d'où le nom "rapport à la moyenne mobile" ("ratio-to-moving-average") de la méthode:

$$(4.2.c) \quad \hat{S}_t\hat{I}_t = O_t \; / \; \hat{C}_t, \; t=7,\ldots,T-6.$$

Le lissage de ces rapports, pris séparément mois par mois, au moyen d'une moyenne mobile d'étendue trois de degré zéro d'une d'étendue trois de degré zéro[6], donne un premier estimé des coefficients saisonniers:

$$(4.2.d) \quad \hat{S}_{ij} = ([3\times3] \; S_{ij}I_{ij}, \; i=2,\ldots,I), \; j=1,\ldots,6,$$
$$= ([3\times3] \; S_{ij}I_{ij}, \; i=1,\ldots,I-1), \; j=7,\ldots,12.$$

Six valeurs manquent à chaque extrémité de la série à cause de l'emploi de la deux de douze centrée dans (4.2.b). Ces coefficients saisonniers sont ensuite "centrés" sur un (zéro dans le modèle additif) pour chaque année au moyen d'une division par leur moyenne mobile deux de douze centrée:

(5) Lorsque n'apparaîtra pas le mot "centrée", il s'agira d'une moyenne complète avec ses poids terminaux.

(6) Les poids centraux de la trois de trois de X-11 ont comme polynôme implicite associé une droite ou une constante (grâce à la propriété des moyennes centrées décrite au chapitre III, section 1.4). Mais les poids terminaux sont tout-à-fait empiriques et correspondent davantage à ceux d'un polynôme associé de degré zéro, comme nous le verrons.

(4.2.e) $\hat{\hat{S}}_t = \hat{S}_t \;/\; [2\times12]_c\hat{S}_t$, t=13,..., T-12,

$\hat{\hat{S}}_t = \hat{S}_t \;/\; [2\times12]_c\hat{S}_{13}$, t=7,...,12,(7)

$\hat{\hat{S}}_t = \hat{S}_t \;/\; [2\times12]_c\hat{S}_{T-12}$, t=T-11,...,T-6,

où les deux dernières équations signifient que les six facteurs saisonniers de chaque extrémité de la série $\hat{S}$ des facteurs saisonniers préléminaires sont divisés par la première valeur disponible (la plus rapprochée) de la deux de douze centrée appliquée à $\hat{S}$. Les facteurs saisonniers préliminaires "centrés"(8) s'étendent donc de 7 à T-6. Les six valeurs manquantes à chaque extrémité sont restituées(9) à la série par répétition du coefficient saisonnier le plus rapproché pour un mois donné:

(4.2.f) $\hat{\hat{S}}_{1,j} = \hat{\hat{S}}_{2,j}$, j=1,...,6,

$\hat{\hat{S}}_{I,j} = \hat{\hat{S}}_{I-1,j}$, j=7,...,12.

---

(7) $[2\times12]_c X_t = \frac{1}{24} X_{t-6} + \frac{1}{12} \sum_{k=-5}^{5} X_{t+k} + \frac{1}{24} X_{t+6}$.

(8) Comme expliqué plus bas, ce centrage n'est qu'approximatif.

(9) Afin de rendre moins indigeste la présentation, nous ignorons ici l'identification et le remplacement des valeurs dites "extrêmes". Cette opération se base sur l'analyse de la dispersion des irréguliers intermédiaires obtenus, à ce stade-ci, par division des $\hat{S}_t\hat{I}_t$ par $\hat{\hat{S}}_t$, t=7,..., T-6 (Shiskin 1967, pp. 9 et 10). Nous y reviendrons au chapitre cinq.

Des facteurs saisonniers préliminaires centrés $\hat{\hat{S}}_t$ existent donc maintenant pour toute l'étendue de la série. Un estimé préliminaire de la série ajustée pour les variations saisonnières s'obtient par division de la série originale par ces facteurs saisonniers préliminaires centrés:

(4.2.g) $\hat{C}_t\hat{I}_t = O_t \;/\; \hat{\hat{S}}_t,\ t=1,\ldots,T.$

On applique à cette série ajustée préliminaire un filtre un peu plus recherché dit "moyenne de Henderson" pour en extraire l'irrégularité. On peut dire que cette moyenne a comme polynôme implicite associé une cubique pour les poids centraux; et, une parabole pour les poids terminaux [10]. Ceci produit un sedond estimé, amélioré, de la tendance-cycle:

(4.2.h) $\hat{C}_t$ [11] $= [H](\hat{C}_t\hat{I}_t),\ t=1,\ldots,T.$

La division de la série originale par cette dernière tendance-cycle donne les rapports saisonniers-irréguliers finaux

(4.2.i) $\hat{S}_t\hat{I}_t = O_t \;/\; \hat{C}_t,\ t=1,\ldots,T.$

---

(10) Macaulay, F. (1931), p. 90, note (1). Fontenay (de) et Prieuret (1972).

(11) Il va de soi que le $\hat{C}$ de l'équation (4.2.h) et le $\hat{S}\ \hat{I}$ de (4.2.i) ne sont pas les mêmes que ceux des équations (4.2.b) et (4.2.c). Il s'agit de ne pas trop encombrer la notation en adoptant dorénavant cette convention. Autre remarque: l'étendue de la moyenne Henderson est cinq dans la version trimestrielle mais varie dans la version mensuelle. L'étendue peut être 23, 13 ou 9 selon la grandeur de l'irrégulier (voir Shiskin, 1967, pp. 4, 10 et 20).

Le lissage de ces rapports S-I au moyen d'une trois de degré zéro d'une cinq de degré zéro[12], produit les facteurs saisonniers finaux non-centrés:

(4.2.j) $\hat{S}_{ij} = ([3\times5]\ S_{ij}I_{ij},\ i=1,I),\ j=1,\ldots,12.$

Ces coëfficients saisonniers sont centrées sur un (zéro dans le modèle additif) pour obtenir les coefficients finaux:

(4.2.k) $\hat{\hat{S}}_t = \hat{S}_t\ /\ [2\times12]_c\hat{S}_t,\ t=7,\ldots,T-6,$

$\hat{\hat{S}}_t = \hat{S}_t\ /\ [2\times12]_c\hat{S}_7,\ t=1,\ldots,6$

$\hat{\hat{S}}_t = \hat{S}_t\ /\ [2\times12]_c S_{T-6},\ t=T-5,\ldots,T.$

La série ajustée pour la saisonnalité finale s'obtient en divisant la série originale par les facteurs saisonniers finaux; la tendance-cycle finale, en passant une moyenne Henderson sur la série ajustée finale; et l'irrégulier, en divisant la série ajustée finale par la tendance-cycle finale:

(4.2.l) $\hat{C}_t\hat{I}_t = O_t\ /\ \hat{\hat{S}}_t,\ t=1,\ldots,T,$

(4.2.m) $\hat{C}_t = [H](\hat{C}_t\hat{I}_t),\ t=1,\ldots,T,$

(4.2.n) $\hat{I}_t = (\hat{C}_t\hat{I}_t)\ /\ \hat{C}_t,\ t=1,\ldots,T.$

(12) La remarque faite au sujet de la trois de trois (note 6) tient également pour la trois de cinq. De même la note 9 au sujet du remplacement des extrêmes doit être faite ici.

Toute cette série de calculs constitue la première itération de la version X-11 qui en contient trois[13]. Les deux autres itérations ont pour but d'améliorer l'identification et le remplacement des valeurs extrêmes. La dernière produit, en plus, des facteurs saisonniers de prévision au moyen de la trois de cinq. Cette prévision équivaut à extrapoler les facteurs saisonniers de la façon suivante:

$$(4.2.o) \quad \hat{\hat{S}}_t = \hat{\hat{S}}_{t-12} + \frac{1}{2}(\hat{\hat{S}}_{t-12} - \hat{\hat{S}}_{t-24}), \quad t=T+1,\ldots,T+12.$$

4.3 MODELE D'INTERPRETATION DES FONCTIONS DE GAIN ET DE DEPHASAGE DES FILTRES

Comme déjà expliqué au chapitre trois section cinq, les fonctions de gain et de déphasage d'un filtre expriment son effet sur l'amplitude et la phase d'une sinusoide de fréquence donnée. Pour fins illustratives, on suppose ici que le signal présent dans l'intervalle d'application du filtre se peut approximer à l'aide d'un segment d'une seule sinusoide de période (même beaucoup plus longue que l'intervalle), d'amplitude et de phase données. En d'autres mots, il s'agit d'isoler une sinusoide et d'analyser sur elle l'effet inhérent de la moyenne étudiée. A noter que localement une seule sinusoide prend l'allure d'une droite dans le voisinage du point d'inflexion et d'une constante autour du point de retournement, pourvu qu'on choisisse une période suffisamment longue. Cette seule courbe peut aussi localement ressembler à certaines paraboles et même certaines cubiques en retenant une période plus courte. L'intérêt portera ici sur les mouvement localement linéaires, lorsqu'il s'agira d'étudier l'effet des filtres saisonniers;et les mouvements paraboliques, pour

(13) Dans les deux itérations suivantes, l'identification et le remplacement des extrêmes se font à partir des irréguliers finaux de l'itération précédente au lieu de ceux calculés localement comme dans la première itération. Le premier estimé de la tendance-cycle résulte de l'application de la deux de douze à une série originale avec valeurs extrêmes remplacées. Ce sont là les deux seules différences.

les filtres cyclo-tendanciels. Si le filtre s'applique à des données mensuelles comme la deux de douze, les fréquences 1/360, 2/360, 3/360, etc. de l'abscisse des graphiques de l'appendice IV.A s'interprètent ainsi: la sinusoïde correspondante se reproduit à tous les 360 mois; à tous les 180 mois (360/2); à tous les 120 mois; et ainsi de suite. Si le filtre s'applique à des observations annuelles, commes les filtres saisonniers du X-11, on lit dans la phrase précédente le mot "années" au lieu de "mois". Plus la fréquence considérée est basse plus la période de la fonction correspondante se trouve longue; et plus lente, son oscillation.

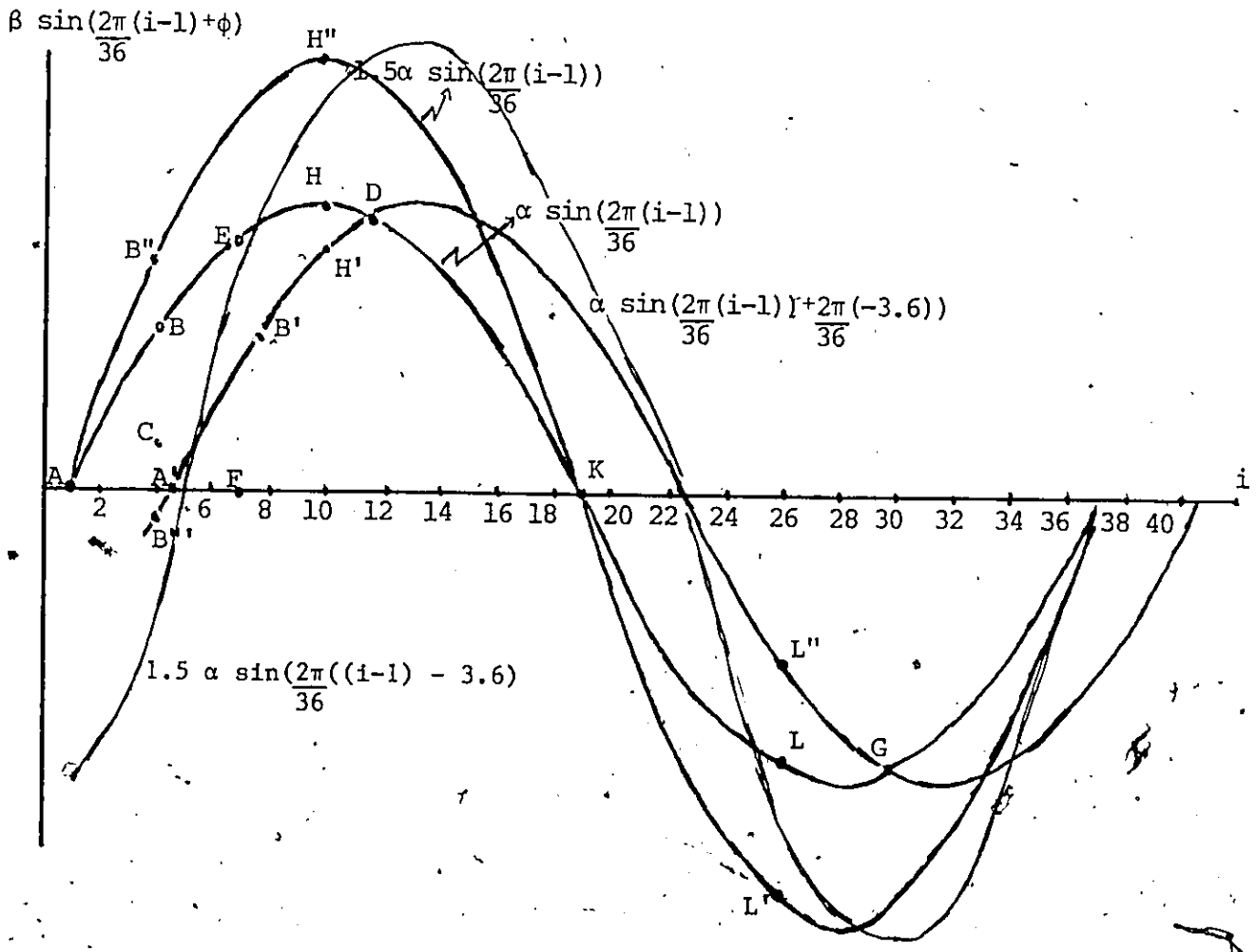


Figure IV.1 Changement d'amplitude et de phase d'une sinusoïde

Dans l'exemple de la figure IV.1, on considère un filtre saisonnier et la fréquence 10/360, c'est-à-dire une sinusoide donnée de période de 36 années. La courbe originale est $\alpha \sin(\frac{2\pi}{36}(i-1))$. Si la fonction de gain du filtre à cette fréquence, λ=10/360, vaut 150% et la fonction de déphasage, zéro, la sinusoide devient $1.5\alpha \sin(\frac{2\pi}{36}(i-1))$. Si la fonction de déphasage vaut 10% et le gain, 100% (aucun changement d'amplitude), la sinusoide devient $\alpha \sin(\frac{2\pi}{36}((i-1)-3.6)$. Elle devient $1.5\ \alpha \sin\ (\frac{2\pi}{36}((i-1)-3.6)$ avec les déphasage et amplification mentionnés. Le changement de phase reçoit un autre éclairage, si on considère un segment donné quelconque de la courbe égal à l'étendue de la moyenne ou filtre linéaire étudiés. Considérons par exemple le segment AE contenant sept observations. Le changement de phase de 10% par rapport à l'étendue d'une oscillation complète de la courbe en implique un de 51.4% (BB'/AF = 3.6/7.0) par rapport à l'étendue de la période d'application du filtre. Par exemple si les données se comportent localement comme le segment AE et qu'on prétend en estimer le point B (par une moyenne appliquée à AE), on trouve B"' avec le changement d'amplitude de 150% et pas de changement de phase; et C, avec les deux à la fois. De toute évidence de telles erreurs d'estimation sont davantage intolérables dans l'optique de la période d'observation AE.

De cette illustration ressort l'utilité d'exprimer le déphasage par rapport à l'étendue du filtre. Soient λ et λ^{-1} la fréquence et la période associée à cette fréquence; et n, l'étendue de la moyenne. La fonction de déphasage "localisé" s'écrit

(4.3.a) $\phi_L(\lambda,n) = \phi(\lambda)\lambda^{-1}/n = \phi(\lambda)/\lambda n;$

ce qui dans l'illustration valait: 51.4% = 10% / $(\frac{10}{360} \times 7)$. A remarquer que la multiplication du déphasage localisé par l'étendue de la période d'application du filtre (divisé par 100%) donne le déphasage absolu:

(4.3.b) $\phi_A(\lambda) = \phi_L(\lambda,n)\times n \equiv \phi(\lambda)/\lambda.$

Cette fonction indique le nombre effectif de périodes de retard (ou d'avance) des estimés sur la réalité. Malgré son interprétation plus directe et facile, nous retenons cependant la valeur absolue du déphasage localisé pour des raisons graphiques. En effet celle-ci se trouve représentée dans les graphiques de l'appendice IV.A avec le déphasage global et le gain. A noter que quand la fonction de déphasage global est de -10% par exemple, sa valeur apparaît comme 90%; de même -20% apparaît comme 80%; et ainsi de suite. Ceci minimise l'amplitude de l'ensemble des variables mises sur un même graphique: toutes résident ainsi au dessus de 0.0. Il résulte de cette convention que les déphasages locaux associés à des déphasages globaux de plus de 50% s'interprètent négativement et que les déphasages glovaux les plus considérables se produisent dans le voisinage de 50%.

Enfin une dernière remarque sur la valeur du biais. Dans l'exemple de la figure IV.1, le biais introduit par le déphasage dans l'estimation de B mesure BB"'. Il mesurerait HH' dans l'estimation du point H; et, zéro pour le point D. Manifestement la valeur du biais causé par le déphasage varie selon le segment chosi de la courbe $\alpha \sin(\frac{2\pi}{36}(i-1))$ pour l'application du filtre. On peut en dire autant du biais causé par le changement d'amplitude: il passe de BB" pour le point B; à HH", pour le point H; et, à zéro pour le point K. Enfin le biais causé par les deux sources à la fois peut être plus grand ou bien plus petit que celui introduit par l'une ou l'autre des sources de biais: par exemple pour le point L, le biais total est nul et mesure moins que les biais LL' ou LL".

4.4 CRITIQUE DE LA METHODE DE RAPPORT A LA MOYENNE MOBILE X-11

4.4.1 CRITIQUE DES FILTRES RELATIFS A LA TENDANCE-CYCLE

La première étape de X-11 consiste à prendre une deux de douze centrée sur la série originale dans le but d'en éliminer la saisonnalité. L'examen de la fonction de gain de ce filtre à l'appendice IV.A conclut à l'anihilation des fréquences saisonnières et quasi saisonnières[14] qui reflètent la mouvance saisonnière d'une année à l'autre. Dans le modèle multiplicatif la stabilité de la saisonnalité se définit par rapport aux facteurs saisonniers. Comme expliqué à la section 2.4.2, ceci implique généralement des effets saisonniers mobiles (à moins que la tendance-cycle ne se comporte comme une constante sur l'intervalle d'application du filtre). Ceux-ci seront donc aussi annulés dans la même mesure que les fréquences quasi saisonnières. Quant aux fréquences systématiques relatives à la tendance-cycle[15], les fonctions de gain et de déphasage de la deux de douze indiquent qu'elles "passent" dans une proportion variant entre 99.8% et 82.5% sans déphasage.

Théoriquement l'irrégulier devrait se manifester à toutes les fréquences, puisque le spectre d'une variable purement aléatoire est uniforme. C'est-à-dire que si on attribue à l'irrégulier 5% de la variation dans une série donnée, 5% en moyenne des fluctuations à toutes les fréquences, longues et courtes, relève de cette composante. Alors un filtre comme la deux de douze appliqué à une série purement aléatoire n'y laisserait que des fluctuations de durée relati-

(14) Selon l'échelle retenue les fréquences saisonnières sont 30/360 (trente cycles en 360 mois équivalant à un cycle par douze mois), un cycle par année; 60/360, deux cycles par année; 90/360, trois; etc. jusqu'à 180/360, six cycles. Les fréquences quasi saisonnières les voisinent immédiatement.

(15) On considère que ces fréquences s'étendent de 1/360 jusqu'à 10/360, dix cycles pour 30 ans, ce qui peut représenter un cycle complet des affaires assez court de périodicité trois ans.

vement longue, puisque celles de courte durée sont presqu'éliminées et celles de longue durée, conservées. On retrouve là l'effet dit "de Slutsky" (1937). En pratique, nous ne serons pas aussi rigoureux: on attribue à l'irrégulier les fréquences autres que saisonnières, plus élevées que - disons - 70/360, qui correspondent à des fluctuations trop rapides pour avoir une interprétation économique. Quant aux fréquences comprises entre 10/360 et 70/360, autres que saisonnières, elles correspondent à des fluctuations soit trop rapides pour expliquer le cycle des affaires, soit comprises entre les fréquences saisonnières. On suppose alors qu'elles sont absentes de la série à filtrer. C'est à ces fréquences "absentes" que la deux de douze a un déphasage de 50%.

Mais l'approche temporelle (par opposition à l'approche fréquentielle) projette un éclairage plus direct. Les poids de la deux de douze donnent aux mois homologues même somme de poids[16]. Ainsi des effets saisonniers stables s'annulent dans la somme pondérée. La deux de douze centrée élimine donc les effets saisonniers stables. Quant à l'effet sur la tendance-cycle, il suffit de se rendre compte que la moyenne composée deux de douze centrée équivaut à une moyenne simple centrée, grâce à (3.3.4.g et d), qui a comme polynôme implicite associé une constante ou une droite, grâce à (3.1.4.d). Elle est ainsi apte à reproduire pour l'observation centrale une tendance-cycle constante ou droite sur un intervalle d'application donné. Si la tendance-cycle se comporte paraboliquement sur l'intervalle, l'estimé tombera à l'intérieur de la parabole. On tire alors facilement l'hypothèse implicite à l'emploi d'une deux de douze centrée: la tendance-cycle se comporte localement sur l'intervalle considéré comme une constante ou une droite. Mais dans une certaine me-

(16) Ses poids étant 1/24, puis onze fois 1/12 et enfin 1/24, les mois homologues reçoivent même somme de poids.

sure le modèle a déjà exclu la droite, puisque des effets saisonniers à somme annuelle nully y impliquent une tendance-cycle constante. Alors on peut dire que l'emploi de la deux de douze coentrée repose sur une hypothèse simpliste surtout dans le modèle multiplicatif, à savoir que la tendance-cycle ne se comporte généralement pas comme une droite sur quelqu'intervalle considéré d'une série.

Abordons tout de suite le cas de la Henderson à treize termes pour nous consacrer ensuite à la critique des filtres saisonniers, sur lesquels porte principalement l'intérêt de ce travail. Selon les fonctions de gain et de déphasage de l'appendice IV.A, les filtres associés à chacune des observations[17] de la Henderson passent complètement et sans déphasage les fréquences systématiques relatives à la tendance-cycle (1/360 à 10/360). Les fréquences irrégulières (plus grandes que 70/360), sont presque annéanties pour l'observation centrale (septième); et un peu moins, à mesure qu'on s'éloigne de cette observation centrale vers la onzième créant de plus en plus d'instabilité dans les estimés. Cependant pour la treizième observation le filtre conserve les fréquences irrégulières dans des proportions trop considérables variant de 37.8% à 17.0%. Ces proportions voisinent les mêmes quantités pour la douzième observation, à savoir 21.4% à 15.0%. Il n'en demeure pas moins que, sauf pour les deux dernières observations, les performances de la moyenne de Henderson à treize termes sont remarquables. En effet il ne faut pas perdre de vue que cette moyenne s'applique à la série ajustée préliminaire et n'est pas contrainte à éliminer la saisonnalité comme la deux de douze, mais à lisser la série.

(17) Apparaissent en appendice seulement les filtres associés aux septième, huitième, jusqu'à la treizième observations. Les autres filtres associés aux sixième, cinquième jusqu'à la première observations ont des fonctions de gain identiques et de déphasage de signe opposé.

4.4.2 CRITIQUE DES FILTRES RELATIFS A LA SAISONNALITE

La deuxième étape de X-11 consiste à générer les rapports S-I et à leur appliquer, chaque mois pris séparément, des filtres afin de dégager les facteurs saisonniers de l'irrégulier. Les poids centraux de ces filtres sont ceux d'une moyenne composée: une moyenne d'étendue trois de degré zéro d'une d'étendue trois de degré zéro, dite "trois de trois". Grâce à (3.3.4.g et d) les poids centraux de cette moyenne composée peuvent s'envisager comme ceux d'une moyenne simple établis par les moindres carrés pondérés. Ces poids centraux passent indifféremment une constante ou une droite à cause de la propriété des moyennes centrées (3.1.4.d). Quant aux poids terminaux on ne peut leur associer un polynôme implicite, quoiqu'on sache empiriquement qu'ils reproduisent plutôt une constante même en cas de comportement parfaitement linéaire des données. Faute de pouvoir analyser ces poids dans le domaine "temporel", (par référence à un polynôme associé), on recourera à l'analyse spectrale (au moyen des fonctions de gain et de déphasage).

Comme le soulignait plus haut Shiskin lui-même, sa méthode estime mal les coëfficients saisonniers de l'année en cours si la saisonnalité se meut "rapidement". En effet les poids terminaux du X-11 passent mal les mouvements de longue période comparativement aux poids centraux. Les fréquences aptes à refléter ces mouvements systématiques (pour un mois donné) s'étendent de 1/360 à 18/360. Ces fréquences systématiques relatives à la saisonnalité correspondent à des fluctuations se reproduisant à tous les 360 ans jusqu'à tous les vingt ans. Un cycle à tous les vingt ans (une parabole en dix ans) est le maximum acceptable pour un mois donné. Car de par sa nature la saisonnalité n'évolue pas très rapidement. La qualité des filtres du X-11 se mesurera donc à leur

habilité à passer les fréquences systématiques mentionnées sans changement de phase et à éliminer les fréquences irrégulières (supérieures à 70/360). Quant aux autres fréquences on les suppose absentes des rapports S-I.

Selon la fonction de gain de la trois de trois centrée, ce filtre passe les fréquences 1/360 à 18/360 dans une proportion allant de 99.9 % à 93.5 %. La fonction de déphasage en indique aucun. Quant aux fréquences irrégulières (plus grande que 70/360) ce filtre les réduit de 68.5 % à 100 % (en passe de 31.5 % à zéro %). La trois de trois centrée a donc les aptitudes à filtrer la saisonnalité. On ne peut en dire autant du filtre constitué par les poids finaux de la trois de trois (cinquième observation). Quoique la fonction de gain indique un passage acceptable (99.9 % à 97.2 %) des fréquences pertinentes à la saisonnalité (1/360 à 18/360), la fonction de déphasage localisé, -15.5 % à ces fréquences, équivaut presqu'à une des cinq années de la période d'observation. Ce déphasage s'illustre par la figure IV.2, où on suppose que le vrai facteur saisonnier se comporte localement comme la droite S_j (18). Son estimé se représente par la droite $\hat{S}_j$, qui est la droite S_j déphasée d'un an. Si on applique le filtre en question aux observations 1 à 5 pour estimer A, on trouve A'; si

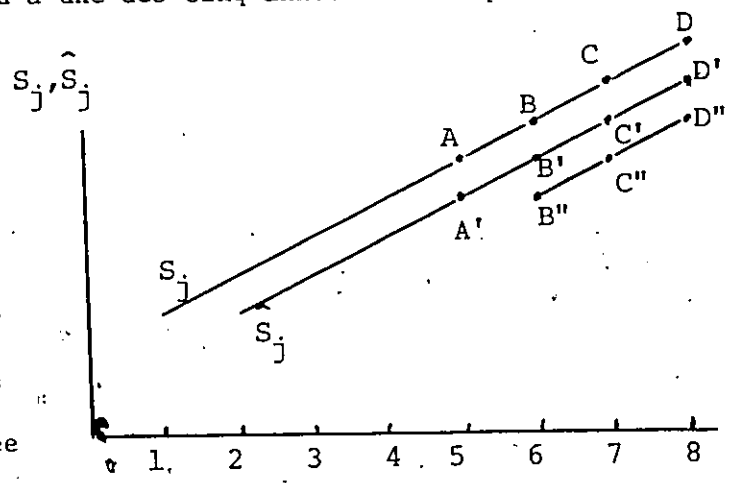


Figure IV.2 Déphasage d'un an d'un facteur saisonnier évoluant linéairement

(18) Un segment d'une sinusoïde de très grande période peut localement apparaître comme une droite ou une constante selon le segment choisi.

on l'applique de 2 à 6 pour estimer B, on trouve B'; et, C' au lieu de C; et, ainsi de suite. Quant aux fréquences irrégulières une réduction plus considérable se traduirait par un amenuisement souhaitable de la variance des estimés.

Pour la quatrième observation de la trois de trois les fonctions de gain et de déphasage s'acceptent. Les fréquences 1/360 à 18/360 passent à plus de 95.5 % avec un déphasage local de moins de 4.4 %, donc de moins 22.0 % d'une année. Ici encore pourrait-on souhaiter une réduction plus considérable de l'irrégularité. Donc le problème de la trois de trois réside surtout dans la dernière observation. Mais la répétition des mois homologues les plus rapprochés (4.2.f) pour les estimés manquants à chaque extrémité de la série fait également problème. Pour ceux-ci, le déphasage local devient presque deux ans comme illustrée dans la figure IV.2. En effet la répétition équivaut à répéter A' en B'' comme estimé de B; B' en C'', comme estimé de C; C' en D'' comme estimé de D. La droite B'' D'' est déphasée de près de deux ans par rapport à la vraie droite S_j. On peut voir que plus grande la pente de S_j, plus grand est le biais AA', BB', CC', pour la cinquième observation; ainsi que le biais BB'', CC'', DD'', pour la répétition.

Considérant simultanément les poids centraux et les poids terminaux de droite (ou du bas de la matrice des poids) de la trois de trois[19] ainsi que la répétition, on trouve que si les rapports SI se comportent localement comme une droite à pente positive, on sous-estimera la quatrième observation d'une quantité correspondant à 22.0 % d'un an; la cinquième, à près d'un an; et la

(19) L'analyse des poids de gauche (du haut de la matrice des poids) donne exactement les mêmes résultats (sauf que les déphasages sont positifs au lieu de négatifs) à cause de la symétrie des poids. Par exemple les poids de la première observation répètent les poids de la cinquième dans l'ordre inverse.

