



National Library
of Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Canadian Theses Service

Service des thèses canadiennes

Ottawa, Canada
K1A 0N4

NOTICE

The quality of this microform is heavily dependent upon the quality of the original thesis submitted for microfilming. Every effort has been made to ensure the highest quality of reproduction possible.

If pages are missing, contact the university which granted the degree.

Some pages may have indistinct print especially if the original pages were typed with a poor typewriter ribbon or if the university sent us an inferior photocopy.

Reproduction in full or in part of this microform is governed by the Canadian Copyright Act, R.S.C. 1970, c. C-30, and subsequent amendments.

AVIS

La qualité de cette microforme dépend grandement de la qualité de la thèse soumise au microfilmage. Nous avons tout fait pour assurer une qualité supérieure de reproduction.

S'il manque des pages, veuillez communiquer avec l'université qui a conféré le grade.

La qualité d'impression de certaines pages peut laisser à désirer, surtout si les pages originales ont été dactylographiées à l'aide d'un ruban usé ou si l'université nous a fait parvenir une photocopie de qualité inférieure.

La reproduction, même partielle, de cette microforme est soumise à la Loi canadienne sur le droit d'auteur, SRC 1970, c. C-30, et ses amendements subséquents.

**INTERPOLANTS D'ORDRE 5 ET 6
POUR LES MÉTHODES DE DORMAND-PRINCE
DU TYPE RUNGE-KUTTA**

par

Martine CALVÉ

**Thèse présentée à l'Ecole des études supérieures
de l'Université d'Ottawa pour l'obtention de la
maîtrise ès sciences en mathématiques.**



Martine Calvé, Ottawa, Canada, 1989



National Library
of Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Canadian Theses Service Service des thèses canadiennes

Ottawa, Canada
K1A 0N4

The author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

L'auteur a accordé une licence irrévocable et non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de sa thèse de quelque manière et sous quelque forme que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

The author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-315-60022-5

Canada



UNIVERSITÉ D'OTTAWA
UNIVERSITY OF OTTAWA

à Jean

Remerciements

Je remercie sincèrement Rémi Vaillancourt pour sa grande disponibilité, son soutien continu, en un mot, son aide précieuse tout au long de la réalisation de ce travail.

RÉSUMÉ

On décrit la construction d'interpolants d'Enright et al. pour les formules de Runge-Kutta et on construit des interpolants d'ordre 5 et 6 pour trois paires de formules de Runge-Kutta d'ordre 4 et 5 présentées par Dormand et Prince en 1980. Sur l'intervalle $[0,1]$, les interpolants pour ces trois paires admettent des bornes d'erreur d'ordre 6 très inférieures à la borne obtenue par Enright et al. pour la méthode de Fehlberg.

ABSTRACT

A procedure developed by Enright et al. is described and used to construct interpolants of order 5 and 6 for three Runge-Kutta formula-pairs of order 4 and 5, presented by Dormand and Prince in 1980. A typical result is that the error bounds obtained for the interpolants of order 6 on the interval $[0,1]$ for the three pairs considered are all much smaller than the ones obtained by Enright et al. for the method of Fehlberg.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé—Abstract.....	i
Introduction.....	1
Chapitre premier.....	7
Chapitre II.....	24
DP(4,5)6M.....	24
DP(4,5)7M.....	52
DP(4,5)7S.....	63
Conclusion.....	75
Références.....	76

INTRODUCTION

Les méthodes explicites de Runge-Kutta forment une classe intéressante d'algorithmes numériques pour résoudre les problèmes aux valeurs initiales d'un système non raide d'équations différentielles:

$$(1) \quad y'(x) = f(x,y), \quad y(x_n) = y_n.$$

La valeur de $y_n = y(x_n)$ étant donnée, de telles méthodes utilisent un pas de longueur $h = h_n$ pour produire une approximation y_{n+1} de $y(x_{n+1})$.

Les méthodes actuelles de Runge-Kutta produisent une approximation discrète $\{x_n, y_n\}$ aux points $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. L'utilisateur détermine une norme et un seuil de tolérance τ . A chaque pas, l'algorithme tente de choisir h_n pour que l'erreur locale $y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ satisfasse

$$\|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\| \leq \tau.$$

Si l'inégalité n'est pas satisfaite, on diminue h_n ; si elle est satisfaite, y_{n+1} est acceptée et une valeur appropriée de h est choisie pour le prochain pas. La majorité des algorithmes actuels basés sur les formules de Runge-Kutta utilisent des paires de formules emboîtées, c'est-à-dire une formule d'ordre p et une d'ordre $p+1$. La technique des méthodes de Runge-Kutta emboîtées est généralement acceptée et reconnue comme étant une méthode efficace pour la résolution numérique d'équations différentielles aux valeurs initiales. Lorsque la formule d'ordre $p+1$ est utilisée pour avancer la solution

numérique de pas en pas, nous parlons de technique d'extrapolation locale.

Un algorithme de Runge-Kutta peut s'avérer très inefficace lorsque la solution est requise à un ou plusieurs points spécifiques, lorsque la solution doit être portée sur graphique, ou que l'on doit trouver un x pour lequel $y(x)$ possède une certaine propriété. Une des réponses à ces problèmes consiste à déterminer la solution locale $y(x)$ entre les points d'intégration, soit pour $x_n < x < x_{n+1}$.

Les nouvelles méthodes (de Runge-Kutta) dites continues, de la dernière décennie, interpolent par morceaux la solution discrète produite par une méthode de Runge-Kutta. Alors, une méthode numérique peut nous donner une approximation continue de la solution de (1).

Récemment, plusieurs auteurs ont montré qu'il était possible de trouver une fonction $p(x)$, polynôme par morceaux, qui approxime la solution locale à n'importe quel point sur l'intervalle $[x_n, x_n+h_n]$ et ceci à un coût très raisonnable. Horn [5], Shampine [7,8] et Enright et al. [4] ont construit chacun à leur façon des interpolants de la solution numérique $\{y_n\}$ sur l'intervalle $[x_n, x_n+h_n]$. Une façon d'atteindre ce but est d'ajouter à la paire de Runge-Kutta emboîtée une troisième formule, dite "dense":

$$(2) \quad y_{n+\tau} = y_n + \tau h_n \Phi(x_n, y_n, \tau h_n).$$

Dormand et Prince [3] considèrent deux façons de mettre en œuvre les solutions denses:

1) si la formule dense satisfait les équations de conditions pour tout $\tau \in (0,1)$, les coefficients de l'erreur peu-

vent être calculés à n'importe quel point et alors la mise en œuvre de la formule (2) se fait directement;

2) sinon on construit le polynôme d'interpolation au moyen des valeurs aux extrémités de l'intervalle $[x_n, x_{n+h_n}]$ et certaines valeurs intermédiaires (incluant possiblement des dérivées) obtenues à partir de l'équation (2).

Ces deux modes nous permettent de trouver la solution numérique de (1) à n'importe quel point à l'intérieur de l'intervalle $[x_n, x_{n+h_n}]$.

Horn [5] a proposé des algorithmes de Runge-Kutta qui appliquent directement une formule dense du type mentionné ci-haut, au coût de seulement quelques évaluations de dérivées additionnelles par pas. Elle a appliqué sa méthode à la paire de formules de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 4 et 5. Un des problèmes avec la mise en œuvre de Horn est la discontinuité de la solution dense aux nœuds du fait qu'au point $\tau=1$, l'erreur locale de la formule dense diffère de celle de la formule régulière.

Shampine [7,8] et Enright et al. [4] se sont surtout intéressés à la deuxième façon de mettre en œuvre la formule dense. Shampine a proposé une procédure d'interpolation locale qui utilise les polynômes d'Hermite $p(x)$ qui satisfont les conditions suivantes:

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

où m est le nombre de points choisis sur l'intervalle, et

$$p'(x_k) = y'_k, \quad k = 1, \dots, r,$$

où r est le nombre d'évaluations de la dérivée sur l'intervalle.

L'interpolation est accomplie seulement après un pas réussi; alors, les approximations de la solution et de la dérivée sont disponibles aux deux extrémités de l'intervalle. La solution est donc continue aux extrémités. Shampine a appliqué sa méthode à la formule de Runge-Kutta d'ordre 4 et 5 proposée par England et à une paire de formules d'ordre 4 et 5 proposées par Dormand et Prince. La méthode de Shampine requiert moins d'évaluations de dérivées additionnelles que la méthode de Horn pour Fehlberg.

Enright et al. [4] ont proposé une procédure très intéressante pour construire des interpolants pour des paires de formules de Runge-Kutta emboîtées. Ils ont appliqué leur procédure à trois méthodes explicites: la paire d'ordre 3 et 4 de Nørsett, la paire d'ordre 4 et 5 de Fehlberg et la paire d'ordre 5 et 6 de Verner. Ces auteurs se sont surtout intéressés aux questions suivantes. Peut-on construire des interpolants pour les méthodes de Runge-Kutta en utilisant seulement les valeurs locales de f disponibles? Si non, combien de valeurs de f additionnelles sont requises? Selon eux, tout dépend de l'ordre requis pour les interpolants et de leurs applications. Leur procédure comprend trois phases: la première initialise la procédure, la deuxième et la troisième constituent un processus appelé "boot-strapping" qui augmente l'ordre de l'interpolant d'une unité chaque fois que le processus est appliqué et ce jusqu'à ce que l'ordre maximum soit atteint. Les résultats obtenus sont intéressants: les interpolants qui admettent une erreur locale du même ordre que l'erreur globale de la paire de formules associées, fournissent une bonne approximation globale de la solution du problème alors que les interpolants qui ad-

mettent une erreur locale supérieure d'une unité fournissent une approximation globale plus précise quoique ces interpolants soient plus coûteux en termes du nombre d'évaluations de dérivées additionnelles.

Pendant longtemps, la paire de formules de Runge-Kutta-Fehlberg emboîtées d'ordre 4 et 5 a été considérée "le standard" pour juger des nouvelles paires de formules du même ordre. Selon Shampine [8], cette méthode n'est plus nécessairement la meilleure méthode. Ceci est dû en partie aux récents progrès dans le domaine de l'interpolation pour les méthodes de Runge-Kutta. En 1980, Dormand et Prince [2] ont proposé une famille de paires de formules de Runge-Kutta emboîtées d'ordre 4 et 5 ayant chacune une petite erreur principale dans la formule d'ordre 5 et une région étendue de stabilité absolue. Ce sont des méthodes explicites à 6 et 7 stages, notées DP(4,5)6M, DP(4,5)7M et DP(4,5)7S

Dans le présent travail, je me suis intéressée à la construction d'interpolants pour la famille de paires de formules de Runge-Kutta emboîtées d'ordre 4 et 5 proposée par Dormand et Prince. Pour accomplir cette tâche, j'ai utilisé la procédure présentée par Enright et al. [4].

Traditionnellement, on comparait les différentes méthodes entre elles sur une série de problèmes test; ceci impliquait la résolution d'un très grand nombre de problèmes. D'après Shampine [8], une autre façon de comparer des formules du même ordre est d'examiner les coefficients des erreurs locales. Pour cela, l'utilisateur doit définir une mesure de la grandeur des coefficients, c'est-à-dire une certaine norme. Une comparaison minutieuse des coefficients de l'erreur fournit plus de détails et de conclusions que l'étude d'une série de tests numériques. En comparant les mesures des erreurs, Shampine [8] a

montré qu'une des paires de formules emboîtées de Runge-Kutta d'ordre 4 et 5 proposée par Dormand et Prince [2] était nettement supérieure à celle de Fehlberg.

Mon principal intérêt est de comparer les coefficients des erreurs des interpolants construits pour les paires de formules de Dormand et Prince avec les coefficients des erreurs des interpolants construits par Enright et al. pour la paire de formules de Fehlberg.

Dans le premier chapitre, on analysera les coefficients de l'erreur locale pour les méthodes d'ordre 4 et 5 ainsi que ceux des interpolants. On présentera également la méthode de construction des interpolants proposée par Enright et al.

Dans le deuxième chapitre, on construira les interpolants d'ordre 5 et 6 pour les trois paires de formules de Runge-Kutta emboîtées d'ordre 4 et 5 développées par Dormand et Prince. On verra que les interpolants obtenus sont très satisfaisants et confirment la pensée de Shampine au sujet de la méthode de Fehlberg, c'est-à-dire la méthode de Fehlberg n'est plus nécessairement la méthode d'ordre 4 et 5 de premier choix. On conclura sur une discussion des résultats obtenus.

On ne discutera pas des applications pratiques des interpolants et des résultats numériques obtenus à partir des interpolants construits puisqu'on ne considère que l'analyse asymptotique, c'est-à-dire quand h tend vers 0.

Tous les calculs ont été effectués avec le logiciel MAPLE.

CHAPITRE PREMIER

Une paire de formules emboîtées de Runge-Kutta à s -stages se définit par les deux récurrences:

$$(3) \quad y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i f_i, \quad \text{d'ordre } p$$

$$(4) \quad \hat{y}_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^s \hat{b}_i f_i, \quad \text{d'ordre } p-1$$

où

$$f_i = f(x_n + c_i h_n, y_n + h_n \sum_{j=1}^s a_{ij} f_j)$$

et

a_{ij} ($i, j = 1, \dots, s$), b_i ($i = 1, \dots, s$), \hat{b}_i ($i = 1, \dots, s$), c_i ($i = 1, \dots, s$), sont les coefficients de la paire de formules; h_n est la grandeur du pas et y_n , y_{n+1} et \hat{y}_{n+1} sont les approximations de la solution y de (1) aux points x_n et x_{n+1} .

Le tableau 1 ci-dessous représente les coefficients de la paire de formules de Runge-Kutta emboîtées.

Tableau1: Coefficients d'une paire de formules de Runge-Kutta à s-stages.

c_1	0	0	.	.	0
c_2	$a_{2,1}$	0	.	.	
.	
.	.	.	.	0	0
c_s	$a_{s,1}$.	.	$a_{s,s-1}$	0
<hr/>					
	\hat{b}_1	\hat{b}_2	.	.	\hat{b}_s
	b_1	b_2	.	.	b_s

Puisqu'il s'agit de méthodes explicites, les $a_{ij} = 0$, $j \geq i$.
Donc les éléments de la partie triangulaire supérieure sont nuls.

