ETUDE DE LA NOTION DE PROPORTION CHEZ LES GARCONS DE 9 A 16 ANS EN UTILISANT L'EPREUVE DES PARTAGES (24 ITEM) ET APPLICATION DES RESULTATS AU PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES DU MINISTERE DE L'EDUCATION DU QUEBEC AUX NIVEAUX ELEMENTAIRE ET SECONDAIRE

par

Raynald Umbriaco

Thèse présentée à l'Ecole des Etudes Supérieures
de l'Université d'Ottawa en vue de
l'obtention du M.A. en Education

Ottawa, Canada, 1976

RECONNAISSANCE

Cette thèse a été préparée sous la direction de A. Côté, Ph.D., professeur à la Faculté d'Education de l'Université d'Ottawa, et de G. Noelting, D. ès Sc., professeur au Département de Psychologie de l'Université Laval, à qui nous désirons exprimer notre profonde amitié.

Nous tenons à souligner d'une façon spéciale, l'ouverture démontrée de la part des autorités des diverses Commissions Scolaires et écoles visitées. Ils nous ont permis de mener notre recherche à bonne fin.

CURRICULUM STUDIORUM

Raynald Umbriaco naquit à Montréal, le 10 mars 1948. Il obtint, en 1972, un B.E.P. avec spécialisation de l'université d'Ottawa et en 1973, une Maîtrise en Education (Psycho-pédagogie) de la même université.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION

L'étude que nous entreprenons concerne le développement de l'intelligence chez l'enfant et l'adolescent. Ce développement s'effectue par une interaction étroite entre la maturation biologique et l'environnement.

La psychologie du développement (génétique) est principalement intéressé à l'élaboration de certain niveau de maturation ou stade. Complémentaire, la pédagogie est directement relié au niveau de maturation. Elle est élément d'enrichissement pour un stade lorsque les programmes d'enseignement sont adéquats. Ainsi, la psychologie génétique doit se prolonger dans la pédagogie pour permettre une meilleure construction du potentiel intellectuel de l'enfant.

La psychologie génétique doit donc s'assurer d'utiliser tous les moyens pour parvenir à developper une approche intégrée et rigoureuse. Cette approche se concrétise par l'utilisation de deux méthodes; l'étude quantitative et l'analyse qualitative. Le rapprochement entre ces deux procédures se réalise par l'utilisation d'un scalogramme et d'une analyse de contenu (structurale). Ce n'est qu'à la suite d'une telle démarche que les résultats de la psychologie génétique peuvent s'appliquer à la pédagogie.

La présente recherche s'inscrit dans cette orientation générale d'intégration, entre le quantitatif et le qualitatif et entre

INTRODUCTION

le psychologique et le pédagogique. Cette recherche a pour but l'étude de la notion de proportion chez les garçons de 9 à 16 ans.

Le but premier de cette étude est de vérifier avec un nouvel intrument (Epreuve des Partages, 24 item), si le développement de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent s'échelonne sur des niveaux de complexités ou stades de développement. Ces stades ont été élaborés antérieurement par Piaget et Noelting.

Par la suite, nous comparerons les résultats obtenus au programme de l'enseignement des fractions ou proportions du Ministère de l'Education du Québec, au niveau élémentaire et secondaire.

CHAPITRE PREMIER

POSITION DU PROBLEME

A l'intérieur de ce premier chapitre, nous allons dresser les fondements théoriques de notre problème. Pour ce faire, nous allons présenter la base de la théorie de Piaget, c'est-à-dire le structuralisme. Par la suite, nous définirons le stade et ses principales composantes. Ces deux principales notions sont fondamentales pour pouvoir comprendre le développement et la construction de la proportionnalité. Dans un troisième temps, nous allons cerner ce que nous désirons étudier dans notre recherche, c'est-à-dire la proportionnalité. Par le fait même, nous nous limitons à l'étude d'un point précis dans l'oeuvre de Piaget. Ayant circonscrit le domaine étudié, nous allons déterminer le but spécifique de notre étude. Finalement, nous terminerons le chapitre par l'énoncé de notre hypothèse.

1. Caractéristiques du structuralisme Piagétien.

Pour bien comprendre ce qu'est la notion de proportion nous devons y insérer la notion de stade et la notion de structure. Celle-ci est la base dynamique du stade et de la proportionnalité. Le structuralisme possède trois principales caractéristiques; la totalité, la transformation et l'autoréglage.

A. La totalité.

La totalité ou fermeture est la caractéristique la plus importante de là structure. Une structure est en fait un ensemble fermé[1].

> Une structure se suffit à elle-même et ne requiert pas, pour être saisie, le recours à toutes sortes d'éléments étrangers à sa nature[2].

Cette fermeture contribue, en partie, à expliquer la notion de totalité. Un exemple s'avère içi utile. Nous prenons le Canada pour illustrer cette fermeture. Le Canada est une totalité qui possède une certaine fermeture: il n'a que dix provinces. Les dix provinces forment un ensemble fermé qui s'appelle le Canada. Donc, pour bien cerner le Canada, il faut limiter son étude aux dix provinces et non pas aux Etats du Maine ou du Vermont, qui eux sont à l'extérieur du Canada. Il en va de même pour la structure, car comme nous l'avons vu, celle-ci est composée de trois éléments ou caractéristiques (totalité, transformation et autoréglage). Ces éléments sont soumis à des lois qui caractérisent la structure. Ces lois, nous les appellerons loi de composition. Ces

---

1. J. Piaget, Les relations entre l'affectivité et l'intelligence dans le développement mental de l'enfant, C.D.U., Paris, 1962, p. 10.

2. J. Piaget, Le structuralisme, Presses Universitaires de France, Paris, 1968, p. 7.

lois, "dites de composition viennent en fait de la totalité des propriétés des éléments et de la relation qui existe entre ces éléments et la totalité"[3]. Piaget nous éclaire sur ce point en mentionnant qu'"une structure est certes formée d'éléments mais ceux-ci sont subordonnés à des lois caractérisant le système comme tel"[4].

Pour expliciter cette citation, revenons à notre exemple du Canada. Le Canada est formé de dix provinces (éléments). Les dix provinces sont subordonnées à une loi qui caractérise le Canada. Cette loi,c'est la Confédération. Elle est équivalente à la loi de composition de la totalité.

> Ces lois dites de composition ne se réduisent pas à des associations cumulatives, mais confèrent au tout en tant que tel des propriétés d'ensembles distinctes de celles des éléments[5].

Chaque province a des caractéristiques. Si l'on unit les dix provinces pour former le Canada (totalité), on retrouve un ensemble de différences et de ressemblances beaucoup plus riche, par comparaison à une seule province. L'accent est donc mis sur la totalité et sur les lois qui composent cette totalité. C'est en fait la relation qui existe entre les dix provinces.

---

3. *Idem*, *ibid*., p. 8.

4. *Idem*, *ibid*., p. 8.

5. *Idem*, *ibid*., p. 8.

Ce qui est important, à l'intérieur de ces deux citations que nous venons de voir, est évidemment la relation qui existe entre les éléments. Mais il va de soi que sans éléments, il n'y aurait ni relation ni totalité, et ce, à la lueur de notre exemple: sans provinces, il n'y aurait pas de Canada. La nécessité de connaître les principales propriétés des éléments, de connaître aussi leurs différences et leurs ressemblances, devient donc essentielle. Ce n'est qu'à partir de leurs propriétés semblables ou non, que nous pouvons mettre les éléments en relation pour former une totalité. La totalité reste primordiale. Piaget mentionne, à propos des éléments:"les éléments sont réunis en une totalité présentant certaines propriétés en tant que totalité"[6]. Cette citation démontre la nécessité de la relation entre les éléments et la totalité mais aussi leur réversibilité, c'est-à-dire, la relation totalité-élément.

Passons maintenant au second caractère de la structure: la transformation.

B. La transformation.

Nous avons constaté lors de l'étude de la notion de totalité,

---

6. J. Piaget, Introduction à l'épistémologie génétique, vol. 2, La pensée physique, Presses Universitaires de France, Paris, 1950, p. 34.

que l'une des caractéristiques principales était la loi de composition. "Si le propre des totalités structurées tient à leurs lois de composition, elles sont donc structurantes par nature"[7].

Tentons d'appliquer cette citation à notre exemple. Le Canada est une totalité structurée. Il est structuré par les dix provinces. Le Canada est structurant par la loi de la Confédération. La totalité est donc structurée et structurante par sa nature. Elle est structurée par le groupement de ses éléments (relation). Elle est structurante à cause de l'action même de groupement (loi de composition). L'action de se grouper n'est autre que la transformation. Or une "activité structurante ne peut consister qu'en un système de transformation"[8].

L'activité structurante est une opération. Cette "opération est un groupement des actions en un système mobile, donc de transformation"[9]. Ces notions d'actions, de groupements, d'opérations sont les instruments dynamiques qui permettent la transformation.

La présentation de la transformation étant terminée, voyons maintenant l'autoréglage.

---

7. J. Piaget ,Le structuralisme, p. 10.

8. Idem, ibid., p. 11.

9. J.Piaget, Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant, Presses Universitaires de France, Paris, 1946, p. 20.

C. L'autoréglage.

Le troisième caractère de la structure est l'autoréglage. L'autoréglage signifie en fait, la possibilité que possède la structure de se régler elle-même, de se conserver et d'avoir une certaine fermeture.

> Le troisième caractère fondamental des structures est de se régler elle-même, cet autoréglage entrainant leur conservation et une certaine fermeture[10].

Ainsi, avec cette citation, nous sommes donc en présence des deux caractéristiques principales de la structure; la totalité (fermeture) et la transformation (conservation).

> A commencer par ces deux résultantes, elles signifient que les transformations inhérentes à une structure ne conduisent pas en dehors de ses frontières, mais n'engendrent que des éléments appartenant toujours à la structure et conservant leur loi[11].

Une clarification devient nécessaire en ce qui concerne la fermeture de la structure. Cette fermeture n'enlève en aucun cas la possibilité de construction d'une nouvelle sous-structure. A l'intérieur de notre exemple du Canada, la naissance du Labrador a permis une transformation à l'intérieur d'une totalité (Canada). Le Québec et Terre-Neuve se sont transformés et gardent toujours une certaine fermeture. Le Labrador qui est une nouvelle sous-

---

10. J. Piaget, Le structuralisme, p. 13.

11. Idem, ibid., p. 14.

structure a des possibilités de transformation (ville et village), de totalité et par le fait même d'autoréglage. Piaget mentionne sur ce point:

> Cette fermeture ne signifie en rien que la structure considérée ne peut pas entrer à titre de sous-structure dans une structure plus large. Seulement cette modification des frontières générales n'abolit pas les premières[12].

Cette citation peut sembler contradictoire en ce qui concerne la fermeture de la structure. Car la construction d'une sous-structure suppose une ouverture de la structure plutôt qu'une fermeture. Ce qui se produit en fait c'est l'élargissement des frontières de la structure. La structure comme la sous-structure ne perdent en rien leurs lois. Au contraire il y a conservation et enrichissement par la construction d'une nouvelle sous-structure.

> Il n'y a pas annexion, mais confédération et les lois de la sous-structure ne sont pas altérées mais conservées, de telle sorte que le changement intervenu est un enrichissement[13].

A la lueur de cette citation il n'y a plus uniquement fermeture et conservation, mais il y a en plus, la possibilité de construction.

---

12. Idem, ibid., p. 14.

13. Idem, ibid., p. 14.

Après avoir défini globalement ce que sont les relations entre l'autoréglage, la totalité et la transformation, voyons maintenant les procédures ou le fonctionnement que sont les opérations, le rythme et la régulation. Ces trois notions font partie intégrante de l'autoréglage. "Rythmes, régulations et opérations, telles sont donc les trois procédures essentielles de l'autoréglage ou de l'autoconservation des structures"[14].

En fait ces trois notions concrétisent "toute la possibilité de construction, soit à l'intérieur de la structure ou à l'extérieur d'une nouvelle structure"[15].

D. L'opération et la régulation.

L'opération est le moteur principal de la dynamique de la structure.

Au sommet de l'échelle, l'autoréglage procède par opérations bien réglées, ces règles n'étant autres que les lois de totalité de la structure considérée[16].

Cette opération est en fait un groupement d'éléments qui permet d'avoir une certaine totalité ou loi de composition. Comme

---

14. Idem, ibid., p. 16.

15. Idem, ibid., p. 16.

16. Idem, ibid., p. 14.

le dit Piaget:" le critère de l'existence des opérations serait leur groupement. Les opérations sont en fait une action de grouper"[17].

> L'opération directe, est constituée par n'importe quelle action pourvu que deux de ces actions composées l'une avec l' autre donnent encore une action du même type et que l'action inverse fasse partie du même système[18].

A la lumière de cette citation, la notion de réglage dans les actions apparaît par la notion de réversibilité. Celle-ci "est en fait la découverte de l'opération inverse en tant qu'opération"[19]. La "réversibilité n'est pas autre chose que le critère même de l'équilibre"[20]. Elle est donc, moyen de contrôle, ou plus spécifiquement de réglage.

> elle en constitue une pré-correction grâce à des moyens internes de contrôle tels que la réversibilité (+n-n=-o), source du principe de contradiction. (si + n-n#o alors n#n)[21].

Nous pouvons donc conclure que l'importance est dans l'action même du groupement, c'est-à-dire dans l'opération de nos divers

---

17. J. Piaget, Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant, p. 20.

18. J. Piaget et B. Inhelder, Le développement des quantités chez l'enfant, Delachaux et Niestlé, Neuchatel, 1962, p. 329.

19. J. Piaget, La psychologie de l'intelligence, A. Colin, Paris, 1947, p. 48.

20. Idem, ibid., p. 55.

21. J. Piaget, Le structuralisme, p. 15.

éléments. Il y a donc une régulation de par l'opération même.

Cette même "régulation est le produit d'un rythme d'ensemble dont les composantes seraient devenues simultanées"[22]. Le rythme est en fait un système de régulations alternant réunies dans une totalité. Or le "rythme assure ainsi son autoréglage par la symétrie et les répétitions"[23].

Cette notion de régulation ou d'équilibre nous introduit à la notion de stade. Un stade est en fait un "état d'équilibre qui n'est pas un état de repos final, mais qui constitue un nouveau point de départ"[24]. Ceci signifie en fait, que "cet équilibre est essentiellement actif et qu'il permet des transformations"[25]. Ces transformations peuvent parvenir de trois sources, à la fois différentes mais complémentaires. Il s'agit de la maturation (héréditaire), de l'influence du milieu physique (expérience plus exercice) et finalement de la transmission sociale. Ces facteurs se déroulant

---

22. J. Piaget, La psychologie de l'intelligence, p. 206.

23. J. Piaget, Le structuralisme, p. 16.

24. J. Piaget et al., La filiation des structures dans Etudes d'épistémologie génétique, Presses Universitaires de France, Paris, 1963, p. 20.

25. J. Piaget, Six études de psychologie, Gonthier, Genève, 1964, p. 173.

dans un temps chronologique vontêtre responsables de l'évolution de l'enfant et de l'adolescent.

Nous allons maintenant définir la notion de stade. Elle permet de mieux comprendre l'évolution dynamique de la structure.

2. La notion de stade.

Les stades de Jean Piaget sont représentatifs du développement de l'intelligence. "On ne peut pas les appliquer à d'autres domaines"[26]. Les stades représentent l'évolution et la construction qu'une structure effectue grâce à l'hérédité, à l'expérience et à la transmission sociale. Cette structure qui à la base est souvent héréditaire (Ex. réflexe) détermine le contenu du stade. Nous assistons alors à la construction de structures (réflexes, succion, audition) que nous pouvons suivre depuis leur début, jusqu'à leur achèvement.

> Nous sommes ainsi en présence d'un domaine privilégié au sein duquel nous pouvons assister à la formation de structures et à leur achèvement, où différentes structures peuvent se succéder ou s'intégrer selon les combinaisons multiples[27].

---

26. J. Piaget et al., Le problème des stades en psychologie de l'enfant, Presses Universitaires de France, Paris, 1956, p. 33.

27. Idem, ibid., p. 34.

Nous constatons ainsi la présence d'un système de transformations qui conduit progressivement au passage d'un état A à un état B.

Cette notion de passage nous amène à considérer la notion de décalage. Un décalage, "c'est en fait la répétition ou la reproduction du même processus formateur à des âges différents"[28]. Il y a deux types de décalages: les décalages horizontaux et verticaux.

Un décalage vertical est la "recontruction d'une structure au moyen d'autres opérations"[29], pouvant s'effectuer à des périodes différentes.

> Les décalages verticaux sont dus au fait que, les déséquilibres successifs du développement résultent toujours des mêmes causes (discordances entre le réel et la pensée, donc entre l'assimilation et l'accommodation). Les ré-équilibres s'effectuent selon le même fonctionnement[30].

Les enfants de sept ou huit ans sont capables de classer et de sérier des réglettes de couleurs et de longueurs différentes, par manipulation. Par contre, si on remplace la manipulation par des énoncés verbaux abstraits nous obtenons un décalage dans le temps.

---

28. *Idem*, *ibid*., p. 36.

29. *Idem*, *ibid*., p. 36

30. J. Piaget, *Le mécanisme du développement mental et les lois du groupement des opérations*, Naville, Genève, 1941, p. 42.

Dans les deux cas, nous avons le même type d'opérations (classer, sérier), mais à des niveaux différents; le niveau concret (7-8 ans) et le niveau formel (12-14 ans).

Nous parlerons de "décalages horizontaux quand une même opération s'applique à des contenus différents"[31] à l'intérieur d'une même période. L'exemple le plus approprié est celui de la conservation qui est généralement acquise pendant la période des opérations concrètes (7-12 ans). La conservation possède trois contenus différents (substance, poids et volume). Il y a décalage dans le temps, car la conservation de la substance est acquise entre huit et dix ans, celle du poids vers dix et onze ans et finalement la conservation du volume ne s'acquiert que vers douze ans.

Ayant considéré la notion de décalage, nous allons maintenantdéfinir les caractéristiques qui composent la notion de stade.

Pour qu'il y ait stades; il faut d'abord que "l'ordre de succession des acquisitions soit constant"[32]. Ce qui signifie qu'avant de devenir adolescent, j'ai été un enfant. L'ordre de succes-

---

31. J. Piaget et al., Les problèmes des stades en psychologie de l'enfant, p. 36.

32. Idem, ibid., p. 34.

sion est constant et irréversible.