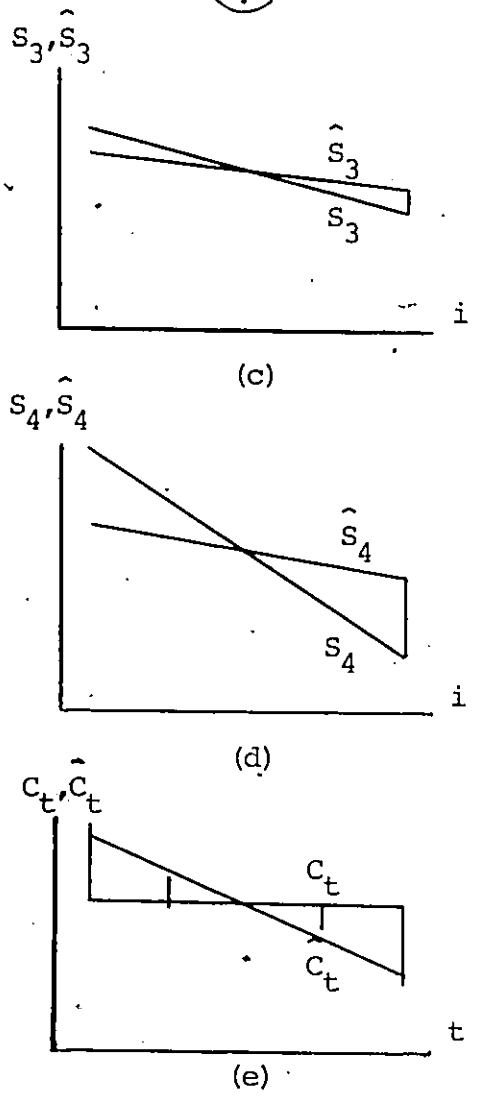


Figure IV.5
Transmission du biais saisonnier à la tendance-cycle

(par division ou soustraction des facteurs saisonniers de la série originale), on estimera $\hat{C}$ au lieu de C, c'est-à-dire une tendance-cycle linéaire au lieu de constante. Ainsi le biais, produit dans l'estimation des facteurs saisonniers par X-11, risque de contaminer également la tendace-cycle. Plus généralement les biais d'estimation dans les facteurs saisonniers se transmettent comme des fluctuations systématiques de périodicité annuelle à la série ajustée pour la saisonnalité (préliminaire ou finale). La tendance-cycle estimée au moyen de la Henderson (surtout celles à neuf et à treize termes) sur la série ajustée incorpore ces fluctuations systématiques. Car la Henserson est assez flexible pour passer une cubique sur son intervalle d'application. Ainsi il reste de la saisonnalité résiduelle dans la tendance-cycle aux extrémités de la série , qui peut faussement laisser croire à un revirement de la conjoncture économique, c'est-à-dire à un changement du cycle des affaires.

Enfin le centrage des coefficients saisonniers sur un (zéro dans le modèle additif) pour chaque année par une deux de douze centrée ((4.2.e) et (4.2.k)) n'est qu'"approximatif" en régime d'effets saisonniers mobiles[22]. Pour être

(22) Voir note (8) de la section 4.2.

exact il aurait fallu diviser chaque année donnée de facteurs saisonniers par la même moyenne de douze centrée sur le centre de cette année. Alors ceci est une raison de plus d'obtenir des facteurs saisonniers finaux ne se sommant pas à douze (ou zéro). Les chances que l'égalité des totaux annuels des séries brute et ajustée se produise s'en trouvent d'autant réduites. Mais il s'agit là d'un point mineur, car comme expliqué au chapitre deux l'imposition de l'annulation annuelle des effets saisonniers est arbitraire.

On peut donc relever dans la méthode X-11 deux points faibles. Premièrement, l'emploi de la deux de douze repose sur une hypothèse plutôt limitative: tendance-cycle localement de degré un, c'est-à-dire linéaire. Deuxièmement, les poids saisonniers terminaux ne permettent pas le même degré de mouvance saisonnière que les poids centraux, ce qui - comme expliqué - peut facilement introduire de faux revirement cycliques dans les estimés terminaux de la tendance-cycle. Ainsi pourrait-on améliorer la méthode en permettant aux trois de trois et trois de cinq de passer la saisonnalité mobile pour les estimés terminaux, comme elles le font déjà pour les estimés centraux; et cela d'autant plus qu'on se dit satisfait des estimés par X-11 de la partie historique des séries et qu'on souhaite une amélioration des performances aux extrémités.

APPENDICE IV.A

ANALYSE SPECTRALE

DES MOYENNES MOBILES

DE LA METHODE X-11

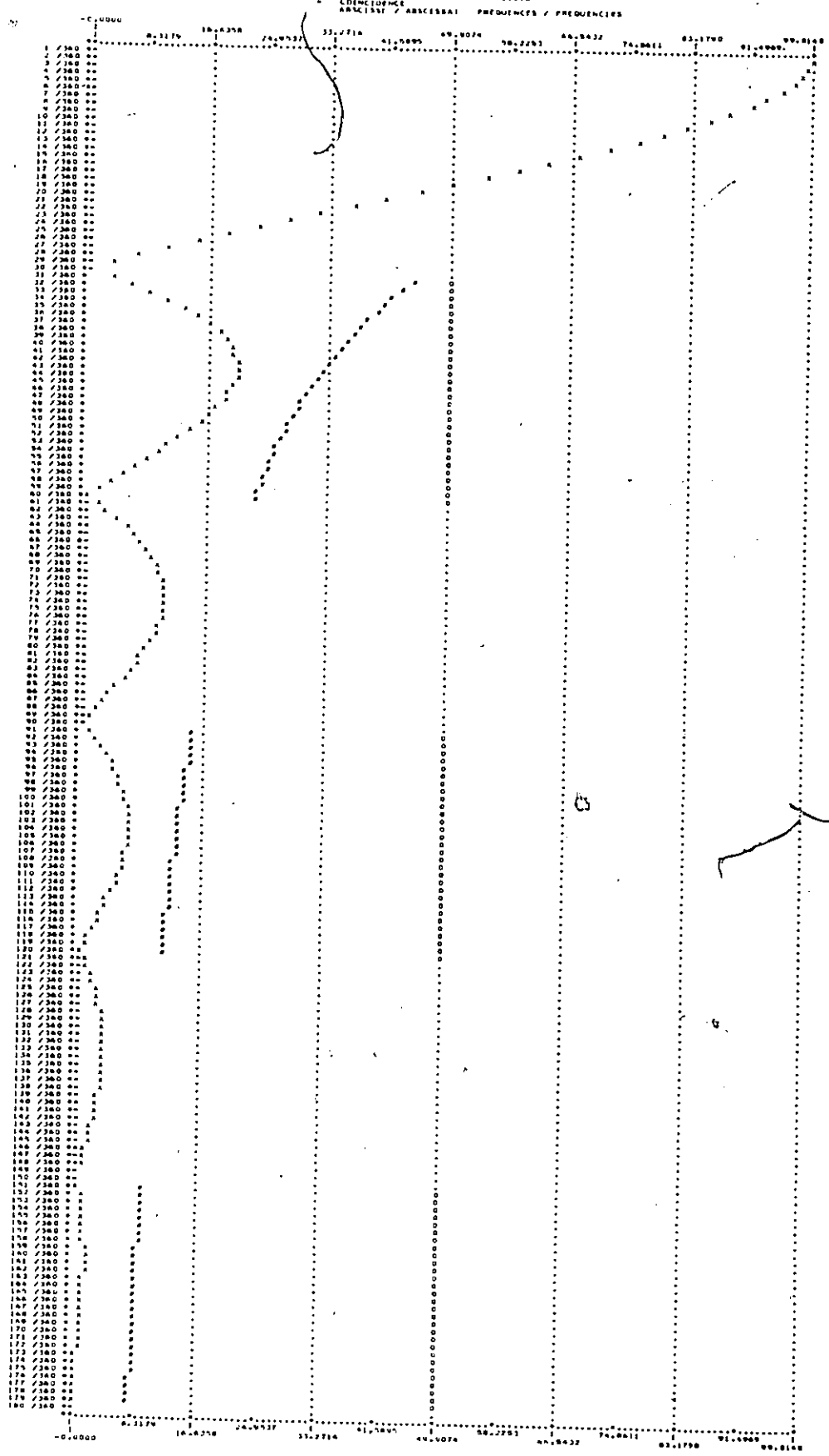
DEUX DE DOUZE CENTRES / TWO OF A TWELVE CENTERED

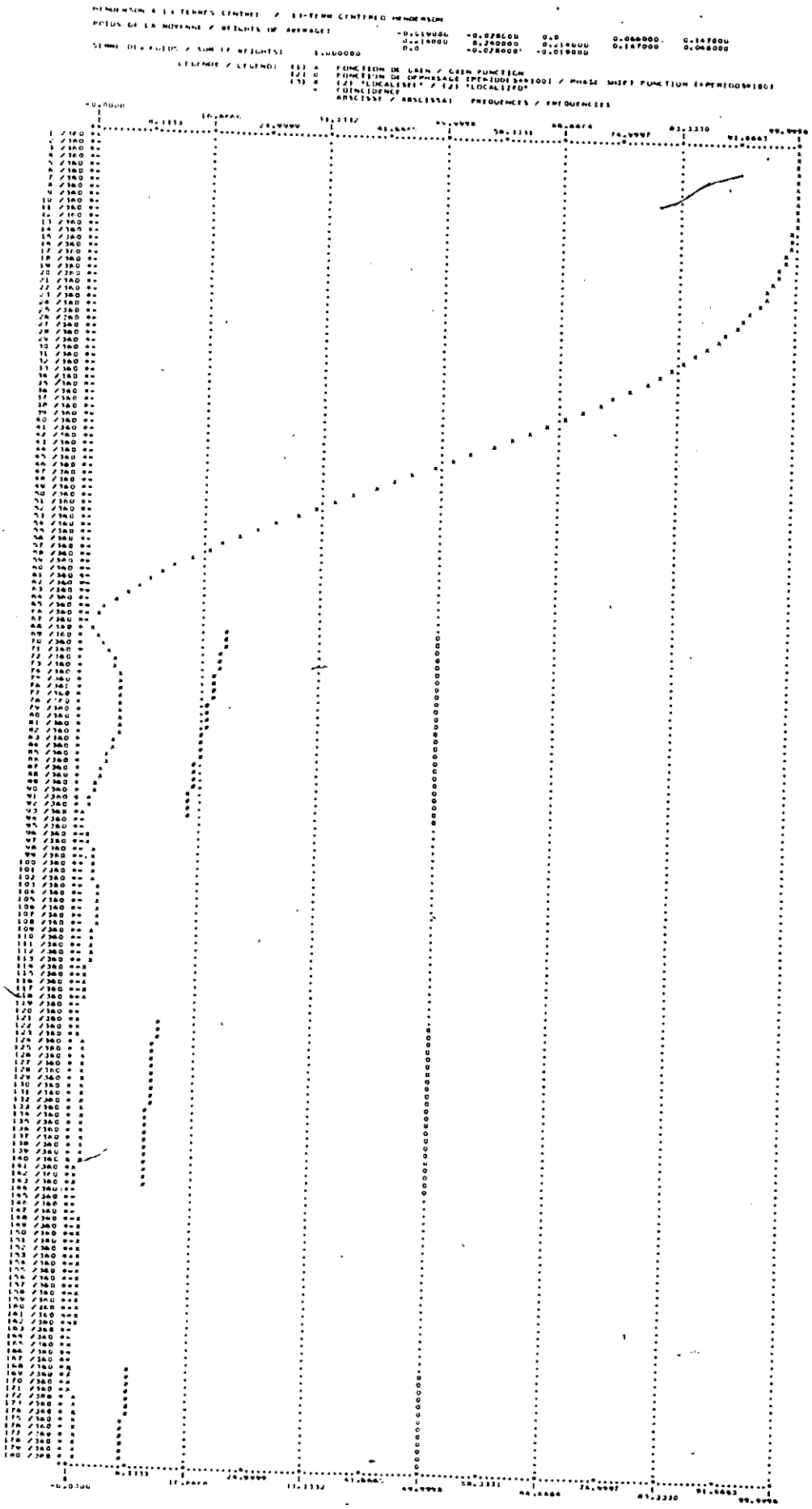
POIDS DE LA MOYENNE / WEIGHTS OF AVERAGE:

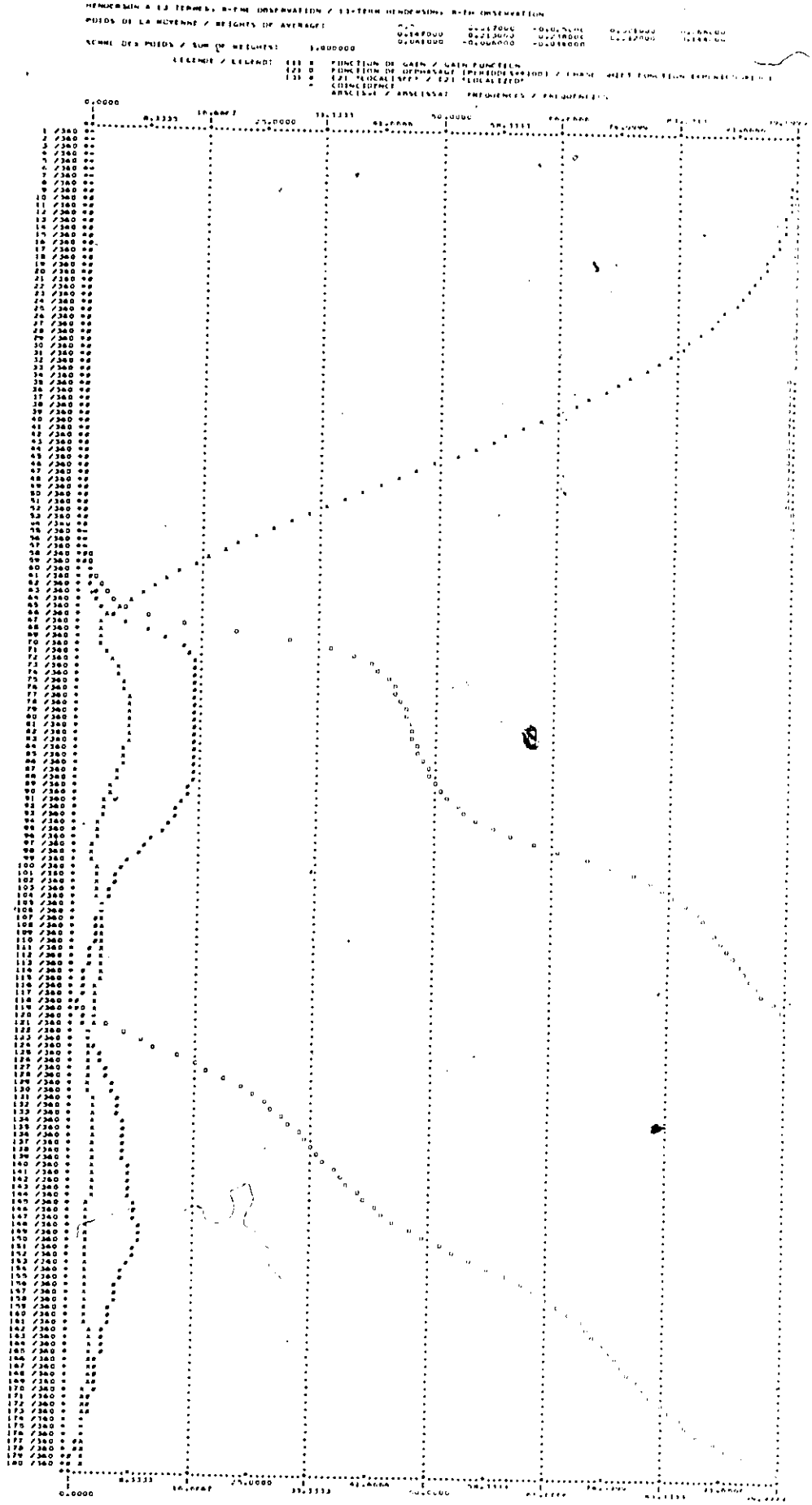
0.041667	0.083333	0.083333	0.083333	0.083333
0.083333	0.083333	0.083333	0.083333	0.083333
0.083333	0.083333	0.083333	0.041667	

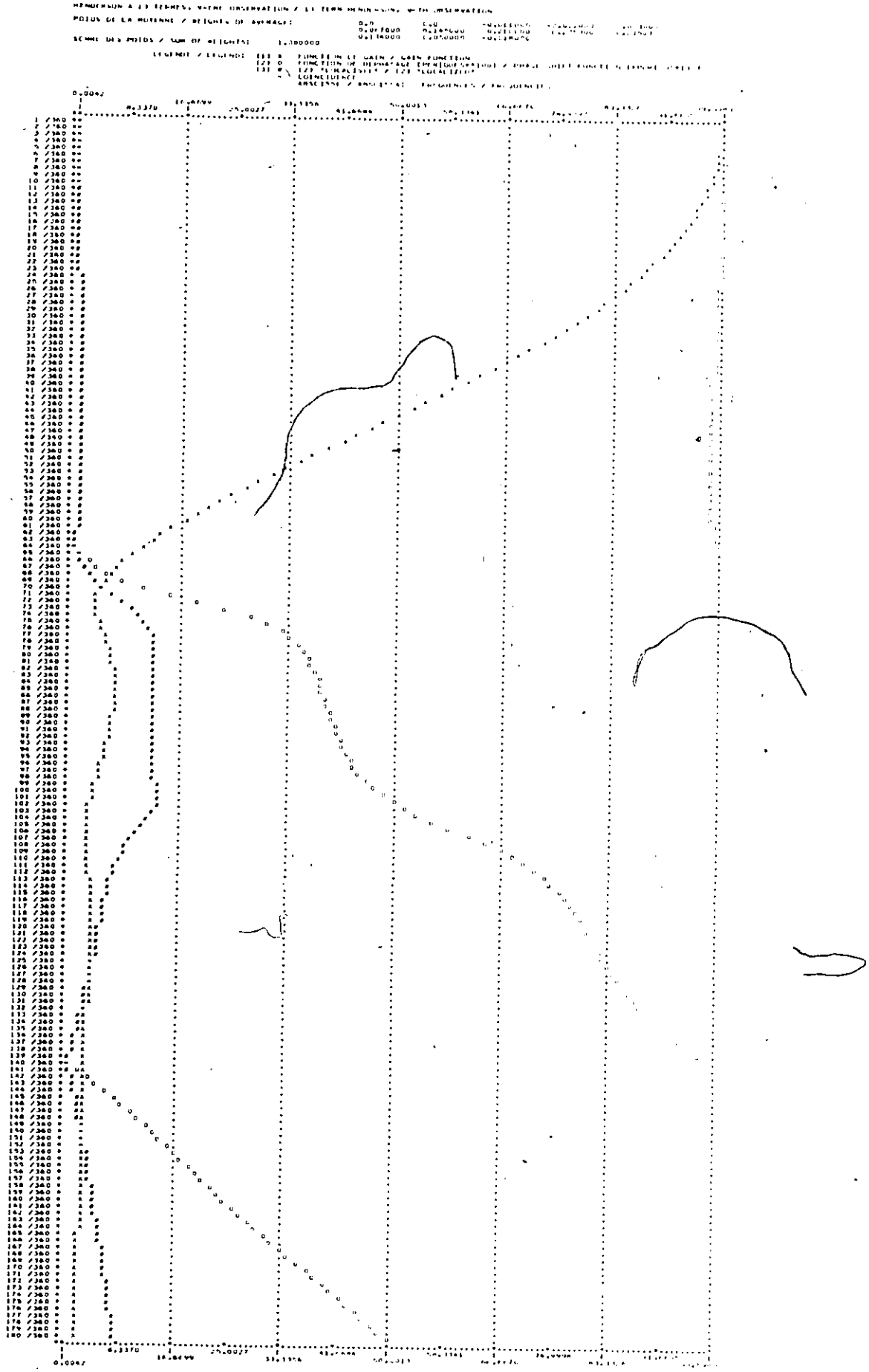
SOMME DES POIDS / SUM OF WEIGHTS: 1.000000

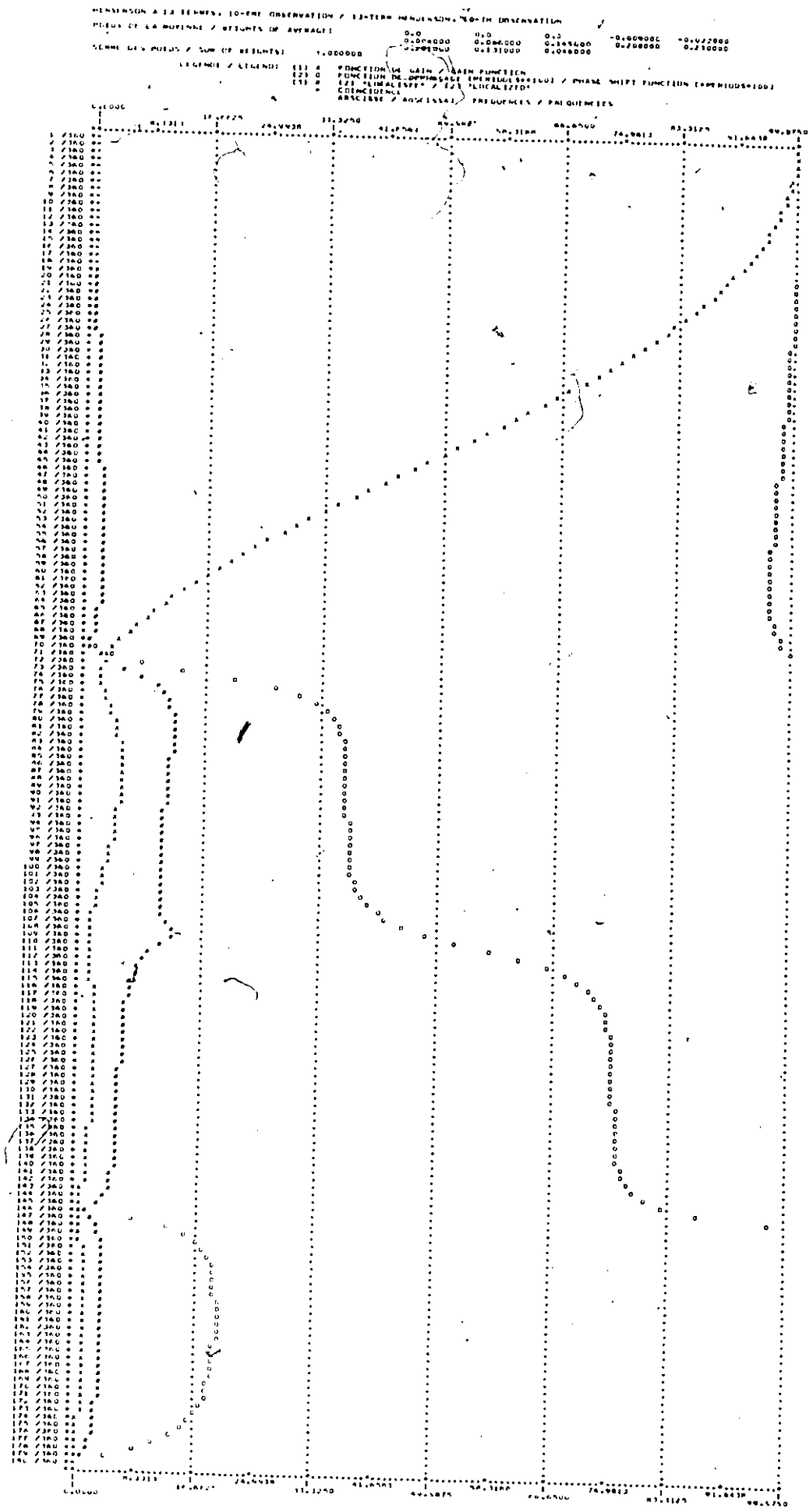
LEGENDE / LEGEND:
(1) * FONCTION DE GAIN / GAIN FUNCTION
(2) O FONCTION DE DEPHASAGE (PERIODES*100) / PHASE SHIFT FUNCTION (PERIODS*100)
(3) P (2) 'LOCALISEE' / (2) 'LOCALIZED'
* LOENCIDENCE
ABSCISSE / ABSCISSAE: FREQUENCES / FREQUENCIES

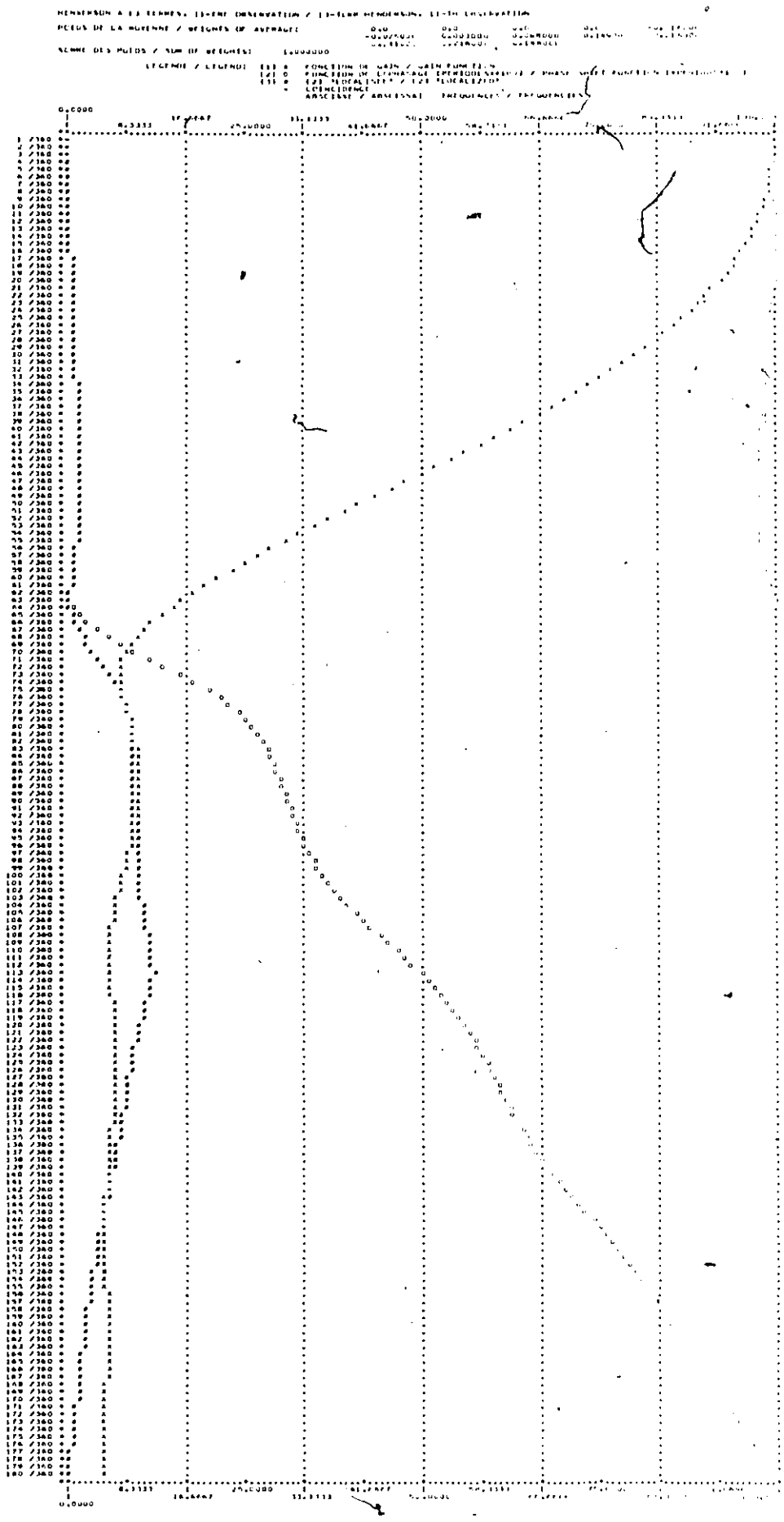


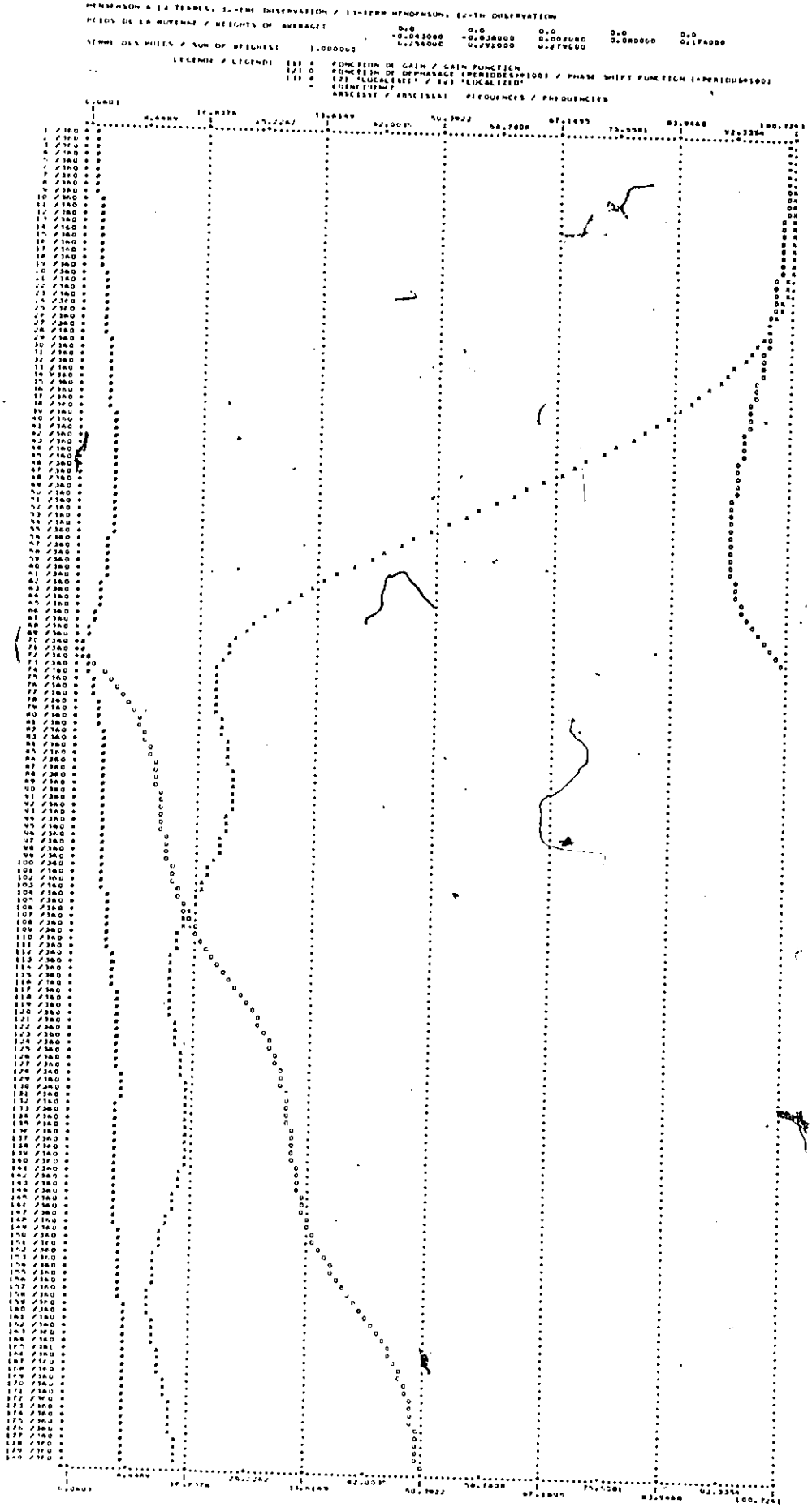

FONCTION DE GREN / GREN FUNCTION
FONCTION DE DEPHASAGE
FUNCTION SHIFT FUNCTION
FUNCIDENCE
ABSCISSE / ABSCISSAS
FREQUENCES / FREQUENCIES