L'erreur locale de la formule (3) est

$$(5) \quad T_{n+1} := y_{n+1} - y_n(x_{n+1}) = h_n^{p+1} \Psi(x_n, y_n) + O(h_n^{p+2}).$$

L'erreur locale de la formule (4) est

$$(6) \quad \hat{T}_{n+1} := \hat{y}_{n+1} - y_n(x_{n+1}) = h_n^p \hat{\Psi}(x_n, y_n) + O(h_n^{p+1}).$$

Afin de mieux comprendre et de mieux apprécier l'analyse des coefficients de l'erreur que l'on verra dans ce

travail, il est important d'expliquer les détails du terme $\Psi(x_n, y_n)$ pour une méthode d'ordre p . On a

$$T_{n+1} = y_{n+1} - y(x_{n+1}) = y_n + h_n \Phi(x_n, y_n, h_n) - y(x_{n+1})$$

où

$$\Phi(x_n, y_n, h_n) = \sum_{i=1}^s b_i f_i.$$

On développe les valeurs numériques, $\Phi(x_n, y_n, h_n)$, et les valeurs exactes, $y(x_{n+1})$, en série de Taylor:

$$\Phi(x_n, y_n, h_n) = f + h_n f^{(1)} + \frac{h_n^2 f^{(2)}}{2!} + \frac{h_n^3 f^{(3)}}{3!} + \dots$$

$$\dots + \frac{h_n^p f^{(p)}}{p!} + \frac{h_n^{p+1} f^{(p+1)}}{(p+1)!} + \dots;$$

et

$$y(x_{n+1}) = y_n + h_n y_n^{(1)} + \frac{h_n^2 y_n^{(2)}}{2!} + \frac{h_n^3 y_n^{(3)}}{3!} + \dots$$

$$\dots + \frac{h_n^p y_n^{(p)}}{p!} + \frac{h_n^{p+1} y_n^{(p+1)}}{(p+1)!} + \dots;$$

on remplace les dérivées $y_n^{(i)}$ par

$$y(1) = f$$

$$y(2) = f(1)$$

.....

.....

.....

$$y(p) = f(p-1)$$

$$y(p+1) = f(p);$$

on obtient donc, pour les valeurs exactes la série suivante:

$$y(x_{n+1}) = y_n + h_n f + \frac{h_n^2 f(1)}{2!} + \frac{h_n^3 f(2)}{3!} + \dots$$

$$+ \frac{h_n^p f(p-1)}{p!} + \frac{h_n^{p+1} f(p)}{(p+1)!} + \dots$$

On peut récrire T_{n+1} de la façon suivante

$$T_{n+1} = y_n + h_n \left[f + h_n f(1) + \frac{h_n^2 f(2)}{2!} + \dots + \frac{h_n^p f(p)}{p!} + \dots \right]$$

$$- y_n - h_n \left[f + \frac{h_n f(1)}{2!} + \frac{h_n^2 f(2)}{3!} + \dots + \frac{h_n^p f(p)}{(p+1)!} + \dots \right]$$

et on obtient

$$T_{n+1} = h_n [\Phi(x_n, y_n, h_n) - \Delta(x_n, y(x_n), h_n)].$$

La méthode est dite d'ordre p si le terme entre crochet est d'ordre p en h_n :

$$\Phi(x_n, y_n, h_n) - \Delta(x_n, y(x_n), h_n) = O(h_n^p).$$

Alors, on a

$$T_{n+1} = h_n^{p+1} \Psi(x_n, y_n) + O(h_n^{p+2})$$

où $\Psi(x_n, y_n)$ est le terme principal de l'erreur.

Pour une méthode d'ordre p , on a

$$\Psi_p(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{n_{p+1}} a_i^{(p+1)} F_i^{(p+1)}$$

où les $F_i^{(p+1)}$, $i=1 \dots n_{p+1}$, forment l'ensemble des différentielles élémentaires d'ordre $p+1$ de f et n_{p+1} est le nombre de différentielles élémentaires d'ordre $p+1$.

Si la formule est d'ordre p , alors

$$\Psi_r(x_n, y_n) = 0, \quad r = 1, \dots, p-1.$$

Ceci implique que

$$(7) \quad a_i^{(r+1)} = 0, \quad i = 1, \dots, n_{r+1}, \quad r = 1, \dots, p-1.$$

Selon Lambert [6], pour la consistance, l'équation qui suit doit être satisfaite:

$$(8) \quad a_1(1) = \sum_{i=1}^s b_{i-1} = 0.$$

Les équations (7) et (8) sont appelées équations de conditions des méthodes de Runge-Kutta d'ordre p .

Butcher [1] a donné les détails des termes du développement de Taylor pour les valeurs numériques, y_{n+1} , et pour les valeurs exactes, $y(x_{n+1})$:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{h_n^r \beta_i(r) \varphi_i(r) F_i(r)}{(r-1)!}, \quad i = 1, \dots, n_r,$$

$$y(x_{n+1}) = y_n + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{h_n^r \alpha_i(r) F_i(r)}{r!}, \quad i = 1, \dots, n_r,$$

où

$F_i(r)$ représente l'ensemble des différentielles élémentaires d'ordre r ;

$\beta_i(r)$ sont les coefficients numériques avec lesquels l'ensemble des différentielles élémentaires des valeurs numériques $F_i(r)$ correspondent à l'ensemble des différentielles élémentaires des valeurs exactes $F_i(r)$;

$\varphi_i(r)$ sont les poids élémentaires formés de la somme et du produit des constantes c_i , b_i et a_{ij} du tableau 1;

$\alpha_i(r)$ sont les coefficients numériques des différentielles élémentaires $F_i(r)$, $i=1, \dots, n_r$, pour les valeurs exactes.

Pour une méthode d'ordre p , on a donc

$$(9) \quad T_{n+1} = y_{n+1} - y(x_{n+1})$$

$$= h^{p+1} \left[\sum_{i=1}^{n_{p+1}} \frac{\beta_i^{(p+1)} \varphi_i^{(p+1)}}{p!} - \sum_{i=1}^{n_{p+1}} \frac{\alpha_i^{(p+1)}}{(p+1)!} \right] F_i^{(p+1)} + O(h_n^{p+2}),$$

où

$$(10) \quad a_i^{(p+1)} = \frac{1}{p!} \beta_i^{(p+1)} \varphi_i^{(p+1)} - \frac{1}{(p+1)!} \alpha_i^{(p+1)},$$

$$i = 1, \dots, n_{p+1}.$$

On voit que les $a_i^{(p+1)}$ sont les coefficients des $F_i^{(p+1)}$ dans $\Psi_p(x_n, y_n)$.

Le tableau 2 [2] décrit les équations de conditions pour les formules d'ordre 1 à 6.

Le terme principal de l'erreur de la méthode d'ordre $p-1$ est

$$(11) \quad \hat{\Psi}(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{n_p} a_i^{(p)} F_i^{(p)}.$$

Tableau 2: équations de conditions pour les formules d'ordre 1 à 6.

Table 1. Equations of condition for orders 1 to 6

Order	r	1	2	3	4	5	6	7
No of elementary differentials	n_r	1	1	2	4	9	20	48

Notes

- (i) $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, s$ where s is number of stages.
 (ii) $a_{ij} = 0$, $j > i$ for an explicit RK.
 (iii) All subscripts run from 1 to s .

$$1 \quad a_1^{(1)} = \sum_i b_i - 1$$

$$2 \quad a_1^{(2)} = \sum_i b_i c_i - \frac{1}{2}$$

$$3 \quad a_1^{(3)} = \frac{1}{2} \sum_i b_i c_i^2 - \frac{1}{6}$$

$$4 \quad a_2^{(3)} = \sum_{ij} b_i a_{ij} c_j - \frac{1}{6}$$

$$5 \quad a_1^{(4)} = \frac{1}{6} \sum_i b_i c_i^3 - \frac{1}{24}$$

$$6 \quad a_2^{(4)} = \sum_{ij} b_i c_i a_{ij} c_j - \frac{1}{8}$$

$$7 \quad a_3^{(4)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} b_i a_{ij} c_j^2 - \frac{1}{24}$$

$$8 \quad a_4^{(4)} = \sum_{ijk} b_i a_{ij} a_{jk} c_k - \frac{1}{24}$$

$$9 \quad a_1^{(5)} = \frac{1}{24} \sum_i b_i c_i^4 - \frac{1}{120}$$

$$10 \quad a_2^{(5)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} b_i c_i^2 a_{ij} c_j - \frac{1}{20}$$

$$11 \quad a_3^{(5)} = \frac{1}{2} \sum_{ijk} b_i a_{ij} c_j a_{ik} c_k - \frac{1}{40}$$

$$12 \quad a_4^{(5)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} b_i c_i a_{ij} c_j^2 - \frac{1}{30}$$

$$13 \quad a_5^{(5)} = \frac{1}{6} \sum_{ij} b_i a_{ij} c_j^3 - \frac{1}{120}$$

$$14 \quad a_6^{(5)} = \sum_{ijk} b_i c_i a_{ij} a_{jk} c_k - \frac{1}{30}$$

$$15 \quad a_7^{(5)} = \sum_{ijk} b_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k - \frac{1}{40}$$

$$16 \quad a_8^{(5)} = \frac{1}{2} \sum_{ijk} b_i a_{ij} a_{jk} c_k^2 - \frac{1}{120}$$

$$17 \quad a_9^{(5)} = \sum_{ijklm} b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_m - \frac{1}{120}$$

$$18 \quad a_1^{(6)} = \frac{1}{120} \sum_i b_i c_i^5 - \frac{1}{720}$$

$$19 \quad a_2^{(6)} = \frac{1}{6} \sum_{ij} b_i c_i^3 a_{ij} c_j - \frac{1}{72}$$

$$20 \quad a_3^{(6)} = \frac{1}{2} \sum_{ijk} b_i c_i a_{ij} c_j a_{ik} c_k - \frac{1}{48}$$

$$21 \quad a_4^{(6)} = \frac{1}{4} \sum_{ij} b_i c_i^2 a_{ij} c_j^2 - \frac{1}{72}$$

$$22 \quad a_5^{(6)} = \frac{1}{2} \sum_{ijk} b_i a_{ij} c_j^2 a_{ik} c_k - \frac{1}{72}$$

$$23 \quad a_6^{(6)} = \frac{1}{6} \sum_{ij} b_i c_i a_{ij} c_j^3 - \frac{1}{144}$$

$$24 \quad a_7^{(6)} = \frac{1}{24} \sum_{ij} b_i a_{ij} c_j^4 - \frac{1}{720}$$

$$25 \quad a_8^{(6)} = \frac{1}{2} \sum_{ijk} b_i c_i^2 a_{ij} a_{jk} c_k - \frac{1}{72}$$

$$26 \quad a_9^{(6)} = \sum_{ijklm} b_i a_{ij} a_{jk} c_k a_{lm} c_m - \frac{1}{72}$$

$$27 \quad a_{10}^{(6)} = \sum_{ijk} b_i c_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k - \frac{1}{48}$$

$$28 \quad a_{11}^{(6)} = \frac{1}{2} \sum_{ijk} b_i a_{ij} c_j^2 a_{jk} c_k - \frac{1}{120}$$

$$29 \quad a_{12}^{(6)} = \frac{1}{2} \sum_{ijklm} b_i a_{ij} a_{jk} c_k a_{lm} c_m - \frac{1}{240}$$

$$30 \quad a_{13}^{(6)} = \frac{1}{2} \sum_{ijk} b_i c_i a_{ij} a_{jk} c_k^2 - \frac{1}{144}$$

$$31 \quad a_{14}^{(6)} = \frac{1}{2} \sum_{ijk} b_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k^2 - \frac{1}{180}$$

$$32 \quad a_{15}^{(6)} = \frac{1}{6} \sum_{ijk} b_i a_{ij} a_{jk} c_k^3 - \frac{1}{720}$$

$$33 \quad a_{16}^{(6)} = \sum_{ijklm} b_i c_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_m - \frac{1}{144}$$

$$34 \quad a_{17}^{(6)} = \sum_{ijklm} b_i a_{ij} c_j a_{jk} a_{kl} c_m - \frac{1}{180}$$

$$35 \quad a_{18}^{(6)} = \sum_{ijklm} b_i a_{ij} a_{jk} c_k a_{lm} c_m - \frac{1}{240}$$

$$36 \quad a_{19}^{(6)} = \frac{1}{2} \sum_{ijklm} b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_m^2 - \frac{1}{720}$$

$$37 \quad a_{20}^{(6)} = \sum_{ijklmn} b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} a_{mn} c_n - \frac{1}{720}$$

Le terme principal de l'erreur pour la méthode d'ordre p est

$$(12) \quad \Psi(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{n_{p+1}} a_{i(p+1)} F_{i(p+1)}.$$

Le but principal de la procédure développée par Enright et al. [4] est de construire des interpolants p_n^p et p_n^{p+1} qui interpolent y_n à x_n et y_{n+1} à x_{n+1} et qui approximent $y_n(x)$ à l'ordre p et à l'ordre $p+1$ uniformément sur l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$. Ces interpolants sont continus aux noeuds.

Au départ, on dispose des valeurs de f , soit f_1, \dots, f_s , et des valeurs y_n et y_{n+1} . Puisque l'interpolant est construit après un pas réussi, on a une valeur additionnelle de f , soit $f_1^{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$; cette valeur est gratuite puisqu'elle doit nécessairement être calculée au début du prochain pas.

Voici les différentes étapes de la procédure d'Enright et al.:

1) Initialisation de la procédure

On construit un polynôme u_0 qui interpole y_n à x_n et y_{n+1} à x_{n+1} uniformément sur l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ à l'ordre q le plus élevé possible. Pour trouver ce polynôme, on utilise les valeurs suivantes:

- les valeurs y_n, y_{n+1} ;
- les valeurs $f_1, \dots, f_s, f_1^{n+1}$;

- possiblement, des valeurs additionnelles de y construites à l'aide de combinaisons linéaires des valeurs mentionnées précédemment;
- possiblement, de nouvelles valeurs de f obtenues à l'aide de nouvelles valeurs de y .

Notons que $q \geq \min(4, p+1)$ puisque 4 est l'ordre du polynôme d'Hermite v qui satisfait les conditions suivantes:

$$(13) \quad \begin{aligned} v(x_n) &= y_n & v(x_{n+1}) &= y_{n+1} \\ v'(x_n) &= f_1 & v'(x_{n+1}) &= f_1^{n+1}. \end{aligned}$$

Si $q = p+1$, la procédure se termine puisqu'on a atteint l'ordre maximum $p+1$; alors on prend $p_n^p = u_0$ et $p_n^{p+1} = u_0$.

Si $q = p$, alors $p_n^p = u_0$ et on va à l'étape (3).