Le caractère intégratif, c'est-à-dire que "les structures construites à un âge donné deviennent partie intégrante des structures de l'âge suivant"[33]. Toutes les acquisitions intellectuelles de notre enfance viennent s'intégrer à notre adolescence. Il ne s'agit pas d'une simple juxtaposition mais bien d'une réorganisation et d'une intégration entière des acquisitions intellectuelles.

La troisième caractéristique du stade est la notion de structure. Comme nous l'avons constaté antérieurement, cette structure est un ensemble possédant trois éléments ou caractères fondamentaux que sont la totalité, la transformation et l'autoréglage. Un stade est en fait une étape qui est caractérisée par le développement d'une structure spécifique.

> Une structure, ce sera, par exemple, au niveau des opérations concrètes, un groupement, avec les caractères logiques du groupement qu'on trouve dans la classification ou dans la sériation[34].

L'enfant peut maintenant effectuer plusieurs opérations différentes à des domaines distincts en utilisant toujours le groupement. Ceci signifie que la notion de groupement va agir à la fois sur les aspects logiques (mathématiques) et infra-logique

33. Idem, ibid., p. 34.

34. Idem, ibid., p. 35

(temps-espace). Ainsi nous pouvons réduire à "une unité supérieure une série de schèmes opératoires sans lien apparent entre eux"[35]. Nous sommes en présence de la notion de totalité. Celle-ci est indispensable à la structure d'ensemble.

La quatrième caractéristique concerne le niveau de préparation et d'achèvement du stade. Pour l'enfant qui est au niveau de la pensée concrète, le stade de préparation sera la période de sept et huit ans à dix et douze ans et l'achèvement sera l'équilibre momentanné qui est atteint vers douze ans. Il est important de distinguer les processus de formation et les formes d'équilibre finales. Les processus de formation sont en fait une différenciation entre les acquis antérieurs d'une structure et la tâche préparatoire que doit effectuer la nouvelle structure pour parvenir à son achèvement. L'achèvement ou l'équilibre final constitue la concrétisation de la structure d'ensemble. Le groupement, lors de la pensée concrète, peut être considéré comme équilibre final et structure d'ensemble.

A l'intérieur du développement intellectuel de l'enfant et de l'adolescent, nous rencontrons trois grandes structures d'ensemble ou de périodes qui contiennent des subdivisions que nous

---

35. Idem, ibid., p. 35.

appellerons stades ou sous-stades. Ces trois grandes périodes sont: la période sensori-motrice (o-2 ans), la période des opérations concrètes (2-11 ou 12 ans) et la période des opérations formelles (11-12 et 13-14 ans).

Ayant maintenant défini ce que sont les notions de structures et de stades, passons maintenant à la notion de proportionnalité qui est le sujet de notre recherche.

3. Définition et stades de la notion de proportion.

Il y a un certain nombre d'études expérimentales variées qui ont été effectuées sur la notion de proportion. Certains auteurs connus: Piaget et Inhelder[36,37], Pire[38], Brunner et Kenney[39], Lowell[40],

---

36. J. Piaget et B. Inhelder, La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant, Presses Universitaires de France, Paris, 1951, p. 144-173.

37. J. Piaget et B. Inhelder, De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent, Presses Universitaires de France, Paris, 1955, p. 144-158.

38. G. Pire, Notion de hasard et développement intellectuel dans l'enfance, 1958. p. 131-143.

39. J.S. Bruner et H.J. Kenney, On relational concepts dans Studies in Cognitive Growth, New York, 1966, chap. 8.

40. K.A. Lovell, A follow-up study of Inhelder and Piaget's, The growth of logical thinking dans British Journal of Psychology, 52, 1961, p. 143-153.

Davies[41], Lunzer[42], Lowell et Butterworth[43], Brainerd[44], Boucher[45] et Guay[46] ont étudié la notion de proportion. L'analyse la plus élaborée, celle de Noelting, Cloutier et Cardinal[47] considère l'apogée du développement de cette notion, comme se situant à la période que Piaget nomme la pensée formelle. Cette période se situe au début de l'adolescence (11 à 15 ans).

Par contre d'autres auteurs cités par Noelting[48],

---

41. C.M. Davies, Development of the probability concept in children, dans Child Development, 36, 1965, p. 779-788.

42. E. A. Lunzer, Problem of formal reasoning in test situation, M. S. R. C. D., 30, 1965, p. 19-46.

43. K. A. Lowell et J. B. Butterworth, Abilities underlying the understanding of proportionnality, Mathematics Teaching, 37, 1966, p. 9.

44. C. J. Brainerd, The development of proportionnality scheme in children and adolescent, dans Developmental Psychology, 5, 1971.

45. L. P. Boucher, Relation entre l'utilisation des opérations formelles et le degré de complexité intégrative de la structure conceptuelle, Thèse de Doctorat non publié, Université d'Ottawa, Ottawa, 1975.

46. J. P. Guay, L'épreuve des partages, Thèse de Maîtrise non publiée, Université Laval, Québec, 1973.

47. G. Noelting, G. Cardinal et R. Cloutier, Stades et mécanismes dans le développement de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent, Université Laval, Québec,1973, p. 157. (manuscrit non publié).

48. Idem, ibid., p. 9.

tel Yost, Siegel et Andrews[49], Goldberg[50], Fishbein, Pamper et Manzât[51] prétendent que des enfants de niveau pré-opératoire (3-5 ans) peuvent solutionner certains problèmes de proportion.

Une étude récente, celle de M. Guay[52], utilisant une épreuve expérimentale nouvelle (épreuve des partages 12 item) démontre que la notion de proportion n'est point solutionnée entre les âges de quatre et neuf ans. Il confirme ainsi les études de Piaget[53] et Noelting[54]. La recherche de M. Guay ne nous indique pas le moment où s'opère la résolution de la notion de proportion. Nous entreprenons donc notre étude chez les étudiants de neuf à seize ans, dans

---

49. P. Yost, P. Siegel et J. Andrews, Non-verbal probability judgments by young children, dans Child Development, 37, 1966, p. 769-780.

50. S. Goldberg, Probability judgments by preschool children: task conditions and performance, dans Child Development, 37, 1966, p. 157-167.

51. E. Fishbein, E. Pampert et I. Manzât, Comparison of ratios and the chance concept in children, dans Child Development, 41, 1970, p. 365-376.

52. J. P. Guay, L'épreuve des partages, p. 51-63.

53. J. Piaget et B. Inhelder, La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant, p. 144-173.

54. G. Noelting, G. Cardinal et R. Cloutier, Stades et mécanismes dans le développement de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent, p. 214-216.

le but de trouver le moment de la résolution de la proportion et de vérifier s'il y a continuité ou séquences dans le développement de la proportion. Nous continuons donc la démarche de Guay. Pour ce faire, nous allons utiliser un nouvel instrument. Il s'agit de l'épreuve des partages, 24 item. Cet instrument de mesure n'a jamais été utilisé avec un échantillonnage complet et adéquat. Nous entreprenons de vérifier ou de valider si l'instrument permet la construction de stades semblable à ceux élaborés par Piaget et Noelting.

La proportionnalité est une structure qui se construit de l'enfance à l'adolescence. Elle est plus spécifiquement une notion logico-arithmétique du niveau de la pensée formelle. Elle est formelle en ce sens qu'elle implique la capacité d'opérer sur des opérations, "permettant ainsi de déduire le possible à partir du réel et de dépasser l'aspect concret d'une situation"[55]. Plus spécifiquement, la notion de proportion, c'est l'étude de rapports ou de relations qui peuvent exister dans un ensemble. Ces relations ou rapports qui peuvent exister dans une certaine partie et son ensemble en mathématique, se nomme fraction. Prenons comme exemple la fraction 1/4. Le numérateur signifie que nous possédons une seule partie sur une possibilité d'en posséder quatre (dénominateur).

---

55. Idem, ibid., p. 3

Lorsque par la suite nous ajoutons une autre fraction à 1/4, soit 1/2 dans le but d'en étudier le rapport, nous sommes en présence d'une proportion comprenant deux fractions. Piaget et Noelting se sont intéressés au développement de la notion de proportion dans le but de déterminer les différentes étapes par lesquelles un enfant passe pour comprendre la notion de proportion.

Selon Piaget[56], l'enfant de quatre à sept ans ne comprend pas la notion de proportion. Ce qui est prévisible, car l'enfant ne possède pas les opérations concrètes. Au stade des opérations concrètes, il devient capable de saisir l'égalité qui peut exister entre deux proportions, c'est-à-dire 2/4 est égal à ½. L'adolescent parvient à établir une relation entre la comparaison des numérateurs et des dénominateurs. Lorsque celui-ci compare les deux proportions 2/5 et 3/4, il est en mesure de trouver un dénominateur commun , c'est-à-dire vingt. Il trouve ainsi la relation commune (ex. 20) qui peut exister entre deux rapports (ex. 4 et 5). Il effectue ainsi une "opération sur d'autres opérations, c'est-à-dire une opération purement formelle"[57]. Ces trois stades, nous les retroivons dans l'oeivre de Noelting, Cardinal et Cloutier[58] de façon plus complète.

Nous avons décrit le cadre théorique de notre recherche. Nous allons maintenant préciser davantage ce qu'est l'objet de notre étude.

---

56. J. Piaget et B. Inhelder, La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant, p. 144-173.

57. F. Longeot, Psychologie différentielle et théorie opératoire de l'intelligence, Dunod, Paris, 1969, p. 22-28.

58. G. Noelting, G. Cardinal et R. Cloutier, Stades et mécanismes dans le développement de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent, p. 214-215.

4. But et originalité de la recherche.

Nous avons l'intention d'étudier, à l'intérieur de cette recherche, la notion de proportion chez les garçons de neuf à seize ans. Nous utiliserons comme nouvel instrument de mesure collectif, l'Epreuve des Partages (24 item). Pour analyser statistiquement nos résultats, nous utiliserons l'analyse du Scalogramme de Guttman[59]. Cette analyse nous permettra de déterminer si le développement de la notion de proportion s'effectue de façon linéaire ou continue, ou bien si elle se construit selon des niveaux ou des étapes qui représentent certaines tâches complexes à accomplir (stades). L'analyse nous permettra indirectement de situer un âge moyen où s'opère la résolution des problêmes de proportion. Nous allons ainsi vérifier la validité de notre intrument.

Dans un deuxième temps, nous analyserons le programme d'enseignement des fractions du Ministère de l'Education du Québec au niveau élémentaire et secondaire, en utilisant les résultats obtenus de l'analyse statistique. Cette seconde démarche, nous allons la justifier dans notre prochain paragraphe.

---

59. L. Guttman, <u>The basis for scalogram analysis</u>, in S.A. Stouffer et <u>al.</u>, dans <u>Measurement and Prediction</u>, Princeton University Press, New York, 1950, p. 60-90.

En psychologie du développement, en plus d'étudier les différents niveau de maturation, nous nous devons d'accorder une place à l'environnement. Le développement intellectuel de l'enfant et de l'adolescent s'inscrit dans un milieu social et culturel. Se limiter à étudier la notion de proportion chez ceux-ci sans en dégager certaines implications ou applications concrètes, c'est extraire la proportion de son contexte réel. La notion de proportion se construit en interaction avec le biologique et l'environnement. L'une des réalités de cet environnement, c'est le programme scolaire. Celui-ci est une des sources de stimulations du milieu dans lequel cette notion se construit. Cette contruction est en fait une interaction entre la psychologie du développement et la pédagogie. Nous nous devons de respecter ces deux composantes, comme fesant partie d'une même réalité, c'est-à-dire la proportionnalité.

Cette application de la psychologie du développement à la pédagogie est un prolongement essentiel, et ceci pour deux raisons. Dans un premier temps, la psychologie du développement se doit d'appliquer ses résultats à la pédagogie, dans le but de faciliter l'apprentissage de la notion de proportion. Dans un second temps la pédagogie, par la connaissance de stade, saura trouver les meilleurs moyens pour enrichir les différents niveau de maturation. Nous sommes donc en présence d'une assimilation (psychologie du développement) et d'une accommodation (pédagogie) dont l'équilibration est l'apprentissage. Il s'agit ainsi d'un processus dynamique qui ne peut qu'enrichir notre recherche.

Notre recherche possède donc un double but; vérifier la validité de notre instrument et tenter d'appliquer nos résultats à la pédagogie.

5. Hypothèse de recherche.

Dans un premier temps, nous nous attendons à ce qu'il existe une relation positive entre nos résultats et ceux de Piaget[60], Noelting, Cloutier et Cardinal[61] au niveau de la formation et de l'ordre de succession des stades du développement de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent.

Comme deuxième but, nous allons appliquer nos résultats au programme de l'enseignement des fractions du Ministère de l'Education du Québec, pour tenter de voir si celui-ci respecte les stades du développement cognitif de l'enfant et de l'adolescent.

---

60. J.Piaget et B.Inhelder, La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant, p.144-173.

61. G.Noelting, G.Cardinal et R.Cloutier, Stades et mécanismes dans le développement de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent, p. 214-216.

CHAPITRE II

SCHEME EXPERIMENTAL

Nous avons vu dans le chapitre premier, l'aspect théorique de la notion de proportion. A l'intérieur de ce second chapitre, nous allons décrire l'échantillon, l'instrument et les conditions expérimentales. Ces trois éléments vont nous permettre de confirmer ou d'infirmer notre hypothèse.

1. Echantillon.

Notre échantillon sera composé de 240 sujets masculins. Nous avons choisi trente sujets pour chacun des niveaux suivants: élémentaire quatre, cinq, six et secondaire un, deux, trois, quatre et cinq; c'est-à-dire des sujets de neuf à seize ans. Chacune des classes de ces deux écoles était constituée de façon hétérogène, c'est-à-dire avec des sujets forts, moyens et faibles. A l'élémentaire, les classes étant mixtes, seuls les garçons ont été conservés. Au secondaire, les sujets étaient tous masculins. Nous allons tenir compte de l'âge dans l'analyse statistique, les niveaux scolaires s'étant révélés équivalents à l'âge.

Nos sujets proviennent de deux écoles différentes ayant une même aire géographique: Jean Massé (élémentaire)[1] et le collège

1. Ecole Massé, Commission Scolaire Champlain, 1 Saint-Alexandre, Limbour, P. Québec.

Tableau I.- Répartition des sujets de l'échantillon suivant l'âge et le niveau.

Age	Niveau de scolarité	Nombre de sujets
9	Elé. *4	30
10	Elé. 5	30
11	Elé. 6	30
12	Sec. *I	30
13	Sec. II	30
14	Sec. III	30
15	Sec. IV	30
16	Sec. V	30
	TOTAL	240

* Elémentaire (deuxième cycle)

* Secondaire

Saint-Alexandre (secondaire)[2]. Nous avons choisi ces deux écoles car elles font partie du même milieu socio-économique moyen que nous désirons étudier.

2. L'instrument.

L'épreuve des partages[3] a été inspirée de l'épreuve des concentrations[4].

L'épreuve des concentrations consiste en verres d'eau, que l'on dispose en nombre variable dans chacun de deux ensembles. On demande au sujet de mélanger l'eau avec le jus d'orange et d'indiquer lequel des deux mélanges obtenus goûte le plus le jus d'orange. Nous sommes donc en présence d'un rapport où l'enfant est confronté à un problème de comparaison, à savoir quel mélange goûte le plus le jus d'orange.

---

2. Collège Saint-Alexandre, Commission Scolaire Régionale de l'Outaouais, Limbour, P. Québec.

3. G. Noelting et L. Bégin, Etude de la compréhension de la notion de proportion au niveau de sixième année scolaire dans divers milieux ethniques. (en préparation) Université Laval, Québec.

4. G. Noelting, G. Cardinal et R. Cloutier, Stades et mécanismes dans le développement de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent, Université Laval, Québec, 1973. (manuscrit non publié).

La présente formule de l'épreuve des partages a été mise au point par Noelting et Cardinal[5]. Nous reprenons l'expérimentation de cette épreuve, car selon Noelting, l'échantillon utilisé s'est révélé incomplet.

L'épreuve des partages est plus concrète et porte moins à confusion dans la présentation du problème. Elle est aussi une épreuve collective; nous y retrouvons vingt-quatre problèmes ou item ayant différentes proportions. Le tableau II reproduit les fractions, les couples de rapports ou partie au tout, qui sont présents dans l'épreuve.

Comme nous pouvons le constater, l'enfant doit comparer les deux situations (fractions) A et B. Dans l'épreuve des partages, le numérateur est symbolisé par des tartes ou des gâteaux à partager. Le dénominateur indique le nombre de bonshommes qui doivent se partager les gâteaux. Ainsi, l'enfant doit mentalement faire un partage et décider par la suite lequel des deux groupes de bonshommes mangera le plus de gâteaux. A chaque item, le sujet est confronté par le même problème. La suite des item est graduée du plus facile au plus difficile. La figure I ci-dessous illustre, à titre d'exemple, le problème numéro un (4/1 et 1/4).

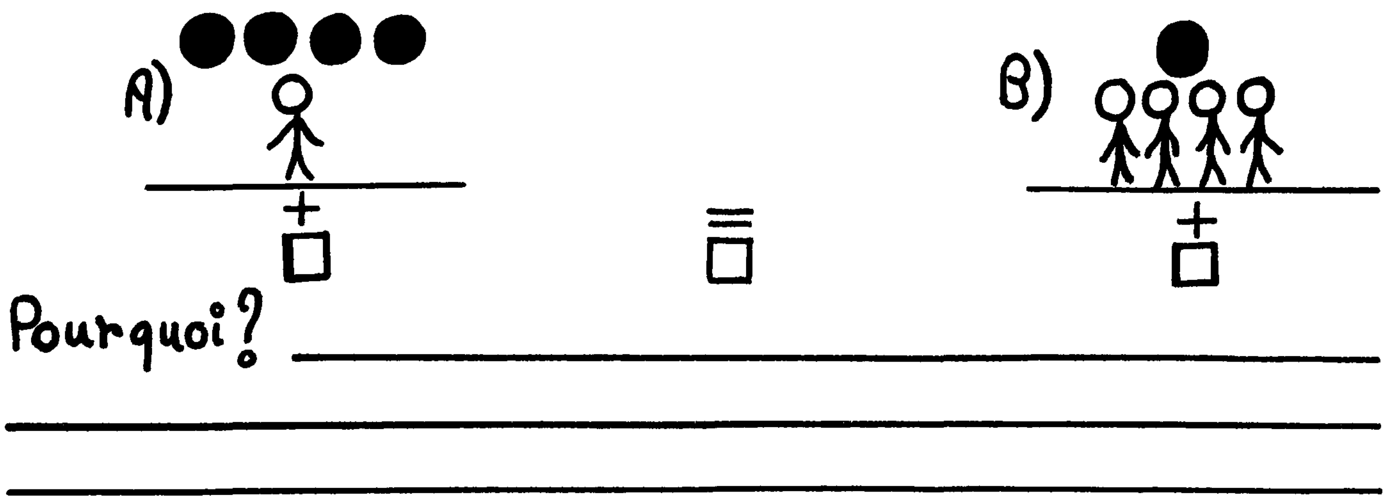
---

5. G. Noelting et _al._, _Partage, forme collective 24 item; étude des arguments_, Université Laval, 1974, p. i-22. (manuscrit non publié).