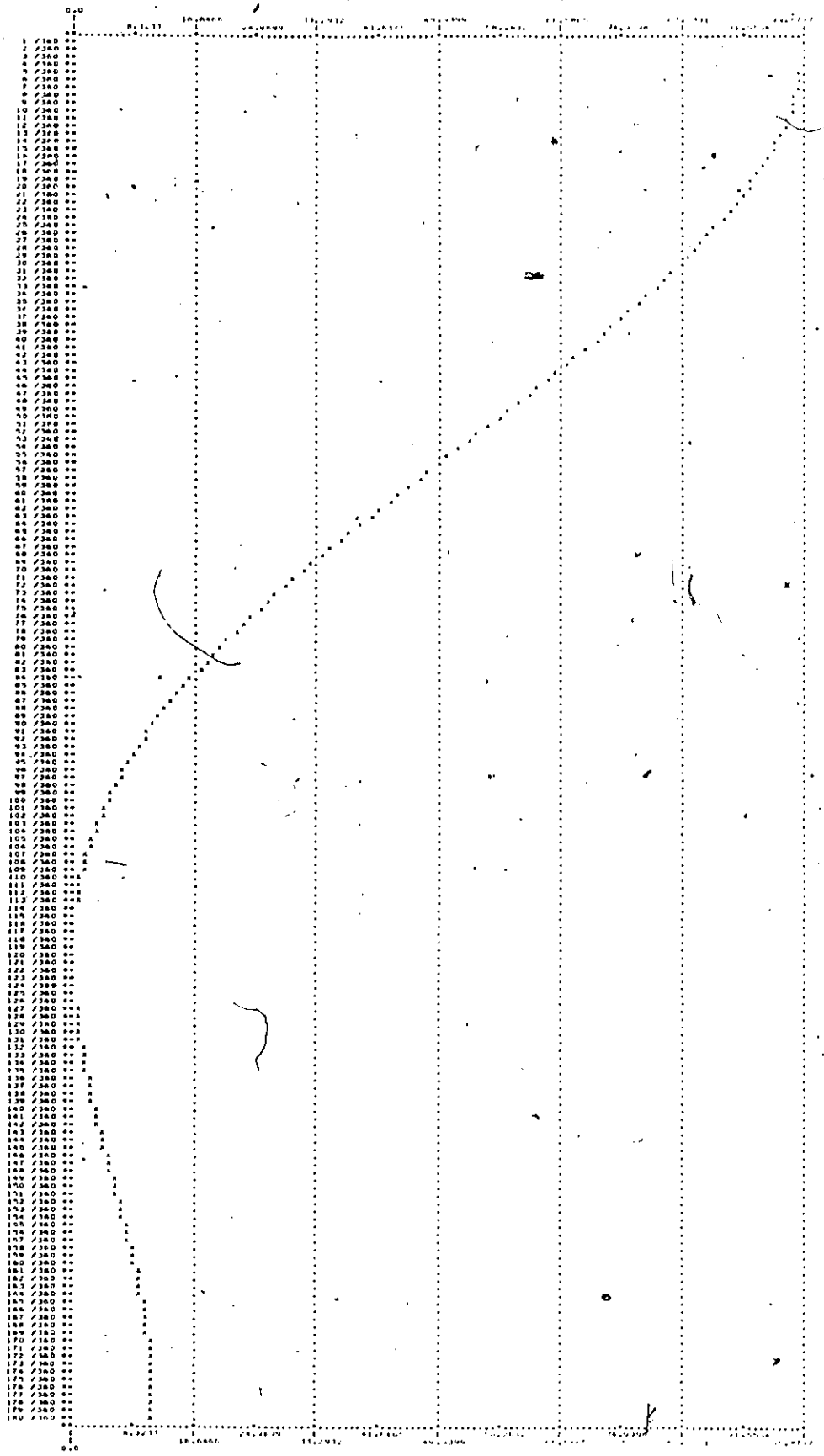

MENDERSON A LA TERMES, N-EME OBSERVATION / 11-TERM MENDERSONS, N-TH OBSERVATION
POIDS DE LA MOYENNE / WEIGHTS OF AVERAGE:
SOMME DES POIDS / SUM OF WEIGHTS: 1.000000
LEGENDE / LEGEND:
FONCTION DE GAIN / GAIN FUNCTION
FONCTION DE DEPHASAGE
COINCIDENCE
ABSCISSE / ABSCISSAE: FREQUENCES / FREQUENCIES
0.0000
0.3333
25.0000
33.3333
50.0000



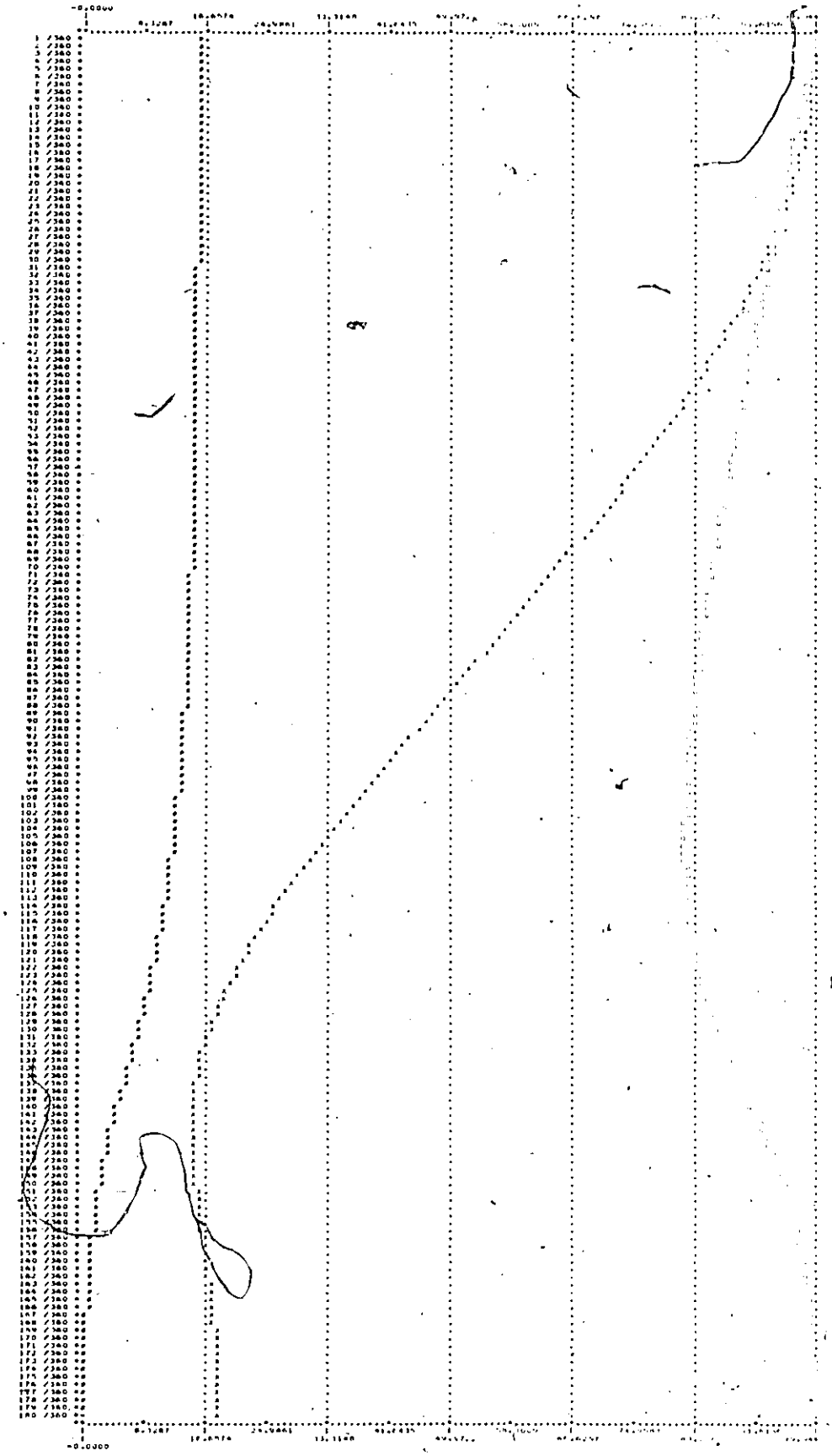


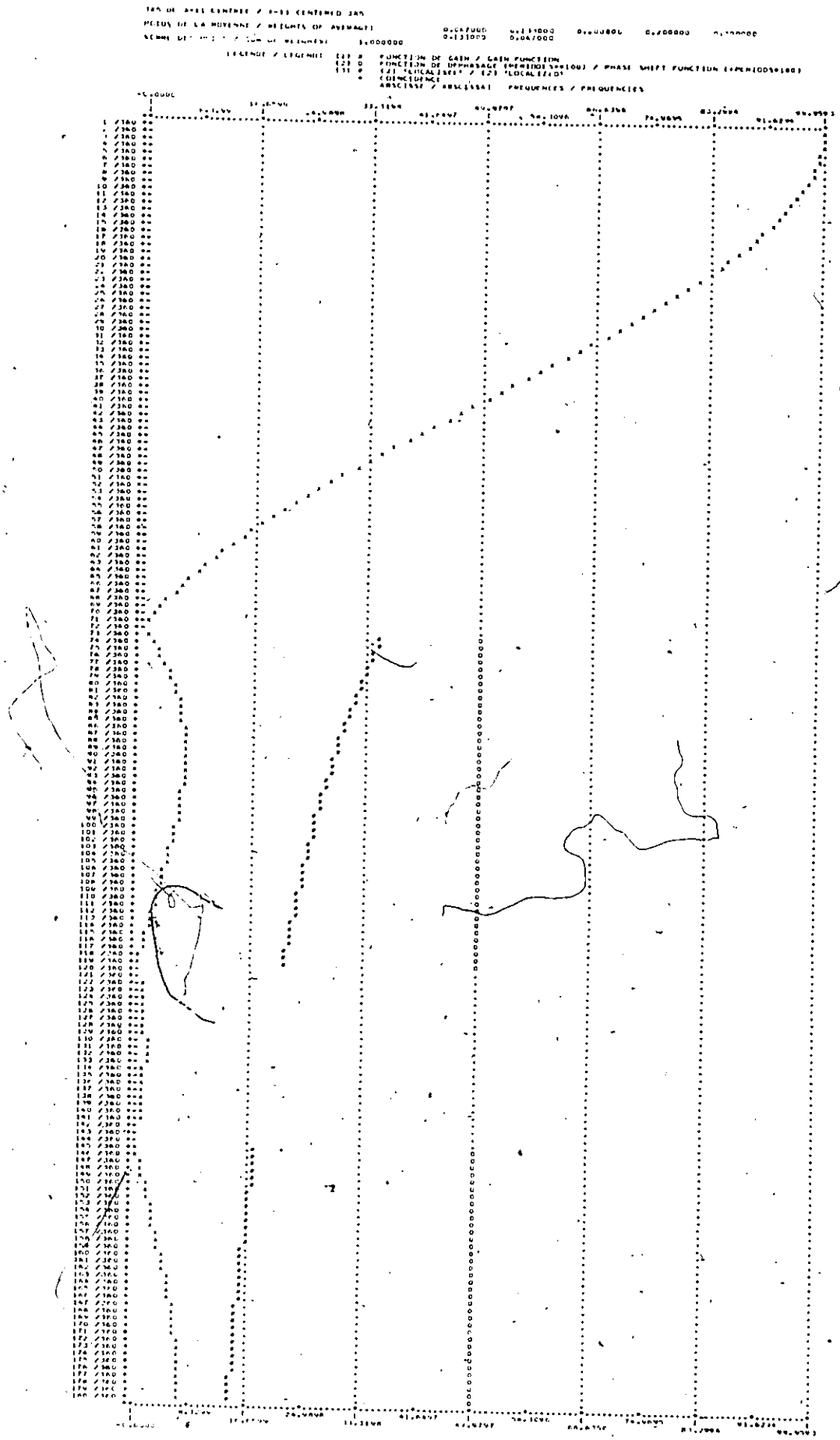

HENNERSON A 23 TERMES: 13-EME OBSERVATION / 13-TH HENDERSONS 13-TH OBSERVATION
POIDS DE LA MOYENNE / WEIGHTS OF AVERAGE
SOMME DES POIDS / SUM OF WEIGHTS
LEGENDE / LEGEND
FONCTION DE MAIN / MAIN FUNCTION
FONCTION DE LISSAGE / SMOOTHING FUNCTION
LOCALISATION / LOCALIZATION
COINCIDENCE
ABSCISSE / ABSCISSAE
FREQUENCES / FREQUENCIES

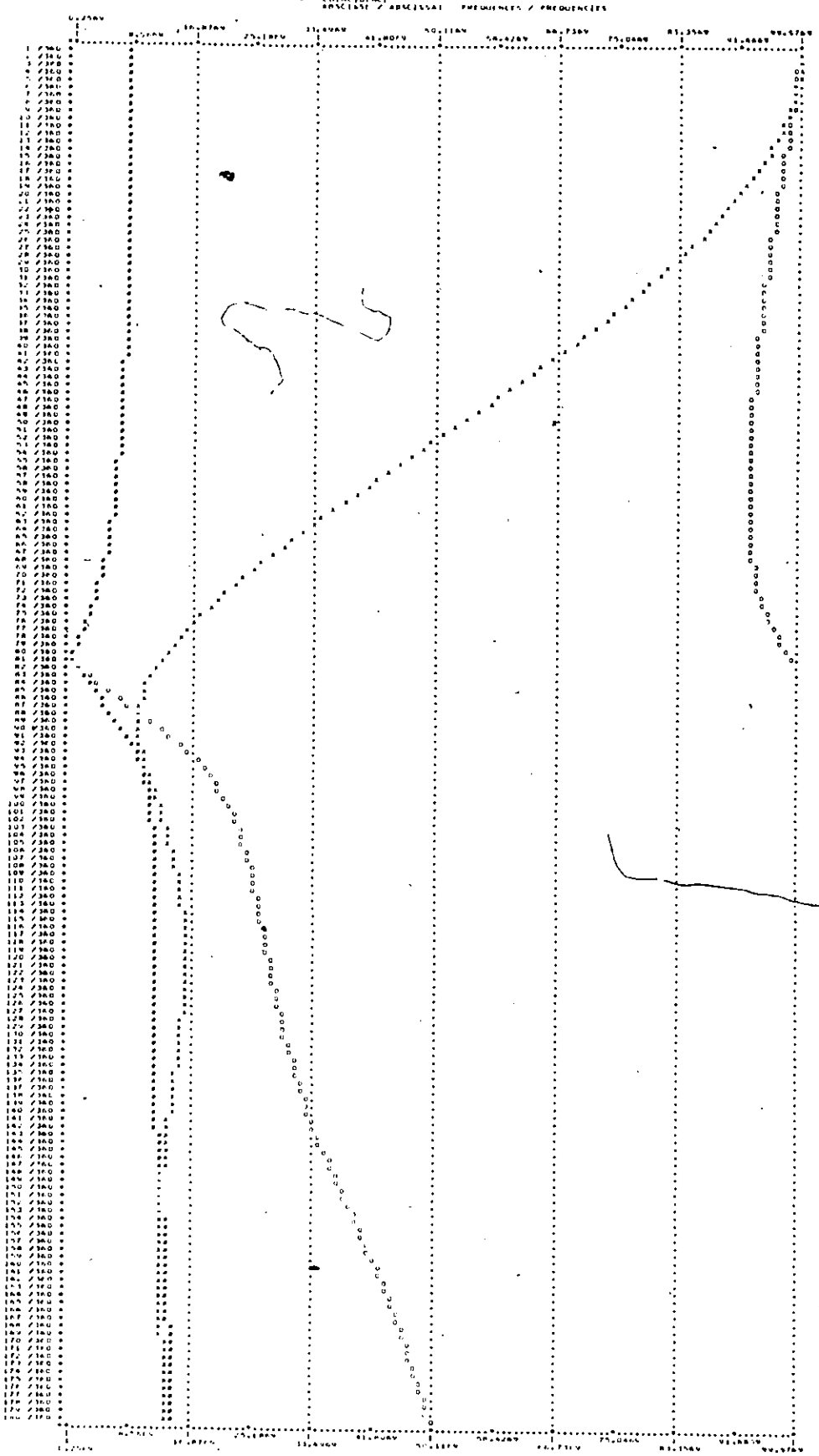

HENDERSON A 12 TERMES, 3-TEM OBSERVATION / 13-TERM HENDERSONS 12-TH OBSERVATION
POIDS DE LA MOYENNE / WEIGHTS OF AVERAGE
SOMME DES POIDS / SUM OF WEIGHTS
LEGENDE / LEGEND
FONCTION DE GAIN / GAIN FUNCTION
FONCTION DE DEPHASAGE
ABSCISSE / ABSCISSAS
FREQUENCES / FREQUENCIES

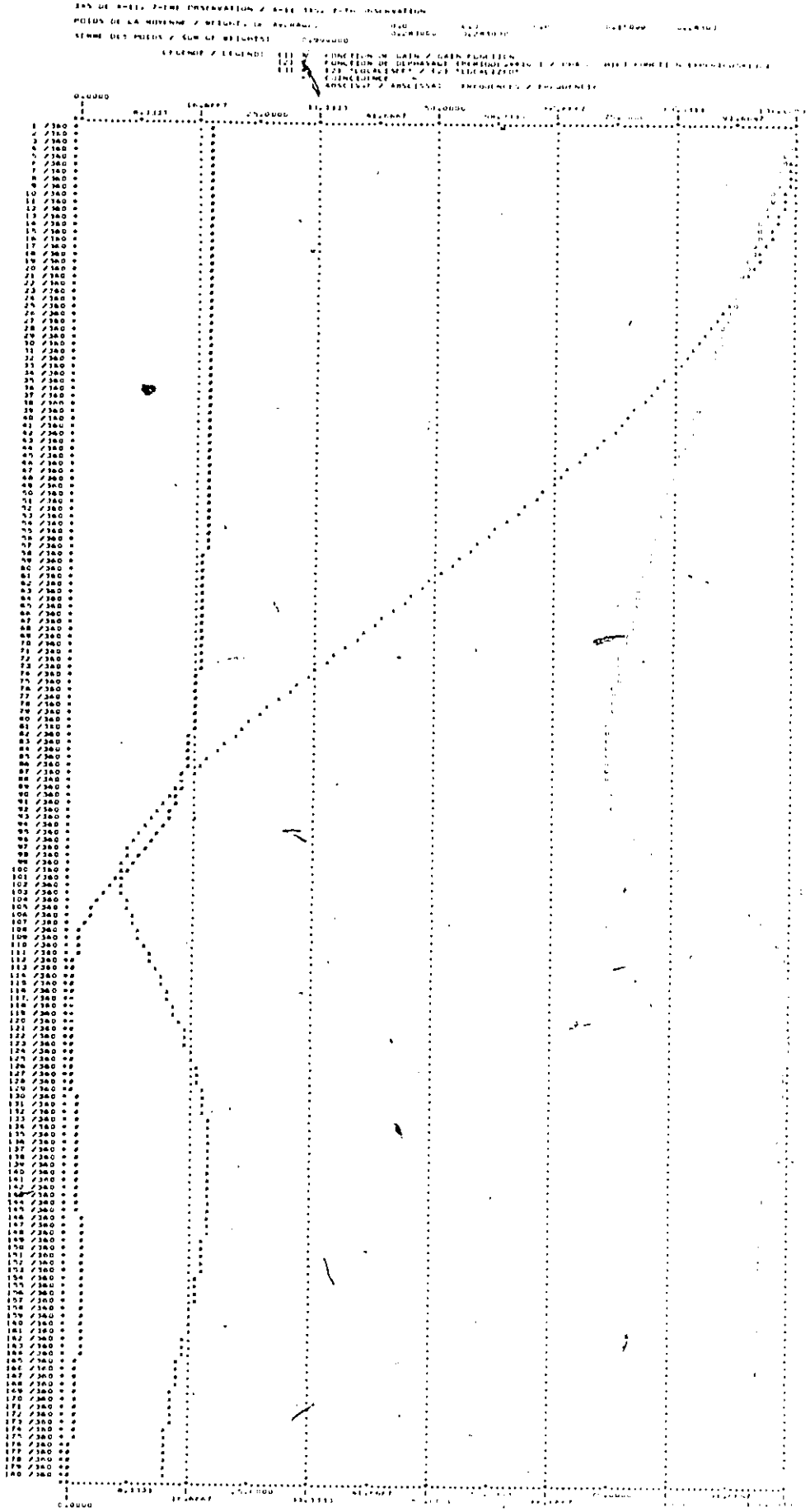



LEGENDE / LEGEND
FONCTION DE GAIN / GAIN FUNCTION
FONCTION DE DEPHASAGE (PERIODE*360) / PHASE SHIFT FUNCTION (PERIOD*360)
COHERENCE
ABSCISSE / ABSCISSAE FREQUENCES / FREQUENCIES




LEGENDE / LEGENDE
(1) * FONCTION DE GAIN / GAIN FUNCTION
(2) O FONCTION DE DEPHASAGE (PERIODES*100) / PHASE SHIFT FUNCTION (PERIODS*100)
(3) + (2) 'LOCALEZ1SET' / (2) 'LOCALEZ1D'
COHERENCE
ABSCISSE / ABSCISSAE FREQUENCES / FREQUENCIES


LEGENDE / LEGEND:
FONCTION DE GAIN / GAIN FUNCTION
FONCTION DE DEPHASAGE / PHASE SHIFT FUNCTION
COHERENCE
ABSCISSE / ABSCISSA: FREQUENCES / FREQUENCIES



111,
112-118,

CHAPITRE 5: CHANGEMENTS APPORTES A LA METHODE X-11

Ce chapitre a pour objet la présentation de nouveaux filtres saisonniers pour la méthode X-11 et le test de performance de cette version avec ces nouvaux filtres incorporés.

5.1 INCORPORATION DE NOUVEAUX FILTRES SAISONNIERS A LA METHODE X-11

Contrairement à celles du X-11 qu'elles remplacent, les moyennes mobiles saisonnières proposées ont des polynômes implicites associés bien définis. Il n'en sera donc pas fait d'analyse spectrale qui multiplierait inutilement les appendices et ne viendrait que corroborer l'information déjà fournie par le polynôme implicite. D'une façon générale les nouveaux filtres saisonniers passent mieux et plus complètement les fréquences systématiques, mais laissent également passer davantage les fréquences irrégulières.

Pour le remplacement de la trois de trois nous proposons une moyenne mobile simple d'étendue cinq de degré un, établie par les moindres carrés pondérés, à poids centraux identiques à ceux de la trois de trois présentement dans le X-11. Quand la valeur du test de Student (par rapport à zéro) relatif à la pente du polynôme implicite n'atteint pas le seuil d'acceptation (au niveau de signification de 2%) pour un mois donné à une extrémité considérée de la série, les "vieux" poids du X-11 y sont appliqués. Pour la trois de cinq nous proposons deux alternatives: l'une, comme pour la trois de trois, une moyenne mobile simple d'étendue sept de degré un, estimée par les moindres carrés pondérés, à poids centraux identiques à ceux de la présente trois de cinq; l'autre, une moyenne mobile composée, une trois de degré un d'une cinq de degré un. Encore dans ces deux cas le test de Student sur la pente de la droite implicite

(droite associée à la composante, s'il s'agit de la moyenne composée) détermine quels poids sont utilisés pour le mois et l'extrémité de série considérés: les anciens poids, s'il ne passe pas le seuil; et les nouveaux, si oui. Ces nouveaux poids sont donnés par les tableaux V.1.a, V.1.b et V.1.c.

Tableau V.1.a Nouveaux poids suggérés pour la trois de trois[1]: moyenne simple d'étendue cinq de degré un, moindres carrés pondérés

observation générée	distance du centre	observation de l'intervalle d'application 1	3	3	4	5
3	0	.11111	.22222	.33333	.22222	.11111
4	1	-.05556	.05556	.33333	.38889	.27778
5	2	-.22222	-.11111	.33333	.55556	.44444

Tableau V.1.b Nouveaux poids suggérés pour la trois de cinq[1]: moyenne simple d'étendue sept de degré un, moindres carrés pondérés

observation générée	distance du centre	observation de l'intervalle d'application 1	2	3	4	5	6	7
4	0	.06667	.13333	.20000	.20000	.20000	.13333	.06667
5	1	-.00833	.03333	.12500	.20000	.27500	.23333	.14167
6	2	-.08333	-.06667	.05000	.20000	.35000	.33333	.21667
7	3	-.15833	-.16667	-.02500	.20000	.42500	.43333	.29167
8 (prévision)	4	-.23333	-.26667	-.10000	.20000	.50000	.53333	.36667

(1) Il s'agit là des poids du "bas" de la matrice des poids (3.3.4.g). Ceux du haut les répètent dans l'ordre inverse.

Tableau V.1.c Nouveaux poids suggérés pour la trois de cinq[2]: moyenne composée d'étendue trois de degré un d'une d'étendue cinq de degré un

observation générée	distance du centre	observation de l'intervalle d'application 1	2	3	4	5	6	7
4	0	.06667	.13333	.20000	.20000	.20000	.13333	.06667
5	1	.00000	.06667	.13333	.16667	.20000	.23333	.20000
6	2	.00000	.00000	.00000	.10000	.20000	.30000	.40000
7	3	.00000	.00000	.20000	.00000	.20000	.40000	.60000
8 (prévision	4	.00000	.00000	-.40000	-.10000	.20000	.50000	.80000

C'est à dessein que les poids centraux de ces nouvelles moyennes prennent des valeurs identiques à celles des vieilles moyennes correspondantes: puisque les estimés historiques de X-11 ont d'excellentes propriétés statistiques, il n'y a pas de raison de changer les poids centraux produisant ces estimés.[3] Les polynômes implicite associés de ces nouvelles moyennes sont des droites. Si on se place dans l'optique de la figure V.1.a ci-contre, on veut "viser" avec le plus de précision possible les vrais facteurs saisonniers évoluant localement de façon linéaire (courbe S_j). Cependant il faut bien se rendre

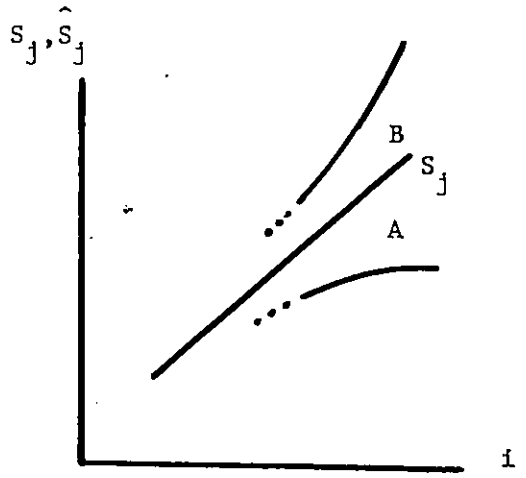


Figure V.1.a Intervalle de confiance des estimés

(2) Il s'agit des poids du bas de la matrice (3.3.1.a).
(3) Voir discussion des propriétés des moyennes saisonnières centrées de X-11 au chapitre quatre, section 4.4.2, ainsi que la note (5) de la conclusion.

compte que l'erreur ne sera plus systématiquement du même signe par rapport à la droite comme avec les poids du X-11 (surface A). Avec les nouveaux poids l'erreur perd son biais mais agrandit sa dispersion (surface A et B)[4]. C'est pourquoi le test de Student a été retenu pour déterminer la quantité d'irrégulier par rapport à la pente sur l'intervalle couvert par le polynôme implicite.

Pour répérer les différentes versions de X-11 on trouvera une lettre adjuvante:

X-11-A désigne la version non-modifiée de X-11,

X-11-B désigne la version modifiée avec la trois de trois simple et la trois de cinq simple, décrite en plus amples détails à l'appendice V.D,

X-11-C désigne la version modifiée avec la trois de trois simple et la trois de cinq composée.