Si $q < p$, on revient à l'étape (2).

"Boot-strapping"

2) Pour $i = 1, \dots, p-q$, on choisit des points $\tau_{i,j} \in (0,1)$ pour $j = 1, \dots, q+i-4$, et on construit un polynôme u_i de degré $q+i-1$ qui satisfait les conditions d'interpolation d'Hermite-Birkhoff:

$$(14) \quad \begin{aligned} u_i(x_n) &= y_n & u_i(x_{n+1}) &= y_{n+1} \\ u_i'(x_n) &= f_1 & u_i'(x_{n+1}) &= f_1^{n+1} \\ u_i'(x_n + \tau_{i,j}h_n) &= f_{i,j} = f(x_n + \tau_{i,j}h_n, u_{i-1}(x_n + \tau_{i,j}h_n)) . \end{aligned}$$

On voit que u_i approxime $y(x_n)$ à l'ordre $q+i = p$ uniformément sur l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$. On prend donc $p_n^p = u_{p-q}$ et on va à l'étape (3).

3) On choisit des points $\tau_j \in (0,1)$ pour $j = 1, \dots, p-3$, et on fait une étape additionnelle telle que décrite dans (2). On obtient un polynôme u_{p-q+1} de degré p qui approxime $y(x_n)$ à l'ordre $p+1$ uniformément sur l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$. On prend donc $p_n^{p+1} = u_{p-q+1}$.

Comme on peut le constater, l'étape (2) constitue un processus d'itération appelé "boot-strapping" alors que l'étape (3) constitue l'étape finale de la construction de l'interpolant d'ordre $p+1$.

Les interpolants u_i ont la forme qui suit:

$$(15) \quad u_i(x_n + \tau h_n) = d_0(\tau)y_n + d_1(\tau)h_n f_1 + d_2(\tau)y_{n+1} \\ + d_3(\tau)h_n f_1^{n+1} + \sum_{j=1}^{q+i-4} d_{3+j}(\tau)h_n f_j$$

où les $d_r(\tau)$ sont des polynômes en τ de degré $\leq p$ et les f_j sont les stages additionnels requis.

Pour évaluer l'erreur des interpolants, on exprime ces derniers comme une méthode de Runge-Kutta explicite avec les stages originaux et les stages additionnels requis par l'équation (14). En remplaçant y_{n+1} par le second membre de l'équation (3) dans l'équation (15), on obtient:

$$u_i(x_n + \tau h_n) = d_0(\tau)y_n + d_1(\tau)h_n f_1 + d_2(\tau)[y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i f_i] \\ + d_3(\tau)h_n f_1^{n+1} + \sum_{j=1}^{q+i-4} d_{3+j}(\tau)h_n f_j$$

que l'on peut récrire de la façon suivante:

$$u_i(x_n + \tau h_n) = [d_0(\tau) + d_2(\tau)]y_n + h_n [d_3(\tau)f_1^{n+1} \\ + (d_1(\tau) + d_2(\tau)b_1)f_1 + d_2(\tau)b_2f_2 + \\ \dots + d_2(\tau)b_s f_s] + \sum_{j=1}^{q+i-4} d_{3+j}(\tau)h_n f_j.$$

On voit que

$$d_0(\tau) + d_2(\tau) = 1;$$

alors u_i peut s'écrire de la façon suivante:

$$(16a) \quad u_i(x_n + \tau h_n) = y_n + h_n \sum_{j=0}^s b_j(\tau) f_j + h_n \sum_{j=1}^{q+i-4} d_{3+j}(\tau) f_j,$$

ou plus explicitement comme ce qui suit:

$$(16b) \quad u_i(x_n + \tau h_n) = y_n + h_n \sum_{j=0}^{s+q+i-4} b_j(\tau) f_j$$

où $f_0 = f_1^{n+1}$ et les b_j sont des polynômes en τ . On peut donc appliquer la théorie usuelle des méthodes de Runge-

Kutta explicites pour trouver les coefficients de l'erreur; on obtiendra des coefficients qui seront des polynômes en τ .

L'erreur de l'interpolant p_n^p est

$$(17) \quad p_n^p(x_n + \tau h_n) - y(x_n + \tau h_n) = h_n^p \hat{\Psi}(x_n, y_n; \tau) + O(h_n^{p+1})$$

où

$$(18) \quad \hat{\Psi}(x_n, y_n; \tau) = \sum_{i=1}^{n_p} a_i^{(p)}(\tau) F_i^{(p)}$$

et

$$(19) \quad a_i^{(p)}(\tau) = \frac{1}{(p-1)!} \beta_i^{(p)} \varphi_i^{(p)}(\tau) - \frac{1}{p!} \tau^p \alpha_i^{(p)}.$$

L'erreur de l'interpolant p_n^{p+1} est

$$(20) \quad p_n^{p+1}(x_n + \tau h_n) - y(x_n + \tau h_n) = h_n^{p+1} \Psi(x_n, y_n; \tau) + O(h_n^{p+2})$$

où

$$(21) \quad \Psi(x_n, y_n; \tau) = \sum_{i=1}^{n_{p+1}} a_i^{(p+1)}(\tau) F_i^{(p+1)}$$

et

$$(22) \quad a_i^{(p+1)}(\tau) = \frac{1}{p!} \beta_i^{(p+1)} \varphi_i^{(p+1)}(\tau) - \frac{1}{(p+1)!} \tau^{p+1} \alpha_i^{(p+1)}.$$

Notons que $\Psi(x_n, y_n; 1) = \Psi(x_n, y_n)$ puisque l'interpolant p_n^{p+1} est continu sur chaque intervalle et qu'il interpole y_n à x_n et y_{n+1} à x_{n+1} . Par contre, $\hat{\Psi}(x_n, y_n; 1) \neq \hat{\Psi}(x_n, y_n)$ puisqu'on utilise l'extrapolation locale pour avancer d'un

pas et $\hat{\Psi}(x_n, y_n)$ est associé à la formule auxiliaire d'ordre $p-1$.

Pour comparer les coefficients des erreurs des interpolants construits pour les paires de formules de Dormand-Prince [2] avec les coefficients des erreurs des interpolants construits par Enright et al. [4] pour la paire de formules de Fehlberg, on a choisi les mêmes bornes d'erreur. En examinant les équations de conditions telles que données par (22), on peut récrire chaque équation de condition, pour un interpolant d'ordre $p+1$, comme ce qui suit:

$$\begin{aligned}
 (23) \quad a_{i(p+1)} &= \frac{1}{(p+1)!} \quad p\beta_{i(p+1)}\varphi_{i(p+1)}(\tau) \\
 &\quad - \frac{1}{(p+1)!} \quad \tau^{p+1}\alpha_{i(p+1)} \\
 &= \frac{1}{(p+1)!} \quad \alpha_{i(p+1)} \left[\sigma_{i(p+1)}(\tau) - \tau^{p+1} \right],
 \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, n_{p+1}.$$

Les bornes d'erreur pour un interpolant d'ordre $p+1$ sont:

$$(24) \quad \|\Psi(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_{p+1} \begin{cases} \eta_1 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ \eta_2 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

où

$$M_{p+1} = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{i=1}^{n_{p+1}} \alpha_{i(p+1)} \|\mathbf{F}_{i(p+1)}\|$$

et

$$\eta_j = \max_{1 \leq i \leq n_{p+1}} | \sigma_i^{(p+1)}(\tau) - \tau^{p+1} |, \quad j = 1, 2.$$

Les bornes d'erreur pour un interpolant d'ordre p sont:

$$(25) \quad \| \hat{\Psi}(x_n, y_n; \tau) \| \leq M_p \begin{cases} \hat{\eta}_1 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ \hat{\eta}_2 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

où

$$M_p = \frac{1}{p!} \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i(p) \| F_i(p) \|$$

et

$$\hat{\eta}_j = \max_{1 \leq i \leq n_p} | \sigma_i^{(p)}(\tau) - \tau^p |, \quad j = 1, 2.$$

Ici $\eta_1, \eta_2, \hat{\eta}_1$ et $\hat{\eta}_2$ sont des constantes réelles pour un τ donné.

On remarque que la grandeur des coefficients de l'erreur pour les interpolants dépend du choix des $\tau_{i,j}$. On choisit ces points afin d'obtenir de petites constantes réelles $\eta_1, \eta_2, \hat{\eta}_1$ et $\hat{\eta}_2$. Pour chaque i , les $\tau_{i,j}$ doivent être bien distribués et pas trop près des extrémités. Comme on verra au chapitre deux, le choix d'un ensemble de $\tau_{i,j}$ ne minimise pas nécessairement l'erreur sur les deux intervalles $[0,1]$ et $[0,2]$.

Afin de comparer la grandeur des coefficients de l'erreur des interpolants avec l'erreur locale de la méthode, on utilise les mêmes bornes d'erreur, soit:

$$(27) \quad \|\Psi(x_n, y_n)\| \leq \eta M_{p+1},$$

où

$$M_{p+1} = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{i=1}^{n_{p+1}} \alpha_{i(p+1)} \|F_i(p+1)\|$$

et

$$\eta = \max_{1 \leq i \leq n_{p+1}} |\sigma_i(p+1) - 1|,$$

pour une méthode d'ordre p et

$$(28) \quad \|\hat{\Psi}(x_n, y_n)\| \leq \hat{\eta} M_p,$$

où

$$M_p = \frac{1}{p!} \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_{i(p)} \|F_i(p)\|$$

et

$$\hat{\eta} = \max_{1 \leq i \leq n_p} |\sigma_i(p) - 1|,$$

pour une méthode d'ordre $p-1$; η et $\hat{\eta}$ sont des constantes réelles.

Pour chaque paire de formules emboîtées que l'on étudiera dans le prochain chapitre, on donnera les bornes

de l'erreur en termes de M_p et M_{p+1} pour les interpolants ainsi que pour la méthode.

CHAPITRE II

Dans ce second chapitre, on construira des interpolants pour les paires de formules de Runge-Kutta emboîtées que Dormand et Prince ont présentées en 1980 [2], soit les paires de formules explicites d'ordre 4 et 5, à 6 stages, DP(4,5)6M, et à 7 stages, DP(4,5)7S et DP(4,5)7M (7 stages modifiés). Pour la paire DP(4,5)6M, on donnera tous les détails de la construction des interpolants ainsi que ceux des calculs des bornes d'erreur; pour DP(4,5)7S et DP(4,5)7M, on donnera les résultats essentiels.

Premièrement, on calculera les bornes d'erreur locales de la première paire de formules, soit DP(4,5)6M. On utilisera ensuite la procédure d'Enright et al. telle que décrite dans le chapitre précédent pour construire des interpolants d'ordre 5 et 6. Finalement, on calculera les bornes des termes principaux de l'erreur pour chacun des interpolants. Ceci nous permettra de comparer nos résultats avec ceux qu'Enright et al. [4] ont obtenus pour la méthode de Fehlberg.

Il est important de noter que la paire de formules DP(4,5)6M possède le même nombre de stages, soit 6, que la paire de formules de Fehlberg.

DP(4,5)6M

Le tableau 3 ci-dessous donne les coefficients de la première paire de formules, DP(4,5)6M.

Tableau 3: Coefficients de la paire de formules DP(4,5)6M.

0	0					
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0				
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$	0			
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{-9}{10}$	$\frac{6}{5}$	0		
$\frac{2}{3}$	$\frac{226}{729}$	$\frac{-25}{27}$	$\frac{880}{729}$	$\frac{55}{729}$	0	
1	$\frac{-181}{270}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-266}{297}$	$\frac{-91}{27}$	$\frac{189}{55}$	0
	$\frac{31}{540}$	0	$\frac{190}{297}$	$\frac{-145}{108}$	$\frac{351}{220}$	$\frac{1}{20}$
	$\frac{19}{216}$	0	$\frac{1000}{2079}$	$\frac{-125}{216}$	$\frac{81}{88}$	$\frac{5}{56}$

L'erreur locale de la méthode d'ordre 4 est:

$$\hat{y}_{n+1} - y(x_{n+1}) = h_n^5 \hat{\Psi}(x_n, y_n) + O(h^6),$$

où

$$\hat{\Psi}(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^9 a_i(5) F_i(5)$$

et

$$\begin{aligned} a_i(5) &= \frac{1}{4!} \beta_i(5) \varphi_i(5) - \frac{1}{5!} \alpha_i(5) \\ &= \frac{1}{5!} \alpha_i(5) [\sigma_i(5) - 1]. \end{aligned}$$

En utilisant les coefficients du tableau 3 et les équations de conditions $a_i(r)$, $r=1,\dots,5$, du tableau 2 du chapitre précédent, on obtient les équations de conditions suivantes:

$$a_i(r) = 0, \quad r = 1,\dots,4, \quad i = 1,\dots,n_r$$

$$a_1(5) = \frac{1}{4!} * 1 * \frac{589}{3000} - \frac{1}{5!} * 1 = \frac{1}{5!} * 1 * \left(\frac{-11}{600}\right)$$

$$a_2(5) = \frac{1}{4!} * 12 * \frac{589}{6000} - \frac{1}{5!} * 6 = \frac{1}{5!} * 6 * \left(\frac{-11}{600}\right)$$

$$a_3(5) = \frac{1}{4!} * 12 * \frac{589}{120000} - \frac{1}{5!} * 3 = \frac{1}{5!} * 3 * \left(\frac{-11}{600}\right)$$

$$a_4(5) = \frac{1}{4!} * 12 * \frac{589}{9000} - \frac{1}{5!} * 4 = \frac{1}{5!} * 4 * \left(\frac{-11}{600}\right)$$

$$a_5(5) = \frac{1}{4!} * 4 * \frac{239}{5000} - \frac{1}{5!} * 1 = \frac{1}{5!} * 1 * \left(\frac{-11}{250}\right)$$

$$a_6(5) = \frac{1}{4!} * 24 * \frac{311}{9000} - \frac{1}{5!} * 4 = \frac{1}{5!} * 4 * \left(\frac{11}{300}\right)$$

$$a_7(5) = \frac{1}{4!} * 24 * \frac{239}{10000} - \frac{1}{5!} * 3 = \frac{1}{5!} * 3 * \left(\frac{-11}{250}\right)$$

$$a_8(5) = \frac{1}{4!} * 12 * \frac{239}{15000} - \frac{1}{5!} * 1 = \frac{1}{5!} * 1 * \left(\frac{-11}{250} \right)$$

$$a_9(5) = \frac{1}{4!} * 24 * \frac{17}{1875} - \frac{1}{5!} * 1 = \frac{1}{5!} * 1 * \left(\frac{11}{125} \right).$$