Tableau II.- Présentation des rapports partie au tout ou fractions impliquées dans les item de l'épreuve des partages.

Item	Fractions	Items	Fractions
1	4/1 et 1/4	13	1/2 et 2/4
2	3/1 et 3/1	14	2/4 et 3/6
3	1/2 et 2/1	15	3/1 et 6/2
4	1/2 et 1/3	16	1/2 et 2/3
5	2/3 et 2/1	17	3/1 et 5/2
6	3/1 et 3/2	18	4/2 et 5/3
7	2/3 et 1/1	19	2/3 et 3/4
8	3/4 et 2/1	20	3/2 et 4/3
9	2/1 et 3/3	21	5/2 et 7/3
10	2/2 et 3/3	22	3/5 et 5/8
11	1/1 et 2/2	23	7/2 et 4/7
12	4/4 et 3/3	24	8/5 et 5/3

Figure 1.- Représentation graphique d'un problème type de l'épreuve des partages (item numéro 1).



Pour répondre au questionnaire, le sujet doit indiquer son choix par un x et l'inscrire dans la case appropriée. Il inscrit un x sous l'ensemble A si celui-ci représente le plus grand rapport, dans la case centrale si les rapports sont égaux, ou sous l'ensemble B s'il présente un plus grand rapport. Le second mode d'évaluation consiste à vérifier les arguments utilisés par le sujet, pour justifier sa réponse objective. Si la réponse objective est bonne et l'argument faux, seul l'argument est considéré. Nous avons vérifié tous les arguments des item un à vingt-quatre. Cette vérification s'est effectuée grâce à une table des justifications mise au point par Noelting. A la suite de la compilation du mode d'évaluation, il nous deviendra possible d'effectuer un traitement statistique.

L'épreuve des partages est un instrument collectif et opératoire. Elle est collective par comparaison à l'approche individuelle ou clinique employée par Piaget. Elle est aussi une épreuve opératoire, car elle représente à la fois un caractère objectif (x dans la case adéquate) et subjectif (justifications ou arguments fournis par le sujet). Ayant maintenant décrit l'instrument, nous allons énoncer les conditions de son application.

3. Les conditions expérimentales.

Comme nous l'avons vu auparavant, notre échantillonage était constitué de deux établissements scolaires. Dans les deux cas, les sujets n'eurent pas à quitter leur contexte quotidien. L'expérimentation se déroula dans la salle de classe, et ceci à des heures régulières de cours. Un seul examinateur fut employé dans les huit classes tout au long de l'expérimentation, dans le but d'uniformiser les conditions d'administration et les procédures.

CHAPITRE III

RECUEIL DES DONNEES

Ce chapitre a pour but d'expliquer la méthode statistique employée et de faire connaître les résultats obtenus. Dans un second temps, nous catégoriserons nos item grâce à la méthode statistique utilisée, c'est-à-dire l'analyse scalogramme de Guttman[1,2,3,4].

1. L'analyse par scalogramme[5].

Nous avons vu au second chapitre que notre instrument de mesure avait trois possibilités objectives (A ou B ou Egal). Après la correction, nous accordons la cote 1 pour l'item réussi et 0 au problème échoué.

Dans un premier temps, nous allons ordonner nos item en fonction de leur degré de difficulté, en tenant compte des

---

1. L. Guttman, A basis for scaling qualitative datta, dans American Sociology, Rev. 9, 1944, p. 139-150.

2. L. Guttman, The basis for scalogram analysis in Measure-ment and prediction, Princeton Univ. Press, New York, 1950, p. 60-90

3. L. Guttman, The Cornell technique for scale and intensity analysis, dans Educ. Psychol. Measmt., no. 7, 1947, p. 247-280.

4. L. Guttman, On Festinger's evaluation of scale analysis, dans Psychol. Bull., no. 44, 1947, p. 451-465.

5. Guttman Scale # 1, BMDO5S, Biomedical Computer Program, Ed. W.J. Dixon, California Univ. Press, 1971, p. 379-398.

réussites et des échecs (voir tableau III). Par la suite, nous additionnerons les item réussis pour les trente sujets en gardant l'âge comme variable principale (tableaux IV et V). Ces tableaux nous permettent de constater une certaine chronologie quant aux réussites par âge.

Le scalogramme ou l'échelle de L. Guttman doit posséder deux caractéristiques essentielles: il doit être unidimensionnel et cumulatif. Unidimensionnel, ce qui signifie que tous les item doivent mesurer une seule et même dimension ou variable. L'aspect cumulatif nécessite que les item qui constituent l'épreuve puissent être ordonnés par degré de difficulté.

En second lieu, que les sujets qui répondent avec succès à un item difficile réussiront toujours aux item considérés comme plus faciles. Si nous réunissons ces deux qualités, nous obtenons un modèle idéal de scalogramme. A l'intérieur de ce modèle idéal de scalogramme, les scores des item réussis et échoués devraient former un triangle parfait (ligne pointillée). Le tableau VI nous donne un exemple d'un scalogramme parfait.

Les tableaux VII et VIII rapportent les résultats que nous avons obtenus après avoir effectué une correction grâce au scalogramme. L'analyse du scalogramme est en fait une comparaison entre le modèle idéal et le modèle que nous avons obtenu antérieurement (voir tableau III). Cette comparaison a pour but d'évaluer le degré de correspondance entre le scalogramme parfait et celui obtenu car la réalité ne correspond pas au modèle idéal. Toutes les

TableauIII.- Item ordonnés en fonction de leur degré de difficulté ou de leur fréquence de réussite (sur 240 sujets).

Item	Fréquence brute	Erreurs du côté des réussites	Erreurs du côté des échecs	Erreurs totales obtenues	Fréquence du scalogramme idéal
1	240	0	0	0	240
3	239	1	0	1	240
2	237	3	0	3	240
5	230	2	0	2	232
6	229	3	0	3	232
4	224	6	0	6	230
8	216	3	1	4	218
7	215	7	0	7	222
9	207	6	5	11	208
10	193	4	6	10	191
12	190	2	4	6	188
11	189	4	2	6	188
15	179	7	7	14	179
13	178	4	6	10	176
14	176	0	10	10	166
17	117	3	6	9	114
16	113	17	8	25	122
18	97	2	6	8	93
20	91	7	10	17	88
21	86	6	8	14	84
19	72	1	7	8	66
22	43	0	5	5	38
23	29	2	2	4	29
24	27	0	0	0	27

Tableau IV .- Fréquence brute de réussite par item, par âge avant le scalogramme (30 sujets par âge).

Item	Age							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	30	30	30	30	30	30	30	30
3	30	30	29	30	30	30	30	30
2	28	29	30	30	30	30	30	30
5	27	28	27	30	29	30	29	30
6	27	28	26	30	29	30	29	30
4	23	28	26	29	29	30	29	30
8	18	26	27	28	29	30	29	29
7	19	24	28	27	28	30	29	30
9	12	23	25	30	29	30	29	29
10	11	10	24	25	28	28	29	28
12	9	19	25	25	26	28	29	29
11	9	18	24	25	27	29	29	28
15	4	17	19	24	27	29	29	30
13	5	15	21	25	27	27	29	29
14	4	12	21	24	27	29	29	30
17	0	2	3	11	20	24	29	28
16	1	8	4	7	19	23	23	28
18	0	1	1	7	16	20	26	27
20	0	0	1	6	15	20	24	24
21	0	0	1	6	15	19	19	26
19	0	1	1	1	9	18	20	22
22	0	0	0	0	5	12	10	16
23	0	0	0	0	3	8	9	9
24	0	0	0	0	3	7	8	9

Tableau V.- Pourcentage de réussite par item, par âge avant le scalogramme (30 sujets par âge) .

Item	Age							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	100	100	100	100	100	100	100	100
3	100	100	97	100	100	100	100	100
2	93	97	100	100	100	100	100	100
5	90	93	90	100	97	100	97	100
6	90	93	87	100	97	100	97	100
4	77	93	87	100	97	100	97	100
8	60	87	90	93	97	100	97	97
7	63	80	93	90	93	100	97	100
9	40	77	83	100	97	100	97	100
10	37	66	80	83	93	93	97	93
12	30	63	83	83	87	93	97	97
11	30	60	80	83	90	97	97	93
15	13	57	63	80	90	97	97	100
13	17	50	70	83	90	90	97	97
14	13	40	70	80	90	97	97	100
17	0	7	10	37	67	80	97	93
16	3	27	13	23	63	77	77	93
18	0	3	3	23	53	66	87	90
20	0	0	3	20	53	66	80	80
21	0	0	3	20	50	63	63	87
19	0	3	3	3	30	60	67	73
22	0	0	0	0	17	40	33	53
23	0	0	0	0	10	27	30	30
24	0	0	0	0	10	23	27	30

Tableau VI.- Exemple d'un scalogramme parfait.

Sujets	Item					Scores
	1	2	3	4	5	
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	1
3	1	1	0	0	0	2
4	1	1	1	0	0	3
5	1	1	1	1	0	4
6	1	1	1	1	1	5
Total	5	4	3	2	1	

TableauVII.- Fréquence de réussite par item, par âge, corrigée par le scalogramme (30 sujets par âge).

Item	Age							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	30	30	30	30	30	30	30	30
3	30	30	30	30	30	30	30	30
2	30	30	30	30	30	30	30	30
5	27	28	29	30	29	30	29	30
6	27	28	29	30	29	30	29	30
4	25	28	29	30	29	30	29	30
8	18	26	27	29	29	30	29	30
7	20	27	28	29	29	30	29	30
9	12	24	25	29	29	30	29	30
10	9	19	23	25	28	29	29	29
12	8	19	22	25	27	29	29	29
11	9	19	23	25	28	29	29	29
15	5	17	19	24	27	29	29	29
13	5	15	18	24	27	29	29	29
14	3	11	16	22	27	29	29	29
17	0	2	2	9	21	24	29	27
16	0	3	4	10	23	28	29	27
18	0	1	1	5	14	22	26	26
20	0	0	1	4	14	20	23	26
21	0	0	1	4	13	18	22	26
19	0	0	1	0	7	16	20	22
22	0	0	0	0	3	11	10	14
23	0	0	0	0	3	9	8	9
24	0	0	0	0	3	7	8	9

Tableau VIII.- Pourcentage de réussite par item, par âge après le scalogramme (30 sujets par âge).

Item	Age							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	100	100	100	100	100	100	100	100
3	100	100	100	100	100	100	100	100
2	100	100	100	100	100	100	100	100
5	90	93	97	100	97	100	97	100
6	90	93	97	100	97	100	97	100
4	83	93	97	100	97	100	97	100
8	60	87	90	97	97	100	97	100
7	66	90	93	97	97	100	97	100
9	40	80	83	97	97	100	97	100
10	30	63	77	83	93	97	97	97
12	27	63	73	83	90	97	97	97
11	30	63	77	83	93	97	97	97
15	17	57	63	80	90	97	97	97
13	17	50	60	80	90	97	97	97
14	10	37	53	73	90	97	97	97
17	0	7	7	30	70	80	97	92
16	0	10	13	33	77	93	97	90
18	0	3	3	17	47	73	87	87
20	0	0	3	13	47	66	77	87
21	0	0	3	13	43	60	73	87
19	0	0	3	0	23	53	67	73
22	0	0	0	0	10	37	33	47
23	0	0	0	0	10	30	27	30
24	0	0	0	0	10	23	27	30

différences que nous avons trouvées entre le modèle idéal et obtenu sont considérées comme étant des erreurs. Ces erreurs sont compilées et servent de base aux calculs de certains coefficients standards. Ceux-ci vont nous permettre par la suite de vérifier si nos item forment bien une échelle unidimensionnelle et cumulative. Nous allons donc décrire nos quatre principales opérations nécessaires à l'établissement du scalogramme de Guttman.

A. Coefficient de reproductibilité (CR).

L. Guttman nous propose comme première opération le calcul du coefficient de reproductibilité. Reproductibilité, c'est-à-dire prévoir la probabilité d'obtenir telle réponse à tel item. Deux variables sont à respecter: le score du sujet et le degré de difficulté de l'item. La formule du CR est celle-ci:

$$\frac{1 - \dfrac{\text{nombre d'erreurs}}{\text{nombre de sujets nombre d'item}}}{1 - \dfrac{\text{nombre d'erreurs}}{\text{nombre total de réponses}}} = .968$$

Le calcul du CR représente en fait la moyenne de reproductibilité individuelle de tous les item. Un coefficient de 0.90 doit être obtenu pour pouvoir considérer nos item de l'épreuve comme représentant une échelle. Nous avons obtenu comme CR un coefficient de .9525, ce qui nous laisse prévoir que nos item forment bien une échelle. Malgré un coefficient de reproductibilité valable, il se peut que la majorité des erreurs soient réparties sur un ou deux des item. Pour déceler ces item, une seconde opération est nécessaire: trouver le coefficient de reproductibilité par item (CR_i).

B. Coefficient de reproductibilité pour chaque item (CR_i).

Le calcul du coefficient de reproductibilité pour chaque item est utilisé pour déceler s'il y a concentration d'erreurs sur un item en particulier. L'item trop difficile ou trop facile ne nous permettrait pas de construire une échelle valable. Tous nos item doivent avoir un CR_i de .80. Les item inférieurs à ce coefficient devront être éliminés de l'épreuve. La formule du CR_i est celle-ci:

$$CR_i = 1 - \frac{\text{nombre d'erreurs à l'item}}{\text{nombre de sujets}}$$

Le tableau IX nous indique le CR_i obtenu à chaque item. Comme le tableau l'indique, tous nos item ont un coefficient supérieur à .80, ce qui signifie qu'aucun de nos item ne sera éliminé. Nous allons maintenant déterminer les item qui sont trop difficiles ou trop faciles, grâce au MMR_i.

C. Coefficient de reproductibilité marginale minimum par item (MMR_i).

Le MMR_i a pour but de discerner les itemtrop difficiles ou trop faciles, ce qui fausserait notre échelle cumulative et unidimensionnelle. Par contre, le fait de connaître le niveau de difficulté d'un itemnous permettra par la suite de le situer comme étant une étape extrême du développement. Tous les item qui dépasseront le coefficient .80 devront être ignorés lors du calcul du CR. Le calcul du MMR_i se formule ainsi:

$$MMR_i = \frac{\text{nombre de réussites ou d'échecs (score plus élevé)}}{\text{nombre de sujets}}$$

Le tableau X nous donne les résultats du coefficient de reproductibilité marginale minimum par item (MMR_i).

Les neuf premiers et les trois derniers item devront être ignorés lors du calcul final du CR, car il y a une trop forte concentration d'erreurs sur ces item. Notre coefficient de reproductibilité corrigé (CR_c), c'est-à-dire en tenant compte du MMR_i est de .9529. Ce CR_c est satisfaisant car il est au-dessus de .90. La moyenne du MMR par item est de .803 (MMR_i). Dans le but d'enrichir notre échelle, nous allons utiliser l'indice de reproductibilité

Tableau I^X .- Coefficient de reproductibilité obtenu pour chaque item (CR_i).

Item	CR_i	Item	CR_i
1	1.000	15	.942
3	.996	13	.959
2	.988	14	.959
5	.992	17	.963
6	.988	16	.896
4	.975	18	.967
8	.984	20	.930
7	.971	21	.942
9	.955	19	.967
10	.959	22	.980
12	.975	23	.984
11	.975	24	1.000

Tableau X.- Coefficient de reproductibilité marginale minimum par item (MMR_i).

Item	MMR_i	Item	MMR_i
1	1.	15	.745
3	.995	13	.741
2	.987	14	.733
5	.958	17	.513
6	.954	16	529
4	.933	18	.596
8	.90	20	.621
7	.895	21	.642
9	.862	19	.700
10	.804	22	.821
12	.791	23	.879
11	.787	24	.887

de Jackson.

D. L'indice de Jackson (PPR).

Cet indice de reproductibilité nous est proposé par White et Saltz[6]. La formule est la suivante:

$$PPR = \frac{CR - MMR_t}{1 - MMR_t - M} = .838$$

Le MMR_t est la moyenne des coefficients de reproductibilité marginale minimum par item (MMR_i).

Nous utilisons l'indice de Jackson dans le but d'apporter des informations complémentaires à notre coefficient de reproductibilité. Un coefficient de .70 est requis pour avoir un indice de reproductibilité suffisant pour Jackson. Le nôtre étant .838, il devient donc significatif.

Nous avons maintenant terminé les principales opérations statistiques, certaines conditions restent à valider pour obtenir

---

6. W. White et E. Saltz, Measurement of reproductibility, dans Psychology Bull., 54, 1957, p. 81-99.

une échelle. Nous avions vingt-quàtre item, ce qui était supérieur à dix, norme minimum établie par Guttman. Il en va de même pour l'échantillon. Le minimum établie était de 100 sujets, nous en avions 240. Nous pouvons maintenant conclure grâce à nos coefficients calculés que nous sommes en présence d'une échelle cumulative et unidimensionnelle comme nous l'indiquent les tableaux VII et VIII. Nous allons maintenant passer à la seconde partie, c'est-à-dire la catégorisation des item.