5.2 AUTRES MODIFICATIONS INCORPORES A X-11

Ces autres changements sont relativement mineurs. Ils ont pour but d'homogénéiser à travers le temps le remplacement des valeurs "suspectes" ou bien "extrêmes" dans la première itération de la méthode X-11. Voici une brève description de ce procédé tel qu'il existe déjà. Le calcul de la variance des irréguliers a lieu sur des intervalles successifs de cinq ans. Ces intervalles se déplacent d'un an à la fois. L'année centrale (la troisième) de chaque intervalle reçoit le résultat. Pour les deux années de chaque extrémité il y a répétition de la première et de la dernière variance "centrale" calculée.

(4) C'est d'ailleurs pourquoi les fonctions de gain de ces filtres indiquent un plus grand passage des fréquences irrégulières.

$$(5.2.a)\quad \partial^2_{Ii} = \frac{1}{59}\sum_{k=-29}^{29}(I_{12i-6+k} - E(I))^2,\ i=3,\ldots,I-2,$$

$$\partial^2_{Ii} = \partial^2_{I3},\ i=1,2,$$

$$\partial^2_{Ii} = \partial^2_{II-2},\ i=I-1,I,$$

où E(I) vaut zéro ou un, selon qu'il s'agisse du modèle additif ou multiplicatif. Ces variances annuelles se calculent une seconde fois, mais en excluant les irréguliers éloignés de leur espérance par plus de $2.5\partial_{Ii}$, où ∂_{Ii} égale la racine carrée de ∂^2_{Ii} du premier calcul.(5)

A partir de là se calculent les coefficients de pondération des observations devant refléter la crédibilité relative des observations:

$$(5.2.b)\quad w_{12(i-1)+j} = 0.0 \text{ si } |I_t - E(I)| > 2.5\,\partial_{Ii},$$

$$w_{12(i-1)+j} = 1.0 \text{ si } |I_t - E(I)| < 1.5\,\partial_{Ii},$$

$$w_{12(i-1)+j} = \frac{2.5}{2.5 - 1.5} - \frac{|I - E(I)|}{(2.5 - 1.5)\partial_{Ii}},$$

$$\text{si } 1.5\partial_{Ii} < |I_t - E(I)| < 2.5\partial_{Ii}, i=1,\ldots,I,\ j=1,\ldots,12.$$

(5) Evidemment cette deuxième reprise des calculs (5.2.a) a comme dénominateur non plus nécessairrement 59, mais le nombre d'irrégulier en deça de $2.5\partial_{Ii}$ restant dans l'intervalle.

Ce procédé s'illustre plus facilement à l'aide de la figure V.2.a, où les coefficients de pondération w_t reçoivent les valeurs représentées par la ligne brisée ABCD. La génération de ces coefficients constitue une étape préléminaire au remplacement proprement-dit des valeurs suspectes ou extrêmes. Dans les versions modifiées nous avons remplacé les valeurs 2.5 et 1.5, dites "bornes sigmas", par les valeurs 2.5 et 2.0 pour deux raisons, l'une théorique, l'autre empirique. En effet supposant une distribution normale pour (I-E(I)), la loi de Gauss nous rappelle que 95 % des observations tomberont à l'intérieur de $\pm 1.96\sigma_I$; et 86.64 %, à l'intérieur de $\pm 1.50\sigma_I$. Dans ce dernier cas près de 14 % des irréguliers seront affectés et identifiés comme <u>suspects</u> (entre 1.5 et 2.5 ∂_I) ou <u>extrêmes</u> (plus de $2.5\partial_I$), ce qui est selon nous une perte d'information trop considérable. La raison empirique: les estimations de séries artificielles (dont on connaît alors les composantes) ont été souvent plus fidèles avec les bornes sigmas élargies; et cela, même sans changer quoi que ce soit d'autre à la méthode.

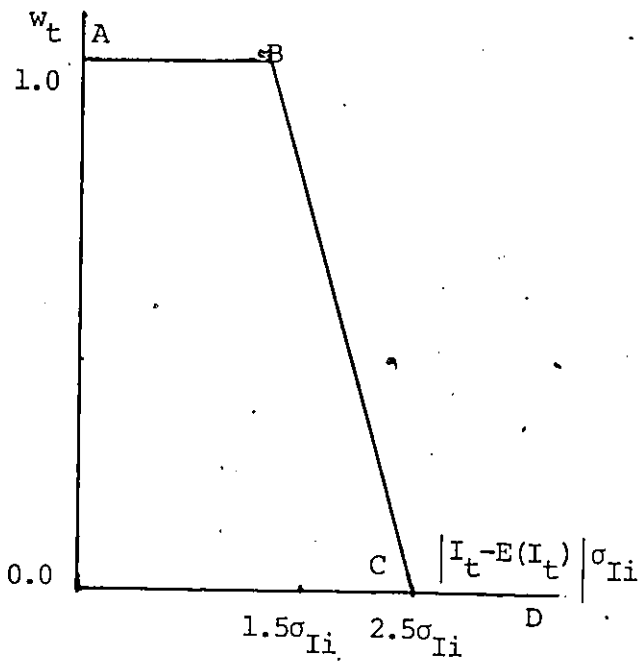


Figure V.2.a: Génération des coefficients de pondération

La deuxième étape du processus de remplacement des valeurs suspectes et extrêmes (à pondération inférieure à un) constitue une sorte d'interpolation par une moyenne simple de quatres valeurs voisines (deux de chaque côté) à pleine pondération ou de trois valeurs voisines à pleine pondération d'un seul côté aux extrémités de la série. Lorsque les valeurs voisines à pleine pondération se trouvent symétriquement distribuées par rapport à la valeur à remplacer, la moyenne simple interpole à la façon d'une droite comme illustré dans la figure V.2.b. Les valeurs A, B, F et G ont plein poids (1.0); et les valeurs C, D, E et H, poids zéro. Le remplacement de D par D' est raisonnable, car D' se situe sur le prolongement de la ligne ABFG. Tel n'est pas le cas pour C et E qui sont remplacées par C' et E' à cause de la position temporelle asymétrique des valeurs voisines à plein poids. La situation se gâte davantage à l'extrémité avec H remplacé par H' (moyenne des trois valeurs à plein poids B, F et G) qui s'avère encore plus extrême que H. L'amélioration apportée par nous a donc ici consisté à extrapoler au moyen d'une droite établie par les moindres carrés ordinaires, ce qui tient compte de la position temporelle des observations, et génère les valeurs de remplacement C'', E'' et H'' toutes sur la ligne passant par A, B, F et G.

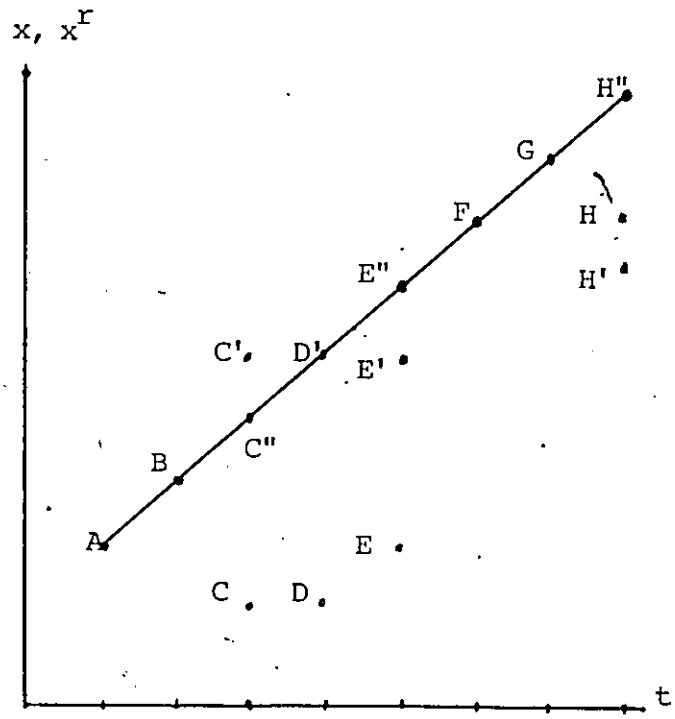


Figure V.2.b: Remplacement des valeurs suspectes et extrêmes par moyenne simple

Le processus total de remplacement est une combinaison des deux étapes décrites:

$$(5.2.c) \quad x_t^r = \frac{[x_t] + w_t\, x_t}{3 \text{ ou } 4 + w_t},^{(6)}$$

où x_t^r et x_t sont les valeurs remplacées et à remplacer, et $[x_t]$ désigne la somme des trois ou quatres valeurs voisines à plein poids. On voit que (5.2.c) s'approche d'une moyenne simple à mesure que le coefficient de pondération w_t tends vers un ou zéro (cas illustré dans la figure V.2b), et devient de plus en plus une moyenne pondérée, quand w_t s'éloigne de un ou zéro. Avec la modification apportée par nous au procédé d'interpolation, le signe $[x_t]$ désigne la valeur interpolée au moyen de la droite passant par les valeurs voisines à plein poids, multipliée par quatre (ou trois s'il s'agit d'une extrémité), et il faut lire dans la phrase précédente "moindres carrés ordinaires" au lieu de "moyenne simple" et "moindres carrés pondérés" au lieu de "moyenne pondérée".

Dans les deuxième et troisième itérations, les irréguliers ($\hat{I}_t$) et coefficients de pondération (w_t) sont donnés et proviennent de l'itération antérieure. Le remplacement des valeurs suspectes et extrêmes se résume à ceci:

$$(5.2.d) \quad D_t I_t^r = D_t I_t (1.0 + w_t(\hat{I}_t - 1.0)) / \hat{I}_t \text{ (modèle multiplicatif)},$$

$$D_t + I_t^r = (D_t + I_t) - \hat{I}_t(1.0 - w_t) \text{ (modèle additif)},$$

où D désigne la partie déterministe de la série O. Dans les deux cas il apparaît que les valeurs remplacées (avec indice r) tendent vers $\hat{D}_t^{(7)}$ de l'itération antérieure à mesure que w_t approche de zéro.

(6) Le dénominateur vaut $(3+w_t)$, si il s'agit d'une valeur aux extrémités; et $(4+w_t)$ autrement.

(7) Par exhaustivité des composantes on a $DI / \hat{I} = \hat{D}$.

5.3 MESURE DES PERFORMANCES DES VERSIONS MODIFIEES DE X-11 AVEC SERIES ARTIFIELLES

Il s'agit ici de mesurer les performances relatives de chaque version de X-11. Pour cela on leur soumet plusieurs réalisations d'une même série artificielle. La connaissance des vrais composantes permet la mesure de de l'erreur. Les formules algébriques suivantes décrivent exactement les composantes de cette série.

(5.3.a) $C_t = 200 + 2t + 0.00197t^2 + 150 \sin(\frac{2\pi t}{48})$, t=121,...,276 (1963 à 1975),

(5.3.b) $S_{i1} = 138.45 - 2.00(i)$, i=1,...,13 (1963 à 1975),

$S_{i2} = 143.16 - 2.00(i)$, i=1,...,13,

$S_{i3} = 141.20 - 1,00(i)$, i=1,...,13,

$S_{i4} = 124.08 - 1.50(i)$, i=1,...,13,

$S_{i5} = 91.22 + 0.50(i)$, i=1,...,13,

$S_{i6} = 78.62 + 1.00(i)$, i=1,...,13,

$S_{i7} = 77.82 + 1.00(i)$, i=1,...,13,

$S_{i8} = 73.97 + 1.50(i)$, i=1,...,13,

$S_{i9} = 68.53 + 2.00(i)$, i=1,...,13,

$S_{i10} = 73.94 + 2.00(i)$, i=1,...,13,

$S_{i11} = 86.51 - 0.50(i)$, i=1,...,13,

$S_{i12} = 102.50 - 1.00(i)$, i=1,...,13,

(5.3.c) $I_t \approx N(\mu=1.00, \sigma=0.03)$,

(5.3.d) $O_t = C_t\ S_t\ I_t$.(8)

(8) S_{ij} s'exprime en pourcentage dans (5.3.b), mais non dans (5.3.d).

Les trois premiers termes du membre de droite de (5.3.a) décrivent une tendance semblable à celles observées pour un grand nombre de séries économiques. Le dernier terme de cette équation représente le cycle des affaires d'amplitude 150 et de périodicité 48 mois. Certains cycles d'affaires observés voisinent cette durée[9]. Les facteurs saisonniers de (5.3.b) varient avec l'année. Leurs ordonnées à l'origine (partie stable) sont un échantillon d'une année de facteurs saisonniers calculés par la méthode X-11 pour la série du sous-emploi canadien. L'ordre de grandeur des pentes (comprises entre -2.00 et 2.00) peut également s'observer empiriquement dans la partie historique d'un grand nombre de séries à saisonnalité mobile. L'équation (5.3.c) décrit un irrégulier normalement distribué de moyenne 1.0 et d'écart type 0.03[10]. Cet écart type implique (sous l'hypothèse de normalité) que 95 % des valeurs prises par l'irrégulier tomberont dans un intervalle de ±0.06 (≃±1.96×0.03) autour de leur espérance 1.0, ce qui se vérifie dans un grand nombre de cas empiriques. La série (5.3.d.) constitue donc une série "réaliste". Cent réalisations différentes de la série, ou processus stochastique, ont été obtenues par la composition (5.3.d) de cent réalisations de l'irrégulier avec la même partie déterministe.

Pour une réalisation donnée de la série (5.3.d) se trouvent en appendice V.A les facteurs saisonniers estimés au moyen des trois versions de X-11 (X-11-A, -B et -C) ainsi que les erreurs d'estimation par rapport aux facteurs saisonniers connus (5.3.b). Les variances et les moyennes absolues

(9) C'est-à-dire qu'il se produit sur un segment donnée de certaines séries que le cycle des affaires dure environ 48 mois.

(10) La dispersion de l'irrégulier calculé sur cette série sera réduite d'un tiers environ à cause de l'effet de Slutsky (voir section 4.4). X-11 sous-estime l'irrégulier en passant ses fluctuations de longue période aux composantes systématiques de la série.

des erreurs ("écarts absolus moyens") y apparaissent au bas de chaque colonne d'erreurs. Puisqu'il s'agit d'améliorer les performances des poids terminaux ces mêmes statistiques se répètent pour les 48 dernières observations (incluant les douze de prévision) et les 36 premières.(11)

L'examen de l'appendice V.A indique que la méthode X-11-B (de même que X-11-C) produit pour la série en question des erreurs d'estimation plus petites que X-11-A (méthode non-modifiée). Pour toute la longueur de la série l'écart absolu moyen (grandeur moyenne des erreurs) produit par la première mesure 1.40 contre 1.68 pour la seconde. L'amélioration devient encore plus substantielle aux extrémités de la série. On lit 1.59 pour X-11-B contre 2.38 pour X-11-A aux 48 dernières observations, soit une amélioration de 33 %; et, 1.67 contre 2.00 aux 36 premières, amélioration de 17 %(12). Pour chacune des cent réalisations différentes de cette série, l'appendice V.B(A) compile les écarts absolus moyens produits par les trois méthodes, ainsi que leurs différences avec ceux produits par X-11-A. Y apparaissent également les moyennes algébriques des écarts absolus moyens et de leurs différences, les écarts types de ces moyennes algébriques ainsi que les valeurs calculées de Student, qui testent le niveau de signification des moyennes algébriques des écarts par rapport à zéro. La "comparaison des écarts absolus moyens relatifs à toute la série" de l'appendice montre que X-11-A produit, en moyenne sur cent réalisations de la série, une moyenne des écarts de 1.68; X-11-B, une de 1.51 (amélioration de 10 %); et X-11-C, une de 1.55. La différence moyenne (-0.17) observée entre les

(11) Les poids terminaux des moyennes mobiles saisonnières s'appliquent aux 36 premières et dernières observations de la série (exçluant la prévision).
(12) Nous ne commentons pas toujours les résultats relatifs à X-11-C parce qu'inférieurs à ceux de X-11-B, quoique supérieurs à ceux de X-11-A.

écarts absolus moyens de X-11-B et X-11-A diffère de zéro avec une probabilité équivalant en pratique à la certitude (Student égal à -16.30). Il en va de même avec X-11-C. Pour les 48 dernières observations les améliorations sont encore plus considérables. Ecart moyen de X-11-A sur les cent réalisations, 2.48; de X-11-B, 2.17 (amélioration de 12 %); de X-11-C, 2.25. Différence moyenne entre les écarts de X-11-B et X-11-A de -0.31, différente de zéro avec certitude (Student de -10.53); entre X-11-C et X-11-A, -0.23 (Student de -10.78). Pour les 36 premières observations palmarès semblable, dont une amélioration de 17 % dans l'erreur apportée par X-11-B.

La supériorité des performances de X-11-B sur X-11-A s'accroît davantage si on rétrécit l'écart type de l'irrégulier. La même expérience avec la même série mais incorporant cent réalisations d'un irrégulier d'écart 0.02 au lieu de 0.03 est également résumée à l'appendice V.B(B). Pour toutes les observations l'écart moyen (sur les cents réalisations) de X-11-A devient 1.49 contre 1.15 pour X-11-B, soit une amélioration de 23 %, et 1.27 pour X-11-C. Tests sur la différence moyenne des écarts, très significatifs: Student -36.02 pour X-11-B et -28.09 pour X-11-C. Pour les 48 dernières observations on calcule des écarts moyens (sur les cent réalisations) de 2.36, 1.66 et 1.98 respectivement pour X-11-A, -B et -C, amélioration de 30 % apportée par X-11-B. Tests sur les différences très significatifs avec des Student de -26.12 et -25.65. Résultats tout aussi encourageants pour les 36 premières observations: réduction de 42 % de l'erreur grâce à X-11-B.

Par contre si on élargit la variance des irréguliers les méthodes X-11-A, -B et -C convergent, comme l'illustre également l'appendice V.B(C) avec cent nouvelles réalisations de la série incorporant cette fois un irrégulier d'écart

type 0.05. Les moyennes des différences observées ne sont plus toujours significativement différentes de zéro selon les Student calculées: -1.17, -2.43, 0.08, -1.27, -1.77, -2.81, (le seuil d'acceptation au niveau de signification 5 % étant ±1.96). En effet les moyennes des écarts absolus moyens sur cent réalisations de la série se voisinent: 2.16, 2.14, 2.13, 2.81, 2.82, 2.77, 2.42, 2.37 et 2.35. On se souviendra que cette convergence faisait l'objet du test de Student incorporé aux nouvelles moyennes mobiles à la section 5.1.

De ces expérimentations avec trois cent séries à trois niveaux de variance ressort la supériorité de la méthode X-11-B sur la méthode X-11-A. En effet la première estime mieux la saisonnalité mobile que la seconde.

5.4 MESURES DES PERFORMANCES DES VERSIONS DE X-11 AVEC DES SERIES REELLES

Cependant des essais conduits sur des séries réelles n'ont pas toujours confirmé ces résultats, du moins statistiquement parlant. Ne connaissant pas pour les séries réelles les "vrais" facteurs saisonniers, on a supposé que les facteurs saisonniers "finaux" en constituaient une bonne approximation. Par facteurs saisonniers "finaux" on entend que trois années de données brutes se sont ajoutés à la série brute(13), de sorte à ce que les poids centraux de moyennes mobiles saisonnières aient servi à estimer les facteurs saisonniers initialement considérés faire partie de la dernière année de la série. Par exemple on compare les facteurs saisonniers de la "dernière" année 1962 ($S^{62\ A}_{62,j}$, j=1,...,12) – les indices 62 et A du haut indiquant que les données se

(13) Empiriquement on observe que les facteurs saisonniers "vieux" de quatre ans sont stables, c'est-à-dire varient de façon très négligeable suite à l'addition de nouvelles années d'observations à la série brute.

termine en 1962 dans l'ajustement saisonnier produisant ce facteur par la méthode A[14] – avec ceux de la même année 1962 mais provenant d'un ajustement où trois années de données brutes se sont incorporées: $(S_{62,j}^{62+3\ A},\ j=1,\ldots,12)$. De même on compare les facteurs de 1963 provenant de l'ajustement incorporant des données jusqu'en 1963 $(S_{63,j}^{63\ A},\ j=1,\ldots,12)$ avec ceux de cette même année provenant d'un ajustement incorporant des données jusqu'en 1966: $(S_{63,j}^{63+3\ A},\ j=1,\ldots,12)$; et ainsi de suite. Ces comparaisons, en fait les différences

(5.4.a) $E_{ij}^{0,3\ A} = (S_{ij}^{i+0\ A} - S_{ij}^{i+3\ A}),\ i=i_o-0,\ldots,I-3,\ j=1,\ldots,12,$ [15]

mesurent les erreurs des poids finaux superposés de la méthode A. Pour la méthode B on calcule les erreurs de la même façon:

(5.4.a') $E_{ij}^{0,3\ B} = (S_{ij}^{i+0\ B} - S_{ij}^{i+3\ B}),\ i=i_o-0,\ldots,I-3,\ j=1,\ldots,12.$

Les moyennes abosulues mensuelles de ces erreurs mesurent la grandeur moyenne de l'erreur des poids finaux superposés de chaque méthode pour chaque mois:

(5.4.b) $|E^{0,3}|_{.j}^{A} = \frac{1}{n}\sum_i |E_{ij}^{0,3\ A}|,\ j=1,\ldots,12,$

(5.4.b') $|E^{0,3}|_{.j}^{B} = \frac{1}{n}\sum_i |E_{ij}^{0,3\ B}|,\ j=1,\ldots,12.$

Pour tous les mois les erreurs moyennes s'écrivent

(5.4.c.) $|E^{0,3}|_{..}^{A} = \frac{1}{12}\sum_j |E^{0,3}|_{.j},$

(5.4.c') $|E^{0,3}|_{..}^{B} = \frac{1}{12}\sum_i |E^{0,3}|_{.j}.$

(14) On désignera parfois simplement "A" la méthode X-11-A et "B" la méthode X-11-B.

(15) Si par exemple la série commence en 1953, i_o est arbitrairement posé à 1962, de sorte à ce qu'il y ait au moins sept années dans le "premier" ajustement.

Afin de connaître la signification statistique des différences entre les erreurs mensuelles moyennes prises collectivement et issues des deux méthodes, on recourt au test non-paramétrique rang-signe de Wilcoxon[16], qui produit deux statistiques

(5.4.d) $T^{+}(|E^{0,3}|^{A}_{.j} - |E^{0,3}|^{B}_{.j}, j=1,\ldots,12)$.

$T^{-}(|E^{0,3}|^{A}_{.j} - |E^{0,3}|^{B}_{.j}, j=1,\ldots,12)$.

Les moyennes algébriques mensuelles des erreurs $E^{0,3}_{ij}$ (A et B) mesurent les biais associés à chaque mois, produits par les méthode A et B:

(5.4.e) $E^{0,3\ A}_{.j} = \frac{1}{n} \sum_{i} E^{0,3\ A}_{ij}$, $j=1,\ldots,12$,

(5.4.e') $E^{0,3\ B}_{.j} = \frac{1}{n} \sum_{i} E^{0,3\ B}_{ij}$, $j=1,\ldots,12$.

Les moyennes absolues de ces moyennes algébrique mesurent la grandeur moyenne du biais (des poids finaux superposés) produit par la méthode considérée (quand elle est appliquée à la série considérée):

(5.4.f) $|E^{0,3}_{.}|^{A}_{.} = \frac{1}{12} \sum_{j} |E^{0,3\ A}_{.j}|$,

(5.4.f') $|E^{0,3}_{.}|^{B}_{.} = \frac{1}{12} \sum_{j} |E^{0,3\ B}_{.j}|$.

(16) Voir Hollander, M. et Wolfenden, A.D. (1973, p. 27-33, 269-270). Brièvement le test de Wilcoxon consiste à ordonner les différences par ordre de grandeur absolue et à assigner un rang aux différences ainsi ordonnées. Le signe de la valeur de rangement est le même que celui de la différence originale correspondante. T^{+} est la somme des rangs positifs; et T^{-}, celle des rangs négatifs. Les valeurs nulles ont été exclues et n'ont reçu aucun rang. On accepte l'hypothèse que les différences sont positives, c'est-à-dire favorables à la méthode B, si T^{+} dépasse la valeur tabulée sous le nombre de degrés de liberté approprié et le niveau de signification choisi. On accepte que les différences sont statistiquement négatives si T^{-} dépasse la même valeur tabulée.

La signification statistique des différences entre les biais mensuels homologues considérés collectivement et issues des deux différentes méthodes se teste au moyen des statistiques de Wilcoxon:

(5.4.g) $T^{+}(E^{0,3\ A}_{.j} - E^{0,3\ B}_{.j}, j=1,\ldots,12)$.

$T^{-}(E^{0,3\ A}_{.j} - E^{0,3\ B}_{.j}, j=1,\ldots,12)$.

Pour mesurer et comparer les biais et erreurs produits par les poids de prévision superposés des deux méthodes, les statistiques (5.4.a à g) se répètent en substituant -1 à 0.

L'appendice V.C montre quelques-unes des mesures et statistiques obtenues pour les différentes séries testées, notamment les erreurs absolues moyennes (5.4.c et c'), les Wilcoxon (5.4.d) comparant l'ensemble des erreurs absolues moyennes mensuelles (5.4.b et b') issu des deux méthodes, de même que les biais moyens (5.4.f et f') et les statistiques de Wilcoxon (5.4.g) ayant trait à la comparaison des biais mensuels (5.4.e et e').

Les séries sont classées en trois groupes selon la réduction ou l'augmentation du biais et de l'erreur associés aux poids finaux, mesurés en comparant les performances des méthodes X-11-A et B. Le groupe un comprend les séries pour lesquelles le biais moyen se trouvent réduit, de même que l'erreur moyenne, avec la méthode X-11-B:

(5.4.h) $(|E^{0,3}_{.}|^{B}_{.} / |E^{0,3}_{.}|^{A}_{.} - 1.0) \leq 0.0,\ (|E^{0,3}|^{B}_{..} / |E^{0,3}|^{A}_{..} - 1.0) \leq 0.0.$

Le groupe deux inclut les séries pour lesquelles le biais se trouve réduit mais l'erreur augmentée:

(5.4.i) $(|E^{0,3}_{.}|^{B}_{.} / |E^{0,3}_{.}|^{A}_{.} - 1.0) \leq 0.0,\ (|E^{0,3}|^{B}_{..} / |E^{0,3}|^{A}_{..} - 1.0) > 0.0.$

Et enfin le groupe trois comprend les autres séries dont le biais augmente avec la méthode B:

(5.4.j) $(|E_{.}^{0,3}|_{.}^{B} / |E_{.}^{0,3}|_{.}^{A} - 1.0) > 0.0.$

L'appendice V.C. révèle que 28 des cent séries testées (groupe un) ont vu leur biais saisonnier ainsi que leur erreur moyenne d'estimation réduits avec la méthode X-11-B. Selon les statistiques T^{+} de Wilcoxon les réductions de biais sont significatives à des niveaux compris entre 0.10 et 0.05 pour 3 séries; et, à des niveaux inférieurs ou égaux à 0.05 pour 19 séries. Pour les 6 autres du groupe on ne peut statistiquement rien conclure. Quant à la réduction de l'erreur ces chiffres deviennent respectivement 2, 4 et 22. Il apparaît donc déjà que X-11-B réduit plus facilement et de façon plus significative le biais que l'erreur.

Enfin avant de conclure avec les séries du groupe un, il convient de relever quelques séries dont le biais et l'erreur furent améliorées de façon spectaculaire par la méthode X-11-B. On remarque la série "Salaires et traitements" (2.) dont le biais baisse de 33 % et l'erreur de 14 %; la série "Chômage, 14-24 ans" (5.), ajustée additivement, où les réductions se chiffrent respectivemnt à 59 % et 5 %; la série "Main d'oeuvre masculine" (7.), 49 % et 17 %; la série "Chômage" (24.) ajustée additivement, 58 % et 17 %; la série "Chômage, 14-24 ans" (27.) ajustée multiplicativement, 66 % et 10 %; "Chômage" (23.) (multiplicatif), 58 % et 17 %; "Commerce de détail" (14.), 38 % et 20 %; et "Production électrique" (21.), 41 % et 31 %. A remarquer qu'il s'agit surtout là de séries à saisonnalité mobile, ce qui indique que la méthode modifiée fonctionne dans le sens où nous l'espérions.

Les séries du groupe deux au nombre de 53 ont leur biais réduit par la méthode X-11-B mais non leur erreur. Pour 5 d'entre elles la réduction du biais est significative (selon les T^+) à des niveaux de signification compris entre 0.10 et 0.05; pour 18 d'entre elles le niveau de siginification est inférieur ou égal à 0.05; et pour 30 le test ne s'avère pas concluant. Quant à l'augmentation de l'erreur (statistiques T^-) les chiffres deviennent 5, 24 et 24 pour les mêmes seuils de signification. Cependant à l'examen de l'appendice V.C. pour le groupe deux, le lecteur se rendra compte que même si l'augmentation de l'erreur est souvent minime en valeur absolue, elle se traduit parfois par une augmentation pourcentuelle considérable et par un T^- significatif. C'est le cas des séries "Emploi féminin, Prairies" (11.), "Emploi, Atlantique" (21.), "Emploi, Québec" (23.), "Emploi, Colombie-Britannique" (34.), Prix des aliments" (44.), "Loyers" (41.), et d'autres. Il semble s'agir là de séries déjà très bien ajustées par la méthode X-11-A (non-modifiée) du point de vue de la taille de l'erreur, et donc, de séries difficilement "améliorables".

Il est également à noter que plusieurs séries du groupe deux ont leur biais tellement réduit en comparaison de l'augmentation de l'erreur, qu'il serait préférable de les ajuster selon la méthode X-11-B (modifiée). C'est le cas des séries "Emploi, Etats-Unis" (37.), ajustée multiplicativement, "Emploi, Etats-Unis" (39.), ajustée additivement, "Emploi masculin, Canada" (15.); "Emploi, Ontario" (26.), "Vente d'assurance-vie" (48.), et d'autres. Il appartiendrait alors aux responsables de l'ajustment des différentes séries de décider de la méthode à employer. Dans la figure V.4.a dont la présentation suivra, on a par exemple tracé une ligne qui départage les séries dont la correction du biais vaut au moins le double de la détérioration de l'erreur.