Le terme principal de l'erreur d'ordre 5 est borné par:

$$\| \hat{\Psi}(x_n, y_n) \| \leq \hat{\eta} M_5,$$

où

$$\hat{\eta} = \max_{1 \leq i \leq 9} | \sigma_i(5) - 1 |$$

et

$$M_5 = \frac{1}{5!} \sum_{i=1}^9 \alpha_i(5) \| F_i(5) \|$$

On constate d'après les équations de conditions ci-haut que le terme principal de l'erreur locale satisfait l'inégalité

$$(29) \quad \| \hat{\Psi}(x_n, y_n) \| \leq \left(\frac{11}{125} = 0.088 \right) M_5 .$$

L'erreur locale de la méthode d'ordre 5 est:

$$y_{n+1} - y(x_{n+1}) = h_n^6 \Psi(x_n, y_n) + O(h^7),$$

où

$$\Psi(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{20} a_i^{(6)} F_i^{(6)}$$

et

$$\begin{aligned} a_i^{(6)} &= \frac{1}{5!} \beta_i^{(6)} \varphi_i^{(6)} - \frac{1}{6!} \alpha_i^{(6)} \\ &= \frac{1}{6!} \alpha_i^{(6)} [\sigma_i^{(6)} - 1]. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on utilise les coefficients du tableau 3 et les équations de conditions $a_i^{(r)}$, $r=1, \dots, 6$, du tableau 2 pour obtenir les équations de conditions suivantes:

$$a_i^{(r)} = 0, \quad r = 1, \dots, 5, \quad i = 1, \dots, n_r$$

$$a_1^{(6)} = \frac{1}{5!} * 1 * \frac{1}{6} - \frac{1}{6!} * 1 = \frac{1}{6!} * 1 * (0)$$

$$a_2^{(6)} = \frac{1}{5!} * 20 * \frac{1}{12} - \frac{1}{6!} * 10 = \frac{1}{6!} * 10 * (0)$$

$$a_3^{(6)} = \frac{1}{5!} * 60 * \frac{1}{24} - \frac{1}{6!} * 15 = \frac{1}{6!} * 10 * (0)$$

$$a_4^{(6)} = \frac{1}{5!} * 30 * \frac{1}{18} - \frac{1}{6!} * 10 = \frac{1}{6!} * 10 * (0)$$

$$a_5^{(6)} = \frac{1}{5!} * 60 * \frac{1}{36} - \frac{1}{6!} * 10 = \frac{1}{6!} * 10 * (0)$$

$$a_6^{(6)} = \frac{1}{5!} * 20 * \frac{17}{400} - \frac{1}{6!} * 5 = \frac{1}{6!} * 5 * \left(\frac{1}{50}\right)$$

$$a_7^{(6)} = \frac{1}{5!} * 5 * \frac{1}{30} - \frac{1}{6!} * 1 = \frac{1}{6!} * 1 * (0)$$

$$a_8^{(6)} = \frac{1}{5!} * 60 * \frac{97}{3600} - \frac{1}{6!} * 10 = \frac{1}{6!} * 10 * \left(\frac{-3}{100}\right)$$

$$a_9^{(6)} = \frac{1}{5!} * 120 * \frac{97}{7200} - \frac{1}{6!} * 10 = \frac{1}{6!} * 10 * \left(\frac{-3}{100}\right)$$

$$a_{10}^{(6)} = \frac{1}{5!} * 120 * \frac{17}{800} - \frac{1}{6!} * 15 = \frac{1}{6!} * 15 * \left(\frac{1}{50}\right)$$

$$a_{11}^{(6)} = \frac{1}{5!} * 60 * \frac{1}{60} - \frac{1}{6!} * 6 = \frac{1}{6!} * 6 * (0)$$

$$a_{12}^{(6)} = \frac{1}{5!} * 60 * \frac{1}{120} - \frac{1}{6!} * 3 = \frac{1}{6!} * 3 * (0)$$

$$a_{13}^{(6)} = \frac{1}{5!} * 60 * \frac{17}{1200} - \frac{1}{6!} * 5 = \frac{1}{6!} * 5 * \left(\frac{1}{50}\right)$$

$$a_{14}^{(6)} = \frac{1}{5!} * 60 * \frac{1}{90} - \frac{1}{6!} * 4 = \frac{1}{6!} * 4 * (0)$$

$$a_{15}^{(6)} = \frac{1}{5!} * 20 * \frac{3}{400} - \frac{1}{6!} * 1 = \frac{1}{6!} * 1 * \left(\frac{-1}{10}\right)$$

$$a_{16}^{(6)} = \frac{1}{5!} * 120 * \frac{17}{2400} - \frac{1}{6!} * 5 = \frac{1}{6!} * 5 * \left(\frac{1}{50}\right)$$

$$a_{17}^{(6)} = \frac{1}{5!} * 120 * \frac{23}{3600} - \frac{1}{6!} * 4 = \frac{1}{6!} * 4 * \left(\frac{3}{20}\right)$$

$$a_{18}^{(6)} = \frac{1}{5!} * 120 * \frac{3}{800} - \frac{1}{6!} * 3 = \frac{1}{6!} * 3 * \left(\frac{-1}{10}\right)$$

$$a_{19}^{(6)} = \frac{1}{5!} * 60 * \frac{1}{400} - \frac{1}{6!} * 1 = \frac{1}{6!} * 1 * \left(\frac{-1}{10}\right)$$

$$a_{20}^{(6)} = \frac{1}{5!} * 120 * \frac{1}{800} - \frac{1}{6!} * 1 = \frac{1}{6!} * 1 * \left(\frac{-1}{10}\right).$$

Le terme principal de l'erreur d'ordre 6 admet la borne supérieure suivante:

$$\| \Psi(x_n, y_n) \| \leq \eta M_6,$$

où

$$\eta = \max_{1 \leq i \leq 20} | \sigma_i^{(6)} - 1 |$$

et

$$M_6 = \frac{1}{6!} \sum_{i=1}^{20} \alpha_i^{(6)} \| F_i^{(6)} \|$$

On voit que d'après les équations de conditions ci-haut, le terme principal de l'erreur locale satisfait l'inégalité

$$(30) \quad \| \Psi(x_n, y_n) \| \leq \left(\frac{3}{20} = 0.15\right) M_6$$

Enright et al. ont obtenu 0.1538 M_5 et 0.6538 M_6 comme bornes pour les termes principaux de l'erreur pour la paire de Fehlberg d'ordre 4 et 5. Les bornes (29) et (30) obtenues pour DP(4,5)6M sont donc beaucoup plus petites.

Pour construire un interpolant d'ordre 5, on a besoin d'une valeur de y additionnelle. Horn [5] a développé un algorithme pour déterminer la solution d'un système d'équations différentielles à n'importe quel point à l'intérieur de l'intervalle d'intégration. Cette solution peut être déterminée à l'aide de l'évaluation de seulement quelques dérivées additionnelles (stages additionnelles). Selon Horn, pour produire un algorithme Runge-Kutta d'ordre 4 (d'ordre local 5), on doit satisfaire les équations suivantes:

$$(31) \quad \sum_{j=1}^r b^* j c_j^i = \frac{\sigma^i}{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \text{ et } c_1 = 0,$$

$$(32) \quad \sum_{j=k+2}^r b^* j c_j^i a_{jk} = 0, \quad i = 0, \quad k = 1,$$

où r est le nombre de stages, soit 6, σ est le point à l'intérieur de l'intervalle d'intégration et b^*_2 est égal à 0. La substitution des valeurs des c_i et des a_{ij} du tableau 3 dans (31) et (32) donne le système suivant:

$$(33) \quad Ax = b,$$

qu'on écrit explicitement:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3/10 & 3/5 & 2/3 & 1 \\ 0 & (3/10)^2 & (3/5)^2 & (2/3)^2 & 1 \\ 0 & (3/10)^3 & (3/5)^3 & (2/3)^3 & 1 \\ 0 & 9/40 & -9/10 & -25/27 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^*1 \\ b^*3 \\ b^*4 \\ b^*5 \\ b^*6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma/2 \\ \sigma^2/3 \\ \sigma^3/4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est singulière de rang 3. On a une infinité de solutions si σ est un zéro du polynôme $\sigma (\sigma - 3/5) (\sigma - 1)$, comme on peut voir par l'élimination gaussienne du système (33). Il est donc possible, sous l'hypothèse que $b^*2 = 0$, d'obtenir une approximation de $y(x_n+0.6h_n)$, d'ordre local 5, "gratuitement", c'est-à-dire sans ajouter de stages b^*_j supplémentaires. On aura

$$(34) \quad y_{n+0.6} = y_n + 0.6h_n (b^*1f_1 + b^*3f_3 + b^*4f_4 + b^*5f_5 + b^*6f_6).$$

Pour déterminer les b^*_j , on résout le système (33) avec $\sigma=3/5$ et on obtient les valeurs suivantes:

$$(35) \quad b^*1 = \frac{7}{9} b^*6 + \frac{1}{6}$$

$$b^*2 = 0$$

$$b^*3 = -\frac{400}{99} b^*6 + \frac{2}{3}$$

$$b^*4 = \frac{175}{9} b^*6 + \frac{1}{6}$$

$$b^*5 = -\frac{189}{11} b^*6$$

$$b^*_6 = b^*_6 \quad (\text{paramètre libre})$$

On obtient donc une famille d'approximations à un paramètre, soit b^*_6 , d'ordre local 5 pour $y(x_n+0.6h_n)$. La valeur de b^*_6 qui donne l'approximation $y_{n+0.6}$ ayant la plus petite erreur locale est $-383/12500$; la substitution de cette valeur dans (35) donne le résultat suivant:

$$(36) \quad y_{n+0.6} = y_n + h_n \left[\frac{16069}{187500} f_1 + \frac{9782}{20625} f_3 - \frac{1931}{7500} f_4 + \frac{217161}{687500} f_5 - \frac{1149}{62500} f_6 \right]$$

On a multiplié tous les b^*_i par $3/5$. L'erreur locale est calculée de la façon suivante:

$$y_{n+0.6} - y(x_{n+0.6}) = h_n^5 \Psi(x_n, y_n) + O(h_n^6),$$

où

$$\Psi(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^9 a_i(5) F_i(5)$$

et

$$\begin{aligned} a_i(5) &= \frac{1}{4!} \beta_i(5) \varphi_i(5) - \left(\frac{3}{5}\right)^5 \frac{1}{5!} \alpha_i(5) \\ &= \frac{1}{5!} \alpha_i(5) \left[\sigma_i(5) - \left(\frac{3}{5}\right)^5 \right]. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on utilise les coefficients du tableau 3 et les équations de conditions $a_i^{(r)}$, $r=1,\dots,5$, du tableau 2 (en n'oubliant pas les modifications mentionnées ci-dessus) pour calculer la borne de l'erreur. On obtient

$$a_i^{(r)} = 0, \quad r = 1,\dots,4, \quad i = 1,\dots,n_r,$$

et

$$\| y_{n+0.6} - y(x_{n+0.6}) \| \leq h_n^5 \eta M_5 + O(h_n^6).$$

où

$$\eta = \max_{1 \leq i \leq 9} \left| \sigma_i^{(5)} - \left(\frac{3}{5}\right)^5 \right|.$$

Alors, on obtient l'inégalité suivante:

$$(37) \quad \| y_{n+0.6} - y(x_{n+0.6}) \| \leq h_n^5 \left[\frac{14289}{390625} = 0.0366 \right] M_5 \\ + O(h_n^6).$$

Ici, la borne d'erreur pour la valeur de $y_{n+0.6}$ est légèrement plus élevée que celle qu'Enright et al. ont obtenu pour Fehlberg, soit $0.0319 M_5$.

On utilise $y_{n+0.6}$ pour construire un interpolant u_0 d'ordre 5 et de degré 4 sans évaluation de dérivées additionnelles. Cet interpolant est le polynôme d'Hermite déterminé par les équations suivantes:

$$(38) \quad \begin{aligned} u_0(x_n) &= y_n & u_0(x_{n+1}) &= y_{n+1} \\ u'_0(x_n) &= f_1 & u'_0(x_{n+1}) &= f_1^{n+1} \end{aligned}$$

$$u_0(x_{n+0.6}) = y_{n+0.6}.$$

Le polynôme interpole $y_n, y_{n+0.6}, y_{n+1}$ à $x_n, x_{n+0.6}, x_{n+1}$ et y'_n, y'_{n+1} à x_n, x_{n+1} uniformément sur l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$.

On exprime l'interpolant sous la forme suivante:

$$(39) \quad \begin{aligned} u_0(x_n + \tau h_n) &= d_0(\tau)y_n + d_1(\tau)h_n f_1 + d_2(\tau)y_{n+1} \\ &+ d_3(\tau)h_n f_1^{n+1} + d_4(\tau)y_{n+0.6}, \end{aligned}$$

où les $d_i(\tau)$ sont des polynômes d'Hermite du quatrième degré:

$$d_i(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4.$$

Les $d_i(\tau)$ doivent satisfaire les conditions (38), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} u_0(0) &= d_0(0)y_0 + d_1(0)h_n f_1 + d_2(0)y_1 + d_3(0)h_n f_1^{n+1} + d_4(0)y_{0.6} \\ &= y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_0(0) &= d'_0(0)y_0 + d'_1(0)f_1 + d'_2(0)y_1 + d'_3(0)f_1^{n+1} + d'_4(0)y_{0.6} \\ &= f_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0(1) &= d_0(1)y_0 + d_1(1)h_n f_1 + d_2(1)y_1 + d_3(1)h_n f_1^{n+1} + d_4(1)y_{0.6} \\ &= y_1 \end{aligned}$$

$$u'_0(1) = d'_0(1)y_0 + d'_1(1)f_1 + d'_2(1)y_1 + d'_3(1)f_1^{n+1} + d'_4(1)y_{0.6}$$

$$= f_1^{n+1}$$

$$u_0(0.6) = d_0(0.6)y_0 + d_1(0.6)h_n f_1 + d_2(0.6)y_1 + d_3(0.6)h_n f_1^{n+1}$$

$$+ d_4(0.6)y_{0.6}$$

$$= y_{0.6}.$$

On a

$$d_i(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4$$

$$d'_i(\tau) = a_1 + 2a_2\tau + 3a_3\tau^2 + 4a_4\tau^3$$

Les coefficients des $d_i(\tau)$, $i=1, \dots, 4$, doivent satisfaire le système :

$$(40) \quad Ax = b,$$

c'est-à-dire

$$\begin{array}{l}
 d_i(0) \\
 d'_i(0) \\
 d_i(1) \\
 d'_i(1) \\
 d_i(0.6)
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 1 & 0.6 & 0.6^2 & 0.6^3 & 0.6^4
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 a_0 \\
 a_1 \\
 a_2 \\
 a_3 \\
 a_4
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $d_0 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4$

On obtient donc:

$$d_0(\tau) = (\tau - 1)^2 \left(1 - \frac{5}{3}\tau\right) \left(\frac{11}{3}\tau + 1\right)$$

$$d_1(\tau) = \tau (\tau - 1)^2 \left(1 - \frac{5}{3}\tau\right)$$

$$d_2(\tau) = \tau^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\tau\right) (9\tau - 11)$$

$$d_3(\tau) = \tau^2 (\tau - 1) \left(\frac{5}{2}\tau - \frac{3}{2}\right)$$

$$d_4(\tau) = \frac{625}{36} \tau^2 (\tau - 1)^2$$

Puisque $q = p = 5$, on choisit u_0 comme interpolant initial. Afin de calculer l'erreur de u_0 , on représente ce dernier sous la forme d'une méthode de Runge-Kutta explicite. Dans (39) on remplace y_{n+1} par

$$y_n + h_n \sum_{i=1}^6 b_i f_i$$

et $y_{n+0.6}$ par

$$y_n + h_n \sum_{i=1}^6 b_i^* f_i;$$

on remarque que $f_1^{n+1} = f(x_n + h_n, y_{n+1})$.