2. Catégorisation des item.[7]

Cette seconde partie est un premier découpage ou regroupement de nos item que nous allons effectuer grâce au scalogramme obtenu antérieurement (voir tableaux VII et VIII). Ceci va nous permettre d'avancer certains stades à partir des résultats statistiques obtenus et des item. Dans un même temps, nous allons tenter de cerner les relations que le sujet effectue pour solutionner son problème de fraction. Pour ce faire, nous devons codifier les éléments des fractions. Premièrement nous placerons toujours à gauche

---

7. G. Noelting, G. Cardinal et R. Cloutier, Stades et mécanismes dans le développement de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent, Université Laval, Québec, 1973 (manuscrit non publié), p. 36-39.

la fraction qui a le plus grand numérateur. S'il y a égalité, nous placerons à droite celle qui a le plus grand dénominateur. Deuxièmement, les lettres N1 et D1 signifieront le numérateur et le dénominateur de la fraction de gauche, tandis que N2 et D2 représenteront la fraction de droite. Troisièmement, les relations qui vont exister à l'intérieur d'une même fraction se nommeront "intra" (ex. N1 et D1 ou N2 et D2). Les relations qui vont exister entre deux fractions se nommeront "extra" (ex. N1 et N2 ou N1 et D2). L'usage de ces différents symboles va nous permettre d'établir certaines équations pour expliquer chaque catégorie d'item.

A. Première catégorie IA.

Les item numéro 1 (4/1 et 1/4), numéro 3 (2/1 et 1/2) et numéro 2 (3/1 et 3/1) constituent les item de notre première tranche. La relation symétrique qui existe entre ces trois fractions est que le numérateur est supérieur ou égal.

Relation Intra		Relation Extra
$N^1 > D^1$	ou	$N^1 > N^2$ (1, 3)
$N^2 < D^2$		$N^1 = N^2$ (2)

La moyenne en pourcentage des réussites à cette étape est de 100%.

B. Deuxième catégorie IB.

La deuxième catégorie est constituée des item numéro 5 (2/3 et 2/1), numéro 6 (3/2 et 3/1) et numéro 4 (1/3 et 1/2). La relation symétrique qui existe entre ces trois fractions est que les trois numérateurs sont égaux mais avec des dénominateurs supérieurs.

Relation Intra	Relation Extra
quelconque	$N^1 = N^2$
	$D^1 > D^2$

Nous sommes ainsi en présence de la possibilité de la division d'un entier en différentes parties, car nos dénominateurs sont divisibles entre eux (ex.: numéro 5, 2/3 et 2/1). La moyenne en pourcentage de réussites à cette étape est de 96.88%.

C. Troisième catégorie IC.

Les item numéro 8 (3/4 et 2/1), num.ro 7 (2/3 et 1/1) et numéro 9 (3/3 et 2/1) forment notre première catégorie. La relation principale est que le numérateur et le dénominateur sont constamment différents dans les trois fractions. Le sujet doit trouver un nouvel invariant. Pour considérer le numérateur et le dénominateur simultannément, il doit comparer et diviser. Il trouverait ainsi une seule et même unité de mesure pour le numérateur et le dénominateur. Il s'agit en fait d'une relation inverse entre le numérateur et le dénominateur. L'analyse qualitative confirmera notre hypothèse s'il y a lieu.

Relation Intra	Relation Extra
$N^1 < D^1$ (8, 7)	$N^1 = N^2$
$N^1 = D^1$ (9)	$D^1 > D^2$

La moyenne en pourcentage de réussites à ce stade est de 92.88%.

D. Quatrième catégorie IIIA.

Notre quatrième catégorie réunit les item numéro 10 (3/3 et 2/2), numéro 12 (4/4 et 3/3) et numéro 11 (2/2 et 1/1). Il s' agit de fractions représentant l'équivalence, les numérateurs et les dénominateurs de chaque fraction étant égaux. Il s'agit en fait de correspondance terme à terme.

Relation Intra	Relation Extra
$N^1 = D^1$	$N^1 > N^2$
$N^2 = D^2$	$D^1 > D^2$

La moyenne en pourcentage de réussites à cette étape est de 79.5%.

E. Cinquième catégorie IIB.

Notre cinquième catégorie comprend deux item: le numéro 15 (6/2 et 3/1) et le numéro 13 (2/4 et 1/2).

Relation Intra		Relation Extra
$N^1 > D^1$	(15)	$N^1 > N^2$
$N^2 > D^2$		$D^1 > D^2$
$N^1 < D^1$	(13)	
$N^2 < D^2$		

Comme nous pouvons le constater, nous sommes en présence de fractions d'équivalences de l'ordre de la demie (13) et du tiers (15). Le sujet doit tenir compte simultanément des deux éléments d'un même item, car les numérateurs et les dénominateurs varient. Il s'agit pour le sujet d'établir des relations par la multiplication de l'invariant au début de la construction de la proportionnalité. La moyenne en pourcentage de réussites à ce stade est de 75.38%.

F. Sixième catégorie IIB^1.

Un seul item fait partie de notre sixième catégorie. Il s'agit de l'item numéro 14 (3/6 et 2/4). Cet item représente l'équivalence de l'ordre de la demie. Tout comme nos quatrième et cinquième catégories, nous sommes en présence de la proportionnalité.

Relation Intra	Relation Extra
$D^1 > N^1$	$N^1 > N^2$
$D^2 > N^2$	$D^1 > D^2$

La moyenne en pourcentage de réussites à ce stade est de 70.13%.

G. Septième catégorie IIIA.

Cette catégorie comprend les item numéro 17 (5/2 et 3/1) et numéro 16 (2/3 et 1/2). Elle est caractérisée par le fait que le dénominateur est inclus dans le numérateur (item 17) et vice versa pour l'item 16. Les fractions sont en fait emboîtées entre elles, grâce à une relation à la fois interne et externe.

Relation Intra		Relation Extra	
$N^1 > D^1$	(17)	$N^1 > N^2$	(17)
$N^2 > D^2$	(17)	$D^1 > D^2$	(17)
$N^1 < D^1$	(16)	$N^1 > N^2$	(16)
$N^2 < D^2$	(16)	$D^1 > D^2$	(16)

La moyenne en pourcentage de réussites à ce stade est de 52.00%.

H. Huitième catégorie $IIIA^1$.

Cette huitième catégorie comprend les item numéro 18 (5/3 et 4/2), numéro 20 (4/3 et 3/2), numéro 21 (7/3 et 5/2) et numéro 19 (3/4 et 2/3). Il s'agit pour le sujet de simplifier une fraction, puis ensuite de faire un rapport avec la seconde fraction. Nous appellerons cette catégorie: fractions traitées par simplification. La moyenne des réussites en pourcentage à cette étape est de 38.63%.

Relation Intra		Relation Extra
$N^1 > D^1$	(18, 20, 21)	$N^1 > N^2$
$N^2 > D^2$	(18, 20, 21)	$D^1 > D^2$
$N^1 > D^1$	(19)	
$N^2 > D^2$	(19)	

I. Neuvième catégorie IIIB.

Notre dernière catégorie comprend les item numéro 22 (5/8 et 3/5), numéro 23 (7/2 et 4/7) et numéro 24 (8/5 et 5/3). Il s'agit de fractions quelconques qui réunissent un nombre varié de relations. Pour pouvoir réussir ces item, il faut que le sujet puisse parfaitement combiner les relations. La moyenne des réussites en pourcentage à cette étape est de 15.88%.

Relation Intra		Relation Extra	
$N^1 < D^1$	(22)	$N^1 > N^2$	(22)
$N^2 < D^2$	(22)	$D^1 > D^2$	(22)
$N^1 > D^1$	(23)	$N^1 > N^2$	(23)
$N^2 < D^2$	(23)	$D^1 < D^2$	(23)
$N^1 > D^1$	(24)	$N^1 > N^2$	(24)
$N^2 > D^2$	(24)	$D^1 > D^2$	(24)

Nous avons découpé neuf catégories hypothétiques. Les tableaux XI, XII et XIII présentent les stades hypothétiques que nous avons obtenus en calculant les fréquences de réussites pour nos sujets.

A l'intérieur de notre prochain chapitre, nous allons tenter de valider nos hypothèses, c'est-à-dire les neuf catégories ou étapes.

TableauXI.- Fréquence de réussite par stade hypothétique, par âge (30 sujets par âge).

Stades	Age							Total
	9	10	11	12	13	14	15	16	
IA	3	2	1	0	1	0	1	0	8
IB	7	1	1	1	0	0	0	0	10
IC	11	8	5	4	1	1	0	1	31
2A	4	2	4	1	1	0	0	0	12
2B	2	6	3	2	0	0	0	0	13
$2B^1$	3	8	12	12	4	3	0	2	44
3A	0	2	3	5	9	6	3	1	29
$3A^1$	0	1	1	5	11	9	16	12	55
3B	0	0	0	0	3	11	10	14	38

TableauXII.- Pourcentage de réussite par stade hypothétique, par âge (30 sujets par âge).

Stades	Age							
	9	10	11	12	13	14	15	16
IA	10	6	3	0	3	0	3	0
IB	23	3	3	3	0	0	0	0
IC	37	26	16	13	3	3	0	3
2A	13	6	13	3	3	0	0	0
2B	6	20	10	6	0	0	0	0
$2B^1$	10	26	40	40	13	10	0	6
3A	0	6	10	16	30	20	10	3
$3A^1$	0	3	3	16	36	29	53	29
3B	0	0	0	0	10	37	33	47

TableauXIII.- Pourcentage de réussites cumulatives: par stade hypothétique, par âge (30 sujets par âge).

Stades	Age								Moyenne %
	9	10	11	12	13	14	15	16	
IA	100	100	100	100	100	100	100	100	100
IB	90	94	97	100	97	100	97	100	96.88
IC	67	91	94	97	97	100	97	100	92.88
2A	30	64	78	84	94	97	97	97	79.5
2B	16	59	65	81	91	97	97	97	75.38
$2B^1$	10	39	55	75	91	97	97	97	70.13
3A	0	10	13	33	76	87	100	100	52.
$3A^1$	0	3	3	16	46	67	87	87	38.63
3B	0	0	0	0	10	37	47	47	15.88

CHAPITRE IV

ANALYSE DES RESULTATS

A l'intérieur de ce chapitre quatre, nous allons tenter de valider les stades et sous-stades présentés comme hypothèses au chapitre trois. Dans un deuxième temps, nous allons faire une étude structurale des stades obtenus, grâce aux item et aux arguments des sujets.

1. Validation des stades.

La validation des stades s'effectue grâce à trois opérations. Il s'agit en premier lieu du calcul de l'âge médian, en second, du test statistique Kolmogorov-Smirnov et finalement de la vérification de l'âge d'accession à chacun des stades. Ces opérations ont pour but de vérifier l'aspect progressif du développement des stades en tenant compte de l'âge des sujets. Avant d'entreprendre ces opérations, nous allons classer nos sujets à l'intérieur des stades. Antérieurement, nous avions découpé nos stades à partir des item qui avaient des relations semblables ou symétriques. Selon le scalogramme obtenu, nous retrouvons trois stades composés de neuf sous-stades: au sous-stade IA: 8 sujets, au sous-stade IB: 10 sujets, au sous-stade IC: 31 sujets, au sous-stade IIA, B et B^1: 69 sujets, au sous-stade IIIA: 29 sujets, au sous-stade $IIIA^1$: 55 sujets et au sous-stade IIIB: 38 sujets. Déjà, nous avons regroupé les sous-stades IIA, IIB et IIB^1 en une seule étape à cause d'une différence de fréquence de réussite peu élevée. Ayant classé nos sujets par stades et sous-stades, nous allons effectuer notre première opération.

A. Les âges médians.

L'âge médian nous permet une première vérification quant à l'existence d'une relation entre les stades et l'âge chronologique. En effet, ce type d'analyse se fonde sur le postulat principal que plus une réponse est donnée par des enfants jeunes, plus elle correspond à un niveau inférieur de développement. Ce postulat ne nous permet pas de situer un ordre irréversible dans les stades, mais il nous renseigne sur la hiérarchie possible des stades[1]. Le postulat signifie d'une façon plus concrète que les sujets les plus jeunes se retrouveraient normalement au stade le plus simple. Les sujets les plus âgés devraient se retrouver aux

1. M. Laurendeau et A. Pinard, La pensée causale, P. U. F., Paris, 1962, p. 71-78.

stades les plus élevés dans l'échelle. Nous avons préféré utiliser l'âge médian à cause de notre faible échantillon par âge. En utilisant l'âge moyen par comparaison à l'âge médian, nous serions en présence d'une discrimination non valable aux extrémités de l'échelle de difficulté croissante des item. Les âges médians que nous avons trouvés parallèles aux stades sont ceux-ci: sous-stade IA: 10.6 ans, sous-stade IB: 9.10 ans, sous-stade IC: 10.7 ans, stade II: 11.8 ans, sous-stade IIIA: 13.6 ans, sous-stade $IIIA^1$: 15 ans, sous-stade IIIB: 15.4 ans.

Si nous étudions ces résultats, il nous semble qu'il y a une relation symétrique entre l'âge chronologique et l'échelle des stades pour trois d'entre eux. Il y a une relation significative d'un an entre le sous-stade IB et le stade II, le stade II et le sous-stade IIIA et entre les sous-stades IIIA et $IIIA^1$. Par contre, l'écart entre les sous-stades IA, IB et IC est seulement de quelques mois. Nous posons donc l'hypothèse que les sous-stades IA, IB et IC sont d'un même niveau de difficulté. Le test Kolmogorov-Smirnov (K-S) confirmera ou infirmera notre hypothèse.

B. Le Kolmogorov-Smirnov (K-S).

Le Kolmogorov-Smirnov[2] est un test statistique non paramétrique qui n'exige pas de distributions normales. Nous utilisons le K-S comme seconde opération de validation dans le but de vérifier s'il y a un écart significatif ($\leq .05$) entre les stades. Ce test porte sur les écarts maximums entre deux distributions cumulatives. Le K-S comprend quatre étapes. La première étape est la compilation de nos fréquences de réussite totales par stade. La seconde opération est de trouver la différence qui existe entre les stades, grâce à nos fréquences de réussite. Troisièmement, nous prenons la plus grande différence comme point de repère. Nous symbolisons cette différence par D, n_1 et n_2 signifiant le nombre de sujets de nos stades. La formule utilisée est celle-ci:

$$x^2 = 4D^2 \quad \frac{n_1 \; n_2}{n_1 + n_2}$$

Nous prenons notre résultat puis nous le classons à l'intérieur

2. Sidney Siegel, Nonparametric statistics for the behavioral sciences, McGraw-Hill B. Co. Toronto, 1956, p. 131-135.

d'une table "critical values of Chi Square"[3]. Tout résultat ayant une probabilité inférieure ou égales à .05[4] est considéré comme étant significatif.

L'examen de nos résultats nous indique que notre hypothèse concernant le regroupement des sous-stades IA, IB et IC s'est confirmé. En effet, ceux-ci avaient un résultat très supérieur à la norme établie. Ceci s'explique sans doute par l'âge de nos sujets. Les sous-stades IA, IB et IC correspondent au niveau préopératoire de J. Piaget (7-9 ans). Nos sujets ayant un minimum de neuf ans correspondent beaucoup plus au stade II ou stade opératoire. Le test Kolmogorov-Smirnov semble prouver cette hypothèse car la probabilité d'obtenir une différence entre les stades I et II est de .01. Entre le stade II et le sous-stade IIIA nous avons une probabilité significative de .001. Entre les sous-stades IIIA et IIIA^1 nous avons une probabilité d'obtenir une différence de .01. Seul le sous-stade IIIB obtient une différence de .05 avec le sous-stade IIIA^1, ce qui est égal à la norme établie. Il existe donc, à ce niveau-ci, une différence significative entre les stades II et les sous-stades IIIA, IIIA^1 et IIIB.

---

3. *Idem*, *ibid*., p. 249.

4. G. Noelting, G. Cardinal et R. Cloutier, *Stades et mécanismes dans le développement de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent*, Université Laval, Québec, 1973, p. 65-67.

L'âge d'accession est en fait l'âge où nos sujets atteignent les paliers successifs ou les stades. Une certaine fréquence (50%) doit être établie pour déclarer qu'un sujet a atteint le stade. Un stade ou un sous-stade est atteint à un âge donné quand 50% des sujets de cet âge s'y situent[5]. Pour ce faire, on doit cumuler les fréquences observées de stade en stade. Dans un second temps, nous cernons, grâce à la distribution propre à chaque stade, l'âge où se situent 50% des sujets examinés (voir tableau XIV). En plus, en vue d'assurer plus de stabilité à l'âge d'accession calculé, nous appliquons une méthode d'interpolation linéaire[6]. Celle-ci consiste à effectuer la moyenne entre l'âge situé au point 50 et l'âge situé au point 50 estimé, en partant cette fois des points 25 et 75. La figure II représente graphiquement notre méthode d'interpolation linéaire.

Comme nous pouvons le constater grâce au tableau XV et à la figure II, nos résultats d'analyse à l'âge d'accession d'un stade sont significatifs. En effet, nos sujets les plus jeunes atteignent un stade inférieur et les plus vieux un stade supérieur, et ceci avec un âge chronologique croissant en tenant compte de la complexité des stades. Ainsi, le stade II (opératoire concret) est

---

5. M. Laurendeau et A. Pinard, La pensée causale, p. 74.

6. Idem, ibid., p. 75.

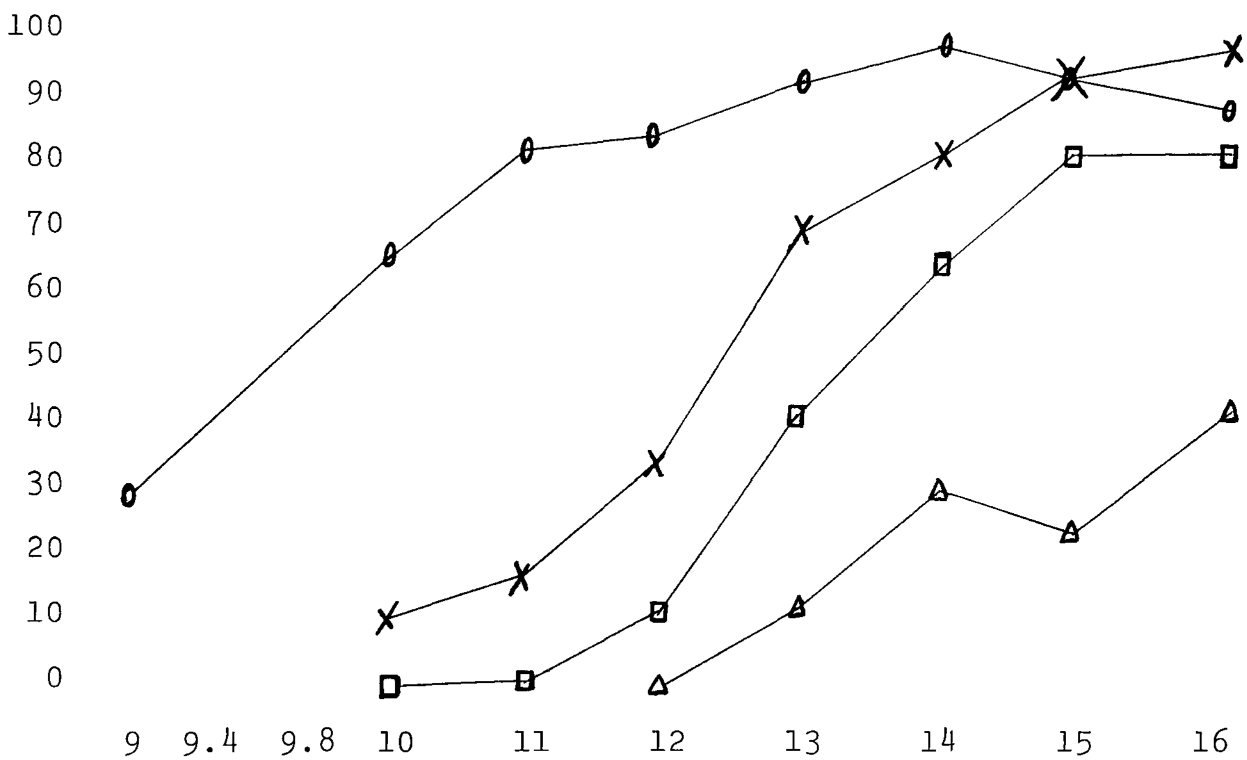
Tableau XIV.- Tableau de l'âge médian et du test Kolmogorov-Smirnov suivant l'âge et les stades, selon la répertition des suites en fréquence brute (30 sujets par âge).