Les séries pour lesquelles la méthode X-11-B n'améliore pas le biais se retrouvent dans le groupe trois au nombre de 19. Remarquer que les détériorations survenues sont petites sinon en pourcentage (tel que présenté) du moins en valeur absolues. Il s'sgit pour la plupart de séries déjà très biens traitées (biais et erreurs petits) par la méthode X-11-A, comme les séries "Actifs de la banque du Canada" (1.), "Dépôts et monnaie dans les banques à charte" (2.), "Epargnes personnelles dans les banques à charte" (3.), "Naissances" (8.) et d'autres. Ceci indique que les deux méthodes donnent des résultats à peu près identiques pour les séries à saisonnalité stable, comme nous l'espérions.

La figure V.4.a résume bien les résultats obtenus avec les cent séries réelles de l'appendice V.C. Les 28 séries du groupe un, améliorées du point de vue du biais et de l'erreur par la méthode X-11-B, se trouvent représentées dans le quadrant III de la figure V.4.a. Les 53 séries du groupe deux, améliorées du point de vue du biais mais non de l'erreur se retrouvent dans le quadrant II. Et les 19 séries du groupe trois, qui subissent une détérioration du biais sont dans les quadrants I et IV. De ces 19 séries quatre subissent une légère amélioration de l'erreur (quadrant IV) et pourtant une détérioration du biais.

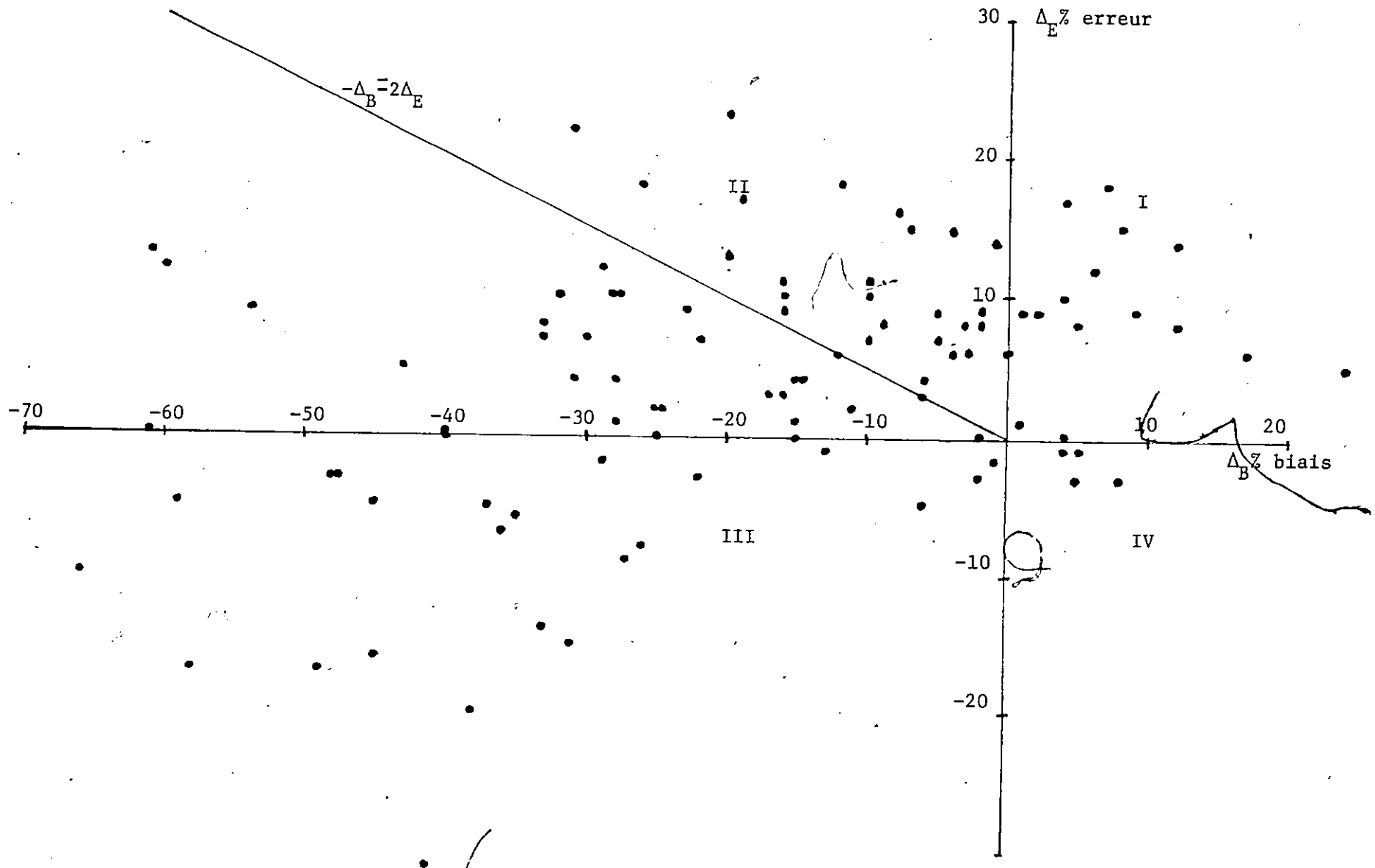


Figure V.4.a Changements de biais et d'erreur apportés par la méthode X-11-B (comparant à X-11-A) dans l'estimation des facteurs saisonniers de cent séries réelles

Appendice V.A. Comparaison des facteurs saisonniers obtenus selon les trois méthodes appliquées à une réalisation d'une série artificielle

		VRAIS	X-11-A (ERREURS)		X-11-B (ERREURS)		X-11-C (ERREURS)	
1963	1	136.45	130.31	-6.14	132.69	-3.76	132.82	-3.63
1963	2	141.16	141.41	0.25	141.83	0.67	141.96	0.80
1963	3	140.20	135.89	-4.31	138.15	-2.05	136.32	-3.88
1963	4	122.58	120.19	-2.39	120.23	-2.35	120.35	-2.23
1963	5	91.72	92.37	0.65	92.45	0.73	92.54	0.82
1963	6	79.62	82.89	3.27	82.96	3.34	83.04	3.42
1963	7	78.82	79.10	0.28	77.39	-1.43	79.29	0.47
1963	8	75.47	77.35	1.88	77.58	2.11	77.65	2.18
1963	9	70.53	76.00	5.47	76.43	5.90	76.61	6.08
1963	10	75.94	80.08	4.14	75.24	-0.70	74.12	-1.82
1963	11	86.01	85.27	-0.74	85.98	-0.03	85.99	-0.02
1963	12	101.50	99.28	-2.22	99.61	-1.89	99.61	-1.89
1964	1	134.45	130.13	-4.32	132.34	-2.11	132.40	-2.05
1964	2	139.16	141.48	2.32	141.91	2.75	142.04	2.88
1964	3	139.20	135.80	-3.40	137.07	-2.13	136.24	-2.96
1964	4	121.08	119.65	-1.43	119.66	-1.42	119.75	-1.33
1964	5	92.22	92.50	0.28	92.49	0.27	92.53	0.31
1964	6	80.62	82.76	2.14	82.74	2.12	82.78	2.16
1964	7	79.82	79.34	-0.48	78.47	-1.35	79.41	-0.41
1964	8	76.97	77.75	0.78	77.86	0.89	77.89	0.92
1964	9	72.53	76.46	3.93	76.78	4.25	76.91	4.38
1964	10	77.94	80.46	2.52	77.31	-0.63	76.65	-1.29
1964	11	85.51	85.17	-0.34	85.74	0.23	85.73	0.22
1964	12	100.50	99.19	-1.31	99.32	-1.18	99.30	-1.20
1965	1	132.45	129.61	-2.84	131.40	-1.05	131.39	-1.06
1965	2	137.16	141.21	4.05	141.44	4.28	141.47	4.31
1965	3	138.20	135.54	-2.66	135.82	-2.38	135.73	-2.47
1965	4	119.58	118.64	-0.94	118.57	-1.01	118.59	-0.99
1965	5	92.72	92.78	0.06	92.97	0.25	92.96	0.24
1965	6	81.62	82.51	0.8_	82.42	0.80	82.42	0.80
1965	7	80.8.	80.00	-0.82	79.59	-1.23	79.99	-0.83
1965	8	78.47	78.48	0.01	78.50	0.03	78.49	0.02
1965	9	74.53	77.51	2.98	77.67	3.14	77.76	3.23
1965	10	79.94	81.35	1.41	79.46	-0.48	79.15	-0.79
1965	11	85.01	85.05	0.04	85.61	0.60	85.60	0.59
1965	12	99.50	99.08	-0.42	99.00	-0.50	98.98	-0.52
1966	1	130.45	128.61	-1.84	129.72	-0.73	129.72	-0.73
1966	2	135.16	140.08	4.92	140.15	4.99	140.17	5.01
1966	3	137.20	134.75	-2.45	134.75	-2.45	134.78	-2.42
1966	4	118.08	117.58	-0.50	117.52	-0.56	117.54	-0.54
1966	5	93.22	93.29	0.07	93.66	0.44	93.66	0.44
1966	6	82.62	82.31	-0.31	82.16	-0.46	82.15	-0.47
1966	7	81.82	80.92	-0.90	80.85	-0.97	80.85	-0.97
1966	8	79.97	79.61	-0.36	79.51	-0.46	79.50	-0.47
1966	9	76.53	78.85	2.32	78.65	2.32	78.92	2.39
1966	10	81.94	82.70	0.76	81.69	-0.25	81.68	-0.26
1966	11	84.51	84.61	0.10	85.15	0.64	85.15	0.64
1966	12	98.50	98.43	-0.07	98.17	-0.33	98.16	-0.34

		VRAIS	X-11-A	(ERREURS)	X-11-B	(ERREURS)	X-11-C	(ERREURS)
1967	1	128.45	127.60	-0.85	128.21	-0.24	128.18	-0.27
1967	2	133.16	138.37	5.21	138.33	5.17	138.32	5.16
1967	3	136.20	133.66	-2.54	133.55	-2.65	133.55	-2.65
1967	4	116.58	116.68	0.10	116.70	0.12	116.70	0.12
1967	5	93.72	93.82	0.10	94.42	0.70	94.42	0.70
1967	6	83.62	82.14	-1.48	81.96	-1.66	81.96	-1.66
1967	7	82.82	82.39	-0.43	82.29	-0.53	82.30	-0.52
1967	8	81.47	81.10	-0.37	80.94	-0.53	80.94	-0.53
1967	9	78.53	80.56	2.03	80.45	1.92	80.49	1.96
1967	10	83.94	84.23	0.29	83.76	-0.18	83.76	-0.18
1967	11	84.01	84.30	0.29	84.69	0.88	84.89	0.88
1967	12	97.50	97.73	0.23	97.40	-0.10	97.40	-0.10
1968	1	126.45	126.20	-0.25	126.36	-0.09	126.31	-0.14
1968	2	131.16	135.80	4.64	135.71	4.55	135.71	4.55
1968	3	135.20	132.25	-2.95	132.10	-3.10	132.09	-3.11
1968	4	115.08	115.97	0.89	116.13	1.05	116.13	1.05
1968	5	94.22	94.33	0.11	94.94	0.72	94.94	0.72
1968	6	84.62	82.45	-2.17	82.30	-2.32	82.30	-2.32
1968	7	83.82	83.87	0.05	83.77	-0.05	83.79	-0.03
1968	8	82.97	82.81	-0.16	82.64	-0.33	82.65	-0.32
1968	9	80.53	82.36	1.83	82.25	1.72	82.28	1.75
1968	10	85.94	86.07	0.13	85.81	-0.13	85.82	-0.12
1968	11	83.51	84.03	0.52	84.56	1.05	84.56	1.05
1968	12	96.53	96.62	0.12	96.29	-0.21	96.29	-0.21
1969	1	124.45	124.69	0.24	124.84	0.39	124.69	0.24
1969	2	129.16	132.70	3.54	132.48	3.32	132.50	3.34
1969	3	134.20	131.01	-3.19	130.82	-3.38	130.82	-3.38
1969	4	113.58	115.29	1.71	115.44	1.86	115.46	1.88
1969	5	94.72	94.62	-0.10	95.22	0.50	95.24	0.52
1969	6	85.62	83.19	-2.43	83.03	-2.59	83.05	-2.57
1969	7	84.62	85.43	0.81	85.38	0.56	85.41	0.59
1969	8	84.47	84.60	0.13	84.47	0.0	84.49	0.02
1969	9	82.53	84.12	1.59	84.06	1.53	84.09	1.56
1969	10	87.94	87.95	0.01	87.80	-0.14	87.82	-0.12
1969	11	83.01	83.95	0.94	84.40	1.39	84.34	1.33
1969	12	95.50	95.57	0.07	95.35	-0.15	95.34	-0.16
1970	1	122.45	122.65	0.20	122.76	0.31	122.52	0.07
1970	2	127.16	129.63	2.47	129.32	2.16	129.35	2.19
1970	3	133.20	130.03	-3.17	129.82	-3.38	129.85	-3.35
1970	4	112.08	114.28	2.20	114.42	2.34	114.50	2.42
1970	5	95.22	94.89	-0.33	95.25	0.03	95.31	0.09
1970	6	86.62	84.45	-2.17	84.34	-2.28	84.38	-2.24
1970	7	85.82	86.53	0.71	86.57	0.75	86.60	0.78
1970	8	85.97	86.43	0.46	86.37	0.40	86.40	0.43
1970	9	84.53	85.78	1.25	85.81	1.28	85.85	1.32
1970	10	89.94	90.15	0.21	90.17	0.23	90.17	0.23
1970	11	82.51	83.71	1.20	83.93	1.42	83.79	1.28
1970	12	94.50	94.58	0.08	94.58	0.08	94.54	0.04

		VRAIS	X-11-A	(ERREURS)	X-11-B	(ERREURS)	X-11-C	(ERREURS)
1971	1	120.45	120.52	0.07	120.75	0.30	120.40	-0.05
1971	2	125.16	126.86	1.70	126.15	0.99	126.17	1.01
1971	3	132.20	129.43	-2.77	129.40	-2.80	129.39	-2.81
1971	4	110.58	113.07	2.49	112.80	2.22	113.28	2.70
1971	5	95.72	94.85	-0.87	95.04	-0.68	95.09	-0.63
1971	6	87.62	85.84	-1.78	85.83	-1.79	85.86	-1.76
1971	7	86.82	87.41	0.59	87.57	0.75	87.59	0.77
1971	8	87.47	88.21	0.74	88.27	0.80	88.29	0.82
1971	9	86.53	87.28	0.75	87.45	0.92	87.47	0.94
1971	10	91.94	92.19	0.25	92.44	0.50	92.40	0.46
1971	11	82.01	83.62	1.61	83.68	1.67	83.42	1.41
1971	12	93.50	93.54	0.04	93.83	0.33	93.72	0.22
1972	1	118.45	118.45	0.0	118.88	0.43	118.45	0.0
1972	2	123.16	124.60	1.44	123.17	0.01	123.08	-0.08
1972	3	131.20	129.29	-1.91	129.63	-1.57	129.48	-1.72
1972	4	109.08	111.56	2.48	110.59	1.51	111.84	2.76
1972	5	96.22	94.81	-1.41	94.94	-1.28	94.90	-1.32
1972	6	88.62	87.30	-1.32	87.42	-1.20	87.39	-1.23
1972	7	87.82	87.71	-0.11	87.93	0.11	87.92	0.10
1972	8	88.97	89.64	0.67	90.03	1.06	90.05	1.08
1972	9	88.53	88.71	0.18	88.99	0.46	89.03	0.50
1972	10	93.94	94.19	0.25	94.59	0.65	94.52	0.58
1972	11	81.51	83.32	1.81	83.38	1.87	83.05	1.54
1972	12	92.50	92.33	-0.17	92.91	0.41	92.74	0.24
1973	1	116.45	117.02	0.57	117.79	1.34	117.31	0.86
1973	2	121.16	122.79	1.63	120.47	-0.69	119.64	-1.52
1973	3	130.20	129.47	-0.73	130.27	0.07	129.98	-0.22
1973	4	107.58	110.43	2.85	107.97	0.39	110.78	3.20
1973	5	96.72	94.71	-2.01	94.99	-1.73	94.89	-1.83
1973	6	89.62	88.42	-1.20	88.82	-0.80	88.55	-1.07
1973	7	88.82	87.85	-0.97	88.08	-0.74	88.07	-0.75
1973	8	90.47	90.73	0.26	91.64	1.17	91.66	1.19
1973	9	90.53	89.78	-0.75	90.31	-0.22	90.22	-0.31
1973	10	95.94	95.82	-0.12	96.67	0.73	96.26	0.32
1973	11	81.01	83.24	2.23	83.40	2.39	83.06	2.05
1973	12	91.50	91.34	-0.16	91.88	0.38	91.97	0.47
1974	1	114.45	115.95	1.50	116.85	2.40	116.51	2.06
1974	2	119.16	121.57	2.41	118.43	-0.73	116.32	-2.84
1974	3	129.20	129.59	0.39	130.57	1.37	130.34	1.14
1974	4	106.08	109.54	3.46	105.34	-0.74	110.04	3.96
1974	5	97.22	94.77	-2.45	95.01	-2.21	95.02	-2.20
1974	6	90.62	89.12	-1.50	90.23	-0.39	89.27	-1.35
1974	7	89.82	87.75	-2.07	87.77	-2.05	87.92	-1.90
1974	8	91.97	91.33	-0.64	93.24	1.27	93.45	1.48
1974	9	92.53	90.49	-2.04	91.60	-0.93	91.01	-1.52
1974	10	97.94	96.94	-1.00	98.71	0.77	97.45	-0.49
1974	11	80.51	82.95	2.44	83.15	2.64	82.99	2.48
1974	12	90.50	90.66	0.16	90.82	0.32	91.52	1.02

		VRAIS	X-11-A (ERREURS)		X-11-B (ERREURS)		X-11-C (ERREURS)	
1975	1	112.45	115.46	3.01	116.25	3.80	116.25	3.80
1975	2	117.16	121.03	3.87	117.30	0.14	112.98	-4.18
1975	3	128.20	129.63	1.43	130.46	2.26	130.58	2.38
1975	4	104.58	109.21	4.63	102.64	-1.94	109.85	5.27
1975	5	97.72	94.85	-2.87	94.87	-2.85	95.20	-2.52
1975	6	91.62	89.36	-2.26	91.55	-0.07	89.59	-2.03
1975	7	90.62	87.74	-3.08	87.49	-3.33	87.76	-2.86
1975	8	93.47	91.58	-1.89	94.70	1.23	95.13	1.66
1975	9	94.53	90.67	-3.86	92.74	-1.79	91.07	-3.46
1975	10	99.94	97.30	-2.64	100.47	0.53	97.66	-2.28
1975	11	80.01	82.82	2.81	82.74	2.73	82.86	2.85
1975	12	89.50	90.24	0.74	89.48	-0.02	91.03	1.53
1976	1	110.45	115.22	4.77	115.95	5.50	116.13	5.68
1976	2	115.16	120.75	5.59	116.73	1.57	109.64	-5.52
1976	3	127.20	129.65	2.45	130.41	3.21	130.69	3.49
1976	4	103.08	109.04	5.96	99.93	-3.15	109.76	6.68
1976	5	98.22	94.89	-3.33	94.80	-3.42	95.29	-2.93
1976	6	92.62	89.48	-3.14	92.86	0.24	89.76	-2.86
1976	7	91.82	87.73	-4.09	87.35	-4.47	87.98	-3.84
1976	8	94.97	91.71	-3.26	96.15	1.18	96.82	1.85
1976	9	96.53	90.77	-5.76	93.88	-2.65	91.09	-5.44
1976	10	101.94	97.49	-4.45	102.23	0.29	97.77	-4.17
1976	11	79.51	82.76	3.25	82.53	3.02	82.79	3.28
1976	12	88.50	90.03	1.53	88.14	-0.36	90.79	2.29

VARIANCE DES ERREURS:	11.08	8.54	4.93
ECART TYPE DES ERREURS:	2.25	1.88	2.22
ECART ABSOLU MOYEN:	1.88	1.40	1.68

MEMES STATISTIQUES AYANT TRAIT AUX 48 DERNIERES ET AUX 36 PREMIERES OBSERVATIONS:

VARIANCE DES ERREURS:	7.96	4.17	8.50
ECART TYPE DES ERREURS:	2.82	2.04	2.91
ECART ABSOLU MOYEN:	2.38	1.59	2.48
VARIANCE DES ERREURS:	6.70	4.61	5.17
ECART TYPE DES ERREURS:	2.59	2.15	2.27
ECART ABSOLU MOYEN:	2.00	1.67	1.76

Appendice V.B. Comparaison des erreurs absolues moyennes obtenues selon les trois méthodes sur trois cent réalisations d'une série artificielle

(A) I : N(MU=1.0, SIGMA=0.03)

COMPARAISON DES ECARTS ABSOLUS MOYENS RELATIFS A TOUTE LA SERIE

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
1	1.92	1.64	-0.28	1.77	-0.15
2	1.59	1.34	-0.24	1.47	-0.11
3	1.65	1.39	-0.26	1.45	-0.20
4	1.81	1.60	-0.21	1.77	-0.04
5	1.68	1.40	-0.28	1.68	-0.01
6	1.68	1.37	-0.32	1.42	-0.26
7	1.55	1.42	-0.12	1.48	-0.07
8	1.80	1.38	-0.42	1.57	-0.23
9	1.71	1.63	-0.08	1.64	-0.07
10	1.59	1.34	-0.26	1.25	-0.34
11	1.63	1.25	-0.38	1.41	-0.22
12	1.56	1.49	-0.07	1.48	-0.07
13	1.58	1.27	-0.31	1.45	-0.13
14	1.62	1.58	-0.04	1.48	-0.13
15	1.78	1.62	-0.15	1.65	-0.13
16	1.64	1.58	-0.06	1.61	-0.03
17	1.49	1.44	-0.05	1.52	0.03
18	2.06	1.74	-0.32	1.89	-0.17
19	1.90	1.51	-0.39	1.60	-0.30
20	1.63	1.46	-0.17	1.55	-0.08
21	1.43	1.45	0.02	1.40	-0.03
22	1.48	1.34	-0.14	1.45	-0.03
23	1.60	1.38	-0.22	1.51	-0.08
24	1.66	1.49	-0.16	1.51	-0.15
25	1.48	1.29	-0.18	1.24	-0.23
26	1.67	1.51	-0.15	1.55	-0.12
27	1.53	1.31	-0.22	1.37	-0.16
28	1.80	1.67	-0.13	1.77	-0.03
29	1.78	1.63	-0.15	1.76	-0.02
30	1.92	1.68	-0.24	1.70	-0.22
31	1.95	1.75	-0.20	1.79	-0.17
32	1.66	1.54	-0.11	1.68	0.02
33	1.57	1.28	-0.29	1.44	-0.13
34	1.60	1.47	-0.13	1.43	-0.17
35	1.50	1.38	-0.12	1.43	-0.06
36	1.50	1.40	-0.10	1.34	-0.17
37	1.75	1.54	-0.21	1.53	-0.22
38	1.97	1.86	-0.10	1.80	-0.16
39	1.77	1.79	0.03	1.78	0.01
40	1.56	1.57	0.01	1.56	0.00
41	1.79	1.50	-0.29	1.52	-0.27
42	1.50	1.43	-0.08	1.41	-0.09
43	1.81	1.56	-0.25	1.53	-0.28
44	1.61	1.71	0.10	1.54	-0.06
45	1.56	1.39	-0.17	1.60	0.04
46	1.55	1.33	-0.21	1.43	-0.12
47	1.73	1.46	-0.27	1.43	-0.30
48	1.91	1.71	-0.20	1.76	-0.15
49	1.68	1.49	-0.19	1.55	-0.13
50	1.75	1.61	-0.14	1.58	-0.16
51	1.53	1.37	-0.16	1.44	-0.09
52	1.70	1.58	-0.11	1.55	-0.14
53	1.68	1.44	-0.24	1.54	-0.13
54	1.70	1.57	-0.13	1.57	-0.13
55	1.62	1.40	-0.22	1.48	-0.14

NO. DE L'ECHANTILLON	X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
56	1.65	1.43	-0.22	1.45	-0.20
57	1.93	1.79	-0.14	1.75	-0.18
58	1.96	1.74	-0.23	1.60	-0.37
59	1.91	1.57	-0.34	1.68	-0.22
60	1.37	1.20	-0.16	1.29	-0.07
61	1.74	1.70	-0.04	1.75	0.01
62	1.30	1.32	0.03	1.27	-0.03
63	1.84	1.62	-0.22	1.65	-0.19
64	1.51	1.54	0.04	1.50	-0.00
65	1.41	1.30	-0.11	1.34	-0.07
66	1.65	1.39	-0.26	1.46	-0.19
67	1.54	1.40	-0.14	1.30	-0.24
68	1.85	1.48	-0.37	1.53	-0.32
69	1.85	1.72	-0.13	1.70	-0.15
70	1.73	1.39	-0.34	1.58	-0.15
71	1.76	1.44	-0.33	1.44	-0.32
72	1.68	1.58	-0.10	1.59	-0.10
73	1.40	1.23	-0.17	1.29	-0.11
74	1.67	1.47	-0.20	1.61	-0.06
75	1.69	1.[illegible]6	-0.23	1.51	-0.18
76	1.81	1.62	-0.18	1.66	-0.15
77	1.79	1.53	-0.26	1.54	-0.25
78	1.75	1.64	-0.11	1.61	-0.15
79	1.71	1.54	-0.17	1.64	-0.07
80	1.59	1.44	-0.15	1.53	-0.06
81	1.90	1.56	-0.33	1.59	-0.31
82	1.55	1.47	-0.09	1.39	-0.16
83	1.51	1.53	0.03	1.41	-0.09
84	1.44	1.11	-0.33	1.17	-0.26
85	1.64	1.66	0.02	1.51	-0.13
86	1.55	1.36	-0.19	1.45	-0.10
87	1.89	1.75	-0.15	1.80	-0.10
88	1.89	1.59	-0.30	1.67	-0.23
89	1.95	1.82	-0.14	1.82	-0.13
90	1.72	1.51	-0.21	1.70	-0.02
91	1.78	1.58	-0.21	1.67	-0.11
92	2.26	2.08	-0.18	2.09	-0.17
93	1.65	1.47	-0.18	1.54	-0.10
94	1.57	1.39	-0.17	1.36	-0.20
95	1.88	1.62	-0.26	1.70	-0.18
96	1.47	1.59	0.13	1.53	0.06
97	1.73	1.52	-0.21	1.61	-0.13
98	1.74	1.55	-0.19	1.57	-0.17
99	1.63	1.56	-0.07	1.45	-0.17
100	1.52	1.43	-0.09	1.44	-0.08

MOYENNES, ECARTS TYPES ET STUDENT PAR RAPPORT A ZERO DE CES MOYENNES:

1.68	1.51	-0.17	1.55	-0.14
0.02	0.02	0.01	0.02	0.01
(0.164472E-01)	(0.156250E-01)	(0.106922E-01)	(0.153501E-01)	(0.900051E-02)
102.43	96.67	-16.30	100.90	-15.10

(A) I : N(MU=1.0, SIGMA=0.03)

COMPARAISON DES ECARTS ABSOLUS MOYENS RELATIFS AUX 48 DERNIERES OBSERVATIONS

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
1	2.78	2.21	-0.57	2.59	-0.20
2	2.67	1.93	-0.73	2.29	-0.38
3	1.99	1.61	-0.38	1.64	-0.35
4	2.26	1.92	-0.34	2.42	0.16
5	2.38	1.59	-0.79	2.48	0.10
6	2.41	1.74	-0.67	1.95	-0.46
7	2.63	2.36	-0.27	2.52	-0.12
8	2.65	1.84	-0.81	2.32	-0.32
9	2.49	2.33	-0.16	2.36	-0.13
10	2.40	2.15	-0.24	2.14	-0.25
11	1.88	1.34	-0.53	1.53	-0.34
12	2.49	2.42	-0.07	2.34	-0.15
13	2.59	1.85	-0.74	2.29	-0.30
14	2.36	2.49	0.13	2.06	-0.31
15	3.11	2.92	-0.19	2.94	-0.18
16	2.56	2.53	-0.03	2.55	-0.01
17	2.04	2.03	-0.01	2.02	-0.02
18	3.46	2.59	-0.87	3.05	-0.41
19	2.96	1.96	-1.00	2.18	-0.78
20	2.02	1.81	-0.21	1.87	-0.15
21	2.45	1.96	-0.49	2.28	-0.17
22	2.22	1.80	-0.42	2.00	-0.21
23	2.01	1.61	-0.40	1.80	-0.20
24	2.33	2.14	-0.19	2.21	-0.12
25	1.83	1.90	0.07	1.66	-0.17
26	2.81	2.48	-0.33	2.44	-0.37
27	2.56	2.38	-0.19	2.30	-0.26
28	3.20	2.81	-0.39	3.03	-0.17
29	3.12	2.72	-0.41	3.02	-0.10
30	2.62	2.22	-0.40	2.26	-0.37
31	3.00	2.97	-0.03	3.03	0.03
32	2.52	2.35	-0.17	2.79	0.28
33	2.00	1.54	-0.46	1.97	-0.03
34	2.63	2.63	-0.01	2.48	-0.15
35	2.32	2.24	-0.08	2.48	0.16
36	2.19	1.77	-0.42	1.87	-0.31
37	2.72	2.68	-0.04	2.60	-0.12
38	2.62	2.30	-0.32	2.11	-0.51
39	2.69	2.58	-0.12	2.54	-0.15
40	2.10	1.90	-0.20	1.99	-0.11
41	2.74	2.33	-0.41	2.34	-0.40
42	1.84	1.71	-0.12	1.52	-0.32
43	2.58	2.18	-0.39	2.11	-0.47
44	1.86	2.54	0.67	1.96	0.09
45	2.57	2.18	-0.39	2.49	-0.08
46	1.95	1.51	-0.44	1.64	-0.31
47	2.86	2.28	-0.59	2.13	-0.74
48	3.27	2.75	-0.52	2.97	-0.30
49	2.57	1.99	-0.57	2.29	-0.28
50	2.77	2.75	-0.02	2.52	-0.25
51	2.19	1.96	-0.23	2.18	-0.01
52	2.65	2.42	-0.23	2.28	-0.37
53	2.43	2.31	-0.12	2.56	0.13
54	2.65	2.54	-0.11	2.43	-0.22
55	1.80	1.51	-0.28	1.83	0.03