On obtient donc

$$\begin{aligned}
(41) \quad u_0(x_n + \tau h_n) &= d_0(\tau)y_n + d_1(\tau)h_n f_1 + d_2(\tau) \left[y_n + h_n \sum_{i=1}^6 b_i f_i \right] \\
&+ d_3(\tau)h_n f_1^{n+1} + d_4(\tau) \left[y_n + h_n \sum_{i=1}^6 b^*_i f_i \right] \\
&= [d_0(\tau) + d_2(\tau) + d_4(\tau)] y_n \\
&+ h_n \{ d_1(\tau)f_1 + d_2(\tau) [b_1 f_1 + b_2 f_2 + \dots + b_6 f_6] \\
&+ d_3(\tau)f_1^{n+1} + d_4(\tau)[b^*_1 f_1 + \dots + b^*_6 f_6] \}.
\end{aligned}$$

On voit que

$$d_0(\tau) + d_2(\tau) + d_4(\tau) = 1.$$

On a un stage additionnel, soit $f_1^{n+1} (= f(x_n + h_n, \dot{y}_{n+1}))$, que l'on notera f_0 et dont les a_{ij} sont les b_i de y_{n+1} (ordre 5). On peut maintenant écrire u_0 sous la forme suivante:

$$(42) \quad u_0(x_n + \tau h_n) = y_n + h_n \sum_{i=0}^6 \underline{b}_i(\tau) f_i,$$

où $\underline{b}_0(\tau) = d_3(\tau)$

$$\underline{b}_1(\tau) = d_1(\tau) + d_2(\tau)b_1 + d_4(\tau)b^*_1$$

$$\underline{b}_2(\tau) = d_2(\tau)b_2 + d_4(\tau)b^*_2$$

$$\underline{b}_3(\tau) = d_2(\tau)b_3 + d_4(\tau)b^*_3$$

$$\underline{b}_4(\tau) = d_2(\tau)b_4 + d_4(\tau)b^*_4$$

$$\underline{b}_5(\tau) = d_2(\tau)b_5 + d_4(\tau)b^*_5$$

$$\underline{b}_6(\tau) = d_2(\tau)b_6 + d_4(\tau)b^*_6$$

On représente les coefficients de u_0 dans le tableau 4 ci-dessous.

Tableau 4: Coefficients de l'interpolant u_0 pour DP(4,5)6M.

0	0						
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0					
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$	0				
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{-9}{10}$	$\frac{6}{5}$	0			
$\frac{2}{3}$	$\frac{226}{729}$	$\frac{-25}{27}$	$\frac{880}{729}$	$\frac{55}{729}$	0		
1	$\frac{-181}{270}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-266}{297}$	$\frac{-91}{27}$	$\frac{189}{55}$	0	
1	$\frac{19}{216}$	0	$\frac{1000}{2079}$	$\frac{-125}{216}$	$\frac{81}{88}$	$\frac{5}{56}$	0
	$\underline{b}_0(\tau)$	$\underline{b}_1(\tau)$	$\underline{b}_2(\tau)$	$\underline{b}_3(\tau)$	$\underline{b}_4(\tau)$	$\underline{b}_5(\tau)$	$\underline{b}_6(\tau)$

On calcule maintenant l'erreur de u_0 ; puisque ce dernier est exprimé comme une méthode de Runge-Kutta, on utilise la procédure usuelle, c'est-à-dire

$$u_0(x_n + \tau h_n) - y(x_n + \tau h_n) = h_n^5 \hat{\Psi}(x_n, y_n; \tau) + O(h_n^6),$$

où

$$\hat{\Psi}(x_n, y_n; \tau) = \sum_{i=1}^9 a_i^{(5)}(\tau) F_i^{(5)}$$

et

$$\begin{aligned} a_i^{(5)} &= \frac{1}{4!} \beta_i^{(5)} \varphi_i^{(5)}(\tau) - \frac{1}{5!} \tau^5 \alpha_i^{(5)} \\ &= \frac{1}{5!} \alpha_i^{(5)} [\sigma_i^{(5)}(\tau) - \tau^5]. \end{aligned}$$

On utilise les coefficients du tableau 4 et les équations de conditions, $a_i^{(r)}$, $r=1, \dots, 5$, du tableau 2 (en n'oubliant pas les modifications mentionnées ci-dessus) pour calculer l'erreur d'interpolation de u_0 . On remarque que les équations de conditions sont des polynômes en τ puisque les \underline{b}_i sont des polynômes en τ . On obtient

$$a_i^{(r)}(\tau) = 0, \quad r = 1, \dots, 4, \quad i = 1, \dots, n_r,$$

$$a_i^{(5)}(\tau) \neq 0, \quad i = 1, \dots, 9.$$

Le terme principal de l'erreur d'interpolation u_0 d'ordre 5 est borné par

$$\|\hat{\Psi}(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_5 \begin{cases} \hat{\eta}_1 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ \hat{\eta}_2 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

où

$$\hat{\eta}_j = \max_{1 \leq i \leq 9} |\sigma_i^{(5)}(\tau) - \tau^5|, \quad j = 1, 2$$

et

$$M_5 = \frac{1}{5!} \sum_{i=1}^9 \alpha_i^{(5)} \|F_i^{(5)}\|$$

et $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2$ sont des constantes réelles.

Le terme principal de l'erreur de u_0 satisfait l'inégalité:

$$(43) \quad \|\hat{\Psi}(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_5 \begin{cases} 0.0484 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 8.1403 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

Les bornes de l'erreur de l'interpolant u_0 sont plus élevées que celles qu'Enright et al. [4] ont calculé pour l'interpolant u_0 associé à la méthode de Fehlberg. Ces derniers ont obtenu les résultats suivants:

$$(44) \quad \|\hat{\Psi}(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_5 \begin{cases} 0.0436 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 7.7115 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

On construit maintenant un interpolant u_1 d'ordre 6 à l'aide de l'étape (3) de la méthode proposée par Enright et al. [4]. Cette étape fait partie du processus appelé "bootstrapping"; il permet d'augmenter d'une unité l'ordre de

l'interpolant au moyen de l'étape (2) jusqu'à ce que l'ordre maximum de 6 soit atteint.

On doit choisir deux points:

$$\tau_1 := \tau_{1,1} \in (0,1) \text{ et } \tau_2 := \tau_{1,2} \in (0,1)$$

et déterminer un polynôme d'interpolation d'Hermite-Birkhoff de degré 5 qui approxime $y_n(x)$ d'ordre 6 uniformément sur l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$. Cet interpolant doit satisfaire les conditions qui suivent:

$$(45) \quad \begin{array}{ll} u_1(x_n) = y_n & u_1(x_{n+1}) = y_{n+1} \\ u'_1(x_n) = f_1 & u'_1(x_{n+1}) = f_1^{n+1} \end{array}$$

$$u'_1(x_n + \tau_1 h_n) = f_7 = f(x_n + \tau_1 h_n, u_0(x_n + \tau_1 h_n))$$

$$u'_1(x_n + \tau_2 h_n) = f_8 = f(x_n + \tau_2 h_n, u_0(x_n + \tau_2 h_n))$$

Ce dernier stage requiert deux évaluations de f additionnelles, f_7 et f_8 . On écrit l'interpolant sous la forme suivante:

$$(46) \quad \begin{aligned} u_1(x_n + \tau h_n) = & d_0(\tau)y_n + d_1(\tau)h_n f_1 + d_2(\tau)y_{n+1} \\ & + d_3(\tau)h_n f_1^{n+1} + d_4(\tau)h_n f_7 + d_5(\tau)h_n f_8, \end{aligned}$$

où les $d_i(\tau)$ sont des polynômes d'Hermite du cinquième degré:

$$d_i(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + a_5\tau^5.$$

On construit les polynômes $d_i(\tau)$ de façon à satisfaire les conditions mentionnées ci-haut. On a

$$\begin{aligned}
u_1(0) &= d_0(0)y_0 + d_1(0)h_n f_1 + d_2(0)y_1 + d_3(0)h_n f_1^{n+1} \\
&\quad + d_4(0)h_n f_7 + d_5(0)h_n f_8 \\
&= y_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'_1(0) &= d'_0(0)y_0 + d'_1(0)f_1 + d'_2(0)y_1 + d'_3(0)f_1^{n+1} \\
&\quad + d'_4(0)h_n f_7 + d'_5(0)h_n f_8 \\
&= f_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(1) &= d_0(1)y_0 + d_1(1)h_n f_1 + d_2(1)y_1 + d_3(1)h_n f_1^{n+1} \\
&\quad + d_4(1)h_n f_7 + d_5(1)h_n f_8 \\
&= y_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'_1(1) &= d'_0(1)y_0 + d'_1(1)f_1 + d'_2(1)y_1 + d'_3(1)f_1^{n+1} \\
&\quad + d'_4(1)h_n f_7 + d'_5(1)h_n f_8 \\
&= f_1^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(\tau_1) &= d_0(\tau_1)y_0 + d_1(\tau_1)h_n f_1 + d_2(\tau_1)y_1 + d_3(\tau_1)h_n f_1^{n+1} \\
&\quad + d_4(\tau_1)h_n f_7 + d_5(\tau_1)h_n f_8 \\
&= f_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'_1(\tau_2) &= d'_0(\tau_2)y_0 + d'_1(\tau_2)f_1 + d'_2(\tau_2)y_1 + d'_3(\tau_2)h_n f_1^{n+1} \\
&\quad + d'_4(\tau_2)h_n f_7 + d'_5(\tau_2)h_n f_8 \\
&= f_8
\end{aligned}$$

On a

$$d_i(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + a_5\tau^5$$

$$d'_i(\tau) = a_1 + 2a_2\tau + 3a_3\tau^2 + 4a_4\tau^3 + 5a_5\tau^4$$

Les coefficients des $d_i(\tau)$, $i = 1, \dots, 5$, satisfont le système suivant:

$$(47) \quad Ax = b,$$

c'est-à-dire

$$\begin{array}{l} d_i(0) \\ d'_i(0) \\ d_i(1) \\ d'_i(1) \\ d'_i(\tau_1) \\ d'_i(\tau_2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2\tau_1 & 3\tau_1^2 & 4\tau_1^3 & 5\tau_1^4 \\ 0 & 1 & 2\tau_2 & 3\tau_2^2 & 4\tau_2^3 & 5\tau_2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$
 $d_0 \ d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5$

On doit choisir deux points distincts:

$$\tau_1 := \tau_{1,1} \in (0,1) \quad \text{et} \quad \tau_2 := \tau_{1,2} \in (0,1),$$

de façon que la matrice A ci-dessus soit régulière. Pour que le déterminant soit non nul, c'est-à-dire

$$-2\tau_1\tau_2(-1+\tau_2)(-1+\tau_1)(10\tau_1\tau_2 - 5\tau_1 - 5\tau_2 + 3)(\tau_1 - \tau_2) \neq 0,$$

τ_1 et τ_2 ne doivent pas satisfaire l'équation suivante:

$$10 \tau_1 \tau_2 - 5 \tau_1 - 5 \tau_2 + 3 = 0.$$

Puisque $p+1 = 6$, on choisit u_1 comme interpolant final. Afin de calculer l'erreur de u_1 , on représente ce dernier sous la forme d'une méthode de Runge-Kutta explicite. Dans (46), on remplace y_{n+1} par

$$y_n + h_n \sum_{i=1}^6 b_i f_i$$

et $u_0(x_n + \tau h_n)$ par

$$y_n + h_n \sum_{i=0}^6 \underline{b}_i(\tau) f_i.$$

On a

$$f_7 = f(x_n + \tau_1 h_n, u_0(x_n + \tau_1 h_n))$$

$$= f(x_n + \tau_1 h_n, y_n + h_n \sum_{i=0}^6 \underline{b}_i(\tau_1) f_i),$$

$$f_8 = f(x_n + \tau_2 h_n, u_0(x_n + \tau_2 h_n))$$

$$= f(x_n + \tau_2 h_n, y_n + h_n \sum_{i=0}^6 \underline{b}_i(\tau_2) f_i),$$

et

$$f_1^{n+1} = f(x_n + h_n, y_{n+1}).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
u_1(x_{n+\tau}h_n) &= d_0(\tau)y_n + d_1(\tau)h_n f_1 \\
&+ d_2(\tau) \left[y_n + h_n \sum_{i=1}^6 b_i f_i \right] \\
&+ d_3(\tau)h_n f_1^{n+1} + d_4(\tau)h_n f_7 + d_5(\tau)h_n f_8 \\
&= [d_0(\tau) + d_2(\tau)] y_n \\
&+ h_n \{ d_3(\tau)f_1^{n+1} + [d_1(\tau) + d_2(\tau)b_1]f_1 \\
&+ d_2(\tau) [b_2f_2 + \dots + b_6f_6] \} + d_4(\tau)h_n f_7 \\
&+ d_5(\tau)h_n f_8 .
\end{aligned}$$