Stades	Age								Age Médian	x^2	P
	9	10	11	12	13	14	15	16			
IA	3	2	1	0	1	0	1	1	8		
IB	7	1	1	1	0	0	0	0	10		
IC	11	8	5	4	1	1	0	1	31		
II	9	16	19	15	5	3	0	2	69	10.314	.01
IIIA	0	2	3	5	9	6	3	1	29	41.5951	.001
IIIA[1]	0	1	1	5	11	9	16	12	55	10.3978	.01
IIIB	0	0	0	0	3	11	10	14	38	5.61825	.05

Tableau XV .- Tableau de l'âge d'accession au stade et aux sous-stades à partir de la répartition des sujets en pourcentage cumulé.

Stades	Age								Age d'accession
	9	10	11	12	13	14	15	16	
II	52	75	81	90	96	99	97	100	9.9
IIIA	0	10	13	33	76	87	97	100	12.4
IIIA[1]	0	3	3	16	46	67	87	87	13.4
IIIB	0	0	0	0	10	37	33	47	16

Figure II.- Compilation des âges d'accession au stade et aux sous-stades à partir des pourcentages cumulés du tableau XV et des âges chronologiques de l'échantillon.



LEGENDE

O stade II	(9:0 9:7 10:7) 3	:	9.9
X stade IIIA	(11:7 12:5 12:11) 3	:	12:4
□ stade IIIA^{1}	(12:4 13:3 14:5) 3	:	13:4
Δ stade IIIB	45% = 16 ans		16 ans^{+}

atteint à 9.9 ans, le sous-stade IIIA (formel inférieur) est atteint à 12.4 ans, le sous-stade IIIA[1] (formel moyen) est atteint à 13.4 ans et le sous-stade IIIB (formel supérieur) est atteint à 16 ans.

Le tableau XIV nous donne un aperçu général des stades et des sous-stades que nous avons obtenus en y incluant les trois opérations de validation. Nous avons des résultats très significatifs comme le démontre le tableau. Nous pouvons donc conclure que statistiquement nous possédons des stades et des âges d'accession qui sont parallèles quant à la chronologie et à la succession.

2. Analyse structurale.

L'analyse structurale est en fait l'utilisation de la structure comprenant la totalité, la transformation et l'autoréglage. Cette analyse a pour but d'étudier les composantes de chaque stade (totalité), d'élucider leur fonctionnement (autoréglage) et finalement de connaître les transformations qui permettent le passage d'un stade à l'autre (loi de transformation). Nous allons constamment nous référer aux notions mentionnées entre parenthèses (telles que décrites et expliquées au chapitre premier), car elles favorisent une meilleure compréhension de l'analyse. Pour effectuer cette analyse, nous utiliserons les arguments des sujets. Ces arguments sont des justifications employées par l'enfant pour

Tableau XVI.- Stade et sous-stades réels obtenus après trois opérations de validation.

	Stade	Sous-stades		
	II	IIIA	IIIA[1]	IIIB
Age médian	11.8	13.6	15	15.4
Probabilité K-S	.01	.001	.01	.05
Age d'accession	9.9	12.4	13.4	16.0

expliquer sa réponse objective. Grâce au scalogramme de Guttman et aux opérations de validation (voir tableau XIV) nous avons construit un stade et trois sous-stade. L'étude des arguments des enfants nous permettra alors de comprendre la nature des stades.

A. Stade II: Fractions équivalentes de l'ordre de la demie et du tiers.

L'âge d'accession de nos sujets au stade II est de 9:9 ans. Le stade II comprend trois groupes d'item différents. Les item de ce stade consistent en des équivalences de type correspondance terme à terme (no. 10, 11 et 12, ex. 2/2, 3/3), des équivalences de l'ordre de la demie (no. 13 et 14, ex. 2/4, 1/2) et du tiers (no. 15, ex. 6/2, 1/3). Le tableau XVII représente les types d'arguments que les enfants ont utilisés le plus fréquemment à l'intérieur du stade II.

Les équivalences de type correspondance terme à terme se caractérisent par des cardinalités diverses mais ayant un rapport égal (ex. 3/3, 2/2, 1/1). A l'intérieur du tableau XVII les numéros 1 à 6 représentent tous un type de correspondance terme à terme (ex. tableau XVII no. 2: "c'est égal parce qu'ils ont chacun un gâteau par bonhomme"). Cette correspondance va permettre, grâce à la simplification, la découverte d'un rapport commun entre les sous-ensembles (ex. 1/1). La simplification peut s'effectuer soit

Tableau XVII.- Echantillonnage des arguments des item réussis du stade II.

No.	Age	Sujets	Item	Justifications
1	10	37	10: 3/3, 2/2	"Parce qu'ils sont deux parsonnages pour deux galettes et de l'autre côté, ils sont trois pour trois galettes; alors c'est égal".
2	10	54	10: 3/3, 2/2	"C'est égal parce qu'ils ont chacun un gâteau par bonhomme".
3	11	61	11: 2/2, 1/1	"A est seul et il mange une tarte, B sont deux et ils mangent deux tartes; alors c'est égal".
4	11	71	11: 2/2, 1/1	"Parce qu'ils ont la même quantité, car ils mangent chacun un gâteau".
5	11	77	12: 4/4, 3/3	"Parce qu'ils sont quatre personnes et quatre gâteaux ce qui fait un chacun et les trois autres en ont trois; ce qui fait un chacun".
6	11	78	12: 4/4, 3/3	"Parce que les bonshommes vont avoir la même quantité de gâteaux; ils vont en avoir chacun un".
7	10	34	13: 2/4, 1/2	"Parce qu'ils mangent à deux un gâteau chacun".
8	11	70	13: 2/4, 1/2	"Parce qu'ils sont deux pour un gâteau et les autres sont 4 pour 2 gâteaux. En réalité ils mangent la même somme de gâteaux".
9	10	39	14: 3/6, 2/4	"Ils ont à diviser. Ils ont 1/2 chacun".
10	11	68	14: 3/6, 2/4	"Parce qu'ils sont deux bonhommes pour manger un gâteau".
11	10	40	15: 6/2, 3/1	"On voit que 1 personne mange 3 gâteaux et que les autres sont 2 et mangent chacun 3 gâteaux".
12	11	65	15: 6/2, 3/1	"Ils sont égaux, ils ont 3 gâteaux."

par la division (ex. tableau XVII justification no.2) ou par la multiplication (ex. tableau XVII justification no.1). L'enfant possédant le rapport commun, il lui faut maintenant l'appliquer à l'ensemble dans sa totalité, et ceci ne s'effectue que par la multiplication. Comme l'indique Noelting:

> Il doit différencier le système multiplicatif à la base du rapport et le système additif conduisant à une somme, et reconnaître que seul le premier système intervient dans le problème[7].

Le système multiplicatif, c'est l'utilisation du rapport commun (ex.: 1:1) appliqué x nombre de fois. Le rapport commun ou invariant (ex.: 1:1) et la transformation (son itération x fois) sont essentiels à la construction des équivalences. Il y a donc eu une transformation quelconque pour permettre le passage du stade I au stade II. Au stade I, l'enfant faisait la somme des tartes et des bonshommes dans les deux sous-ensembles, ce qui lui permettait d'accéder à la cardinalité. Cette cardinalité établissait par la suite un rapport additif entre les sous-ensembles. Ce rapport, provenant de la somme des tartes et des bonshommes, s'avère maintenant insuffisant puisqu'il ne s'agit que d'une comparaison entre

---

7. G. Noelting, G. Cardinal et R. Cloutier, Stades et mécanismes dans le développement de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent, p. 137.

sous-ensembles. Comme l'indique Noelting:

> ...car la comparaison des sous-ensembles aboutit à des conflits, avec deux égalités intra-ensembles qui s'opposent à deux différences inter-ensembles[8].

Pour l'enfant, il ne s'agit plus uniquement de comparer des additions mais de trouver une mesure "qu'il pourra appliquer successivement à chacune des données pour les évaluer"[9]. Il y aura donc une transformation des sous-ensembles vers une mesure commune. Pour la première fois, l'enfant va construire le couple 1:1, c'est-à-dire une combinaison qui va lui permettre de différencier entre le rapport et la quantité.

Les familles d'équivalences de l'ordre de la demie et du tiers se caractérisent par deux rapports numériques équivalents; l'un étant parfois le multiple de l'autre (ex: 1/2, 2/4). L'enfant doit faire appel au système multiplicatif pour pouvoir solutionner ces équivalences. Il ne s'agit plus de terme à terme (ex.:1:1), mais plutôt de "un à plusieurs" (ex.: 1:x) plus spécifiquement de "un à deux" (ex.: 1/2) et de "un à trois" (ex.: 1/3). Les numéros 7 à 10 du tableau XVII expriment très bien le rapport

---

8. G. Noelting, Les stades de développement de la notion de proportion chez l'enfant, Université Laval, Québec, 1972, p. 9.

9. G. Noelting, G. Cardinal et R. Cloutier, Stades et mécanismes dans le développement de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent, p. 137.

"un à deux" (ex. tableau XVII no.10. "Parce qu'ils sont deux bons-hommes pour manger un gâteau"). Les arguments utilisés par les enfants démontrent très bien l'application du rapport "un à plusieurs", qui va leur permettre de conclure à l'égalité. Pour déterminer le rapport ou l'invariant, l'enfant utilise principalement la division (ex. tableau XVII no.9: "Ils ont à diviser. Ils ont 1/2 chacun").

A l'intérieur du stade II, grâce aux arguments des enfants, nous pouvons préciser le caractère autonome et intégrateur de la "correspondance terme à terme". Par autonomie, nous entendons les item (ex. 3/3, 2/2),les relations, les rapports et les arguments qui lui sont propres. Le caractère intégrateur, c'est la construction d'un rapport terme à terme (ex.:1/1), qui est essentiel à l'élaboration du "un (terme) à plusieurs" (1/2 ou 1/3). Ceci est très bien démontré lorsque l'on compare les arguments des item 10, 11, 12 avec 13, 14, 15, exprimés par les enfants. Notre stade II correspond à celui élaboré par Noelting et Piaget. Il se situe au niveau de la période des opérations concrètes.

B. Sous-stade IIIA: Fractions à termes correspondants, l'un étant le multiple de l'autre.

Au sous-stade IIIA, nos sujets ont 12.4 ans d'âge d'accession. Les item de ce sous-stade consistent en des fractions à termes emboîtés (no. 16: 1/2, 2/3 et no. 17: 3/1, 5/2). Les arguments utilisés par les enfants pour expliquer les item 16 et 17 sont décrite à l'intérieur du tableau XVIII.

Les fractions à termes correspondants sont caractérisés par le fait que l'un des dénominateurs est un multiple de l'autre (no. 17: 5/2, 3/1). L'item numéro 16 (2/3, 1/2) représente l'inverse, c'est-à-dire que les numérateurs sont inclus l'un dans l'autre. Il s'agit ainsi d'une relation entre sous-ensembles (inter). Les relations sont disposées de façon inverse afin de favoriser la réversibilité et l'hypothético-déductif. Pour mieux comprendre la dynamique de ces fractions, nous allons étudier les arguments des enfants.

A l'intérieur du tableau XVIII,le numéro 1 (item 16: 1/2, 2/3; "Ils sont deux pour un gâteau, les autres sont trois pour deux gâteaux; un va avoir un gâteau de plus") va nous permettre d'expliquer la démarche de l'enfant. Celui-ci débute avec l'ensemble A (1/2). Cet ensemble va devenir son invariant par la relation numérateur-dénom-nateur. Il va par la suite appliquer l'invariant 1/2 à l'ensemble B (2/3). Cette application de 1/2 à 2/3 lui permet de constater qu'il reste un bonhomme et une tarte (1/1) dans l'ensemble B ("...un va avoir un gâteau de plus"). Ce qui reste (1/1) devra être confronté avec l'invariant 1/2. Le reste étant plus grand que l'invariant, l'enfant choisira l'ensemble B (2/3, 1/2). L'enfant a effectué premièrement une multiplication de l'invariant et par la suite, il a confronté son reste avec l'invariant.

Tableau XVIII- Echantillonnage des arguments des item réussis du sous-stade IIIA.

No.	Age	Sujets	Item	Justifications
1	12	83	16: 1/2, 2/3	"Ils sont deux pour un gâteau, les autres sont trois pour deux gâteaux; un va avoir un gâteau de plus."
2	12	92	16: 1/2, 2/3	"Dans A, ils ont chacun 1/2 gâteau; dans B, 2/3 chacun."
3	12	94	17: 3/1, 5/2	"Parce que A a trois tartes pour lui tandis que B ont cinq tartes à diviser en deux; ce qui fait seulement 2 1/2 tartes."
4	12	112	17: 3/1, 5/2	"A mange trois tartes pour un bonhomme, B mange 2 1/2 tartes pour un bonhomme, trois $>$ 2 1/2."

L'item numéro 17 représente la même démarche (multiplication de l'invariant) mais dans un cas (no. 3), l'enfant utilise la division comme opération (tableau XVIII no.3; "Parce que A a 3 tartes pour lui tandis que B ont 5 tartes à diviser en 2; ce qui fait seulement 2 1/2 tartes").

Au stade II, nous avons constaté la résolution des item de "correspondance terme à terme" et des "équivalences". Ces item nous ont permis d'observer la construction d'un invariant. Cet invariant (1:1 ou 1:2 ou 1:3) construit dans l'ensemble A permettait à l'enfant, grâce à la multiplication, de trouver l'ensemble B. Il y avait ainsi une multiplication sans reste, puisqu'il s'agissait d'équivalence. Au sous-stade IIIA, l'enfant doit aussi trouver un invariant (A), mais qui, multiplié avec l'ensemble (B), lui laisse un reste, soit de tartes, de bonhommes ou les deux (ex.: item 16: 1/2, 2/3). L'enfant doit donc mettre en relation l'invariant et le reste. Grâce à l'invariant, on peut prouver le caractère intégratif du stade II qui est absolument essentiel pour solutionner le sous-stade IIIA. Le sous-stade IIIA est la suite immédiate du stade II. La construction qui s'opère au sous-stade IIIA est l'addition du reste à l'invariant. Cela signifie que pour avoir un jugement exact, l'enfant devra multiplier l'invariant (covariant) et additionner son reste à l'invariant. Il y a donc combinaison de deux systèmes.

Tableau XIX .- Echantillonnage des arguments des item réussis du sous-stade IIIA[1].

No.	Age	Sujets	Item	Justifications
1	13	121	18: 4/2, 5/3	"Parce que dans A, il y a une personne pour deux tartes et dans B, il y a une personne par 1 2/3 tarte ".
2	13	124	20: 3/2, 4/3	"Parce que A ont chacun 1 1/2 tarte et B n'ont que 1 1/3 tarte chacun".
3	13	132	20: 3/2, 4/3	"A en ont 1 1/2 chacun et B en ont 1 1/3 chacun. 1 1/2 > 1 1/3".
4	13	140	21: 5/2, 7/3	"Ceux de gauche en mangent 2 1/2 chacun tandis que ceux de droite en mangent 2 1/3 chacun et que 5/2 > 7/3".
5	13	145	18: 4/2, 5/3	"Parce que dans A, il y a deux tartes pour un garçon et que dans B, il y a quatre tartes pour deux garçons comme dans A, mais il reste un garçon ayant seulement une tarte: 4/2 > 5/3".
6	14	152	21: 5/2, 7/3	"A a cinq tartes pour deux personnes: 2 1/2, B a sept tartes pour trois personnes: 2 1/3. 2 1/2 > 2 1/3: A > B".

...mais, ici, le système multiplicatif de l'invariant-covariant est mis en relation avec le système additif de l'isolement d'un reste, ce qui permet un jugement exact[10].

Le passage du stade II au sous-stade IIIA s'effectue par l'invariant qui, par la suite, sera en relation additive avec le reste. Il aura fallu à l'enfant deux à cinq ans pour transformer et construire la relation entre le système multiplicatif et le systèmeadditif. Ce sous-stade correspond à l'accession de la pensée formelle (stade formel inférieur).

C. Sous-stade IIIA^1: Fractions traitées par simplification.

L'âge d'accession de nos sujets au sous-stade IIIA^1 est de 13.4 ans. Nous avons trois item qui représentent ce sous-stade des fractions traitées par simplification. Ce sont les item 18 (4/2, 5/3), 20 (3/2, 4/3) et 21 (5/2, 7/3). Le tableau XIX représente les arguments des item 18, 20 et 21 qui ont été réussis.