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
56	2.32	2.00	-0.32	2.09	-0.23
57	2.81	2.62	-0.19	2.72	-0.09
58	2.46	2.46	0.00	2.27	-0.19
59	3.36	2.40	-0.96	2.72	-0.64
60	1.95	1.43	-0.52	1.54	-0.40
61	2.59	2.32	-0.27	2.46	-0.13
62	1.74	2.00	0.27	1.82	0.08
63	2.87	2.12	-0.74	2.30	-0.56
64	1.78	1.97	0.19	1.96	0.18
65	2.15	2.09	-0.07	2.12	-0.03
66	2.61	2.13	-0.49	2.29	-0.33
67	2.21	2.20	-0.02	1.78	-0.43
68	2.92	2.07	-0.85	2.13	-0.79
69	2.48	2.44	-0.03	2.15	-0.32
70	2.84	2.31	-0.53	2.59	-0.25
71	2.77	2.13	-0.64	2.21	-0.56
72	2.45	1.88	-0.57	2.12	-0.33
73	2.10	1.64	-0.46	1.70	-0.40
74	1.81	1.60	-0.21	1.86	0.05
75	2.86	2.38	-0.48	2.53	-0.34
76	2.84	2.47	-0.37	2.48	-0.36
77	2.33	1.91	-0.42	1.92	-0.40
78	2.39	2.37	-0.02	2.26	-0.12
79	2.24	1.93	-0.31	2.20	-0.04
80	2.43	2.49	0.06	2.35	-0.08
81	2.44	1.83	-0.61	1.81	-0.63
82	2.66	2.70	0.04	2.30	-0.36
83	2.45	2.48	0.04	2.20	-0.25
84	1.70	1.30	-0.40	1.28	-0.42
85	2.57	2.67	0.09	2.19	-0.38
86	2.55	2.17	-0.38	2.25	-0.30
87	2.78	2.40	-0.38	2.57	-0.21
88	2.52	1.98	-0.54	2.20	-0.33
89	2.42	2.72	0.30	2.69	0.27
90	2.74	2.28	-0.46	2.69	-0.05
91	2.40	2.12	-0.28	2.33	-0.07
92	3.36	2.81	-0.55	2.78	-0.59
93	2.48	2.06	-0.42	2.26	-0.22
94	2.28	1.84	-0.44	1.98	-0.30
95	2.85	2.07	-0.78	2.40	-0.45
96	1.70	2.09	0.39	1.73	0.03
97	2.55	2.18	-0.37	2.35	-0.20
98	2.29	1.84	-0.45	2.02	-0.27
99	2.23	1.97	-0.27	1.81	-0.42
100	2.52	2.21	-0.30	2.45	-0.06

MOYENNES, ECARTS TYPES ET STUDENT PAR RAPPORT A ZERO DE CES MOYENNES:

2.48	2.17	-0.31	2.25	-0.23
0.04 (0.383213E-01)	0.04 (0.368079E-01)	0.03 (0.293647E-01)	0.04 (0.361307E-01)	0.02 (0.214014E-01)
64.61	58.86	-10.53	62.14	-10.78

(A) I : N(MU=1.0, SIGMA=0.03)

COMPARAISON DES ECARTS ABSOLUS MOYENS RELATIFS AUX 36 PREMIERES OBSERVATIONS

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
1	2.09	1.61	-0.48	1.75	-0.34
2	1.48	1.17	-0.31	1.32	-0.16
3	2.45	1.95	-0.50	2.21	-0.25
4	2.69	2.30	-0.39	2.50	-0.19
5	2.00	1.67	-0.34	1.76	-0.25
6	2.01	1.51	-0.50	1.43	-0.58
7	1.90	1.40	-0.50	1.47	-0.44
8	2.06	1.39	-0.67	1.72	-0.34
9	2.00	1.91	-0.09	1.91	-0.09
10	2.19	1.69	-0.50	1.25	-0.94
11	2.46	1.77	-0.69	2.17	-0.29
12	1.86	1.52	-0.34	1.61	-0.25
13	1.78	1.38	-0.40	1.63	-0.15
14	1.78	1.53	-0.25	1.61	-0.17
15	1.94	1.24	-0.70	1.36	-0.57
16	1.73	1.38	-0.36	1.52	-0.22
17	1.77	1.51	-0.26	1.90	0.12
18	1.96	1.53	-0.43	1.64	-0.32
19	2.51	2.27	-0.24	2.40	-0.12
20	2.09	1.58	-0.52	1.98	-0.12
21	1.04	1.48	0.43	0.93	-0.12
22	1.93	1.63	-0.30	1.89	-0.04
23	2.01	1.52	-0.49	1.88	-0.13
24	2.42	1.91	-0.51	1.88	-0.54
25	1.56	0.83	-0.73	0.94	-0.62
26	1.86	1.69	-0.17	1.90	0.04
27	1.62	1.16	-0.46	1.51	-0.10
28	1.75	1.80	0.05	1.96	0.21
29	1.87	1.55	-0.32	1.75	-0.12
30	2.26	2.15	-0.11	2.19	-0.07
31	2.31	1.53	-0.78	1.63	-0.67
32	1.86	1.61	-0.25	1.59	-0.28
33	2.13	1.53	-0.61	1.75	-0.38
34	1.76	1.21	-0.55	1.22	-0.54
35	1.84	1.62	-0.22	1.60	-0.23
36	2.08	2.13	0.05	1.73	-0.36
37	2.44	1.71	-0.73	1.83	-0.61
38	2.81	2.61	-0.20	2.60	-0.21
39	2.14	2.01	-0.13	2.02	-0.12
40	2.09	2.29	0.20	2.12	0.03
41	2.30	1.60	-0.70	1.65	-0.65
42	1.96	1.72	-0.24	1.81	-0.15
43	2.16	1.82	-0.33	1.80	-0.35
44	2.67	2.23	-0.44	2.34	-0.32
45	1.82	1.51	-0.30	1.95	0.13
46	2.33	1.96	-0.37	2.24	-0.09
47	2.08	1.82	-0.26	1.83	-0.24
48	1.78	1.43	-0.35	1.41	-0.37
49	2.05	1.92	-0.13	1.82	-0.23
50	1.91	1.48	-0.43	1.72	-0.19
51	2.04	1.68	-0.36	1.73	-0.31
52	2.40	1.91	-0.48	1.90	-0.50
53	2.18	1.55	-0.63	1.69	-0.49
54	2.07	1.74	-0.34	1.88	-0.20
55	2.78	2.24	-0.53	2.20	-0.57

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
56	2.25	1.98	-0.27	1.93	-0.32
57	2.16	2.10	-0.06	1.79	-0.37
58	2.63	1.67	-0.96	1.26	-1.37
59	1.89	1.52	-0.37	1.67	-0.22
60	1.45	1.26	-0.19	1.54	0.09
61	2.09	2.10	0.01	2.12	0.02
62	1.54	1.31	-0.23	1.38	-0.17
63	1.92	1.62	-0.30	1.58	-0.34
64	2.23	2.15	-0.07	2.02	-0.20
65	1.56	1.29	-0.27	1.41	-0.16
66	1.85	1.31	-0.54	1.42	-0.43
67	1.90	1.47	-0.42	1.59	-0.30
68	1.76	1.36	-0.40	1.54	-0.22
69	2.85	2.27	-0.57	2.62	-0.23
70	1.66	0.92	-0.74	1.43	-0.23
71	2.60	2.23	-0.37	2.17	-0.43
72	2.49	2.59	0.10	2.32	-0.17
73	1.29	1.31	0.02	1.54	0.25
74	2.31	1.87	-0.44	2.19	-0.13
75	1.69	1.45	-0.24	1.51	-0.18
76	1.71	1.38	-0.33	1.50	-0.21
77	2.55	2.15	-0.41	2.17	-0.38
78	2.19	1.92	-0.28	1.91	-0.29
79	2.27	1.82	-0.44	1.92	-0.35
80	1.94	1.47	-0.47	2.10	0.16
81	2.10	1.74	-0.36	1.92	-0.19
82	1.88	1.34	-0.54	1.53	-0.35
83	1.73	1.54	-0.19	1.42	-0.31
84	2.21	1.26	-0.95	1.59	-0.62
85	1.82	1.65	-0.17	1.63	-0.19
86	1.76	1.35	-0.40	1.67	-0.08
87	2.48	2.25	-0.23	2.25	-0.23
88	2.06	1.56	-0.50	1.60	-0.46
89	2.73	2.00	-0.73	2.11	-0.62
90	1.79	1.26	-0.52	1.56	-0.23
91	1.98	1.53	-0.45	1.73	-0.25
92	2.92	2.94	0.02	3.03	0.11
93	1.37	1.17	-0.21	1.22	-0.15
94	1.62	1.46	-0.16	1.18	-0.44
95	2.55	2.39	-0.16	2.34	-0.21
96	2.52	2.36	-0.16	2.48	-0.04
97	2.26	1.79	-0.47	1.92	-0.34
98	2.11	1.51	-0.61	1.49	-0.62
99	1.81	1.72	-0.09	1.47	-0.34
100	1.35	1.23	-0.12	1.13	-0.23

MOYENNES, ECARTS TYPES ET STUDENT PAR RAPPORT A ZERO DE CES MOYENNES:

2.05	1.70	-0.35	1.78	-0.27
0.04 (0.364589E-01)	0.04 (0.378690E-01)	0.02 (0.234277E-01)	0.04 (0.370053E-01)	0.02 (0.234379E-01)
56.20	44.77	-15.10	48.07	-11.52

(B) I : N(MU=1.0, SIGMA=0.02)

COMPARAISON DES ECARTS ABSOLUS MOYENS RELATIFS A TOUTE LA SERIE

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
1	1.65	1.28	-0.37	1.44	-0.21
2	1.40	1.03	-0.38	1.12	-0.28
3	1.40	1.01	-0.39	1.08	-0.32
4	1.57	1.22	-0.35	1.48	-0.09
5	1.44	1.06	-0.39	1.27	-0.17
6	1.53	1.08	-0.45	1.16	-0.36
7	1.42	1.09	-0.34	1.25	-0.18
8	1.44	1.08	-0.36	1.29	-0.15
9	1.53	1.30	-0.22	1.41	-0.12
10	1.44	1.05	-0.39	1.04	-0.41
11	1.54	0.99	-0.55	1.13	-0.40
12	1.36	1.11	-0.26	1.18	-0.18
13	1.40	0.96	-0.44	1.21	-0.19
14	1.40	1.21	-0.19	1.21	-0.19
15	1.54	1.26	-0.27	1.32	-0.21
16	1.51	1.12	-0.39	1.41	-0.10
17	1.32	1.03	-0.29	1.20	-0.12
18	1.78	1.35	-0.43	1.50	-0.28
19	1.58	1.19	-0.39	1.31	-0.27
20	1.40	1.06	-0.34	1.32	-0.08
21	1.34	1.00	-0.34	1.18	-0.16
22	1.37	0.98	-0.39	1.27	-0.10
23	1.45	0.93	-0.52	1.18	-0.26
24	1.49	1.06	-0.44	1.23	-0.27
25	1.34	1.01	-0.34	1.10	-0.24
26	1.52	1.16	-0.35	1.23	-0.28
27	1.37	0.93	-0.44	1.17	-0.20
28	1.57	1.12	-0.45	1.25	-0.32
29	1.58	1.18	-0.39	1.51	-0.07
30	1.62	1.39	-0.23	1.38	-0.25
31	1.67	1.27	-0.40	1.46	-0.21
32	1.48	1.12	-0.36	1.22	-0.26
33	1.40	0.94	-0.46	1.27	-0.13
34	1.42	1.22	-0.20	1.27	-0.15
35	1.50	1.07	-0.43	1.22	-0.29
36	1.41	1.14	-0.27	1.15	-0.26
37	1.59	1.18	-0.41	1.29	-0.30
38	1.73	1.42	-0.32	1.52	-0.21
39	1.56	1.38	-0.18	1.43	-0.13
40	1.43	1.14	-0.29	1.29	-0.14
41	1.58	1.23	-0.35	1.29	-0.29
42	1.44	1.05	-0.39	1.14	-0.30
43	1.52	1.07	-0.46	1.22	-0.30
44	1.47	1.21	-0.26	1.30	-0.16
45	1.43	1.23	-0.19	1.21	-0.21
46	1.40	1.12	-0.28	1.20	-0.21
47	1.48	1.13	-0.35	1.23	-0.25
48	1.66	1.28	-0.38	1.45	-0.21
49	1.50	1.17	-0.32	1.34	-0.16
50	1.50	1.15	-0.36	1.16	-0.34
51	1.38	1.02	-0.36	1.10	-0.28
52	1.52	1.12	-0.40	1.29	-0.23
53	1.44	1.14	-0.30	1.25	-0.19
54	1.47	1.15	-0.32	1.26	-0.22
55	1.36	0.99	-0.37	1.07	-0.29

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
56	1.38	1.01	-0.37	1.21	-0.16
57	1.63	1.42	-0.21	1.51	-0.12
58	1.67	1.14	-0.53	1.30	-0.38
59	1.69	1.24	-0.45	1.42	-0.27
60	1.22	0.87	-0.35	1.08	-0.15
61	1.68	1.28	-0.40	1.41	-0.27
62	1.43	1.22	-0.21	1.20	-0.22
63	1.41	1.16	-0.25	1.28	-0.13
64	1.31	0.90	-0.41	1.05	-0.26
65	1.52	1.35	-0.16	1.33	-0.19
66	1.43	1.07	-0.37	1.16	-0.27
67	1.61	1.20	-0.41	1.39	-0.22
68	1.63	1.16	-0.47	1.35	-0.28
69	1.66	1.36	-0.30	1.45	-0.21
70	1.53	1.26	-0.28	1.33	-0.21
71	1.60	1.09	-0.52	1.39	-0.21
72	1.87	1.61	-0.26	1.68	-0.19
73	1.42	1.15	-0.27	1.26	-0.16
74	1.36	1.14	-0.22	1.15	-0.21
75	1.62	1.25	-0.37	1.41	-0.21
76	1.29	1.14	-0.15	1.26	-0.03
77	1.52	1.24	-0.28	1.34	-0.17
78	1.51	1.08	-0.43	1.22	-0.29
79	1.42	1.02	-0.41	1.06	-0.37
80	1.35	1.08	-0.27	1.17	-0.18
81	1.51	1.35	-0.16	1.36	-0.15
82	1.25	0.98	-0.27	1.17	-0.09
83	1.66	1.21	-0.46	1.37	-0.30
84	1.33	1.22	-0.11	1.20	-0.13
85	1.21	0.90	-0.30	1.04	-0.17
86	1.47	1.09	-0.38	1.27	-0.20
87	1.33	1.12	-0.21	1.16	-0.17
88	1.56	1.14	-0.44	1.31	-0.27
89	1.59	1.29	-0.30	1.34	-0.25
90	1.53	0.96	-0.57	1.37	-0.16
91	1.56	1.05	-0.51	1.21	-0.36
92	1.55	1.09	-0.46	1.34	-0.21
93	1.22	0.92	-0.30	1.09	-0.13
94	1.54	1.16	-0.38	1.31	-0.23
95	1.49	1.25	-0.24	1.35	-0.15
96	1.65	1.32	-0.34	1.37	-0.28
97	1.55	1.32	-0.23	1.27	-0.28
98	1.52	1.27	-0.26	1.37	-0.16
99	1.55	1.25	-0.30	1.35	-0.20
100	1.39	1.15	-0.25	1.30	-0.10

MOYENNES, ECARTS TYPES ET STUDENT PAR RAPPORT A ZERO DE CES MOYENNES:

1.49	1.15	-0.34	1.27	-0.22
0.01 (0.122215E-01)	0.01 (0.132640E-01)	0.01 (0.951998E-02)	0.01 (0.122234E-01)	0.01 (0.766369E-02)
121.85	86.42	-36.02	104.23	-28.09

(B) I : N(MU=1.0, SIGMA=0.02)

COMPARAISON DES ECARTS ABSOLUS MOYENS RELATIFS AUX 48 DERNIERES OBSERVATIONS

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
1	2.61	1.80	-0.81	2.21	-0.40
2	2.53	1.56	-0.97	1.92	-0.61
3	1.93	1.29	-0.64	1.45	-0.48
4	2.15	1.48	-0.68	2.24	0.09
5	2.24	1.24	-0.99	1.86	-0.37
6	2.46	1.45	-1.01	1.80	-0.66
7	2.51	1.64	-0.87	2.17	-0.34
8	2.35	1.58	-0.76	1.97	-0.38
9	2.40	2.06	-0.34	2.17	-0.24
10	2.39	1.71	-0.69	1.78	-0.61
11	1.91	1.14	-0.77	1.43	-0.48
12	2.28	1.84	-0.44	2.02	-0.26
13	2.52	1.42	-1.10	2.07	-0.45
14	2.29	2.00	-0.29	1.99	-0.30
15	2.73	2.26	-0.48	2.48	-0.26
16	2.52	1.73	-0.79	2.26	-0.27
17	2.03	1.54	-0.49	1.65	-0.38
18	3.04	2.04	-1.00	2.40	-0.64
19	2.66	1.62	-1.05	1.98	-0.68
20	1.99	1.51	-0.48	1.91	-0.08
21	2.33	1.19	-1.15	1.82	-0.51
22	2.22	1.25	-0.97	1.86	-0.36
23	2.13	0.88	-1.24	1.65	-0.47
24	2.44	1.34	-1.09	2.01	-0.43
25	1.95	1.42	-0.53	1.74	-0.20
26	2.63	1.94	-0.69	2.20	-0.43
27	2.48	1.48	-1.01	2.14	-0.34
28	2.82	1.81	-1.00	2.10	-0.72
29	2.78	1.92	-0.86	2.59	-0.19
30	2.40	2.05	-0.36	1.99	-0.42
31	2.75	2.00	-0.75	2.52	-0.23
32	2.42	1.81	-0.60	1.96	-0.45
33	2.09	1.01	-1.08	1.76	-0.32
34	2.42	2.14	-0.28	2.31	-0.11
35	2.31	1.75	-0.56	2.13	-0.18
36	2.33	1.75	-0.58	1.73	-0.60
37	2.62	1.82	-0.80	2.15	-0.48
38	2.50	1.87	-0.62	2.04	-0.46
39	2.55	2.01	-0.53	2.15	-0.40
40	2.21	1.49	-0.73	1.78	-0.44
41	2.53	1.86	-0.67	2.02	-0.51
42	2.03	1.37	-0.65	1.53	-0.49
43	2.34	1.34	-1.00	1.95	-0.39
44	2.07	1.71	-0.36	1.80	-0.26
45	2.45	2.12	-0.32	2.15	-0.30
46	2.06	1.52	-0.54	1.76	-0.30
47	2.60	1.76	-0.84	2.05	-0.56
48	2.90	2.10	-0.80	2.53	-0.37
49	2.41	1.47	-0.94	2.10	-0.31
50	2.59	2.01	-0.58	2.06	-0.53
51	2.13	1.43	-0.70	1.71	-0.42
52	2.58	1.74	-0.84	1.89	-0.69
53	2.22	1.76	-0.46	2.11	-0.12
54	2.37	1.91	-0.46	1.97	-0.40
55	1.82	1.11	-0.72	1.32	-0.50

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
56	2.23	1.42	-0.81	1.93	-0.30
57	2.50	2.30	-0.20	2.41	-0.09
58	2.31	1.41	-0.89	1.90	-0.41
59	3.09	2.03	-1.06	2.43	-0.65
60	1.92	1.06	-0.86	1.41	-0.51
61	2.41	1.74	-0.68	1.84	-0.58
62	2.56	2.13	-0.43	2.19	-0.37
63	2.35	1.87	-0.48	2.08	-0.27
64	1.86	0.93	-0.93	1.38	-0.48
65	2.47	2.31	-0.16	2.23	-0.24
66	2.32	1.77	-0.54	1.98	-0.34
67	2.70	1.75	-0.96	2.15	-0.55
68	2.56	1.41	-1.15	2.06	-0.50
69	2.28	1.91	-0.37	2.10	-0.18
70	2.55	2.01	-0.53	2.08	-0.47
71	2.32	1.41	-0.92	2.03	-0.29
72	2.93	2.36	-0.56	2.36	-0.57
73	2.33	1.62	-0.71	2.05	-0.28
74	2.12	1.68	-0.44	1.74	-0.37
75	2.68	1.[illegible]8	-0.89	2.35	-0.33
76	1.76	1.45	-0.31	1.64	-0.12
77	2.42	1.58	-0.84	2.16	-0.26
78	2.23	1.23	-1.00	1.65	-0.59
79	2.12	1.04	-1.08	1.35	-0.78
80	2.29	1.81	-0.49	1.93	-0.36
81	2.37	1.98	-0.40	2.12	-0.26
82	1.87	1.27	-0.60	1.83	-0.04
83	2.64	1.78	-0.86	1.98	-0.66
84	1.78	1.53	-0.25	1.49	-0.29
85	2.02	1.37	-0.65	1.92	-0.10
86	2.46	1.71	-0.75	1.99	-0.47
87	2.19	1.80	-0.39	1.71	-0.48
88	2.65	1.56	-1.09	2.10	-0.55
89	2.40	1.96	-0.44	1.94	-0.45
90	2.71	1.46	-1.25	2.41	-0.30
91	2.53	1.53	-1.00	1.90	-0.62
92	2.34	1.27	-1.06	1.92	-0.42
93	1.98	1.12	-0.86	1.62	-0.35
94	1.81	1.43	-0.38	1.40	-0.41
95	2.64	2.16	-0.49	2.46	-0.18
96	2.63	1.95	-0.68	2.20	-0.42
97	2.27	1.94	-0.32	1.93	-0.34
98	2.27	1.81	-0.47	2.06	-0.21
99	2.20	1.71	-0.49	2.03	-0.18
100	2.23	2.07	-0.16	2.25	0.03

MOYENNES, ECARTS TYPES ET STUDENT PAR RAPPORT A ZERO DE CES MOYENNES:

2.36	1.66	-0.70	1.98	-0.38
0.03	0.03	0.03	0.03	0.02
(0.277753E-01)	(0.326709E-01)	(0.267371E-01)	(0.276293E-01)	(0.169078E-01)
85.08	50.65	-26.12	71.67	-22.65

(B) I : N(MU=1.0, SIGMA=0.02)

COMPARAISON DES ECARTS ABSOLUS MOYENS RELATIFS AUX 36 PREMIERES OBSERVATIONS

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
1	1.93	1.34	-0.59	1.49	-0.44
2	1.48	0.97	-0.51	1.02	-0.46
3	2.11	1.45	-0.66	1.57	-0.54
4	2.37	1.71	-0.65	2.01	-0.36
5	1.76	1.23	-0.52	1.40	-0.36
6	1.95	1.19	-0.76	1.12	-0.82
7	1.70	1.27	-0.43	1.31	-0.39
8	1.74	1.08	-0.67	1.52	-0.23
9	1.96	1.40	-0.57	1.78	-0.19
10	2.04	1.14	-0.91	1.06	-0.98
11	2.53	1.34	-1.18	1.57	-0.95
12	1.76	1.13	-0.64	1.24	-0.52
13	1.66	1.17	-0.50	1.45	-0.21
14	1.67	1.18	-0.49	1.16	-0.51
15	1.91	1.17	-0.74	1.16	-0.75
16	1.76	1.00	-0.75	1.62	-0.14
17	1.70	0.99	-0.72	1.51	-0.20
18	1.96	1.24	-0.72	1.49	-0.48
19	2.10	1.75	-0.35	1.89	-0.21
20	1.90	1.00	-0.90	1.68	-0.22
21	1.30	1.21	-0.09	1.29	-0.01
22	1.75	1.04	-0.71	1.61	-0.14
23	1.83	1.15	-0.68	1.33	-0.50
24	2.13	1.55	-0.59	1.50	-0.64
25	1.73	0.92	-0.81	0.97	-0.76
26	1.96	1.36	-0.60	1.39	-0.56
27	1.62	0.90	-0.72	1.19	-0.43
28	1.79	1.23	-0.56	1.41	-0.38
29	1.89	1.18	-0.71	1.84	-0.05
30	2.11	1.82	-0.29	1.85	-0.26
31	2.11	1.28	-0.83	1.47	-0.65
32	1.79	1.08	-0.71	1.25	-0.54
33	1.99	1.23	-0.76	1.79	-0.20
34	1.71	1.14	-0.57	1.14	-0.57
35	2.26	1.27	-0.99	1.45	-0.80
36	1.86	1.36	-0.49	1.53	-0.33
37	2.33	1.58	-0.75	1.70	-0.63
38	2.52	1.94	-0.58	2.20	-0.31
39	2.07	1.65	-0.42	1.73	-0.34
40	1.95	1.62	-0.33	1.88	-0.07
41	2.12	1.47	-0.66	1.52	-0.60
42	1.85	0.98	-0.87	1.16	-0.69
43	1.94	1.30	-0.65	1.21	-0.74
44	2.36	1.71	-0.65	2.03	-0.33
45	1.79	1.38	-0.42	1.31	-0.48
46	2.07	1.48	-0.60	1.49	-0.59
47	1.86	1.28	-0.58	1.43	-0.44
48	1.85	1.08	-0.78	1.41	-0.44
49	1.91	1.67	-0.24	1.59	-0.32
50	1.76	1.09	-0.67	1.07	-0.68
51	1.98	1.18	-0.80	1.21	-0.77
52	2.09	1.32	-0.78	1.90	-0.19
53	2.01	1.32	-0.69	1.37	-0.64
54	1.91	1.31	-0.60	1.70	-0.22
55	2.23	1.59	-0.64	1.66	-0.57

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
56	1.90	1.40	-0.49	1.67	-0.23
57	2.03	1.64	-0.39	1.84	-0.19
58	2.35	1.21	-1.14	1.13	-1.22
59	1.79	1.15	-0.64	1.48	-0.31
60	1.46	0.91	-0.56	1.46	-0.00
61	2.04	1.29	-0.75	1.78	-0.26
62	1.78	1.32	-0.46	1.20	-0.58
63	1.79	1.19	-0.60	1.51	-0.28
64	1.92	1.25	-0.68	1.46	-0.46
65	1.84	1.27	-0.57	1.29	-0.55
66	1.93	1.08	-0.85	1.25	-0.68
67	1.98	1.38	-0.60	1.65	-0.33
68	1.78	1.16	-0.62	1.20	-0.58
69	2.39	1.69	-0.70	1.86	-0.53
70	1.68	1.06	-0.62	1.40	-0.28
71	2.04	1.02	-1.02	1.53	-0.51
72	2.59	2.13	-0.46	2.44	-0.16
73	1.33	0.94	-0.39	0.90	-0.42
74	1.54	1.20	-0.34	1.23	-0.31
75	2.22	1.[illegible]3	-0.49	1.84	-0.38
76	2.10	1.70	-0.40	2.03	-0.07
77	2.00	1.67	-0.33	1.40	-0.60
78	1.83	1.01	-0.83	1.15	-0.68
79	1.63	1.22	-0.42	1.05	-0.58
80	1.55	0.84	-0.71	1.10	-0.44
81	1.94	1.68	-0.26	1.52	-0.42
82	1.67	1.06	-0.61	1.19	-0.48
83	1.95	0.94	-1.01	1.43	-0.52
84	2.01	1.77	-0.24	1.77	-0.24
85	1.49	1.00	-0.49	0.98	-0.51
86	1.77	1.06	-0.72	1.46	-0.31
87	1.72	1.38	-0.33	1.72	0.01
88	1.67	1.19	-0.48	1.26	-0.41
89	2.40	1.66	-0.75	1.87	-0.53
90	1.70	0.81	-0.89	1.40	-0.29
91	2.34	1.57	-0.77	1.80	-0.54
92	2.41	1.78	-0.62	2.11	-0.30
93	1.17	0.94	-0.23	1.13	-0.03
94	2.49	1.35	-1.14	2.16	-0.33
95	1.66	1.25	-0.41	1.33	-0.33
96	2.02	1.36	-0.66	1.31	-0.70
97	2.16	1.76	-0.40	1.55	-0.61
98	2.01	1.49	-0.52	1.63	-0.37
99	2.22	1.57	-0.65	1.65	-0.57
100	1.90	1.07	-0.83	1.58	-0.32

MOYENNES, ECARTS TYPES ET STUDENT PAR RAPPORT A ZERO DE CES MOYENNES:

1.93	1.31	-0.62	1.49	-0.43
0.03	0.03	0.02	0.03	0.02
(0.270890E-01)	(0.272309E-01)	(0.203353E-01)	(0.301366E-01)	(0.224434E-01)
71.11	47.93	-30.54	49.56	-19.28

(C) I : N(MU=1.0, SIGMA=0.05)