On voit que

$$d_0(\tau) + d_2(\tau) = 1;$$

on a trois stages additionnels, f_7 , f_8 et $f_0 (= f_1^{n+1})$. Mais f_0 est gratuit puisqu'il doit être calculé au début du prochain pas. Les a_{ij} de f_0 sont les b_i de y_{n+1} d'ordre 5. On peut maintenant écrire u_1 sous la forme suivante:

$$(48) \quad u_1(x_{n+\tau}h_n) = y_n + h_n \sum_{i=0}^6 \underline{b}_i(\tau)f_i + h_n \sum_{i=7}^8 \underline{b}_i(\tau)f_i,$$

où

$$\underline{b}_0(\tau) = d_3(\tau)$$

$$\underline{b}_1(\tau) = d_1(\tau) + d_2(\tau)b_1$$

$$\underline{b}_2(\tau) = d_2(\tau)b_2$$

$$\underline{b}_3(\tau) = d_2(\tau)b_3$$

$$\underline{b}_4(\tau) = d_2(\tau)b_4$$

$$\underline{b}_5(\tau) = d_2(\tau)b_5$$

$$\underline{b}_6(\tau) = d_2(\tau)b_6$$

$$\underline{b}_7(\tau) = d_4(\tau)$$

$$\underline{b}_8(\tau) = d_5(\tau).$$

Puisque nous ajoutons trois stages, nous ajoutons trois lignes de a_{ij} au tableau 3. On a

$$f_1^{n+1} = f(x_n + h_n, y_n + h_n \sum_{i=1}^6 b_i f_i)$$

où les a_{ij} sont les b_i de y_{n+1} d'ordre 5;

$$f_7 = f(x_n + \tau_1 h_n, y_n + h_n \sum_{i=0}^6 \underline{b}_i(\tau_1) f_i)$$

où les a_{ij} sont les $\underline{b}_i(\tau_1)$ de $u_0(x_n + \tau_1 h_n)$ d'ordre 5;

$$f_8 = f(x_n + \tau_2 h_n, y_n + h_n \sum_{i=0}^6 \underline{b}_i(\tau_2) f_i)$$

où les a_{ij} sont les $\underline{b}_i(\tau_1)$ de $u_0(x_n + \tau_2 h_n)$ d'ordre 5.

On représente les coefficients de u_1 dans le tableau 5 ci-dessous.

Tableau 5: Coefficients de l'interpolant u_1 pour DP(4,5)6M.

0	0								
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0							
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$	0						
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{-9}{10}$	$\frac{6}{5}$	0					
$\frac{2}{3}$	$\frac{226}{729}$	$\frac{-25}{27}$	$\frac{880}{729}$	$\frac{55}{729}$	0				
1	$\frac{-181}{270}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-266}{297}$	$\frac{-91}{27}$	$\frac{189}{55}$	0			
1	$\frac{19}{216}$	0	$\frac{1000}{2079}$	$\frac{-125}{216}$	$\frac{81}{88}$	$\frac{5}{56}$	0		
τ_1	$\underline{b}_1(\tau_1)$	$\underline{b}_2(\tau_1)$	$\underline{b}_3(\tau_1)$	$\underline{b}_4(\tau_1)$	$\underline{b}_5(\tau_1)$	$\underline{b}_6(\tau_1)$	$\underline{b}_0(\tau_1)$	0	
τ_2	$\underline{b}_1(\tau_2)$	$\underline{b}_2(\tau_2)$	$\underline{b}_3(\tau_2)$	$\underline{b}_4(\tau_2)$	$\underline{b}_5(\tau_2)$	$\underline{b}_6(\tau_2)$	$\underline{b}_0(\tau_2)$	0	0
	$\underline{b}_1(\tau)$	$\underline{b}_2(\tau)$	$\underline{b}_3(\tau)$	$\underline{b}_4(\tau)$	$\underline{b}_5(\tau)$	$\underline{b}_6(\tau)$	$\underline{b}_0(\tau)$	$\underline{b}_7(\tau)$	$\underline{b}_8(\tau)$

On calcule maintenant l'erreur de u_1 ; puisque ce dernier est exprimé comme une méthode de Runge-Kutta, on utilise la procédure usuelle, c'est-à-dire

$$u_1(x_n + \tau h_n) - y(x_n + \tau h_n) = h_n^6 \Psi(x_n, y_n; \tau) + O(h_n^7),$$

où

$$\Psi(x_n, y_n; \tau) = \sum_{i=1}^{20} a_i^{(6)}(\tau) F_i^{(6)}$$

et

$$\begin{aligned} a_i^{(6)} &= \frac{1}{5!} \beta_i^{(6)} \varphi_i^{(6)}(\tau) - \frac{1}{6!} \tau^6 \alpha_i^{(6)} \\ &= \frac{1}{6!} \alpha_i^{(6)} [\sigma_i^{(6)}(\tau) - \tau^6]. \end{aligned}$$

On utilise les coefficients du tableau 5 et les équations de conditions, $a_i^{(r)}$, $r=1, \dots, 6$, du tableau 2 (en n'oubliant pas les modifications mentionnées ci-dessus) pour calculer l'erreur d'interpolation de u_1 . On remarque que les équations de conditions sont des polynômes en τ puisque les \underline{b}_i sont des polynômes en τ . On obtient

$$a_i^{(r)}(\tau) = 0, \quad r = 1, \dots, 5, \quad i = 1, \dots, n_r,$$

$$a_i^{(6)}(\tau) \neq 0, \quad i = 1, \dots, 20.$$

Le terme principal de l'erreur du polynôme d'interpolation u_1 d'ordre 6 est borné par

$$\| \Psi(x_n, y_n; \tau) \| \leq M_6 \begin{cases} \eta_1 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ \eta_2 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

où

$$\eta_j = \max_{1 \leq i \leq 20} | \sigma_i^{(6)}(\tau) - \tau^6 |, \quad j = 1, 2$$

et

$$M_6 = \frac{1}{6!} \sum_{i=1}^{20} \alpha_i^{(6)} \| F_i^{(6)} \|$$

et η_1, η_2 sont des constantes réelles.

Pour plusieurs valeurs de τ_1 et τ_2 admissibles, on obtient le meilleur résultat avec $\tau_1 = 0.05$ et $\tau_2 = 0.95$. Le terme principal de l'erreur de u_1 satisfait donc l'inégalité

$$(49) \quad \| \Psi(x_n, y_n; \tau) \| \leq M_6 \begin{cases} 0.15 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 11.2393 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

On a remarqué que pour certaines valeurs de τ_1 et τ_2 , le résultat est le même pour l'intervalle $[0,1]$ mais varie sensiblement pour l'intervalle $[0,2]$. On obtient

pour $\tau_1 = 0.1$ et $\tau_2 = 0.9$,

$$(50) \quad \| \Psi(x_n, y_n; \tau) \| \leq 11.3033 M_6, \quad 0 \leq \tau \leq 2,$$

pour $\tau_1 = 0.86$ et $\tau_2 = 0.93$,

$$(51) \quad \|\Psi(x_n, y_n; \tau)\| \leq 11.5367 M_6, \quad 0 \leq \tau \leq 2,$$

et pour $\tau_1 = 0.90$ et $\tau_2 = 0.95$,

$$(52) \quad \|\Psi(x_n, y_n; \tau)\| \leq 11.5165 M_6, \quad 0 \leq \tau \leq 2.$$

Pour la paire de formules de Fehlberg, Enright et al. [4] ont obtenu les bornes suivantes:

$$(53) \quad \|\Psi(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_6 \begin{cases} 0.6574 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 9.9553 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

où $\tau_1 = 0.86$ et $\tau_2 = 0.93$.

On remarque donc que le résultat obtenu avec Dormand et Prince, pour l'intervalle $[0,1]$, est meilleur que celui de Fehlberg. Par contre, pour l'intervalle $[0,2]$, la méthode de Fehlberg est meilleure.

Il est intéressant de constater le résultat suivant pour l'interpolant u_1 pour la méthode de Dormand et Prince: pour tout $\tau \in [0,1)$, la borne de l'erreur est plus petite qu'au point $\tau=1$. Dans le cas de Fehlberg, la borne de l'erreur pour $\tau \in [0,1)$ est plus élevée qu'au point $\tau=1$; la borne est $0.6538 M_6$ au point $\tau=1$ alors qu'elle est $0.6574 M_6$ pour $\tau \in [0,1)$.

Les valeurs $\tau_1 = 0.05$ et $\tau_2 = 0.95$ donnent donc les $d_i(\tau)$ suivants:

$$d_0(\tau) = -\frac{1}{61} (480\tau^3 - 240\tau^2 - 122\tau - 61) (\tau - 1)^2$$

$$d_1(\tau) = \frac{1}{1159} \tau (11440\tau^2 - 11820\tau + 1159) (\tau - 1)^2$$

$$d_2(\tau) = \frac{1}{61} \tau^2 (480\tau^3 - 1200\tau^2 + 838\tau - 57)$$

$$d_3(\tau) = \frac{1}{1159} \tau^2 (11440\tau^2 - 11060\tau + 779) (\tau - 1)$$

$$d_4(\tau) = -\frac{1000}{10431} \tau^2 (144\tau - 133) (\tau - 1)^2$$

$$d_5(\tau) = -\frac{1000}{10431} \tau^2 (144\tau - 11) (\tau - 1)^2$$

Comme on a mentionné au début du présent chapitre, on donnera seulement les résultats essentiels pour les paires de formules DP(4,5)7M et DP(4,5)7S. On remarquera que ces deux méthodes possèdent un stage de plus que DP(4,5)6M; la dérivée additionnelle, f_7 , correspond à $f_1^{n+1} = f(x_n + h_n, y_{n+1})$, c'est-à-dire à la première dérivée f du pas suivant. Les méthodes utilisées pour construire les interpolants u_0 et u_1 ainsi que la valeur additionnelle de y (pour la construction de u_0) sont exactement les mêmes que pour DP(4,5)6M.

DP(4,5)7M

Le tableau 6 ci-dessous nous donne les coefficients de la paire de formules DP(4,5)7M.

Tableau 6: Coefficients de la paire de formules DP(4,5)7M.

0	0						
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0					
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$	0				
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$\frac{-56}{15}$	$\frac{32}{9}$	0			
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$\frac{-25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$\frac{-212}{729}$	0		
1	$\frac{9017}{3168}$	$\frac{-355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$\frac{-5103}{18656}$	0	
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$\frac{-2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
<hr/>							
	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$\frac{-92097}{339200}$	$\frac{11}{84}$	$\frac{1}{40}$
	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$\frac{-2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0

Le terme principal de l'erreur locale d'ordre 5 satisfait l'inégalité

$$(54) \quad \|\hat{\Psi}(x_n, y_n)\| \leq \left(\frac{97}{1000} = 0.097\right) M_5 .$$

Le terme principal de l'erreur locale d'ordre 6 satisfait l'inégalité

$$(55) \quad \|\Psi(x_n, y_n)\| \leq \left(\frac{1}{5} = 0.2\right) M_6.$$

Pour construire un interpolant d'ordre 5, on a besoin d'une valeur de y additionnelle. On utilise la méthode de Horn [5]; on doit donc satisfaire les équations (31) et (32) avec $r = 7$. La substitution des valeurs des c_i et des a_{ij} du tableau 6 dans (31) et (32) donne un système matriciel $Ax=b$ où la matrice A est régulière. On peut donc obtenir une approximation de $y(x_{n+\sigma})$, d'ordre local 5, sans ajouter de dérivée supplémentaire. On a choisi le point $\sigma = 1/2$ comme point d'intégration additionnel. On a

$$(56) \quad y_{n+0.5} = y_n + 0.5h_n (b^*_1 f_1 + b^*_3 f_3 + b^*_4 f_4 + b^*_5 f_5 \\ + b^*_6 f_6 + b^*_7 f_7).$$

Pour $\sigma = 1/2$, on obtient les b^*_j suivants en fonction du paramètre t :

$$(57) \quad b^*_1 = \frac{9337}{92160} - \frac{71}{2880} t$$

$$b^*_2 = 0$$

$$b^*_3 = \frac{5179}{13356} + \frac{284}{3339} t$$

$$b^*_4 = \frac{17}{3072} - \frac{71}{96} t$$

$$b^*5 = \frac{5589}{542720} + \frac{17253}{16960} t$$

$$b^*6 = - \frac{11}{2240} - \frac{88}{105} t$$

$$b^*7 = \frac{1}{2} t$$

On a multiplié toutes les valeurs des b^*_i par 1/2. La valeur de t qui donne l'approximation $y_{n+0.5}$ ayant la plus petite erreur locale est $366/10000$; la substitution de cette valeur dans (57) donne le résultat suivant:

$$(58) \quad y_{n+0.5} = y_n + h_n \left[\frac{5783653}{57600000} f_1 + \frac{466123}{1192500} f_3 - \frac{41347}{1920000} f_4 + \frac{16122321}{339200000} f_5 - \frac{7117}{200000} f_6 + \frac{183}{10000} f_7 \right].$$

L'erreur locale d'ordre 5 de $y_{n+0.5}$ satisfait l'inégalité

$$(59) \quad \| y_{n+0.5} - y(x_{n+0.5}) \| \leq h_n^5 0.0123 M_5 + O(h_n^6).$$

L'erreur obtenue pour $y_{n+0.5}$ est beaucoup plus petite que celle obtenue pour $y_{n+0.6}$ dans les cas de Fehlberg, soit $0.0319 M_5$, et $DP(4,5)6M$, soit $0.0366 M_5$.