Les fractions traitées par simplification ont toutes un numérateur supérieur au dénominateur (ex.: no. 18: 4/2, 5/3). Ce type de fraction va permettre à l'enfant du sous-stade IIIA^1 d'utiliser la division comme principale opération. Les numéros 1 à 6

---

10. G. Noelting, Partage, forme collective 24 item, Université Laval, Québec, 1974, p. 15.

du tableau XVIII nous permettent de constater la division puis par la suite la comparaison entre ensembles. Plus spécifiquement, le numéro six démontre cette méthode: item 21 (5/2, 7/3; "A a 5 tartes pour 2 personnes: 2 1/2. B a 7 tartes pour trois personnes: 2 1/3: 2 1/2 2 1/3, A > B"). Pour trouver le rapport 2 1/2 et 2 1/3, l'enfant divise le numérateur par le dénominateur.

> il divise dans chacun des ensembles le nombre de tartes par le nombre de bonshommes, trouvant ainsi les rapports "tarte par bonhomme" de chaque ensemble[11].

Par la suite, l'enfant compare les rapports des ensembles A et B (2 1/2 et 2 1/3) pour solutionner correctement l'item. Les numéros un et cinq du tableau XVIII ont été solutionnés par la multiplication et l'addition du reste à l'invariant, tout comme les item du sous-stade IIIA. Le passage du sous-stade IIIA au sous-stade IIIA^1 ne concerne pas uniquement les structures (termes emboîtés versus termes simplifiés) mais surtout les opérations employées dans chaque structure qui permettent les transformations (combinaison du système multiplicatif et additif versus simplification par la division et par la suite, comparaison). Les item du sous-stade IIIA et IIIA^1 sont à la fois complémentaires et distincts. Ils sont complémentaires car tous deux sont des emboîtements. Ils sont distincts, car dans un cas, c'est le dénominateur qui est

---

11. <u>Idem</u>, <u>ibid</u>., p. 17.

supérieur et dans l'autre situation, c'est le numérateur. Nous sommes ainsi en présence d'une totalité (emboîtement) ayant deux sous-ensembles (numérateur-supérieur: 4/2 et dénominateur-supérieur: 2/3)pouvant chacun avoir leurs lois de transformation (opérations). Dans la totalité des sous-stades IIIA et IIIA^1, nous avons deux opérations fondamentales: la multiplication et son inverse, la division. Depuis le stade II (9.9 ans), on assiste, tant au niveau des arguments des enfants qu'au niveau des structures, à la construction progressive des systèmes additifs et multiplicatifs. Au sous-stade IIIA^1, l'enfant utilise comme opération principale la division. Entre le sous-stade IIIA (système multiplicatif et additif) et le sous-stade IIIA^1 (division), il y a un décalage d'un an (12.4 à 13.4 ans). Nous sommes donc en présence d'un décalage horizontal et d'une équilibration progressive entre la multiplication et la division face à la structure d'emboîtement des sous-stades IIIA et IIIA^1. La combinaison des systèmes multiplicatifs et additifs permet ainsi le passage du sous-stade IIIA au sous-stade IIIA^1. Le scalogramme et les arguments des sujets confirment cette affirmation.

Notre sous-stade IIIA^1 correspond au niveau formel moyen élaboré par Noelting[12].

---

12. G. Noelting, G. Cardinal et R. Cloutier, *Stades et mécanismes dans le développement de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent*, p. 159.

D. Sous-stade IIIB: Fractions quelconques.

Les sujets du sous-stade IIIB ont seize ans d'âge d'accession. Les item du présent stade consistent en des fractions quelconques, c'est-à-dire où il n'y a aucun facteur commun entre les sous-ensembles complémentaires. Pour l'enfant "il s'agira de faire covarier les deux rapports, ce qui respecte leur invariance jusqu'à découverte d'une concordance et mise en évidence de la différence"[13]. Ce sous-stade est composé de quatre item: ce sont les item 19 (2/3, 3/4), 22 (3/5, 5/8), 23 (7/12, 4/7) et 24 (8/5, 5/3). Le tableau XX représente les item réussis du sous-stade IIIB.

Selon les arguments des enfants, deux stratégies principales ont été utilisées pour solutionner les item du sous-stade IIIB: l'établissement d'un rapport commun dans chaque sous-ensemble et la recherche d'un dénominateur commun pour tout l'ensemble.

L'établissement d'un rapport commun dans chaque sous-ensemble s'effectue opérationnellement par la division. Les numéros 4, 6 et 8 du tableau XX démontrent la recherche d'un terme commun grâce à la division. Dans deux cas (no. 4 et 6), nous assistons à la construction d'une fraction décimale, par la division du

---

13. Idem, ibid., p. 168.

numérateur par le dénominateur (no. 4, 22: 3/5, 5/8, "Parce que dans A = 0.6 gâteau chacun et dans B, il y a 0.625, o.625 > 0.6"). Les numérateurs sont ainsi ramenés au terme commun 100. La fraction décimale (0.625 ou 0.6) devient donc une unité de comparaison entre les sous-ensembles, ce qui permet à l'enfant de solutionner le problème. Au numéro 8, nous avons aussi la recherche d'un terme commun. L'item 8/5, 5/3 est traduit en 1 3/5: 1, 1 2/3: 1. L'unité commune est 1 avec choix du rapport 2/3 comme étant le plus grand. Passons maintenant aux item qui sont caractéristiques de la seconde méthode employée par les enfants.

La recherche d'un dénominateur commun pour tout l'ensemble dépend des méthodes scolaires employées par l'enfant pour résoudre les problèmes de fractions. Par exemple, nos enfants étudiés diffèrent des sujets utilisés par Noelting[14] au niveau de la procédure pour trouver le dénominateur commun. Les numéros 1, 2, 3, 5 et 7 du tableau XX nous démontrent la recherche du facteur commun par la multiplication des deux dénominateurs des sous-ensembles. Plusieurs opérations sont nécessaires. Comme exemple nous utiliserons le numéro 7, item 24: 8/5, 5/3 du tableau XX. Dans un premier temps, l'enfant multiplie les deux dénominateurs. Cette combinaison

---

14. <u>Idem</u>, <u>ibid</u>., p. 169.

Tableau XX .- Echantillonnage des arguments des item réussis du stade IIIB.

No.	Age	Sujets	Item	Justifications
1	15	183	19: 2/3, 3/4	"Parce qu'ils ont les 3/4 = 9/12 d'un gâteau chacun et que dans l'autre groupe ils possèdent les 2/3 = 8/12 d'un gâteau chacun".
2	15	195	19: 2/3, 3/4	"A gauche, si le partage est égal, ils ont 8/12 de tarte chacun tandis qu'à droite, ils ont 9/12 de tarte chacun".
3	15	201	22: 3/5, 5/8	"3 gâteaux pour 5 personnes, donc 3/5 par personne. 3/5 = 24/40, 5 gâteaux pour 8 personnes donc 5/8 par personne; 5/8 = 25/40; 24/40 < 25/40".
4	16	215	22: 3/5, 5/8	"Parce que A 0.6 gâteau chacun et dans B il y a 0.625. 0.625 > 0.6".
5	16	226	23: 7/12, 4/7	"Au dessin A, il y a 7 tartes pour 12 personnes, ce qui donne 49/84 de tarte par personne; au dessin B, il y a 4 tartes pour 7 personnes, ce qui donne 48/84 de tarte par personne".
6	16	210	23: 7/12, 4/7	"Les bonshommes A en consomment tout juste un peu plus que les bonshommes B: .01 de plus. A = 7/12 = 5.08 B = 4/7 = 5.07"
7	16	230	24: 8/5, 5/3	" A = 8/5 = 24/15 B = 5/3 = 25/15 B a 1/15 de plus".
8	16	235	24: 8/5, 5/3	"Un bonhomme de A mange 1 3/5 tarte, un bonhomme de B mange 1 2/3 tarte, Le bonhomme B mange plus de tarte que A".

inter-ensembles permet la construction d'un dénominateur commun (15). Par la suite, l'enfant revient aux sous-ensembles en conservant le dénominateur commun. Il effectue une division (dénominateur commun varié- numérateur) pour parvenir à la construction de deux nouveaux sous-ensembles (8/5, 5/3 deviennent 24/15, 25/15). Finalement, le sujet effectue une différence (1/15 de plus). Nous avons donc la combinaison successive de trois opérations: la multiplication, la division et la soustraction. Nous avons un système intégré unique qui a débuté pour nous au stade II, et qui se termine par la construction d'un dénominateur commun. Celui-ci est l'apogée d'un long processus d'assimilation, d'accomodation et d'équilibration au niveau de la proportionnalité.

Le passage du sous-stade IIIA^{1} au sous-stade IIIB s'effectue principalement, comme nous l'avons constaté, grâce aux arguments réussis par l'intégration progressive de la multiplication et de la division pour aboutir en un système cahérent (dénominateur commun). Notre première méthode (rapport commun dans chaque sous-ensemble) est la suite logique du stade IIIA^{1}, c'est-à-dire la division. Le second procédé (dénominateur commun) concerne aussi la division mais intégré à la multiplication. Nous mettons l'accent sur les opérations (ex. multiplication, division) car elles permettent la transformation ou le passage et, à la suite, la construction. Le passage du sous-stade IIIA^{1} au sous-stade IIIB aura pris 2 ans et 6 mois. Le sous-stade IIIB que nous venons d'élaborer est identique au stade élaboré par Noelting[15, 16]. Il correspond au niveau formel supérieur.

L'analyse structurale de nos stades étant terminée, nous sommes maintenant en mesure, grâce à l'élaboration de nos stades, d'analyser le programme de l'enseignement des fractions du Ministère de l'Education du Québec.

---

15. Idem, ibid, p. 169.

16. G. Noelting, Partage, forme collective 24 item, p. 19.

CHAPITRE V

ANALYSE COMPARATIVE

Notre cinquième et dernier chapitre est une application de nos résultats. Ces résultats sont en fait les stades que nous avons obtenus au chapitre précédent. Nous allons appliquer les stades de la notion de proportion au niveau élémentaire et secondaire.

Ce chapitre a pour but de vérifier si l'enseignement des fractions à l'école respecte et favorise le développement cognitif de l'enfant et de l'adolescent. Plus spécifiquement, il s'agit de comparer les stades et les sous-stades que nous avons obtenus, au programme de l'enseignement des fractions du Ministère de l'Education du Québec au niveau élémentaire et secondaire. Le tableau XXI représente la répartition des sujets selon la scolarité, l'âge d'accession et le stade. L'âge de tous nos sujets correspond au niveau de scolarité (ex. tous nos sujets de neuf ans étaient en quatrième année).

Tableau XXI- Répartition des sujets selon la scolarité, l'âge d'accession et le stade.

Age	Niveau de scolarité	Age d'accession	Stade
9	Ele. 4	9.9	II
10	Ele. 5		
11	Ele. 6		
12	Sec. I	12.4	IIIA
13	Sec. II	13.4	IIIA[1]
14	Sec. III		
15	Sec. IV		
16	Sec. V	16.	IIIB

Le programme du Ministère de l'Education face à l'enseignement des mathématiques n'est en fait qu'un programme-cadre où seuls les objectifs sont énoncés.

> ...le programme-cadre de mathématiques est très peu explicite. On se contente d'y énumérer un certain nombre d'objectifs assez généraux (objectifs pédagogiques et objectifs de contenu) qu'il s'agit d'avoir atteints au terme du cours élémentaire[17].

Cela signifie que chaque région ou commission scolaire est autonome face au contenu d'un programme. On ne trouve aucune indication en ce qui concerne la répartition et l'évolution de la matière à enseigner.

> Il est donc certes plus exact de le qualifier de cadre pour programmes institutionnels, puisqu'il s'agit en réalité d'un schéma à partir duquel les commissions scolaires sont appelées à se définir des programmes détaillés, véritables plans d'études applicables localement ("programmes institutionnels"), pouvant varier d'ine région à l'autre et présentés souvent sous forme d'unités de travail (ou de modules)[18].

L'analyse de contenu que nous désirons produire concernera principalement notre région. Plus spécifiquement deux commissions

---

17. Guide Pédagogique, Mathématiques à l'Elémentaire description générale du programme-cadre. Fascicule A, Ministère Education, Gvnt. du Québec, p. 11.

18. Idem, ibid., p. 11.

scolaires ont été utilisées pour notre étude: la Commission Scolaire Champlain et la Commission Scolaire Régionale de l'Outaouais. Le tableau XXII nous permet une meilleure compréhension de la structure fonctionnelle de l'enseignement des mathématiques au Québec.

Nous allons diviser notre analyse en deux sections: le niveau élémentaire et le niveau secondaire.

1. Le niveau élémentaire.

L'analyse de contenu du programme que nous entreprenons est celui de la Commission Scolaire Champlain[19]. L'Ecole Jean Massé[20] fait partie de cette Commission Scolaire. Nous avons utilisé les enfants de l'Ecole Massé comme échantillonnage pour construire nos stades. Ainsi nos sujets au niveau élémentaire ont étudié le programme des fractions élaboré par la Commission Scolaire Champlain.

Nous étudions le second cycle car il correspond au stade

---

19. Commission Scolaire Champlain, 100A Rue Champlain, Pointe-Gatineau, P. Québec.

20. Ecole Jean Massé, Commission Scolaire Champlain, 1 Saint-Alexandre, Limbour, P. Québec.

Tableau XXII- Synthèse de la structure de l'Enseignement des Mathématiques du Ministère de l'Education du Québec, en y incluant les Commissions Scolaires étudiées.

Gouvernement du Québec

Ministère de l'Education

Service des Programmes aux niveaux Elémentaire et Secondaire

Programme-cadre en mathématique (objectifs)

Programme Institutionnel (contenus)

Commission Scolaire Champlain

Commission Scolaire Régionale de l'Outaouais

Ecole Massé

Collège St. Alexandre

II (voir tableau XXI). Cette étude du second cycle se divise en trois parties: la première partie est la présentation du programme d'enseignement des fractions de la quatrième, cinquième et sixième années de l'école Massé. En second lieu, nous verrons le stade II. Troisièmement, nous analyserons le contenu du programme du second cycle en rapport avec le stade II.

Notre première partie est uniquement la présentation du programme d'enseignement des fractions du second cycle. Cette présentation a été effectuée sous forme de tableaux. Les tableaux XXIII, XXIV et XXV proviennent du Service de l'Enseignement de la Commission Scolaire Champlain[21].

Ayant terminé la présentation du programme sous forme de tableaux, nous passons maintenant à l'exposition du stade II. Cette présentation du stade II est un bref résumé des caractéristiques de cette étape. Celui-ci est caractérisé par l'acquisition des équivalences de type correspondance terme à terme (ex. 2/2, 3/3), des équivalences de l'ordre de la demie (ex. 2/4, 1/2) et du tiers (ex. 6/2, 1/3). Ces trois types d'équivalences se suivent

---

21. R. Fugère, _Programme d'étude de la mathématique à l'élémentaire, d'après le programme-cadre_, Service de l'Enseignement, Commission Scolaire Champlain.

Tableau XXIII- Les objectifs et le contenu de l'enseignement des fractions au niveau de la quatrième année (9 ans)[22].

Unité no.	Contenu ou notion	Objectif: l'enfant doit être capable de...
1	Partie de l'unité, partie d'un ensemble. N.B. Utiliser des rationnels dont le dénominateur est inférieur à 10.	a) Trouver la valeur d'une des parties d'un objet donné (gâteau, carton, ect.). Trouver la valeur d'une partie d'un ensemble. (b) Ex. La 1/2 d'un ensemble de quatres pommes.
2	Classe de fractions équivalentes.	a) Trouver facilement des fractions équivalentes. b) Construire l'ensemble des fractions équivalentes à une fraction donnée. Ex. 1/2 égal 1/2, 2/4, 3/6, 4/8 ...
3	Fraction comme opérateur sur une quantité.	a) Trouver 1/2, 1/3, 1/4,...1/10 d'une quantité numérique. Ex. 1/3 de 15 est 5. b) Ordonner les rationnels (ordre croissant ou décroissant).
4	Numérateur et dénominateur	a) Reconnaître et nommer le numérateur et le dénominateur d'un rationnel. b) Donner le rôle du numérateur et du dénominateur dans un rationnel.

Tableau XXIII- Les objectifs et le contenu de l'enseignement des fractions au niveau de la quatrième année (9 ans)[22].

Unité no.	Contenu ou notion	Objectif: l'enfant doit être capable de...
5	Additions et soustractions à dénominateurs semblables et différents.	a) Additionner et soustraire des rationnels avec même dénominateur. b) Additionner et soustraire des rationnels à dénominateurs différents en procédant par classes de rationnels équivalents.
6	Conversion de rationnels.	a) Exprimer un entier en rationnel Ex. 2 = 2/1. b) Sortir la partie entière Ex. 7/4 = 1 3/4. c) Exprimer sous forme rationnelle Ex. 1 1/5 = 6/5.
7	Applications à la vie courante	Résoudre avec solution des problèmes impliquant l'addition ou la soustraction de rationnels avec même dénominateur ou à dénominateurs différents.

22. Idem, ibid., groupe des 9 ans, no. 46 à 52.

Tableau XXIV .- Les objectifs et le contenu de l'enseignement des fractions au niveau de la cinquième année (10 ans)[23].

Unité no.	Contenu ou notion	Objectif: l'enfant doit être capable de...
1	Partie de l'unité. Partie d'un ensemble.	a) Trouver la valeur d'une des parties d'un objet donné (gâteau, carton, ect.). b) Trouver la valeur d'une partie d'un ensemble. Ex. 2/3 d'un ensemble de 6 pommes.
2	Classe de fractions équivalentes avec réduction de rationnels.	a) Trouver facilement des fractions équivalentes et les vérifier à l'aide des produits croisés. b) Contruire l'ensemble des fractions équivalentes à une fraction donnée. Ex. Classe des 2/5 = 2/5, 4/10, ect. c) Réduire un rationnel jusqu'à l'irréductible (la plus simple expression). Suggestion: utiliser la droite numérique.
3	Fraction comme opérateur sur une quantité.	a) Trouver la partie d'une quantité numérique. Ex. 7/15 de 45 = 21. b) Ordonner les rationnels (ordre croissant ou décroissant).
4	Numérateur et dénominateur	Reconnaître, nommer et donner le rôle du numérateur et dénominateur dans un rationnel.
5	Notation décimale à 3 positions à droite du point.	a) Lire et écrire des fractions décimales. b) Effectuer le transfert d'un rationnel en décimal ou inversement.