COMPARAISON DES ECARTS ABSOLUS MOYENS RELATIFS A TOUTE LA SERIE

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
1	2.45	2.32	-0.13	2.43	-0.02
2	2.09	2.12	0.04	2.14	0.05
3	2.26	2.20	-0.06	2.22	-0.04
4	2.36	2.36	-0.01	2.32	-0.04
5	2.17	2.16	-0.02	2.43	0.26
6	2.11	1.98	-0.13	1.99	-0.12
7	1.86	1.87	0.01	1.91	0.05
8	2.40	2.09	-0.32	2.04	-0.37
9	2.34	2.30	-0.04	2.24	-0.10
10	2.07	1.93	-0.15	1.91	-0.17
11	1.99	1.84	-0.15	1.91	-0.07
12	2.09	2.23	0.14	2.21	0.12
13	1.99	1.94	-0.06	1.90	-0.09
14	2.28	2.36	0.08	2.08	-0.20
15	2.23	2.29	0.06	2.27	0.04
16	2.09	2.17	0.08	2.12	0.03
17	1.96	2.14	0.18	2.11	0.15
18	2.55	2.54	-0.01	2.45	-0.11
19	2.50	2.32	-0.18	2.27	-0.23
20	1.95	2.15	0.20	2.00	0.05
21	1.89	2.00	0.12	1.94	0.05
22	1.74	1.88	0.14	1.77	0.03
23	2.04	1.96	-0.08	1.93	-0.12
24	2.07	1.99	-0.09	2.10	0.03
25	1.89	1.83	-0.06	1.71	-0.18
26	2.16	2.17	0.01	2.12	-0.04
27	1.92	1.80	-0.12	1.87	-0.05
28	2.17	2.39	0.22	2.38	0.21
29	2.28	2.28	0.00	2.32	0.04
30	2.49	2.13	-0.35	2.25	-0.24
31	2.59	2.43	-0.16	2.46	-0.13
32	2.08	2.39	0.32	2.45	0.37
33	1.99	1.94	-0.05	1.97	-0.02
34	1.95	2.04	0.10	1.96	0.01
35	1.90	1.93	0.03	1.85	-0.06
36	1.76	1.82	0.06	1.80	0.03
37	2.15	2.03	-0.12	2.06	-0.09
38	2.35	2.53	0.18	2.42	0.07
39	2.26	2.44	0.18	2.42	0.16
40	2.14	2.15	0.02	2.09	-0.05
41	2.23	2.20	-0.03	2.08	-0.15
42	1.96	1.86	-0.10	1.83	-0.13
43	2.48	2.17	-0.30	2.14	-0.34
44	2.00	2.22	0.23	2.16	0.16
45	1.95	1.92	-0.03	2.00	0.05
46	1.88	1.85	-0.02	1.84	-0.04
47	2.22	2.07	-0.15	2.01	-0.21
48	2.63	2.64	0.01	2.62	-0.01
49	2.16	2.09	-0.07	2.13	-0.02
50	2.36	2.33	-0.03	2.38	0.02
51	1.97	1.99	0.02	1.96	-0.01
52	2.00	2.12	0.12	2.06	0.06
53	2.10	2.05	-0.05	2.15	0.05
54	2.26	2.18	-0.07	2.12	-0.14
55	2.04	2.08	0.04	2.14	0.10

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
56	2.19	1.99	-0.20	1.97	-0.22
57	2.51	2.69	0.18	2.64	0.13
58	2.25	2.32	0.07	2.21	-0.04
59	2.42	2.30	-0.12	2.24	-0.18
60	1.63	1.75	0.12	1.80	0.17
61	2.48	2.12	-0.35	2.11	-0.36
62	1.88	1.84	-0.04	1.83	-0.06
63	1.90	2.11	0.21	1.89	-0.01
64	1.85	1.71	-0.15	1.64	-0.22
65	2.07	2.43	0.36	2.28	0.21
66	2.06	2.03	-0.03	2.04	-0.02
67	2.48	2.65	0.17	2.50	0.02
68	2.48	2.32	-0.16	2.39	-0.09
69	2.59	2.61	0.01	2.54	-0.05
70	2.23	2.22	-0.02	2.21	-0.02
71	2.21	2.22	0.01	2.22	0.00
72	3.09	2.93	-0.16	2.91	-0.17
73	2.13	2.11	-0.02	2.10	-0.03
74	2.01	1.91	-0.10	1.93	-0.09
75	2.63	2.33	-0.29	2.38	-0.24
76	2.00	2.35	0.35	2.16	0.16
77	2.18	2.13	-0.05	2.01	-0.16
78	2.30	2.21	-0.10	2.33	0.03
79	2.13	2.18	0.05	2.11	-0.02
80	1.95	1.81	-0.14	1.96	0.01
81	2.32	2.56	0.23	2.44	0.12
82	1.50	1.73	0.23	1.77	0.27
83	2.29	2.24	-0.05	2.19	-0.10
84	2.17	2.26	0.10	2.23	0.06
85	1.96	1.93	-0.03	1.89	-0.08
86	1.96	1.86	-0.10	1.96	-0.01
87	1.94	2.14	0.20	1.91	-0.03
88	2.31	2.21	-0.10	2.29	-0.01
89	2.40	2.38	-0.02	2.36	-0.04
90	2.21	2.12	-0.10	2.15	-0.07
91	2.10	1.87	-0.24	1.89	-0.21
92	2.13	2.30	0.16	2.26	0.12
93	1.79	1.62	-0.17	1.67	-0.13
94	2.29	2.12	-0.17	2.23	-0.06
95	2.16	2.02	-0.14	2.06	-0.11
96	2.23	2.34	0.11	2.33	0.10
97	2.36	2.01	-0.34	2.18	-0.18
98	2.34	2.23	-0.11	2.13	-0.21
99	2.15	1.99	-0.16	2.12	-0.03
100	2.06	1.94	-0.12	2.07	0.02

MOYENNES, ECARTS TYPES ET STUDENT PAR RAPPORT A ZERO DE CES MOYENNES:

2.16	2.14	-0.02	2.13	-0.03
0.02	0.02	0.02	0.02	0.01
(0.241740E-01)	(0.237455E-01)	(0.150254E-01)	(0.228129E-01)	(0.132242E-01)
89.40	90.28	-1.17	93.33	-2.43

(C) I : N(MU=1.0, SIGMA=0.05)

COMPARAISON DES ECARTS ABSOLUS MOYENS RELATIFS AUX 48 DERNIERES OBSERVATIONS

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
1	3.01	2.83	-0.18	3.06	0.05
2	2.97	2.82	-0.15	2.88	-0.10
3	2.44	2.25	-0.19	2.25	-0.19
4	2.70	2.50	-0.20	2.81	0.11
5	2.49	2.25	-0.24	3.18	0.69
6	2.71	2.35	-0.36	2.29	-0.42
7	2.83	2.81	-0.02	2.80	-0.03
8	3.21	2.72	-0.49	2.69	-0.52
9	3.08	3.11	0.04	2.92	-0.16
10	2.82	3.00	0.18	2.50	-0.32
11	1.88	1.70	-0.18	1.70	-0.18
12	3.18	3.45	0.27	3.46	0.28
13	2.75	2.71	-0.04	2.59	-0.16
14	2.97	3.48	0.51	2.70	-0.28
15	3.73	3.86	0.13	3.63	-0.10
16	2.92	3.12	0.20	3.12	0.20
17	2.49	2.69	0.20	2.57	-0.09
18	4.08	3.78	-0.30	3.72	-0.36
19	3.46	2.87	-0.59	2.70	-0.76
20	1.87	2.65	0.78	2.05	0.18
21	2.92	2.81	-0.10	2.82	-0.10
22	2.11	2.21	0.10	1.93	-0.18
23	2.33	2.03	-0.29	1.91	-0.42
24	2.39	2.42	0.03	2.64	0.25
25	1.86	2.18	0.32	1.86	-0.01
26	3.24	3.16	-0.08	3.05	-0.19
27	2.63	2.63	0.00	2.55	-0.09
28	3.66	3.86	0.19	3.76	0.10
29	3.62	3.70	0.07	3.83	0.20
30	2.88	2.51	-0.37	2.85	-0.02
31	3.98	3.95	-0.03	3.89	-0.09
32	2.77	3.83	1.06	4.02	1.25
33	2.15	2.39	0.25	2.48	0.34
34	2.87	3.33	0.46	3.04	0.17
35	2.67	2.97	0.30	2.83	0.16
36	2.13	2.12	-0.00	2.25	0.13
37	3.23	2.95	-0.28	2.95	-0.28
38	2.84	2.93	0.08	2.86	0.02
39	3.07	3.14	0.07	3.03	-0.04
40	2.28	2.30	0.02	2.42	0.14
41	3.21	3.42	0.21	3.01	-0.20
42	2.22	1.81	-0.41	1.72	-0.51
43	3.30	2.74	-0.56	2.74	-0.56
44	2.27	3.01	0.74	2.66	0.39
45	2.87	2.85	-0.01	3.04	0.17
46	1.91	1.69	-0.21	1.93	0.02
47	3.45	2.99	-0.46	2.94	-0.51
48	4.26	4.10	-0.17	3.96	-0.30
49	3.03	2.58	-0.44	2.70	-0.33
50	3.35	3.68	0.34	3.78	0.43
51	2.41	2.43	0.02	2.43	0.02
52	2.62	2.54	-0.08	2.35	-0.27
53	2.92	3.33	0.40	3.58	0.65
54	3.22	3.02	-0.20	2.80	-0.42
55	1.78	2.21	0.43	2.33	0.55

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
56	2.51	2.38	-0.12	2.38	-0.12
57	3.12	3.50	0.38	3.73	0.61
58	2.49	2.86	0.37	2.52	0.04
59	3.93	3.53	-0.40	3.38	-0.55
60	1.89	1.89	-0.00	2.17	0.27
61	2.56	2.18	-0.37	2.04	-0.52
62	3.11	2.78	-0.33	2.78	-0.33
63	2.83	2.99	0.15	2.74	-0.10
64	1.56	1.79	0.24	1.49	-0.07
65	2.90	3.63	0.73	3.04	0.13
66	3.33	3.15	-0.18	3.15	-0.18
67	3.03	3.46	0.43	3.05	0.02
68	2.59	2.55	-0.05	2.71	0.11
69	2.93	3.60	0.68	3.44	0.51
70	3.28	3.08	-0.19	2.85	-0.43
71	2.39	2.45	0.06	2.44	0.06
72	4.18	3.67	-0.51	3.69	-0.49
73	2.77	2.67	-0.10	2.66	-0.11
74	2.63	2.26	-0.37	2.40	-0.23
75	3.35	2.68	-0.67	2.85	-0.50
76	2.16	3.11	0.96	2.43	0.27
77	2.69	2.95	0.26	2.80	0.11
78	2.50	2.54	0.03	2.56	0.06
79	2.74	2.60	-0.14	2.53	-0.21
80	2.99	2.66	-0.33	3.11	0.13
81	3.27	3.30	0.03	3.20	-0.07
82	1.62	2.09	0.47	2.23	0.62
83	3.06	2.80	-0.27	2.82	-0.24
84	2.46	2.84	0.37	2.81	0.35
85	2.73	2.73	0.00	2.71	-0.03
86	2.65	2.46	-0.19	2.57	-0.08
87	2.31	3.08	0.77	2.47	0.16
88	3.14	2.94	-0.20	3.26	0.12
89	3.35	3.10	-0.25	2.99	-0.36
90	3.26	3.11	-0.15	3.11	-0.15
91	3.05	2.49	-0.56	2.58	-0.47
92	2.53	2.87	0.33	2.75	0.22
93	2.09	1.76	-0.33	1.76	-0.33
94	2.17	2.05	-0.12	2.33	0.16
95	3.35	3.05	-0.30	3.05	-0.30
96	3.11	3.11	-0.00	3.03	-0.08
97	2.53	2.27	-0.25	2.25	-0.27
98	2.91	2.97	0.07	2.69	-0.22
99	2.26	1.98	-0.29	2.28	0.01
100	3.08	2.96	-0.12	2.96	-0.12

MOYENNES, ECARTS TYPES ET STUDENT PAR RAPPORT A ZERO DE CES MOYENNES:

2.81	2.82	0.00	2.77	-0.04
0.05	0.05	0.03	0.05	0.03
(0.549169E-01)	(0.545872E-01)	(0.348056E-01)	(0.526045E-01)	(0.322158E-01)
51.24	51.60	0.08	52.72	-1.27

(C) I : N(MU=1.0, SIGMA=0.05)

COMPARAISON DES ECARTS ABSOLUS MOYENS RELATIFS AUX 36 PREMIERES OBSERVATIONS

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
1	2.51	2.21	-0.30	2.30	-0.21
2	1.87	1.99	0.12	1.99	0.12
3	3.10	2.96	-0.14	3.06	-0.04
4	3.31	3.48	0.17	3.00	-0.31
5	2.54	2.37	-0.17	2.37	-0.17
6	2.31	2.18	-0.13	2.29	-0.03
7	2.19	1.95	-0.23	2.15	-0.04
8	2.53	2.20	-0.33	2.10	-0.44
9	2.55	2.45	-0.10	2.45	-0.10
10	2.67	2.12	-0.55	2.62	-0.05
11	2.79	2.50	-0.29	2.84	0.05
12	2.29	2.25	-0.04	2.13	-0.16
13	2.19	2.15	-0.04	2.15	-0.04
14	2.25	2.27	0.02	2.00	-0.25
15	2.01	1.54	-0.47	1.79	-0.22
16	1.86	1.82	-0.03	1.62	-0.23
17	1.75	2.43	0.68	2.16	0.41
18	2.03	2.27	0.24	1.92	-0.11
19	3.15	3.31	0.16	3.31	0.16
20	2.27	2.18	-0.10	2.27	-0.00
21	1.30	1.60	0.30	1.33	0.03
22	2.29	2.52	0.23	2.36	0.08
23	2.00	2.07	0.06	2.07	0.06
24	2.99	2.41	-0.58	2.64	-0.36
25	1.52	1.26	-0.26	1.14	-0.38
26	2.35	2.59	0.24	2.49	0.15
27	2.06	1.90	-0.16	2.32	0.27
28	1.88	2.59	0.71	2.67	0.79
29	2.27	2.01	-0.26	2.01	-0.26
30	2.74	2.46	-0.28	2.52	-0.22
31	2.37	2.00	-0.37	2.22	-0.15
32	2.20	2.20	0.00	2.20	0.00
33	2.54	2.34	-0.20	2.43	-0.11
34	1.95	1.74	-0.21	1.73	-0.22
35	2.13	2.18	0.04	1.97	-0.16
36	2.55	2.56	0.01	2.33	-0.22
37	2.65	2.59	-0.06	2.62	-0.03
38	3.02	3.36	0.34	2.94	-0.08
39	2.68	2.71	0.14	2.75	0.17
40	2.83	2.99	0.16	2.54	-0.29
41	2.43	2.09	-0.34	2.09	-0.35
42	2.26	2.16	-0.10	2.14	-0.12
43	2.70	2.52	-0.18	2.35	-0.35
44	2.80	2.96	0.16	3.02	0.22
45	2.10	1.81	-0.28	1.92	-0.17
46	2.69	2.93	0.24	2.55	-0.15
47	2.44	2.57	0.14	2.40	-0.04
48	2.17	2.21	0.04	2.33	0.17
49	2.51	2.75	0.25	2.81	0.30
50	2.37	2.17	-0.20	2.24	-0.13
51	2.49	2.69	0.20	2.58	0.08
52	2.84	2.73	-0.12	2.73	-0.12
53	2.21	1.98	-0.23	2.07	-0.14
54	2.63	2.59	-0.04	2.57	-0.06
55	3.44	3.21	-0.23	3.31	-0.14

NO. DE L'ECHANTILLON	PROVENANCE DE LA STATISTIQUE: X-11-A	X-11-B	(DIFFERENCES)	X-11-C	(DIFFERENCES)
56	2.81	2.60	-0.21	2.53	-0.28
57	2.59	3.32	0.73	2.71	0.12
58	2.39	2.11	-0.28	2.04	-0.35
59	2.07	1.95	-0.12	1.89	-0.18
60	1.51	1.73	0.22	1.60	0.08
61	2.59	2.39	-0.20	2.50	-0.10
62	2.07	2.01	-0.06	1.95	-0.12
63	1.67	2.28	0.60	1.66	-0.01
64	2.81	2.13	-0.68	2.23	-0.59
65	2.31	2.33	0.03	2.41	0.10
66	1.88	2.03	0.15	2.06	0.18
67	3.17	3.22	0.05	3.04	-0.12
68	2.87	2.36	-0.51	2.44	-0.43
69	3.18	2.79	-0.38	2.82	-0.36
70	2.14	1.85	-0.29	2.12	-0.02
71	2.26	2.18	-0.08	2.18	-0.08
72	3.96	4.01	0.05	3.91	-0.05
73	1.61	1.69	0.08	1.64	0.03
74	1.94	1.77	-0.18	1.65	-0.30
75	3.68	3.32	-0.36	3.32	-0.36
76	3.00	3.13	0.13	3.13	0.13
77	2.78	2.42	-0.36	2.10	-0.68
78	2.87	2.18	-0.68	2.68	-0.19
79	2.01	2.15	0.13	1.95	-0.07
80	1.00	1.18	0.18	1.29	0.30
81	2.38	3.18	0.80	2.75	0.37
82	1.60	1.96	0.36	1.96	0.37
83	2.29	2.17	-0.12	2.00	-0.29
84	2.78	2.92	0.14	2.82	0.04
85	1.91	1.92	0.00	1.76	-0.15
86	2.08	1.75	-0.33	1.99	-0.09
87	2.38	2.37	-0.01	2.15	-0.23
88	2.18	2.07	-0.11	2.03	-0.14
89	2.69	2.70	0.00	2.72	0.03
90	1.73	1.65	-0.07	1.77	0.04
91	2.84	2.73	-0.10	2.73	-0.10
92	3.29	3.14	-0.15	3.11	-0.18
93	1.96	1.90	-0.06	2.11	0.15
94	2.99	2.70	-0.29	2.83	-0.16
95	2.04	2.06	0.02	2.20	0.17
96	1.95	2.17	0.21	2.23	0.27
97	3.33	2.64	-0.70	3.33	-0.00
98	2.62	2.67	0.05	2.60	-0.02
99	2.82	2.56	-0.26	2.74	-0.08
100	2.19	2.13	-0.06	2.74	0.55

MOYENNES, ECARTS TYPES ET STUDENT PAR RAPPORT A ZERO DE CES MOYENNES:

2.42	2.37	-0.05	2.35	-0.06
0.05 (0.507185E-01)	0.05 (0.496673E-01)	0.03 (0.286140E-01)	0.05 (0.481470E-01)	0.02 (0.226531E-01)
47.65	47.64	-1.77	48.87	-2.81

APPENDICE V.C Comparaison des biais et des erreurs moyens relatifs aux poids finaux des méthodes X-11-A et X-11-B avec 100 séries réelles

A Groupe un: Séries pour lesquelles la méthode X-11-B réduit le biais moyen sans augmenter l'erreur moyenne en comparaison avec la méthode X-11-A

Titre de la série, n° CANSIM(1), type d'ajustement (multiplicatif ou additif)	$\lvert E_{.}\rvert_{.}^{A}$	$\lvert E_{.}\rvert_{.}^{B}$	Δ_B%	T^+	T^-	$\lvert E\rvert_{..}^{A}$	$\lvert E\rvert_{..}^{B}$	Δ_E%	T^+	T^-
1. Importations, D 3535, mult.	0.32	0.32	- 2.(2)	36.0	30.0	1.73	1.68	- 3.	53.5	24.5
2. Salaires et traitements, D 995, add.	3.25	2.16	- 33.	65.0*	13.0	3.90	3.35	- 14.	57.0**	21.0
3. Mariages, D 131, mult.	1.21	1.13	- 6.	41.0	25.0	3.71	3.53	- 5.	53.0	25.0
4. Mariages, D 131, add.	188.44	138.98	- 26.	58.0**	20.0	348.22	319.08	- 8.	66.0*	12.0
5. Chômage, 14-24 ans, D 755400, add.	3.68	1.49	- 59.	78.0*	0.0	5.90	5.60	- 5.	36.0	30.0
6. Main d'oeuvre masculine, D 755536, mult.	0.16	0.10	- 35.	75.0*	3.0	0.22	0.21	- 6.	44.5	21.5
7. Main d'oeuvre masculine, D755536, add.	12.56	6.42	- 49.	77.0*	1.0	13.39	11.12	- 17.	71.0*	7.0
8. Chômage masculin, D 755558, mult.	2.12	1.11	- 48.	63.0*	3.0	2.76	2.68	- 3.	40.0	38.0
9. Emploi féminin, D 756045, mult.	0.14	0.14	- 1.	33.0	33.0	0.26	0.25	- 2.	33.0	33.0
10. Chômage, Atlantique, D 756581, mult.	1.98	1.40	- 29.	71.0*	7.0	3.40	3.22	- 2.	43.5	34.5
11. Chômage, Atlantique, D 756581, add.	1.02	0.64	- 37.	70.5*	7.5	1.75	1.67	- 5.	49.0	29.0
12. Chômage, Québec, D 757694, mult.	2.53	1.32	- 48.	77.0*	1.0	3.19	3.09	- 3.	46.0	32.0
13. Chômage, Ontario, D 758244, mult.	1.79	0.98	- 45.	59.0**	19.0	3.45	3.28	- 5.	41.5	36.5
14. Commerce de détail, D 100024, add.	1.19	0.73	- 38.	51.0**	15.0	1.31	1.05	- 20.	51.0	27.0
15. Prix des maisons (index), D 602026, mult.	0.04	0.04	- 13.(2)	40.0*	5.0	0.06	0.06	- 1.0(2)	16.0	12.0
16. Prix des maisons (index), D 602026, add.	0.02	0.01	- 40.(2)	36.0*	0.0	0.05	0.05	0.	3.0	3.0
17. Production électique, Québec, D 2460, add.	65.08	47.60	- 27.	70.0*	8.0	71.33	64.82	- 9.	46.0	32.0
18. Vente d'assurance-vie, D 4309, add.	8.55	6.37	- 25.	68.5*	9.5	12.16	12.14	0.	37.0	41.0
19. Produit intérieur brut, D 100000, add.	0.66	0.46	- 31.	63.5*	14.5	0.79	0.67	- 15.	48.0	30.0
20. Produit intérieur brut agricol, D 100001, mult.	1.97	1.55	- 22.	45.0	21.0	3.23	3.12	- 3.	43.0	35.0

Titre de la série, n° CANSIM[1], type d'ajustement (multiplicatif ou additif)	$\lvert E_{..}\rvert^{A}$	$\lvert E_{..}\rvert^{B}$	Δ_B%	T^+	T^-	$\lvert E\rvert^{A}_{..}$	$\lvert E\rvert^{B}_{..}$	Δ_E%	T^+	T^-
21. Production électrique, D 2455, add.	182.16	107.02	- 41.	65.0*	13.0	192.73	133.73	- 31.	70.0*	8.0
22. Emploi, D 755002, add.	10.55	8.93	- 15.	47.0	31.0	13.32	13.31	0.	40.0	38.0
23. Chômage, D 755023, mult.	2.30	0.97	- 58.	65.0*	1.0	2.83	2.35	- 17.	49.0	29.0
24. Chômage, D 755023, add.	7.42	2.90	- 61.	72.0*	6.0	12.00	12.03	0.	31.0	47.0
25. Population inactive, D 755033, add.	16.77	9.23	- 45.	77.0*	1.0	19.05	15.96	- 16.	66.0*	12.0
26. Population inactive, D 755033, mult.	0.21	0.13	- 36.	64.0*	2.0	0.26	0.24	- 7.	29.5**	6.5
27. Chômage 14-24 ans, D 755400, mult.	2.28	0.78	- 66.	75.5*	2.5	3.32	2.99	- 10.	44.0	34.0
28. Main d'oeuvre féminine, D 756044, add.	0.14	0.14	- 2.[2]	25.5	19.5	0.29	0.29	0.	18.5	17.5

(1) CANSIM est le nom de la banque mécanisée de données mise au service de ses usagers par Statistique Canada. Cette banque comprend quelques cent mille séries canadiennes.
(2) Erreur d'arondissement.
(*) Différence significative à un niveau de signification arondi inférieur à 0.05 (certitude supérieure à 95 %). Voir table de Wilcoxon dans Hollander, M. et Douglas, W.A. (1973), pp. 269 et 270.
(**) Différence significative à un niveau de signification arondi compris entre 0.10 et 0.05.

B Groupe deux: Séries pour lesquelles la méthode X-11-B réduit le biais moyen mais augmente l'erreur moyenne des poids finaux en comparaison avec la méthode X-11-A

Titre de la série, n° CANSIM, type d'ajustement (multiplicatif ou additif)	$\lvert E_{.}\rvert^{A}_{.}$	$\lvert E_{.}\rvert^{B}_{.}$	Δ_B%	T^+	T^-	$\lvert E\rvert^{A}_{..}$	$\lvert E\rvert^{B}_{..}$	Δ_E%	T^+	T^-
1. Actifs de la banque du Canada, B 1, mult.	0.26	0.25	- 1.	27.0	39.0	0.40	0.44	9.	11.5	54.5*
2. Monnaie et dépôts dans les banques à chartre, B 200, add.	15.75	14.20	- 10.	53.0	25.0	46.91	50.22	7.	13.0	65.0*
3. Epargnes personnelles dans les banques à chartre, B 451, add.	11.06	10.44	- 6.	43.0	35.0	18.20	18.93	4.	29.0	49.0
4. Mises en chantier résidentielles, D 2783, mult.	1.57	1.56	- 1.	29.0	49.0	4.22	4.80	14.	12.5	65.5*
5. Nouvelles commandes industrielles, D 310060, add.	21.33	20.50	- 4.	48.0	30.0	39.76	45.87	15.	3.0	75.0*
6. Commandes industrielles non-satisfaites, D 310106, mult.	0.17	0.16	- 3.	42.5	23.5	0.34	0.36	6.	21.0	45.0
7. Commandes industrielles non-satisfaites, D 310106, add.	2.34	2.07	- 12.	47.0	31.0	11.30	11.93	6.	20.0	58.0**
8. Inventaires industriels, D 310152, add.	3.80	3.20	- 16.	52.0	26.0	9.67	10.51	9.	23.0	55.0
9. Expéditions manufacturières, D 310000, add.	22.39	19.06	- 15.	64.0*	14.0	33.24	34.65	4.	26.0	52.0
10. Importations, D 3535, add.	9.03	8.45	- 6.	54.0	24.0	15.91	16.44	3.	17.0	61.0
11. Emploi féminin, Prairies, D 759208, mult.	0.32	0.28	- 12.	52.5	25.5	0.76	0.89	18.	1.5	64.5*
12. Taux de participation féminine, Prairies, D 759318, mult.	0.29	0.27	- 7.	39.5	38.5	0.69	0.79	15.	11.5	54.5*
13. Emploi masculin, Colombie-Britanique, D 760831, mult.	0.18	0.15	- 16.	47.5*	7.5	0.28	0.29	3.	28.5	37.5
14. Emploi masculin, Colombie-Britanique, D 760831, mult.	0.79	0.56	- 29.	57.5*	8.5	1.34	1.50	12.	16.0	62.0*
15. Emploi masculin, Canada, D 755537, add.	8.20	5.64	- 31.	66.0*	12.0	10.49	10.86	4.	33.0	45.0
16. Chômage masculin, Canada, D 755538, add.	6.75	2.61	- 61.	73.0*	5.0	10.36	11.71	13.	19.0	59.0**
17. Main d'oeuvre féminine, Canada, D 756044, add.	4.55	4.03	- 11.	54.0	24.0	7.45	7.63	2.	30.5	47.5
18. Emploi féminin, Canada, D 756045, add.	4.07	3.48	- 15.	64.5*	13.5	6.66	6.93	4.	27.0	51.0
19. Chômage féminin, Canada, D 756066, add.	0.79	0.61	- 22.	36.0	30.00	1.98	2.13	7.	22.5	55.5

Titre de la série, n° CANSIM, type d'ajustement (multiplicatif ou additif)	$\lvert E_{.}\rvert^{A}_{.}$	$\lvert E_{.}\rvert^{B}_{.}$	Δ_B%	T^+	T^-	$\lvert E\rvert^{A}_{..}$	$\lvert E\rvert^{B}_{..}$	Δ_E%	T^+	T^-
20. Chômage féminin, Canada, D 756066, mult.	1.06	0.75	- 30.	59.5**	18.5	2.22	2.37	7.	26.0	52.0
21. Emploi, Atlantique, D 756560, mult.	0.35	0.31	- 10.	58.0**	20.0	0.51	0.57	11.	12.0	54.0*
22. Emploi, Atlantique, D 756560, add.	1.79	1.73	- 3.	34.5	43.5	2.59	2.80	8.	8.0	58.0*
23. Emploi, Québec, D 757673, mult.	0.18	0.14	- 20.	50.5**	15.5	0.31	0.35	13.	4.5	73.5*
24. Emploi, Québec, D757673, add.	3.05	2.78	- 9.	50.0	28.0	5.53	5.99	8.	13.0	65.0*
25. Chômage, Québec, D 757694, add.	3.14	1.25	- 60.	78.0*	0.0	4.50	5.02	12.	12.0	66.0*
26. Emploi, Ontario, D 758223, add.	4.49	3.35	- 25.	60.0*	18.0	6.07	6.17	2.	38.0	40.0
27. Emploi, Ontario, D 758223, mult.	0.16	0.16	- 4.(2)	32.0	23.0	0.23	0.24	6.	15.0	40.0
28. Chômage, Ontario, D 758244, add.	1.78	1.01	- 43.	54.0	24.0	4.11	4.33	5.	22.0	56.0**
29. Chômage, Prairies, D 758794, mult.	2.95	2.01	- 32.	62.0*	16.0	4.20	4.63	10.	19.0	59.0**
30. Chômage, Prairies, D 758794, add.	0.96	0.44	- 54.	68.0*	10.0	2.10	2.29	9.	16.0	62.0*
31. Emploi, Prairies, D 759156, add.	1.68	1.67	0.	36.0	42.0	3.93	4.16	6.	15.0	51.0*
32. Emploi, Prairies, D 759156, mult.	0.25	0.24	- 5.	21.5	14.5	0.37	0.40	7.	2.5	52.5*
33. Emploi, Colombie-Britanique, D 760807, add.	1.23	1.03	- 16.	53.0	25.0	2.06	2.28	11.	15.0	63.0*
34. Emploi, Colombie-Britanique, D 760807, mult.	0.21	0.19	- 10.	40.0	15.0	0.31	0.34	10.	15.0	63.0*
35. Chômage, Colombie-Britanique, D 760937, mult.	1.86	1.34	- 28.	70.0*	8.0	2.58	2.84	10.	21.0	57.0**
36. Chômage, Colombie-Britanique, D 760937, add.	0.50	0.34	- 33.	67.0*	11.0	1.22	1.31	7.	23.0	55.0
37. Emploi, Etats-Unis, — , mult.	0.11	0.08	- 28.	53.5*	1.5	0.16	0.17	4.	35.0	31.0
38. Chômage, Etats-Unis, — , mult.	0.89	0.62	- 31.	66.0*	12.0	1.60	1.95	22.	8.0	70.0*
39. Emploi, Etats-Unis, — , add.	57.51	38.30	- 33.	66.0*	12.0	100.70	109.25	8.	24.0	54.0
40. Chômage, Etats-Unis, — , add.	30.20	22.50	- 26.	61.0*	17.0	59.39	70.27	18.	11.0	67.0*
41. Exportations, D 3471, mult.	0.55	0.53	- 2.	44.0	34.0	1.56	1.68	8.	15.0	63.0*
42. Commerce de détail, D 10024, mult.	0.68	0.57	- 16.	54.0	24.0	0.73	0.80	10.	39.5	38.5