On utilise $y_{n+0.5}$ pour construire, comme précédemment, un interpolant u_0 d'ordre 5 et de degré 4 sans évaluation de dérivées additionnelles. On écrit l'interpolant sous la forme suivante:

$$(60) \quad u_0(x_n + \tau h_n) = d_0(\tau)y_n + d_1(\tau)h_n f_1 + d_2(\tau)y_{n+1} \\ + d_3(\tau)h_n f_1^{n+1} + d_4(\tau)y_{n+0.5}.$$

où les $d_i(\tau)$ sont des polynômes d'Hermite du quatrième degré:

$$d_i(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4.$$

Les conditions (38) sont satisfaites (avec $u_0(x_{n+0.5}) = y_{n+0.5}$) par les $d_i(\tau)$ suivants:

$$d_0(\tau) = (\tau - 1)^2 (1 - 2\tau) (4\tau + 1)$$

$$d_1(\tau) = \tau (\tau - 1)^2 (1 - 2\tau)$$

$$d_2(\tau) = \tau^2 (1 - 2\tau) (4\tau - 5)$$

$$d_3(\tau) = \tau^2 (2\tau - 1) (\tau - 1)$$

$$d_4(\tau) = 16 \tau^2 (\tau - 1)^2.$$

On a $p = 5$; on choisit donc u_0 comme interpolant initial. On représente u_0 sous la forme d'une méthode de Runge-Kutta explicite; dans (60) on remplace y_{n+1} par

$$y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b_i f_i$$

et $y_{n+0.5}$ par

$$y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b^* f_i,$$

et on remarque que

$$f_1^{n+1} = f(x_n + h_n, y_{n+1}) = f_7.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} u_0(x_n + \tau h_n) &= d_0(\tau) y_n + d_1(\tau) h_n f_1 + d_2(\tau) \left[y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b_i f_i \right] \\ &\quad + d_3(\tau) h_n f_7 + d_4(\tau) \left[y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b^* f_i \right] \\ &= [d_0(\tau) + d_2(\tau) + d_4(\tau)] y_n \\ &\quad + h_n \{ d_1(\tau) f_1 + d_2(\tau) [b_1 f_1 + b_2 f_2 + \dots + b_6 f_6 \\ &\quad + b_7 f_7 + d_3(\tau) f_7 \\ &\quad + d_4(\tau) [b^*_1 f_1 + \dots + b^*_6 f_6 + b^*_7 f_7] \}, \end{aligned}$$

qu'on récrit ainsi:

$$(61) \quad u_0(x_n + \tau h_n) = y_n + h_n \sum_{i=1}^7 \underline{b}_i(\tau) f_i,$$

où

$$\underline{b}_1(\tau) = d_1(\tau) + d_2(\tau) b_1 + d_4(\tau) b^*_1$$

$$\underline{b}_2(\tau) = d_2(\tau)b_2 + d_4(\tau)b^*2$$

$$\underline{b}_3(\tau) = d_2(\tau)b_3 + d_4(\tau)b^*3$$

$$\underline{b}_4(\tau) = d_2(\tau)b_4 + d_4(\tau)b^*4$$

$$\underline{b}_5(\tau) = d_2(\tau)b_5 + d_4(\tau)b^*5$$

$$\underline{b}_6(\tau) = d_2(\tau)b_6 + d_4(\tau)b^*6$$

$$\underline{b}_7(\tau) = d_3(\tau) + d_2(\tau)b_6 + d_4(\tau)b^*6.$$

L'erreur locale de u_0 est d'ordre 5 et le terme principal de l'erreur de u_0 satisfait l'inégalité

$$(62) \quad \|\hat{\Psi}(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_5 \begin{cases} 0.0179 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 6.4089 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

On obtient donc des bornes d'erreur meilleures que pour DP(4,5)6M, soit

$$(63) \quad \|\hat{\Psi}(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_5 \begin{cases} 0.0484 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 8.1403 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

et pour Fehlberg, soit

$$(64) \quad \|\hat{\Psi}(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_5 \begin{cases} 0.0435 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 7.7115 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

On construit maintenant un interpolant u_1 d'ordre 6. Cet interpolant requiert deux évaluations de f additionnelles, f_8 et f_9 ; on choisit donc deux points, soit $\tau_1 (= \tau_{1,1}) \in (0, 1)$

et $\tau_2 (= \tau_{1,2}) \in (0,1)$ et on détermine un polynôme d'interpolation d'Hermite-Birkhoff de degré 5 qui satisfait (45).

Cet interpolant s'écrit sous la forme suivante:

$$(65) \quad u_1(x_n + \tau h_n) = d_0(\tau)y_n + d_1(\tau)h_n f_1 + d_2(\tau)y_{n+1} \\ + d_3(\tau)h_n f_1^{n+1} + d_4(\tau)h_n f_8 + d_5(\tau)h_n f_9,$$

où les $d_i(\tau)$ sont des polynômes d'Hermite du cinquième degré:

$$d_i(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + a_5\tau^5$$

et ceux-ci sont déterminés de la même façon que ceux de DP(4,5)6M, c'est-à-dire en résolvant le système (47).

On représente u_1 sous la forme d'une méthode de Runge-Kutta explicite. Dans (65) on remplace y_{n+1} par

$$y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b_i f_i$$

et $u_0(x_n + \tau h_n)$ par

$$y_n + h_n \sum_{i=1}^7 \underline{b}_i(\tau) f_i.$$

On a

$$f_8 = f(x_n + \tau_1 h_n, u_0(x_n + \tau_1 h_n))$$

$$= f(x_n + \tau_1 h_n, y_n + h_n \sum_{i=1}^7 \underline{b}_i(\tau_1) f_i),$$

$$f_9 = f(x_n + \tau_2 h_n, u_0(x_n + \tau_2 h_n))$$

$$= f(x_n + \tau_2 h_n, y_n + h_n \sum_{i=1}^7 \underline{b}_i(\tau_2) f_i),$$

et

$$f_1^{n+1} = f(x_n + h_n, y_{n+1}) = f_7.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} u_1(x_n + \tau h_n) &= d_0(\tau) y_n + d_1(\tau) h_n f_n + d_2(\tau) [y_n + h_n \sum_{i=1}^7 \underline{b}_i f_i] \\ &\quad + d_3(\tau) h_n f_7 + d_4(\tau) h_n f_8 + d_5(\tau) h_n f_9 \\ &= [d_0(\tau) + d_2(\tau)] y_n \\ &\quad + h_n \{ [d_1(\tau) + d_2(\tau) \underline{b}_1] f_1 \\ &\quad + d_2(\tau) [\underline{b}_2 f_2 + \dots + \underline{b}_6 f_6] \\ &\quad + [d_3(\tau) + d_2(\tau) \underline{b}_7] f_7 + d_4(\tau) f_8 + d_5(\tau) f_9 \}. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$(66) \quad u_1(x_n + \tau h_n) = y_n + h_n \sum_{i=1}^7 \underline{b}_i(\tau) f_i + h_n \sum_{i=8}^9 \underline{b}_i(\tau) f_i,$$

où

$$\underline{\underline{b}}_1(\tau) = d_1(\tau) + d_2(\tau)b_1$$

$$\underline{\underline{b}}_2(\tau) = d_2(\tau)b_2$$

$$\underline{\underline{b}}_3(\tau) = d_2(\tau)b_3$$

$$\underline{\underline{b}}_4(\tau) = d_2(\tau)b_4$$

$$\underline{\underline{b}}_5(\tau) = d_2(\tau)b_5$$

$$\underline{\underline{b}}_6(\tau) = d_2(\tau)b_6$$

$$\underline{\underline{b}}_7(\tau) = d_3(\tau) + d_2(\tau)b_7$$

$$\underline{\underline{b}}_8(\tau) = d_4(\tau)$$

$$\underline{\underline{b}}_9(\tau) = d_5(\tau).$$

Pour les deux stages additionnels, soit f_8 et f_9 , les a_{ij} sont calculés de la façon suivante:

$$f_8 = f(x_n + \tau_1 h_n, y_n + h_n \sum_{i=1}^7 \underline{\underline{b}}_i(\tau_1) f_i)$$

où les a_{ij} sont les $\underline{\underline{b}}_i(\tau_1)$ de $u_0(x_n + \tau_1 h_n)$ d'ordre 5;

$$f_9 = f(x_n + \tau_2 h_n, y_n + h_n \sum_{i=1}^7 \underline{\underline{b}}_i(\tau_2) f_i)$$

où les a_{ij} sont les $\underline{\underline{b}}_i(\tau_2)$ de $u_0(x_n + \tau_2 h_n)$ d'ordre 5.

Pour plusieurs valeurs de τ_1 et τ_2 admissibles, le meilleur résultat est obtenu avec $\tau_1 = 0.05$ et $\tau_2 = 0.95$. Le terme principal de l'erreur de u_1 satisfait donc l'inégalité

$$(67) \quad \|\Psi(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_6 \begin{cases} 0.20 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 10.0135 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

Le résultat obtenu se situe entre ceux obtenus pour DP(4,5)6M, soit

$$(68) \quad \|\Psi(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_6 \begin{cases} 0.15 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 11.2393 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

et pour Fehlberg, soit

$$(69) \quad \|\Psi(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_6 \begin{cases} 0.6574 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 9.9533 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

Pour les points $\tau_1 = 0.90$ et $\tau_2 = 0.95$, on obtient une plus petite erreur sur l'intervalle $[0, 2]$ mais une plus grande sur $[0, 1]$, soit

$$(70) \quad \|\Psi(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_6 \begin{cases} 0.2015 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 8.9227 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

on a réduit l'erreur sur $[0, 2]$ mais on l'a augmentée sur $[0, 1]$.

Pour les valeurs $\tau_1 = 0.05$ et $\tau_2 = 0.95$, les $d_i(\tau)$ sont les mêmes que pour DP(4,5)6M, c'est-à-dire

$$d_0(\tau) = -\frac{1}{61} (480\tau^3 - 240\tau^2 - 122\tau - 61) (\tau - 1)^2$$

$$d_1(\tau) = \frac{1}{1159} \tau (11440\tau^2 - 11820\tau + 1159) (\tau - 1)^2$$

$$d_2(\tau) = \frac{1}{61} \tau^2 (480\tau^3 - 1200\tau^2 + 838\tau - 57)$$

$$d_3(\tau) = \frac{1}{1159} \tau^2 (11440\tau^2 - 11060\tau + 779) (\tau - 1)$$

$$d_4(\tau) = -\frac{1000}{10431} \tau^2 (144\tau - 133) (\tau - 1)^2$$

$$d_5(\tau) = -\frac{1000}{10431} \tau^2 (144\tau - 11) (\tau - 1)^2 .$$

DP(4,5)7S

Le tableau 7 ci-dessous nous donne les coefficients de la paire de formules DP(4,5)7S.

Le terme principal de l'erreur locale d'ordre 5 satisfait l'inégalité

$$(71) \quad \|\hat{\Psi}(x_n, y_n)\| \leq \left(\frac{59}{3150} = 0.0187\right) M_5 .$$

Le terme principal de l'erreur locale d'ordre 6 satisfait l'inégalité

$$(72) \quad \|\Psi(x_n, y_n)\| \leq \left(\frac{4}{9} = .4444\right) M_6 .$$

Tableau 7: Coefficients de la paire de formules DP(4,5)7S.

0	0						
$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	0				
$\frac{5}{9}$	$\frac{55}{324}$	$\frac{-25}{108}$	$\frac{50}{81}$	0			
$\frac{2}{3}$	$\frac{83}{330}$	$\frac{-13}{22}$	$\frac{61}{66}$	$\frac{9}{10}$	0		
1	$\frac{29}{28}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{-27}{7}$	$\frac{22}{7}$	0	
1	$\frac{19}{200}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-243}{400}$	$\frac{33}{40}$	$\frac{7}{80}$	0
<hr/>							
	$\frac{431}{5000}$	0	$\frac{333}{500}$	$\frac{-7857}{10000}$	$\frac{957}{1000}$	$\frac{193}{2000}$	$\frac{-1}{50}$
	$\frac{19}{200}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-243}{400}$	$\frac{33}{40}$	$\frac{7}{80}$	0

Pour construire un interpolant d'ordre 5, on a besoin d'une valeur de y additionnelle. Comme dans les sections précédentes, on doit satisfaire les équations (31) et (32) de Horn [5], avec $r = 7$. La substitution des valeurs des c_i et des a_{ij} du tableau 7 dans (31) et (32) donne un système matriciel $Ax=b$ où la matrice A est régulière. On peut

donc obtenir une approximation de $y(x_{n+\sigma})$, d'ordre local 5, sans ajouter de dérivées supplémentaires. On choisit le même point σ que pour DP(4,5)7M, soit $\sigma = 1/2$, comme point d'intégration additionnel. On a

$$(73) \quad y_{n+0.5} = y_n + 0.5h_n (b^*_1 f_1 + b^*_3 f_3 + b^*_4 f_4 + b^*_5 f_5 + b^*_6 f_6 + b^*_7 f_7).$$

Pour $\sigma = 1/2$, on obtient les b^*_j suivants en fonction du paramètre t :

$$(74) \quad b^*_1 = \frac{293}{3200} + \frac{11}{50} t$$

$$b^*_2 = 0$$

$$b^*_3 = \frac{189}{320} - \frac{33}{20} t$$

$$b^*_4 = -\frac{3321}{6400} + \frac{891}{200} t$$

$$b^*_5 = \frac{231}{640} - \frac{33}{10} t$$

$$b^*_6 = -\frac{31}{1280} - \frac{9}{40} t$$

$$b^*_7 = \frac{1}{2} t$$

On a multiplié tous les b^*_j par $1/2$. La valeur de t qui donne l'approximation $y_{n+0.5}$ ayant la plus petite erreur

locale est $-966/10000$; la substitution de cette valeur dans (74) donne le résultat suivant:

$$(75) \quad y_{n+0.5} = y_n + h_n \left[\frac{140621}{2000000} f_1 + \frac{150003}{200000} f_3 - \frac{3797037}{4000000} f_4 + \frac{271887}{400000} f_5 - \frac{1987}{800000} f_6 - \frac{483}{10000} f_7 \right].$$

L'erreur locale d'ordre 5 de $y_{n+0.5}$ satisfait l'inégalité

$$(76) \quad \| y_{n+0.5} - y(x_{n+0.5}) \| \leq h_n^5 0.0644 M_5 + O(h_n^6).$$

L'erreur obtenue pour $y_{n+0.5}$ est beaucoup plus grande que celle obtenue pour $y_{n+0.6}$ dans les cas de Fehlberg, soit $0.0319 M_5$, de DP(4,5)6M, soit $0.0366 M_5$ et que celle obtenue pour $y_{n+0.5}$ dans DP(4,5)7M, soit 0.0123 .