Tableau XXIV .- Les objectifs et le contenu de l'enseignement des fractions au niveau de la cinquième année (10 ans)[23].

Unité no.	Contenu ou notion	Objectif: l'enfant doit être capable de...
6	Additions, soustractions et multiplications.	Additionner, soustraire et multiplier sans restriction des rationnels et des décimaux.
7	Divisions.	Diviser des cas très simples d'un entier par un rationnel. Ex. 4 ÷ 1/2 = 8. Suggestion: Utiliser des dessins.
8	Conversion de rationnels.	a) Exprimer un entier en rationnel. Ex. 8 = 8/1. Suggestion: Utiliser le jeu des machines pour effectuer des additions, des soustractions ou des multiplications de rationnels ou des décimaux. b) Sortir la partie entière. Ex. 14/3 = 4 2/3. c) Exprimer sous forme rationnelle. Ex. 7 2/5 = 37/5.
9	Application à la vie courante.	Résoudre avec solution des problèmes impliquant 1 ou 2 opérations (additions, soustractions ou multiplications de décimaux).

23. *Idem*, *ibid*., groupe des 10 ans, no. 46 à 54.

Tableau XXV.- Les objectifs et le contenu de l'enseignement des fractions au niveau de la sixième année (11 ans)[24].

Unité no.	Contenu ou notion	Objectif: l'enfant doit être capable de...
1	Partie de l'unité partie d'un ensemble.	a) Trouver la valeur d'une des parties d'un objet donné. b) Trouver la valeur d'une partie d'un ensemble. Ex. 2/3 d'un ensemble de 6 pommes.
2	Classe de fraction avec réduction des rationnels.	a) Trouver facilement des fractions équivalentes et les vérifier à l'aide des produits croisés. b) Construire l'ensemble des fractions équivalentes à une fraction donnée. Ex. 2/5 = 2/5, 4/10, 6/15... c) Réduire un rationnel jusqu'à l'irréductible (la plus simple expression). Suggestion: utiliser la droite numérique.
3	Fraction comme opérateur sur une quantité.	a) Trouver la partie d'une quantité numérique. Ex. 7/15 de 45 = 21. b) Ordonner les rationnels (ordre croissant ou décroissant).
4	Numérateur et dénominateur.	Reconnaître, nommer et donner le rôle du numérateur et du dénominateur dans un rationnel.
5	Notation décimale à 3 positions à droite du point.	a) Lire et écrire des fractions décimales. b) Effectuer le transfert d'un rationnel en décimal ou inversement.

Tableau XXV.- Les objectifs et le contenu de l'enseignement des fractions au niveau de la sixième année (11 ans)[24].

Unité no.	Contenu ou notion	Objectif: l'enfant doit être capable de...
6	Fraction périodique.	Trouver que certains rationnels transformés en décimaux donnent comme réponse une suite périodique. Ex. 1/3 = 0.333, ect.
7	Additions. Soustractions. Multiplications. Divisions.	a) Additionner, soustraire, multiplier, diviser des rationnels et des décimaux. b) Diviser un rationnel par un rationnel. Ex. 5/6 ÷ 2/3 = 5/4 ou 1 1/4.
8	Conversion de rationnels.	a) Exprimer un entier en rationnel. Suggestion: utiliser le jeu des machines pour effectuer des additions, des soustractions, des multiplications ou des division de rationnels ou de décimaux. b) Sortir la partie entière. c) Exprimer sous forme rationnelle. d) Transformer des rationnels en pourcentage. Ex. 1/4 = 25/100 = 25%.
9	Application à la vie courante	a) Résoudre avec solution des problèmes impliquant plusieurs opérations. b) Effectuer des calculs sur la taxe de 8%.

24. Idem, ibid., groupe des 11 ans, no. 52 à 60.

dans un ordre irréversible. Les deux principales opérations pour trouver l'invariant, dépendamment des structures, sont la multiplication et la division. L'âge d'accession au stade II est de 9.9 ans, c'est-à-dire que l'enfant ne comprend les équivalences, en moyenne, qu'à cet âge. Le stade II comprend tout le second cycle, puisque le sous-stade IIIA correspond au secondaire I (voir le tableau XXI. Nous allons maintenant comparer les notions du stade II au programme du second cycle.

Nous commençons par la quatrième année dont l'âge des sujets est de neuf ans. L'accession au stade est de 9.9 ans. Il y a donc un décalage de 9 entre l'âge d'accession et l'enseignement des équivalences. Cette différence nous permet de croire que l'enfant n'est pas prêt à comprendre la notion d'équivalence. Malgré cette différence, nous croyons que le rôle de la pédagogie est de permettre la construction d'instruments qui favoriseront la solution des équivalences. Il s'agit en fait d'une préparation et non d'une accélération des structures cognitives.

L'unité numéro un du tableau XXIII est un excellent objectif qui pourrait servir de préparation aux équivalences. Insister sur la relativité de la partie face à l'entier serait avantageux (1/4 de gâteau est à la fois égal et différent de 1/4 de carton).

L'unité numéro deux, correspond exactement à la période des opérations concrètes, c'est-à-dire au stade II de la notion de proportion.

L'unité trois implique une simple division. Il est favorable de commencer par des fractions à numérateur un, facilitant ainsi le passage du concret au symbolique.

Il est avantageux d'introduire le rôle du dénominateur et du numérateur à l'unité quatre, favorisant ainsi la réversibilité. Le rôle inverse de l'addition est la soustraction, formant ainsi ce que l'on nomme la réversibilité opératoire. La réversibilité est une construction qui s'opère chez l'enfant lors de la période des opérations concrètes.

L'unité numéro cinq est en partie accessible à l'enfant. L'objectif A est adéquat, car il fait suite à l'unité quatre.L'objectif B est à retarder, car nous sommes en présence de la recherche du dénominateur commun. Celui-ci nécessite la combinaison de systèmes opératoires (ex. l'addition et la multiplication). Cette combinaison se construit durant la période de la pensée formelle, c'est-à-dire vers onze ou douze ans.

L'unité numéro six est accessible à l'enfant.

L'unité numéro sept nécessite une clarification. Il devrait y avoir addition et soustraction avrc même dénominateur. Lorsqu'il y a des dénominateurs différents, l'enfant doit utiliser le dénominateur commun (multiplication de l'invariant et addition du reste). Passons maintenant à l'étude du programme de la cinquième année.

L'âge des sujets de la cinquième année est de dix ans. Cela signifie que l'enfant est en mesure de comprendre la notion d'équivalence, car l'âge d'accession au stade II est de 9.9 ans.

L'unité numéro un du tableau XXIV$_1$ est une suite logique de l'unité un de 9 ans. L'unité un est un excellent exemple de progression. A neuf ans l'enfant travaillait avec des fractions à numérateurs simples (ex. 1/2), à dix ans, on y introduit une fraction un peu plus complexe (ex. 2/3).

L'unité deux fait suite aux fractions équivalentes travaillées à neuf ans (objectif B). La méthode de vérification à l'aide des produits croisés est difficile opératoirement à cet âge, et ne demeure qu'une technique. Ce problème est à approfondir (objectif A). En ce qui concerne l'objectif C, il est favorable de chercher la fraction irréductible.

L'unité numéro trois est une très bonne progression faisant suite à l'unité trois concernant les sujets de neuf ans, car l'on utilise une fraction multiple avec numérateur et dénominateur croissant.

L'unité numéro quatre est une bonne continuation.

Il est très bien d'introduire à l'unité numéro cinq, le système décimal parallèle au système rationnel pour exercer la mobilité de l'enfant. Le passage du rationnel au décimal implique une division. Cette opération est à la portée de l'enfant de cet âge.

L'unité six est adéquate. Il faudrait par contre insistér sur la séparation entre les systèmes additifs et multiplicatifs. En fait, il s'agit d'éviter de combiner les opérations qui ne sont pas des inverses (ex. soustraction et division), et ceci, pour rester dans les limites de la réversibilité opératoire accessible à l'enfant.

A l'unité numéro sept, il est utile de montrer l'inversion entre la multiplication et la division dans les fractions, comme pour les entiers. Cette unité gagnerait à être enseignée en même temps que l'unité quatre (reconnaître, nommer et donner le rôle du numérateur et du dénominateur dans un rationnel).

A l'unité numéro huit, il est avantageux de monter la correspondance des opérations sur les nombres avec des opérations sur les objets ou sur des figures géométriques.

L'unité neuf est adéquate. Il est important de distinguer clairement les systèmes opératoires additifs des systèmes opératoires multiplicatifs. Ayant terminé l'analyse du programme de la cinquième année nous entreprenons l'étude de celui de la sixième année.

Nos sujets de la sixième année ont onze ans. Nous analysons toujours par comparaison au stade II (notion d'équivalence).

Les unités un à neuf du tableau XXV sont tous valables. Elles font en général, une suite logique des unités suivies par les enfants de dix ans.

En ce qui concerne l'ùnité sept, nous désirons introduire l'addition et la soustraction de fractions à dénominateurs non-équivalents, selon les trois étapes conventionnelles de l'enseignement des fractions. Les trois étapes sont les fractions à dénominateurs multiples l'un de l'autre (ex. 1/2, 3/4), les fractions à dénominateurs sans facteurs communs (ex. 1/3, 1/4) et les fractions à dénominateurs ayant un facteur commun (ex. 1/4, 1/6). Ces trois étapes doivent être précédées par la recherche des facteurs d'un nombre, puis des facteurs communs de deux nombres. C'est içi que débute la combinaison des mécanismes multiplicatifs de la classe des équivalences (co-multiplication du numérateur et du dénominateur). Par la suite, le système additif se combinera au système multiplicatif pour permettre la solution de problèmes relevant du sous-stade IIIA.

La conclusion de cette analyse est très positive. Ainsi très peu d'unités, deux sur vingt-cinq, ont dû être reportés ultérieurement. Nous croyons que le programme d'enseignement des fractions de la Commission Scolaire Champlain respecte et favorise le développement cognitif de l'enfant.

2. Le niveau secondaire.

L'analyse du programme de l'enseignement des fractions au secondaire s'est effectuée à la Commission Scolaire Régionale de l'Outaouais (C.S.R.O.)[25]. Nous avons utilisé les sujets du Collège Saint-Alexandre[26] comme échantillonnage. Celui-ci fait partie de la C.S.R.O.. Nos sujets ont été à la fois des échantillons pour nos stades et étudiants au programme que nous analysons.

Le programme de l'enseignement des fractions au niveau secondaire dépend entièrement de cinq volumes. Cela signifie qu'il n'y a aucun programme spécifique quant à l'enseignement des fractions. Nous avons dû délimiter nous-même les item de notre analyse. Pour ce faire, nous avons choisi les mots "fractions" et "proportions" de chaque index analytique des cinq volumes. Nous limitons ainsi l'application de nos stades, éliminant les extrapolations trop grandes.

L'analyse du secondaire se divise en deux parties. Notre première analyse est le secondaire I. Nous insisterons sur celle-ci, car elle représente le passage entre la période des opérations

---

25. Commission Scolaire Régionale de l'Outaouais, 225 rue Saint-Rédempteur, Hull, P. Que.

26. Collège Saint-Alexandre, Limbour, P. Que.

concrètes (stade II) et les opérations formelles (sous-stade IIIA). La seconde partie comprend l'analyse du secondaire II, III et IV. Nous les avons regroupés car les unités concernant l'enseignement des fractions sont peu nombreuses. Au niveau du secondaire V, il n'y a pas de chapitres ou d'unités touchant les fractions ou les proportions.

Le programme de l'enseignement de fractions au secondaire I est résumé au tableau XXVI. Il est tiré du manuel utilisé par les étudiants de ce niveau[27].

Le secondaire I correspond au sous-stade IIIA que nous avons élaboré. Nos sujets au secondaire I avvaient tous douze ans. L'âge d'accession au sous-stade IIIA est de 12.4 ans. Le sous-stade IIIA est caractérisé par le fait que l'un des numérateurs est le multiple de l'autre (ex. 1/2, 2/3). Il en va de même pour les dénominateurs mais dans un ensemble différent (ex. 3/1, 5/2). les deux opérations principales utilisées par l'enfant sont la multiplication (de l'invariant) et l'addition (du reste à l'invariant). Pour la première fois, l'enfant combine simultanément deux opérations (multiplication et addition) à l'intérieur de

27. J. Ménard et al., Mathématiques nouvelles option 111, 112, 113, Ed. F.I.C., La Mennais, P.Q., 1970, p.296-378.

Tableau XXVI.- Programme de l'enseignement des fractions au niveau du secondaire I.

Unité	Page	Chapitre	Objectifs
1	296	7-1	La division dans N n'est pas toujours définie.
2	297	7-2	Equations n'ayant pas de solution dans N.
3	297	7-3	Axe des nombres et fractions.
4	299	7-4	L'ensemble des fractions non-négatives.
5	301	7-5	Les entiers naturels sont-ils des fractions ?
6	305	7-8	Définition de la multiplication de deux fractions.
7	307	7-9	Autre interprétation graphique d'un produit de fractions.
8	308	7-10	Classe de fractions équivalentes et ensembles des nombres rationnels.
9	311	7-11	La classe des fractions équivalentes à 1 engendre toutes les classes de fractions équivalentes.
10	312	7-12	Définition de l'addition de fraction.
11	354	8-1	Fraction en notation décimale.
12	355	8-2	Toute fraction peut-elle s'exprimer en notation décimale.
13	365	8-8	Opérations sur les fractions exprimées en notation décimale (addition et soustraction).
14	366	8-9	Multiplication.
15	367	8-10	Division.
16	376	8-15	Les proportions.
17	377	8-16	Propriété fondamentale des proportions.
18	378	8-17	Equation et proportion (règle de trois).

l'ensemble. Les étudiants du secondaire I ont donc utilisé principalement ces deux opérations. Comparons maintenant le programme des fractions au sous-stade IIIA. Nous utiliserons les unités du tableau XXVI comme élément de référence.

Nous croyons que les unités un et deux sont une bonne introduction à l'ensemble des fractions car l'enfant au niveau du sous-stade IIIA et IIIA[1] est appelé à réduire cette fraction en un seul nombre (ex. 4/3). Il faudrait peut-être déplacer l'ordre dans lequel ces deux unités sont placées, car à l'unité huit, nous avons des équivalences. Les équivalences sont acquises au stade II. On pourrait utiliser les équivalences pour construire les unités un et deux. L'ordre des unités un et deux pourra donc être modifié.

La théorie de l'unité trois est convenable. L'idée de l'application des fractions sur un axe concret est très valable.

Les unités huit et neuf concernant les équivalences devraient être au début du programme uniquement comme élément de revision, pour s'assurer que les enfants comprennent. Une longue période de temps accordée aux équivalences ne faciliterait pas l'acquisition du stade IIIA. Lors de la revision des équivalences, l'unité neuf (correspondance terme à terme) devrait précéder l'unité huit, car nous sommes en présence de l'ordre par lequel l'enfant construit l'invariant.

L'unité dix est très importante, car l'adolescent du stade IIIA doit faire une addition de fractions pour solutionner son problème. Il doit spécifiquement additionner son reste à l'invariant. Les exercices de l'addition des fractions sont d'excellents préparatifs pour le stade.

Les unités numéros onze, douze (notation décimale), treize, quatorze et quinze concernant les opérations sur les fractions exprimées en notation décimale sont de très bon préparatifs au sous-stade IIIB. Nous avons vu antérieurement que l'adolescent applique les décimales à la solution des problèmes de proportion à seize ans. Pour cette raison, nous croyons que ces unités sont des préparatifs.

Les unités seize et dix-sept sont adéquates.

L'unité dix-huit représente également un exercice préparatoire pour un niveau supérieur. Pour conclure cette première partie, nous croyons que le pédagogue responsable de l'enseignement des fractions au secondaire I, devra effectuer un dosage justicieux entre le passé, le présent et le futur concernant l'apprentissage des fractions, et ceci, en tenant compte de ses étudiants.

Notre deuxième partie comprend l'analyse du secondaire II, III et IV. Le programme de l'enseignement des fractions est issu des manuels[28,29,30] utilisés par les étudiants de ces différents niveaux. Le tableau XXVII est un résumé des programmes au niveau du secondaire II, III et IV.

Le sous-stade IIIA^1 correspond au secondaire II, III et IV. L'âge d'accession au sous-stade IIIA^1 est de 13.4 ans. Ce sous-stade est caractérisé par des fractions que l'adolescent traite par simplification pour résoudre les problèmes (ex. 5/3, 3/1). L'opération principale utilisée par l'adolescent est la division. Nous allons maintenant comparer le programme de l'enseignement des fractions au sous-stade IIIA^1, en utilisant le tableau XXVII comme référence.

Nous croyons que toutes les unités du tableau XXVII sont adéquates. Ces unités sont bonnes, car elles favorisent la combinaison des systèmes opératoires, consolidant ainsi le sous-stade de IIIA^1 et préparant le sous-stade IIIB. Le pédagogue devra doser les unités en fonction du sous-stade antérieur (IIIA), du présent sous-stade (IIIA^1) et de celui qui lui succède (IIIB),

---

28. J. Ménard et al., Mathématiques Nouvelles options 221, 231, Ed. F.I.C., La Mennais P.Q., 1970, p.125-131.

29. J. Ménard et al., Mathématiques Nouvelles options 320, 330, Ed. F.I.C., La Mennais P.Q., 1971, p.235.

30. J. Ménard et al., Mathématiques Nouvelles options 422, 432, Ed. F.I.C., La Mennais P.Q., 1972, p.375-380, 391.

Tableau XXVII.- Programme de l'enseignement des fractions au niveau du secondaire II, III et IV.

Unité	Page	Chapitre	Objectifs
1	75	2-18	Fractions positives et fractions négatives.
2	125	3-20	Les proportions.
3	127	3-21	Quantités directement proportionnelles.
4	129	3-22	Quantités inversement proportionnelles.
5	131	3-23	Résolution de problèmes par les proportions.
6	235	4-19	Fractions complexes.
7	375	7-22	Proportionnalité.
8	377	7-23	Propriétés d'une proportion simple.
9	380	7-24	Proportionnalité inverse et partage.
10	391	7-29	Propriété fondamentale de la proportionnalité.
			Secondaire II unités numéro 1 à 5
			Secondaire III unité numéro 6
			Secondaire IV unités numéro 7 à 10.

et ceci, en respectant le rythme des étudiants.