Titre de la série, n° CANSIM, type d'ajustement (multiplicatif ou additif)	$\lvert E_{..}\rvert^{A}$	$\lvert E_{..}\rvert^{B}$	Δ_B%	T^+	T^-	$\lvert E\rvert^{A}_{..}$	$\lvert E\rvert^{B}_{..}$	Δ_E%	T^+	T^-
43. Prix des aliments (index), D 602002, add.	0.15	0.12	- 19.	30.0	25.0	0.27	0.31	17.	11.0	55.0
44. Prix des aliments (index), D 602002, mult.	0.13	0.10	- 20.	30.5	24.5	0.22	0.27	23.	4.0	74.0*
45. Loyers (index), D 602263, mult.	0.02	0.02	- 8.	3.0*	0.0	0.04	0.05	16.	12.0	24.0
46. Loyers (index), D 602263, add.	0.01	0.00	- 38.(2)	8.0	2.0	0.04	0.06	58.	2.0	53.0*
47. Production d'électricité, Qué. D 2460, mult.	0.81	0.77	- 5.	47.0	31.0	0.97	1.06	9.	23.0	55.0
48. Vente d'assurance-vie, D 4309, mult.	0.51	0.38	- 25.	58.5**	19.5	1.36	1.39	2.	36.0	42.0
49. Produit intérieur brut agricole, D 100001, add.	6.36	4.55	- 28.	57.0**	21.0	7.07	7.14	1.	41.5	36.5
50. Pêcheries (volume), D 3064, add.	2.93	2.25	- 23.	54.50	23.50	10.56	11.50	9.	17.0	61.0*
51. Revenus passager/mille des cies de chemin de fer, D 4021, mult.	0.66	0.47	- 28.	62.0*	16.0	2.07	2.28	10.	18.0	60.0*
52. Production d'électricité, D 2455, mult.	0.53	0.45	- 15.	52.0	26.0	0.63	0.63	1.	39.0	39.0
53. Emploi canadien, D 755002, mult.	0.19	0.16	- 17.	38.5	16.5	0.22	0.23	3.	31.5	46.5

C Groupe trois: Séries pour lesquelles la méthode X-11-B augmente le biais moyen associé aux poids finaux en comparaison avec la méthode X-11-A

Titre de la série, n° CANSIM, type d'ajustement (multiplicatif ou additif)	$\lvert E_{.}\rvert^{A}_{.}$	$\lvert E_{.}\rvert^{B}_{.}$	Δ_B%	T^+	T^-	$\lvert E\rvert^{A}_{..}$	$\lvert E\rvert^{B}_{..}$	Δ_E%	T^+	T^-
1. Actifs de la banque du Canada, B 1, add.	9.38	9.47	1.	46.0	32.0	16.32	17.76	9.	17.0	61.0*
2. Dépôts et monnaie dans banques à charte, B 2000, mult.	0.09	0.09	6.(2)	25.5	29.5	0.23	0.25	12.	0.0	45.0*
3. Epargnes personnelles dans les banques à charte, B 451, mult.	0.03	0.03	24.	9.5	26.5	0.14	0.15	5.	11.0	34.0**
4. Mises en chantier résidentielles, D 2783, add.	86.2	90.20	5.	35.0	43.0	378.36	368.75	- 3.	52.0	26.0
5. Inventaires, D 310152, mult.	0.03	0.04	5.	37.0	41.0	0.13	0.14	8.	5.0	31.0*
6. Salaires et traitements, D 995, mult.	0.16	0.17	4.	34.0	44.0	0.22	0.21	- 1.	28.0	38.0
7. Naissances, D 87, add.	47.55	51.33	8.	34.0	44.0	157.63	153.01	- 3.	36.0	42.0
8. Naissances, D 87, mult.	0.11	0.12	17.	17.5	37.5	0.42	0.44	6.	27.5	50.5
9. Mortalités, D 109, add.	31.83	35.66	12.	33.0	45.0	81.42	92.86	14.	25.0	53.0
10. Mortalités, D 109, mult.	0.29	0.31	8.	37.0	41.0	0.70	0.80	15.	17.0	61.0*
11. Exportations, D 3471, add.	10.99	11.44	4.	19.0	59.0**	16.09	17.63	10.	17.0	61.0*
12. Pêches, D 3064, mult.	1.40	1.46	4.	37.5	40.5	5.97	5.98	0.	35.0	43.0
13. Revenus des cies de chemin de fer, D 4013, add.	0.59	0.60	1.	31.0	47.0	1.44	1.46	1.	39.5	38.5
14. Revenus des cies de chemin de fer, D 4013, mult.	0.41	0.46	12.	13.5	41.5**	1.17	1.26	8.	17.0	49.0**
15. Revenus passager/mille des cies de chemin de fer, D 4021, add.	1.18	1.21	2.	35.0	43.0	5.57	6.05	9.	16.0	62.0*
16. Emploi féminin, Prairies, D 759208, add.	0.62	0.65	4.	43.0	35.0	2.56	3.00	17.	7.0	71.0*
17. Taux de participation féminin, Prairies, D 759318, add.	0.07	0.07	7.	21.5	33.5	0.22	0.26	18.	7.5	58.5*
18. Emploi féminin, Colombie-Britanique, D 760855, mult.	0.28	0.29	5.	17.5	37.5	0.63	0.63	- 1.	25.5	19.5
19. Emploi féminin, Colombie-Britanique, D 760855, add.	0.54	0.59	9.	32.5	45.5	1.49	1.62	9.	25.0	53.0

APPENDICE V.D: EXACTES MODIFICATIONS RELATIVES AUX FILTRES SAISONNIERS APPORTEES A X-11 (X-11-B)

Les modifications apportées à X-11 concernent les moyennes mobiles saisonnières; plus exactement, les trois de trois et trois de cinq. En algèbre linéaire les nouveaux poids incorporés s'écrivent

(V.D.a) $P = T(T'VT)^{-1}T'V$ (équation (3.3.4.g)),

où T est la matrice du temps dévié de sa moyenne de l'intervalle; et V, la matrice de pondération retenue pour l'application des moindres carrés généralisés.

(V.D.b) $T = \left\{ \begin{array}{l} ((-n-1+2i)/2.0)^j \\ i=1,\ldots,n \text{ (rangées)}, \\ j=0,1 \text{ (colonnes)}. \end{array} \right\}$ (équation (3.1.2.c)),

où n est le nombre total d'observations dans l'intervalle (5 ou 7). V est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont donnés par

(V.D.c) $\frac{1}{n_1n_2}\ \frac{2}{n_1n_2} \cdots \underbrace{\frac{n_2}{n_1n_2}\ \frac{n_2}{n_1n_2} \cdots \frac{n_2}{n_1n_2}}_{n_2-n_1+1}\ \frac{n_2-1}{n_1n_2} \cdots \frac{1}{n_1n_2}$, $n_1 \geq n_2$ (équation (3.3.4.d)),

où n_1 vaut 5 ou 3, n_2 égale 3. n égale n_1+n_2-1. A remarquer qu'à cause de la pondération (V.D.c) retenue, les poids centraux dans (V.D.a) demeurent identiques à ceux qu'il remplacent dans la version non-modifiée de X-11[1].

Les poids de l'équation (V.D.a) ont la forme algébrique suivante

(V.D.d) $P_{ij} = V_{jj}\ (1.0 + (-n-1+2i)\ (-n-1+2j))\ /\ (4.0\ S_v)$,

où V_{jj} représentent les éléments diagonaux de V dans l'équation (V.D.c); et S_v, une constante valant

(V.D.e) $S_v = \sum_{j=1}^{n} V_{jj}(((-n-1+2j)/2.0)^2)$.

(1) En fait les poids centraux des trois de trois et trois de cinq de X-11 sont donnés par (V.D.c) si on pose n_1=3 ou 5 et n_2=3.

La statistique de Student relative à la pente B de la droite estimée sur l'intervalle par les moindres carrés pondérés se calcule

(V.D.f) $t_B = B / E_B$ (de l'équation (3.1.5.b),

où E_B, l'écart type de B, égale la variance de la régression multipliée par le dernier élément, S_v^{-1}, de $(T'VT)^{-1}$, le tout à la puissance 1/2. La pente vaut

(V.D.g) $B = \sum_{j=1}^{n} (((-n-1+2j)/2.0)/S_v)\ Y_j\ V_{jj}$.

Dans cette équation Y_j représentent les observations de l'intervalle, notamment les rapports (ou différences) S-I annuels bruts ("non-modifiés") de l'étape appropriée des calculs de X-11, et E_B prend la valeur

(V.D.h) $E_B = ((\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ji}\ V_{jj}\ Y_j\ Y_i) / ((n-2)\ S_v))^{1/2}$,

$$M_{ij} = (\delta_{ij} - P_{ij}),\ \delta_{ij} = \begin{matrix} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{matrix}$$

Quand la valeur calculée (V.D.f) de Student dépasse (en valeur absolue) la valeur tabulée $t(\alpha,n-2)$[2] (test à une queue), les nouveaux poids P_{ij} sont utilisés pour le mois considéré en les appliquant aux rapports (ou différences) S-I "modifiés". Sinon on retient les "vieux" poids.

(2) Dans l'expérimentation relatée à l'appendice V.C le seuil de signification α s'établissait à 0.02. Mais différents seuils sont optionnels dans le programme modifié X-11-B, notamment les seuils α=0.01, 0.02, 0.05, 0.10 et 0.50. L'expérience des nouveaux poids avec les différents seuils recommande des seuils moins sévères si la série contient peu d'irrégularité (par exemple α=0.10); et, des seuils plus sévères, si la série contient beaucoup d'irrégularité (par exemple α=0.01).

RESUME ET CONCLUSION

Les séries chronologiques ont d'abord été présentées comme des réalisations de processus stochastiques, afin de les inscrire dans un cadre d'analyse moderne et surtout général. Le chapitre deux a défini les composantes des séries chronologiques avec leur interprétation économique et donné un aperçu des approches disponibles pour les estimer. Le troisième chapitre a examiné une de ces approches d'estimation, soit les mobiles, en insistant plus sur leur aspect temporel - plutôt sous-développé croyions-nous - que sur leur aspect fréquentiel. Au quatrième chapitre on décrit, critique et diagnostique une méthode d'estimation connue des composantes des séries chronologiques, qui utilise des moyennes mobiles, à la lumière faite sur celles-ci au chapitre antérieur. Il s'agit de la "Census Method II" variante X-11. Enfin nous avons dans le dernier chapitre proposé et testé des nouvelles moyennes mobiles saisonnières incorporées à cette méthode et conclu à la supériorité de la méthode ainsi modifiée en régime de saisonnalité mobile, pourvu que la série ne contienne pas trop d'irrégularité.

Par souci d'empirisme, nous avons évité de trop chambarder la méthode X-11: les poids centraux des nouvelles moyennes mobiles saisonnières demeurent inchangés, de même que les poids terminaux, lorsque le mois considéré ne démontre pas significativement de saisonnalité mobile. Dans le cas contraire, les nouveaux poids terminaux se définissent de façon consistente avec les mêmes poids centraux, en ce sens que, pour un intervalle d'application donné, les estimés central et terminaux résident sur la même droite. C'est ainsi que les moyennes composées trois de cinq et trois de trois sont devenues des moyennes simples à polynôme associé linéaire, établi par les moindres carrés

pondérés à pondération donnée par les poids centraux des moyennes connues antérieurement.

Ainsi pour les séries relativement irrégulières comme pour celles à saisonnalité stable, les deux méthodes donnent des estimés à peu près identiques des composantes. Pour les séries à saisonnalité mobile, les estimés historiques sont les mêmes avec les deux méthodes, car les estimés historiques de la méthode non-modifiée reproduisaient déjà bien la saisonnalité linéairement mobile; tandis que les estimés terminaux - soit ceux des trois dernières et premières années - se situent plus près des estimés historiques qui se manifesteront avec l'addition éventuelle de trois autres années de données brutes à la série. C'est-à-dire que les estimés terminaux de facteurs saisonniers mobiles calculés selon la méthode modifiée se rapprochent davantage des estimés qui deviendront historiques et "finaux" dans le futur. Les révisions de tels estimés deviennent donc minimales et les estimés historiques passés déjà obtenus sous la méthode originale restent inchangés sous la méthode modifiée.

BIBLIOGRAPHIE

Anderson, T.W. (1971), The Statistical Analysis of Time Series, Wiley.

Austin, J.S. (1971), "A Simulation Technique for Measuring the Accuracy of Seasonal Methods", The American Statistical Association, Proceedings of the Business and Economic Statistics Section, p. 63-76.

Bachelier, L, (1912), Calcul des probalités, Paris, Gauthier-Villars, 518 p.

Bartlett, M.S. (1955), An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications, Cambridge, Cambridge University Press, 312 p.

Bauman, A.O. (1928), "Thirteen-Months-Ratio-First-Difference Method for Measuring Seasonal Variations", Journal of the American Statistical Association, Vol. 23, p. 282-290.

Beveridge, W.H. (1914), "Wheat Prices and Rainfall in Western Europe", Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 85, p. 412-459.

Birknoff, G.D. (1931), "Proof of the Ergodic Theorem", Proceedings of the National Academy of Science, U. S. A., Vol. 17, p. 656-660.

Blackett, O.W. and Wilson, W.P. (1938), "A Method of Isolating Sinusoidal Component in Economic Time Series", University of Michigan, Bureau of Business Research, Michigan Business Studies, Vol. 8, 58 p.

Blanc-Lapierre, A. et Fortet, R. (1953), Théorie des fonctions aléatoires, Paris, Massan, 396 p.

Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. (1976), Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden-Day, 575 p.

Brewer, K.R.W., Hagan, P.J. and Perazzelli, P. (1975), "A Second Look at Box-Jenkins Seasonal Adjustment and Related Component Analysis", Australian National University and Australian Bureau of Statistics, Camberra, 18 p.

Brewer, K.R.W. and Hagan, P.J. (1975), "Seasonal Adjustment Using Box-Jenkins Models", Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings of the 40th Session held in Warsaw, Contributed Papers, Vol. 46, p. 130-136.

Brittain, J.A. (1959), "A Bias in the Seasonnally Adjusted Unemployed Series and a Suggested Alternative", Review of Economics and Statistics, Vol. 41, p. 405-411.

Brown, R.G. (1963), Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series, Prentice-Hall.

Brown, R.L., Cowley, A.H. and Durbin, J. (1971), Seasonal Adjustment of Unemployement Series, Central Statistical Office, Reserach Series No. 4 Her Majesty's Stationary Office, 30 p.

Burman, J.P. (1965), "Moving Seasonal Adjustment of Economic Time Series", Journal of the Royal Statistical Society, Series A, Vol. 127, p. 534-558.

——— (1967), "Assessment of a Seasonal Adjustment Procedure by Spectral Analysis", The Statistician, Vol. 17, p. 247-256.

Buys-Ballot, C.H.D. (1847), Les changements périodiques de température, Utrecht.

Calot, G. (1965), Cours de statistique descriptive, Paris, Dunod.

Carmichael F.L. (1927), "Methods for Computing Seasonal Indexes: Constant and Progressive", Journal of the American Statistical Association, Vol. 22, p. 339-354.

Chatfield, C. (1975), The Analysis of Time Series: Theory and Practice, London, Chapman and Hall; New York, Wiley.

Cleveland, W.P. and Tiao, G.C. (1974), Decomposition of Seasonal Time Series: a Model for the Census X-11 Program, Department of Statistics, University of Wisconsin, Technical Report No. 332.

Cramér, H. and Leadbetter, M.R. (1968), Stationary and Related Stochastic Processes, Wiley.

Croxton, F.E and Cowden, D.J. (1955), Applied General Statistics, Prentice-Hall.

Dagum, E.B. (1974a), Bias in the Current Estimates of Seasonally Adjusted Labour Force Series, Current Economic Analysis, Statistics Canada (unpublished).

——— (1974b), Models for Time Series, Statistics Canada, Occasional Paper Catalogue No. 12-548, 83 p.

——— (1975), "Seasonal Factor Forecasts from ARIMA Models", Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings of the 40th Session held in Warsaw, Vol. 46, p. 203-216.

Dhrymes, P.J. (1974), Econometrics: Statistical Fundation and Applications, New York, Springer-Verlag.

Durbin, J. (1960), "Estimation of Parameters in Estimating Time Series Regression Models", Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 22, p. 139-153.

——— (1962), "Trend Elimination by Moving-Average and Variate-Difference Filters", Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings of the 33rd Session held in Paris, Vol. 39, p. 131-142.

Dwights, H.B. (1966), Tables of Integrals and Other Mathematical Data, Macmillan, 4th ed.

Fontenay, A. (de) (1973), "The Composition of a Time Series as an Algebra of Averages", Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings of the 39th Session held in Vienna, Vol. 45, p. 395-415.

Fontenay, A. (de) and Prieuret, B. (1972), Henderson's Moving Averages, Econometric Research Staff, Statistics Canada (unpublished).

Gauss, G.F. (1873), Wahrscheinlichkeitrechnung, Werke, Vol. 4, Goettingen.

Godfrey, M.D. (1965), "An Exploratory Study on the Bi-Spectrum of Economic Time Series", Applied Statistics, Vol. 14, p. 48-69.

Godfrey, M.D. and Karreman, H.F. (1967), "A Spectrum Analysis of Seasonal Adjustment", in Shubik, M., Essays in Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern, Princeton University Press, p. 367-421.

Granger, C.W.J. and Hatanaka, M. (1964), Spectral Analysis of Economic Time Series, Princeton University Press.

Grenander, U. and Rosenblatt, H.M. (1957), Statistical Analysis of Stationary Time Series, Wiley.

Grether, D.M. and Nerlove, M. (1970), "Some Properties of 'Optimal' Seasonal Adjustment", Econometrica, Vol. 38, p. 682-703.

Guilbaud, G.J. (1968), Statistique des chroniques, Paris, Dunod.

Hannan, E.J. (1963),"The Estimation of Seasonal Variation in Economic Time Series", Journal of the American Statistical Association, Vol. 58, p. 31-44.

——————— (1964), "The Estimation of a Changing Seasonal Pattern", Journal of the American Statistical Association, Vol. 59, p. 681-724.

——————— (1970), Multiple Time Series, Wiley.

Hannan, E.J., Terrell, R.D. and Tuckwell, N.E. (1970), "The Seasonal Adjustment of Economic Time Series", International Economic Review, Vol. 11, p. 24-52.

Hardy, G.F. (1909), The Theory of the Construction of Tables of Mortality, London, Charles and Edwin Layton.

Henderson, R. (1916), "Note on Graduation by Adjusted Average", Transactions of the Actuarial Society of America, Vol. 19, p. 43-48.

——————— (1924), "A New Method of Graduation", Transactions of the Actuarial Society of America, Vol. 25, p. 29-40.

Henshaw, R.C. (1966), "Application of the General Linear Model to Seasonal Adjustment of Economic Time Series", Econometrica, Vol. 34, p. 381-395.

Hollander, M. and Wolfenden, A.D. (1973), Non-Parametric Statistical Methods, Wiley.

Jenkins, G.M. and Watts, D.G. (1969), Spectral Analysis and its Applications, Holden-Day.

Johnston, J. (1972), Econometric Methods, McGraw-Hill, 2nd ed.

Jones, H.L. (1943), "Fitting Polynomial Trends to Seasonal Data by the Method of Least Squares", Journal of the American Statistical Association, Vol. 38, p. 453-465.

Jorgenson, D.W. (1964), "Minimum Variance, Linear, Unbiased Seasonal Adjustment of Economic Time Series", Journal of the American Statistical Society, Vol. 59, p. 681-724.

——————— (1967), "Seasonal Adjustment of Data for Econometric Analysis", Journal of the American Statistical Association, Vol. 62, p. 137-140.

Judek, S. (1975), Canada's Seasonal Variations in Employment and Unemployment 1954-73, University of Ottawa, Reasearch Paper No. 7510.

Kendall, M.G. (1173), Time Series, Haffner, 195 p.

Kendall, M.G. and Stuart, A. (1968), The Advanced Theory of Statistics, 3 vol. Haffner.

Khinchin, A.-Ja. (1934), "Korrelationstheorie der stationaeren stochastischen Prozesse", Mathematical Annals, Vol. 109, p. 604-615.

King, W.I. (1924), "An Improved Method for Measuring the Seasonal Factors", Journal of the American Statistical Association, Vol. 19, p. 301-313.

Kolgomorov, A.N. (1938), "A Simplified Proof of the Birkoff-Khinchin's Ergodic Theorem", Uspekhi Mat. Nauk, Vol. 5, p. 52-56.

——————— (1941), "Local Structure of Turbulence in an Incompressible Fluid with very Large Reynold's Numbers", Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol. 30, p. 299-303.

——————— (1941), "Interpolation and Extrapolation of Stationary Random Sequences", Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser Mat., Vol. 5, p. 3-14.

Koopmans, L.H. (1974), The Spectral Analysis of Time Series, Academic Press.

Kuznets, S. (1932), "Seasonal Pattern and Seasonal Amplitude: Measurement of their Short-Time Variations", Journal of the American Statistical Association, Vol. 27, p. 9-20.

——————— (1933), Seasonal Variations in Industry and Trade, National Bureau of Economic Research, 480 p.

Ladd, G.W. (1964), "Regression Analysis of Seasonal Data", Journal of the American Statistical Association, Vol. 59, p. 402-421.

Lebesgue, H. (1906), Leçon sur les séries trigonométriques, Paris, Gauthier-Villars, 128 p.

Leser, C.E.V. (1966), "Direct Estimation of Seasonal Variation", Review of the International Statistical Institute, Vol. 34, p. 369-374.

Lesourne, J. (1959), Technique économique et gestion industrielle, Paris, Dunod.

Lévy, P. (1937), Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, Gauthier-Villars, 331 p.

Lighthill, M.J. (1970), Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions, Cambridge University Press.

Lovell, M.C. (1963), "Seasonal Adjustment of Economic Time Series and Multiple Regression Analysis", Journal of the American Statistical Association, Vol. 58, p. 998-1010.

——— (1966), "Alternative Axiomatization of Seasonal Adjustment", Journal of the American Statistical Association, Vol. 61, p. 800-802.

Macaulay, F.R. (1931), The Smoothing of Time Series, National Bureau of Economic Reasearch, 172 p.

Malinvaud, E. (1969), Méthodes statistiques de l'économétrie, Paris, Dunod.

Menderhausen, H. (1937), "Annual Survey of Statistical Techniques: Methods for Computing and Eliminating Changing Seasonal Fluctuations", Econometrica, Vol. 5, p. 234-262.

——— (1939), "Eliminating Changing Seasonal Pattern by Multiple Regression Analysis", Review of Economics and Statistics, Vol. 21, p. 171-177.

Menezes, O.J. (1971), "The Dummy Variable Method for Jointly Estimating Seasonal Indexes and Regression on Non-Seasonal Variables", The American Statistician, Vol. 25, p. 32-36.

Nerlove, M.A. (1964), "Spectral Analysis of Seasonal Adjustment Procedures", Econométrica, Vol. 32, p. 241-286.

——— (1965), "A Comparison of a Modified 'Hannan' and the B.L.S. Seasonal Adjustment Filters", Journal of the American Statistical Association, Vol. 60, p. 442-491.

Nettheim, N.F. (1965a), "Fourier Methods for Evolving Seasonal Patterns", Journal of the American Statistical Association, Vol. 60, p. 492-502.

——— (1965b), A Spectral Study of 'Over-Adjustment' for Seasonality, U. S. Bureau of the Census, Working Paper No. 21.

O. E. C. D. (1961), Seasonal Adjustment on Electronic Computers, Proceedings of an international conference held in Paris in November 1960.

Parzen, E. (1960), Modern Probability Theory and its Applications, Wiley, 464 p.

——— (1967), "The Role of Spectral Analysis in Time Series Analysis", Review of the International Statistical Institute, Vol. 35, p. 125-141.

——— (1967b), Stochastic Processes, Holden-Day.

Persons, W.M. (1919), "Indices of Business Conditions", Review of Economics and Statistics, Vol. 1, p. 107.

——— (1923), "Correlation of Time Series", Journal of the American Statistical Association, Vol. 18, p. 713-726.

Piskounov, N. (1966), Calcul différentiel et Intégral, Moscou, Mir, 2e ed.

Quenouille, M.H. (1949), "On a Method of Trend Elimination", Biometrica, Vol. 36, p. 75-91.

——— (1957), The Analysis of Multiple Time Series, Haffner, 105 p.

Rhodes, E.C. (1940), "Population Mathematics", Journal of the Royal Statistical Society, Series A, Vol. 103, p. 61-89.

Rosenbaltt, H.M. (ed.) (1963), Time Series Analysis, Wiley.

——— (1965), "Spectral Analysis and Parametric Methods for Seasonal Adjustment of Economic Time Series, Proceedings of the American Statistical Association Business and Economic Statistics Section, p.94-133.

——— (1968), "Spectral Evaluation of the B.L.S. and Census Revised Seasonal Adjustment Procedures", Journal of the American Statistical Association, Vol. 63, p. 472-501.

Salzman, L. (1968), Computerized Economic Analysis, McGraw-Hill.

Schuster, A. (1897), "On the Investigation of Hidden Periodicities with Application to a Supposed 26-Day Period of Meteorological Phenomena", Terrestial Magnetism, Vol. 3, p. 13-41.

Sheppard, W.F. (1914), "Graduation by Reduction of Mean Square Error", Journal of the Institute of Actuaries, Vol. 48, p. 171-185, 390-412.

Shiskin, J. (1942), "A New Multplicative Seasonal Index", Journal of the American Statistical Association, Vol. 37, p. 507-516.

——— (1957), Electronic Computers and Business Indicators, National Bureau of Economic Research, Occasional Paper No. 57, 267 p.

——— (1958), "Decomposition of Economic Time Series", Science, Vol. 128, p. 1539-1546.

——— (1968), "Time Series: Seasonal Adjustment", in the International Encyclopedia of the Social Sciences, Macmillan and the Free Press, p. 80-88.

——— (1973), "Measuring Current Economic Fluctuations", Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 2, p. 1-15.

Shiskin, J. and Eisenpress H. (1957),"Seasonal Adjustment by Electronic Computer Methods", Journal of the American Statistical Association, Vol. 52, p. 415-449.

Shiskin, J., Young, A.H. and Musgrave, J.C. (1967), The X-11 Variant of the Census Method II Seasonal Adjustment Program, U. S. Bureau of the Census, Technical Paper No. 15, 66 p.

Slutsky, E. (1937), "The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes", Econometrica, Vol. 5, p. 105-146.

Slutsky, E. (1938), "sur les fonctions aléatoires presques périodiques et sur la décomposition de fonctions aléatoires stationnaires en composantes", Actualités Scientifiques et Industrielles, Vol. 738, p. 93-115.

Spencer, J. (1904), "On the Graduation of the Rates of Sickness and Mortality", Journal of the Institute of Actuaries, Vol. 38, p. 334-343.

Stephenson, J.A. and Farr, H.T. (1972), "Seasonal Adjustment of Economic Data by Application of the General Linear Statistical Model", Journal of the American Statistical Association, Vol. 67, p. 37-45.

Stuart, R.D. (1961), An Introduction to Fourier Analysis, Methuen.

Terrel, R.D. and Tuckwell, N.E. (1971), "Efficiency of Least Squares in Estimating a Stable Seasonal Pattern", Journal of the American Statistical Association, Vol. 66, p. 354-362.

Theil, H. (1971), Principles of Econometrics, Wiley.

Tinbergen, J. (1937), An Econometric Approach to Business Cycle Prolems, Paris, Herman et Cie, 73 p.

Tintner, G. (1940), "The Analysis of Economic Time Series", Journal of the American Statistical Association, Vol. 35, p. 93-100.

U. S. Bureau of Labor Statistics (1964), The B.L.S. Seasonal Factor Method.

Whittaker, E. and Robinson, G. (1924), The Calculus of Observations, Blackie and Sons, 4th ed.

Wilcoxon, F. (1945), "Individual Comparisons by Ranking Methods", Biometrics, Vol. 1, p. 80-83.

Wold, H. (1938), A Study in the Analysis of Stationary Time Series, Uppsala, Almqvist and Wiksell, 236 p.

Wold, H.O.A. (1965), Bibliography on Time Series and Stochastic Processes, the International Statistical Institute, 516 p.

Yaglom, A.M. (1955), "The correlation Theory of Processes with Random Stationary nth Increments", Mathematical Review, Vol. 17, p. 167.

——————— (1962), An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions, Prentice-Hall.

Young, A.H. (1965), Estimating Trading-Day Variation in Monthly Economic Time Series, U. S. Bureau of the Census, Technical Paper no. 12.

——————— (1968), "Linear Approximation to the Census and B.L.S. Seasonal Adjustment Methods", Journal of the American Statistical Association, Vol. 63, p. 445-471.

Zellner, A. and Palm, F. (1974), "Time Series Analysis and Simultaneous Equation Econometric Models", Journal of Econometrics, Vol. 2, p. 17-54.