On utilise donc $y_{n+0.5}$ pour construire un interpolant u_0 d'ordre 5 et de degré 4 sans évaluation de dérivées additionnelles. L'interpolant s'écrit sous la forme suivante:

$$(77) \quad u_0(x_n + \tau h_n) = d_0(\tau) y_n + d_1(\tau) h_n f_1 + d_2(\tau) y_{n+1} + d_3(\tau) h_n f_1^{n+1} + d_4(\tau) y_{n+0.5}.$$

où les $d_i(\tau)$ sont des polynômes d'Hermite du quatrième degré:

$$d_i(\tau) = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 + a_4 \tau^4.$$

Les conditions (38) sont satisfaites (avec $u_0(x_{n+0.5}) = y_{n+0.5}$) par les mêmes $d_i(\tau)$ que pour DP(4,5)7M:

$$d_0(\tau) = (\tau - 1)^2 (1 - 2 \tau) (4 \tau + 1)$$

$$d_1(\tau) = \tau (\tau - 1)^2 (1 - 2\tau)$$

$$d_2(\tau) = \tau^2 (1 - 2\tau) (4\tau - 5)$$

$$d_3(\tau) = \tau^2 (2\tau - 1) (\tau - 1)$$

$$d_4(\tau) = 16 \tau^2 (\tau - 1)^2.$$

Puisque $p=5$, on choisit u_0 comme interpolant initial. On écrit u_0 sous la forme d'une méthode de Runge-Kutta explicite. Dans (77) on remplace y_{n+1} par

$$y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b_i f_i$$

et $y_{n+0.5}$ par

$$y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b^*_i f_i,$$

et on remarque que

$$f_1^{n+1} = f(x_n + h_n y_{n+1}) = f_7.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} u_0(x_n + \tau h_n) = & d_0(\tau) y_n + d_1(\tau) h_n f_1 + d_2(\tau) \left[y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b_i f_i \right] \\ & + d_3(\tau) h_n f_7 + d_4(\tau) \left[y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b^*_i f_i \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [d_0(\tau) + d_2(\tau) + d_4(\tau)] y_n \\
&+ h_n \{ d_1(\tau)f_1 + d_2(\tau) [b_1f_1 + b_2f_2 + \dots + b_6f_6 \\
&+ b_7f_7] + d_3(\tau)f_7 \\
&+ d_4(\tau) [b^*_1f_1 + \dots + b^*_6f_6 + b^*_7f_7] \},
\end{aligned}$$

qu'on récrit sous la forme:

$$(78) \quad u_0(x_n + \tau h_n) = y_n + h_n \sum_{i=1}^7 \underline{b}_i(\tau) f_i,$$

où

$$\underline{b}_1(\tau) = d_1(\tau) + d_2(\tau)b_1 + d_4(\tau)b^*_1$$

$$\underline{b}_2(\tau) = d_2(\tau)b_2 + d_4(\tau)b^*_2$$

$$\underline{b}_3(\tau) = d_2(\tau)b_3 + d_4(\tau)b^*_3$$

$$\underline{b}_4(\tau) = d_2(\tau)b_4 + d_4(\tau)b^*_4$$

$$\underline{b}_5(\tau) = d_2(\tau)b_5 + d_4(\tau)b^*_5$$

$$\underline{b}_6(\tau) = d_2(\tau)b_6 + d_4(\tau)b^*_6$$

$$\underline{b}_7(\tau) = d_2(\tau) + d_2(\tau)b_6 + d_4(\tau)b^*_6;$$

u_0 est d'ordre 5 et le terme principal de l'erreur de u_0 satisfait l'inégalité

$$(79) \quad \|\hat{\Psi}(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_5 \begin{cases} 0.0662 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 10.1213 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

Pour u_0 , ces bornes d'erreur sont les plus élevées de toutes les méthodes étudiées précédemment, soit DP(4,5)6M, DP(4,5)7M, et Fehlberg [4].

On construit un interpolant u_1 , d'ordre 6, qui requiert deux évaluations de f additionnelles, soit f_8 et f_9 . On choisit donc deux points, $\tau_1 (= \tau_{1,1}) \in (0,1)$ et $\tau_2 (= \tau_{1,2}) \in (0,1)$, et on détermine un polynôme d'interpolation d'Hermite-Birkhoff de degré 5 qui satisfait (45).

Cet interpolant s'écrit sous la forme suivante:

$$(80) \quad u_1(x_n + \tau h_n) = d_0(\tau)y_n + d_1(\tau)h_n f_1 + d_2(\tau)y_{n+1} \\ + d_3(\tau)h_n f_1^{n+1} + d_4(\tau)h_n f_8 + d_5(\tau)h_n f_9$$

où les $d_i(\tau)$ sont des polynômes d'Hermite du cinquième degré:

$$d_i(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + a_5\tau^5.$$

Les $d_i(\tau)$ sont déterminés de la même façon que ceux de DP(4,5)6M, c'est-à-dire en résolvant le système (47).

On représente u_1 sous la forme d'une méthode de Runge-Kutta explicite en remplaçant dans (65) y_{n+1} par

$$y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b_i f_i$$

et $u_0(x_n + \tau h_n)$ par

$$y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b_i(\tau) f_i.$$

On a

$$\begin{aligned} f_8 &= f(x_n + \tau_1 h_n, u_0(x_n + \tau_1 h_n)) \\ &= f(x_n + \tau_1 h_n, y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b_i(\tau_1) f_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_9 &= f(x_n + \tau_2 h_n, u_0(x_n + \tau_2 h_n)) \\ &= f(x_n + \tau_2 h_n, y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b_i(\tau_2) f_i), \end{aligned}$$

et

$$f_1^{n+1} = f(x_n + h_n, y_{n+1}) = f_7.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} u_1(x_n + \tau h_n) &= d_0(\tau) y_n + d_1(\tau) h_n f_n + d_2(\tau) [y_n + h_n \sum_{i=1}^7 b_i f_i] \\ &\quad + d_3(\tau) h_n f_7 + d_4(\tau) h_n f_8 + d_5(\tau) h_n f_9 \\ &= [d_0(\tau) + d_2(\tau)] y_n + h_n \{ [d_1(\tau) + d_2(\tau) b_1] f_1 \\ &\quad + d_2(\tau) [b_2 f_2 + \dots + b_6 f_6] \\ &\quad + [d_3(\tau) + d_2(\tau) b_7] f_7 + d_4(\tau) f_8 + d_5(\tau) f_9 \}. \end{aligned}$$

Alors,

$$(81) \quad u_1(x_n + \tau h_n) = y_n + h_n \sum_{i=1}^7 \underline{b}_i(\tau) f_i + h_n \sum_{i=8}^9 \underline{b}_i(\tau) f_i,$$

où

$$\underline{b}_1(\tau) = d_1(\tau) + d_2(\tau) b_1$$

$$\underline{b}_2(\tau) = d_2(\tau) b_2$$

$$\underline{b}_3(\tau) = d_2(\tau) b_3$$

$$\underline{b}_4(\tau) = d_2(\tau) b_4$$

$$\underline{b}_5(\tau) = d_2(\tau) b_5$$

$$\underline{b}_6(\tau) = d_2(\tau) b_6$$

$$\underline{b}_7(\tau) = d_3(\tau) + d_2(\tau) b_7$$

$$\underline{b}_8(\tau) = d_4(\tau)$$

$$\underline{b}_9(\tau) = d_5(\tau).$$

Pour f_8 et f_9 , les a_{ij} sont obtenus de la façon suivante:

$$f_8 = f(x_n + \tau_1 h_n, y_n + h_n \sum_{i=1}^7 \underline{b}_i(\tau_1) f_i)$$

où les a_{ij} sont les $\underline{b}_i(\tau_1)$ de $u_0(x_n + \tau_1 h_n)$ d'ordre 5;

$$f_9 = f(x_n + \tau_2 h_n, y_n + h_n \sum_{i=1}^7 \underline{b}_i(\tau_2) f_i)$$

où les a_{ij} sont les $\underline{b}_i(\tau_1)$ de $u_0(x_n + \tau_2 h_n)$ d'ordre 5.

Pour plusieurs valeurs de τ_1 et τ_2 admissibles, $\tau_1 = 0.86$ et $\tau_2 = 0.94$ nous donnent le meilleur résultat. Le terme principal de l'erreur de u_1 satisfait l'inégalité

$$(82) \quad \|\Psi(x_n, y_n; \tau)\| \leq M_6 \begin{cases} 0.4444 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 15.4927 & 0 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

Des trois interpolants u_1 construits dans ce travail, c'est celui-ci qui nous donnent les bornes d'erreur les plus élevées pour les deux intervalles. Par contre, si on le compare à l'interpolant u_1 pour Fehlberg, on a un meilleur résultat pour l'intervalle $[0,1]$ mais pas pour l'intervalle $[0,2]$.

Pour les valeurs $\tau_1 = 0.86$ et $\tau_2 = 0.94$, les $d_i(\tau)$ sont

$$d_0(\tau) = \frac{1}{521} (3000\tau^3 - 4500\tau^2 + 1042\tau + 521) (\tau - 1)^2$$

$$d_1(\tau) = \frac{1}{1052941} \tau (1406500\tau^2 - 2435375\tau + 1052941) (\tau - 1)^2$$

$$d_2(\tau) = -\frac{1}{521} \tau^2 (2\tau - 3) (1500\tau^2 - 3000\tau + 2021)$$

$$d_3(\tau) = \frac{1}{10941} \tau^2 (406500\tau^2 - 690625\tau + 295066) (\tau - 1)$$

$$d_4(\tau) = \frac{15625}{313642} \tau^2 (880\tau - 799) (\tau - 1)^2$$

$$d_5(\tau) = -\frac{15625}{146922} \tau^2 (720\tau - 559) (\tau - 1)^2 .$$

Enfin, si on regarde les interpolants u_0 et u_1 construits pour les trois paires de formules développées par Dormand et Prince et ces mêmes interpolants construits par Enright et al. pour la paire de formules développée par Fehlberg, on peut tirer certaines conclusions. On représente les bornes d'erreur dans le tableau 8.

Pour u_0 , on voit que le meilleur résultat, pour les intervalles $[0,1]$ et $[0,2]$, est obtenu avec DP(4,5)7M; par contre, si quelqu'un veut un interpolant u_0 moins coûteux en termes de dérivées, Fehlberg offre le meilleur choix puisqu'il a un stage de moins que DP(4,5)7M. Pour u_1 , le meilleur choix est sans aucun doute DP(4,5)6M pour l'intervalle $[0,1]$ et Fehlberg pour l'intervalle $[0,2]$; la répartition des c_i , sur $[0,1]$, de DP(4,5)6M (incluant τ_1 et τ_2) est beaucoup plus équilibrée que pour Fehlberg. Il en est de même pour DP(4,5)7M et DP(4,5)7S; la répartition des c_i pour DP(4,5)7M (incluant τ_1 et τ_2) est plus équilibrée que pour DP(4,5)7S. Ceci pourrait peut-être expliquer en partie les résultats obtenus. On remarque aussi que la construction des interpolants u_1 est beaucoup plus coûteuse en termes de dérivées additionnelles que la construction des interpolants u_0 où on a seulement à ajouter un y additionnel.

Tableau 8: Bornes d'erreur pour les interpolants considérés.

	u_0	u_1	
<u>Fehlberg</u>	0.0436 M_5	0.6574 M_6	$0 \leq \tau \leq 1$
	7.7115 M_5	9.9533 M_6	$0 \leq \tau \leq 2$
<u>DP(4,5)6M</u>	0.0484 M_5	0.15 M_6	$0 \leq \tau \leq 1$
	8.1403 M_5	11.2393 M_6	$0 \leq \tau \leq 2$
<u>DP(4,5)7M</u>	0.0179 M_5	0.2 M_6	$0 \leq \tau \leq 1$
	6.4089 M_5	10.0135 M_6	$0 \leq \tau \leq 2$
<u>DP(4,5)7S</u>	0.0662 M_5	0.4444 M_6	$0 \leq \tau \leq 1$
	10.1213 M_5	15.4927 M_6	$0 \leq \tau \leq 2$

On remarque également que pour les trois méthodes développées par Dormand et Prince, les bornes d'erreur locales pour les méthodes d'ordre 5 sont de beaucoup inférieures à celles de Fehlberg. On a $0.15M_6$, $0.2M_6$ et $0.4444M_6$ pour DP(4,5)6M, DP(4,5)7M et DP(4,5)7S et $0.6538M_6$ pour Fehlberg.

CONCLUSION

Les résultats obtenus dans le second chapitre montrent que les interpolants u_1 construits pour les méthodes DP(4,5)6M, DP(4,5)7M et DP(4,5)7S possèdent, sur l'intervalle $[0,1]$, des bornes d'erreur inférieures, donc meilleures, que la borne d'erreur obtenue par Enright et al. [4] pour Fehlberg. Il est également important de remarquer que pour l'intervalle $[0,1)$, les bornes d'erreur pour les interpolants u_1 sont inférieures aux bornes d'erreurs locales d'ordre 6 obtenues au point $\tau=1$ pour chacune des méthodes considérées dans ce travail alors que pour Fehlberg, sur le même intervalle $[0,1)$, la borne d'erreur est plus élevée qu'au point $\tau=1$.

Les interpolants ont l'avantage de fournir une solution continue au problème (1); ils sont donc plus efficaces que les méthodes de Runge-Kutta explicites ordinaires. Le choix des interpolants dépend de la précision recherchée; plus l'ordre des interpolants est élevé, plus ces interpolants peuvent être coûteux en termes d'évaluations de dérivées additionnelles.

Puisque l'erreur de l'interpolant est inférieure ou égale à l'erreur de la formule discrète, l'expérimentation numérique ne devrait pas révéler de surprise pour h suffisamment petit, c'est-à-dire asymptotiquement quand h tend vers 0.

RÉFÉRENCES

- [1] BUTCHER, J.C. Coefficients for the study of Runge-Kutta integration process. *J. Australian Math. Soc.*, vol. 3, 1963, 185-201.
- [2] DORMAND, J.R., and PRINCE, P.J. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 6, no. 1, 1980, 19-26.
- [3] DORMAND, J.R., and PRINCE, P.J. Runge-Kutta triples. *Comp. and Maths. with Appls.*, vol. 12A, no. 9, 1986, 1007-1017.
- [4] ENRIGHT, W.H., JACKSON, K.R., NØRSETT, S.P., and THOMSEN, P.G. Interpolants for Runge-Kutta formulas. Technical Report No. 180/85, Dept. Comp. Sci., Univ. of Toronto, Toronto, Canada. May 1985; *ACM Trans. Math. Software*, vol. 12, no. 3, 1986, 193-218.
- [5] HORN, M.K. Fourth- and fifth-order, scaled Runge-Kutta algorithms for treating dense output. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 20, no. 3, June 1983, 558-568.
- [6] LAMBERT, J.D. *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York, 1973.
- [7] SHAMPINE, L.F. Interpolation for Runge-Kutta Methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 22, no. 5, October 1985, 1014-1027.
- [8] SHAMPINE, L.F. Some practical Runge-Kutta formulas. *Mathematics of Computation*, vol. 46, no. 173, January 1986, 135-150.