Pour conclure l'analyse du programme de l'enseignement des fractions au niveau secondaire, une remarque s'impose. Nous croyons que l'apprentissage des fractions ou des proportions serait facilité si on insistait davantage sur la décomposition des systèmes opératoires lors de problèmes. Ceci faciliterait grandement la compréhension et la construction de solutions à des problèmes quelconques. Il faut tenir compte que la combinaison des systèmes opératoires débute à 12.4 ans (niveau formel inférieur) et s'achève 3.6 ans plus tard, c'est-à-dire à 16 ans (niveau formel supérieur). Cette différence de 3.6 ans à l'intérieur d'un même stade (IIIA + IIIA^{1} + IIIB = stade III ou opératoire forme), le pédagogue doit la respecter en dosant l'effort et la complexité dépendamment des sujets.

La comparaison entre les programmes scolaires et les étapes du fonctionnement cognitif spontané de l'enfant et de l'adolescent démontre partout une certaine avance de la pédagogie sur le développement psychologique. A l'intérieur de notre étude, cette avance ne nous semble pas être une accélération des structures mais plutôt une préparation de celle-ci. Selon nous cette "avance préparatoire" est adéquate puisqu'elle se limite généralement à l'intérieur d'un même stade et que le rôle de la pédagogie est de favoriser le développement cognitif. Cependant, il faut être conscient que l'on travaille toujours à la limite supérieure du développement cognitif de l'enfant et de l'adolescent, ce que nous oublions trop souvent comme pédagogue.

Notre deuxième but est ainsi confirmé: le programme de l'enseignement des fractions du Ministère de l'Education du Québec respecte les stades du développement cognitif de l'enfant et de l'adolescent.

RESUME ET CONCLUSIONS

Cette recherche avait pour but d'étudier les étapes du développement de la notion de fraction ou de proportion chez les garçons de 9 à 16 ans. Dans un deuxième temps, nous avons appliqué les stades de la notion de proportion au programme d'enseignement des mathématiques du Ministère de l'Education du Québec au niveau élémentaire et secondaire.

Notre échantillonnage comprenait trois classes de l'élémentaire (second cycle) et cinq classes du niveau secondaire (secondaire I à V). L'âge des sujets était équivalent au niveau de scolarité (ex. tous les sujets de 9 ans étaient en quatrième année). Nous avons administré à notre échantillon un nouvel instrument, l'Epreuve des Partages (24 item). Celui-ci s'est avéré adéquat par la similarité des stades obtenus, face aux résultats antérieurs de Piaget et Noelting.

L'analyse des résultats nous a permis de faire l'élaboration du stade II et des sous-stades IIIA, $IIIA^1$ et IIIB de la notion de proportion. Ceux-ci sont semblables à ceux élaborés par Piaget et Noelting. Notre hypothèse est ainsi confirmée.

Le résultat de l'application des stades aux programmes d'enseignement fut très encourageant. Mis à part quelques rares exceptions, les unités du programme de l'enseignement des fractions au niveau élémentaire et secondaire respectaient le développement cognitif de l'enfant et de l'adolescent.

Nous avons remarqué une certaine avance de la pédagogie sur le développement psychologique. Cette avance du programme sur le développement psychologique peut être une excellentepréparation pour favoriser l'épanouissement des structures intellectuelles d'un niveau supérieur. Par contre, cette avance peut devenir une accélération, lorsque les méthodes et l'attitude du professeur sont inadéquates. Nous avons seulement étudié le programme, sans nous préoccuper des méthodes d'enseignement ou de la relation maître-élève. Il va sans dire que les deux derniers éléments ci-dessus sont aussi important pour l'apprentissage que le programme.

Pour l'avenir de la pédagogie, nous croyons que deux études principales pourraient avoir lieu. La première pourrait s'effectuer avec des sujets semblables mais en ayant des programmes différents. La seconde étude pourrait concerner la recherche avec des sujets féminin. Celles-ci permettraient sans doute d'avoir une vue plus générale sur le développement de la notion de proportion.

BIBLIOGRAPHIE

Fugère, R., Programme d'étude de la mathématique à l'élémentaire, d'après le programme-cadre, Service de l'Enseignement, Commission Scolaire Champlain.

Guay, J. P., L'épreuve des partages, Thèse de Maîtrise non publiée, Université Laval, Québec, 1973.

Guide Pédagogique, Mathématiques à l'élémentaire description générale du programme-cadre, Fascicule A, Ministère de l'Education, Gvnt. du Québec.

Guttman, L., A basis for scaling qualitative datta, dans American Sociology, Rev. 9, 1944, p. 139-150.

Guttman, L., The Cornell technique for scale and intensity analysis, dans Educ. Psychol. Measmt., no. 7, 1947, p. 247-280.

Guttman, L., On Festinger's evaluation of scale analysis, dans Psychol. Bull., no. 44, 1947, p. 451-465.

Guttman, L., The basis for scalogram analysis in Measurement and prediction, Princeton Univ. Press, New York, 1950, p.60-90.

Guttman Scale # 1, BMDO5S, Biomedical Computer Program, Ed. W.J. Dixon, California Univ. Press, 1971, p. 379-398.

Laurendeau, M. et Pinard, A., La pensée causale, P. U. F., Paris, 1962.

Longeot, F., Psychologie différentielle et théorie opératoire de l'intelligence, Dunod, Paris, 1969.

Ménard, J. et al., Mathématiques nouvelles option 111, 112, 113, Ed. F. I. C., La Mennais, P. Q., 1970.

Ménard, J. et al., Mathématiques nouvelles option 221, 231, Ed. F. I. C., La Mennais , P. Q., 1970.

Ménard, J. et al., Mathématiques nouvelles option 320, 330, Ed. F. I. C., La Mennais, P. Q., 1971.

Ménard, J. et al., Mathématiques nouvelles option 422, 432, Ed. F. I. C., La Mennais, P. Q., 1972.

BIBLIOGRAPHIE

Noelting, G., Les stades de développement de la notion de proportion chez l'enfant, Université Laval, Québec, 1972.

Noelting, G., G. Cardinal et R. Cloutier, Stades et mécanismes dans le développement de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent, Université Laval, Québec, 1973. (manuscrit non publié)

Noelting, G. et al., Partage, forme collective 24 item; étude des arguments, Université Laval, Québec, 1974. (manuscrit non publié)

Piaget, J., Le mécanisme du développement mental et les lois du groupement des opérations, Naville, Genève, 1941.

Piaget, J., Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant, Presses Universitaires de France, Paris, 1946.

Piaget, J., La psychologie de l'intelligence, A. Collin, Paris, 1947.

Piaget, J., Introduction à l'épistémologie génétique, vol. 2, La pensée physique, Presses Universitaires de France, Paris, 1950.

Piaget, J., Les relations entre l'affectivité et l'intelligence dans le développement mental de l'enfant, C.D.U., Paris, 1962.

Piaget, J., Six études de psychologie, Gonthier, Genève, 1964.

Piaget, J., Le structuralisme, Presses Universitaires de France, Paris, 1968.

Piaget, J. et B. Inhelder, La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant, Presses Universitaires de France, Paris, 1951.

Piaget, J. et B. Inhelder, De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent, Presses Universitaires de France, Paris, 1955.

BIBLIOGRAPHIE

Piaget, J. et B. Inhelder, Le développement des quantités chez l'enfant, Delachaux et Niestlé, Neuchatel, 1962.

Piaget, J. et al., Le problème des stades en psychologie de l'enfant, Presses Universitaires de France, Paris, 1956.

Siegel, S., Nonparametric statistics for the behavioral sciences, McGraw-Hill B. Co., Toronto, 1956.

White, W. et E. Saltz, Measurement of reproductibility, dans Psychology Bull., 54, 1957, p. 81-99.

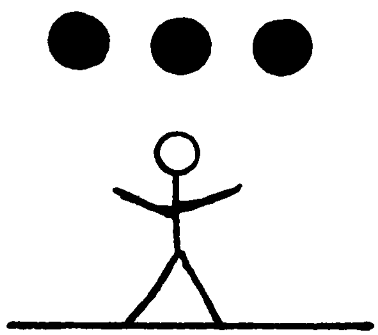
Appendice I

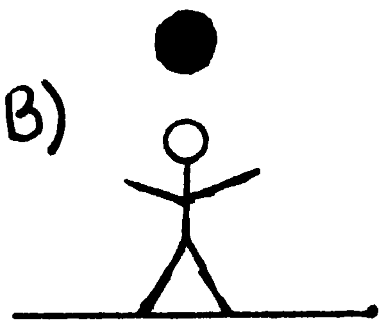
Epreuve des Partages (24 item)

Partage

Age: .... DATE: ....

Prénom: .... Nom: ....

A) 

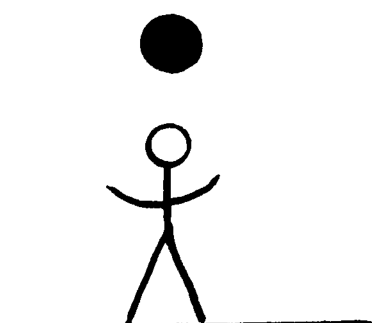
B) 

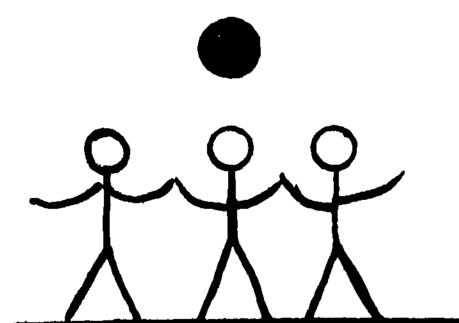
+ □ = □ + □

Pourquoi? ______________________________

____

____

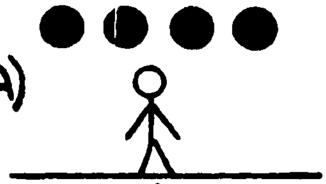
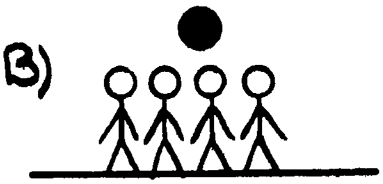




+ □ = □ + □

Pourquoi? ______________________________

____

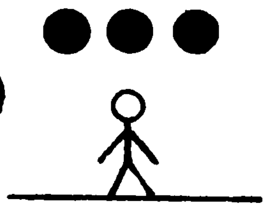
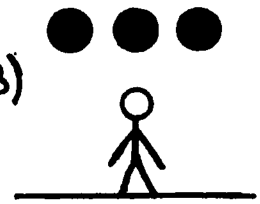
1- A)  B) 

+ □ = □ + □

Pourquoi ? ______________________

____

____

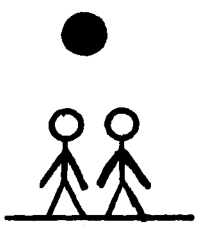
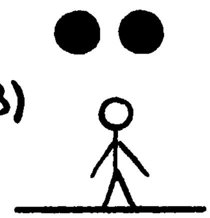
2- A)  B) 

+ □ = □ + □

Pourquoi ? ______________________

____

____

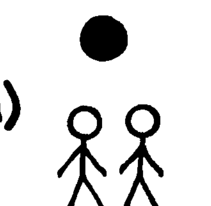
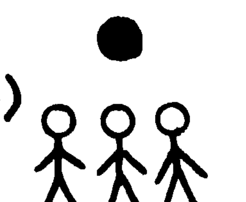
3- A)  B) 

+ □ = □ + □

Pourquoi ? ______________________

____

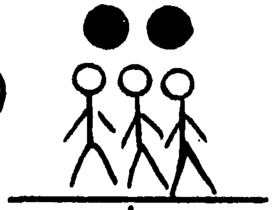
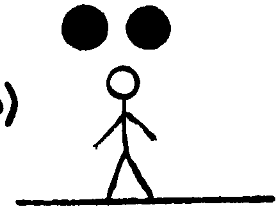
____

4- A)  B) 

+ □ = □ + □

Pourquoi ? ______________________

____

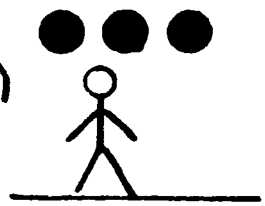
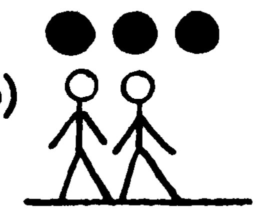
5- A)  B) 

+ □ = □ + □

Pourquoi ? ______________________________

____

____

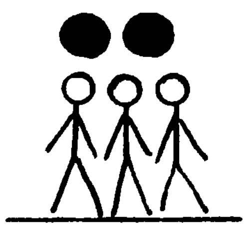
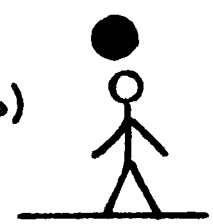
6- A)  B) 

+ □ = □ + □

Pourquoi ? ______________________________

____

____

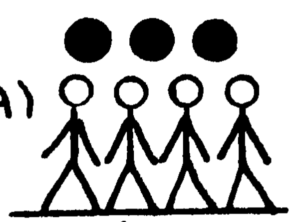
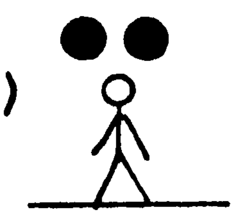
7- A)  B) 

+ □ = □ + □

Pourquoi ? ______________________________

____

____

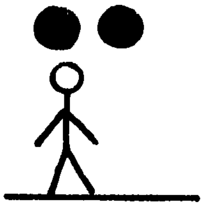
8- A)  B) 

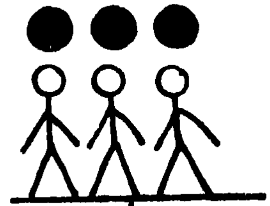
+ □ = □ + □

Pourquoi ? ______________________________

____

9-

A) 

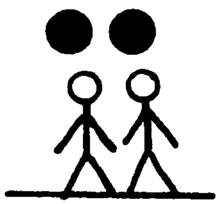
B) 

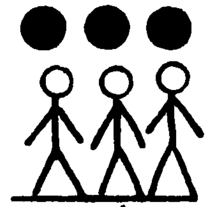
+ ☐ = ☐ + ☐

Pourquoi ? ______________________________

____

10-

A) 

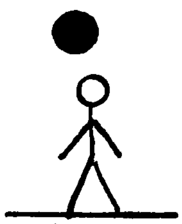
B) 

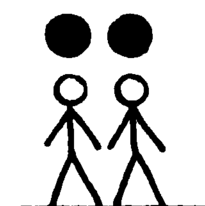
+ ☐ = ☐ + ☐

Pourquoi ? ______________________________

____

11-

A) 

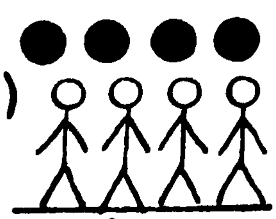
B) 

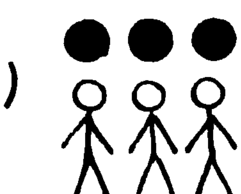
+ ☐ = ☐ + ☐

Pourquoi ? ______________________________

____

12-

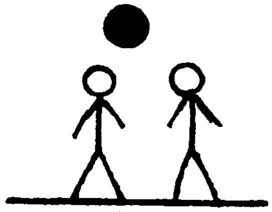
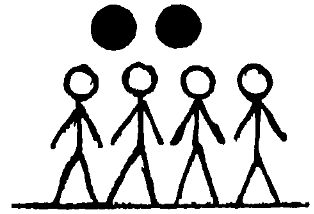
A) 

B) 

+ ☐ = ☐ + ☐

Pourquoi ? ______________________________

____

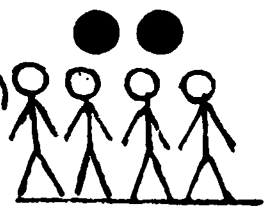
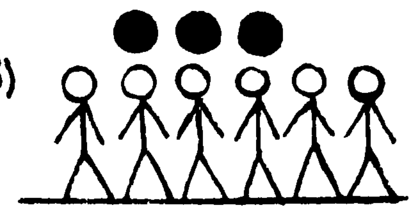
13- A)  B) 

$+\square$ $=\square$ $+\square$

Pourquoi ? ______________________________

____

____

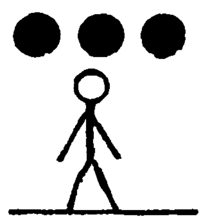
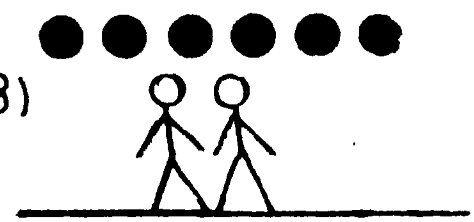
14- A)  B) 

$+\square$ $=\square$ $+\square$

Pourquoi ? ______________________________

____

____

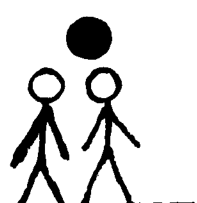
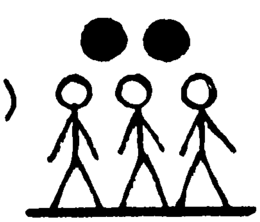
15- A)  B) 

$+\square$ $=\square$ $+\square$

Pourquoi ? ______________________________

____

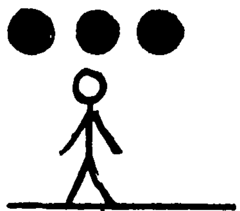
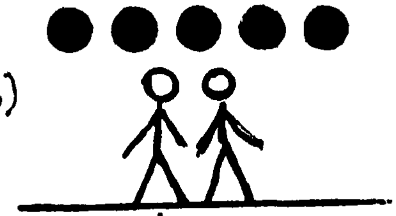
____

16- A)  B) 

$+\square$ $=\square$ $+\square$

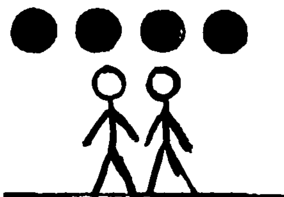
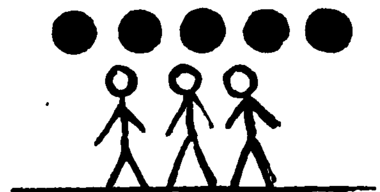
Pourquoi ? ______________________________

____

17. A)  B) 

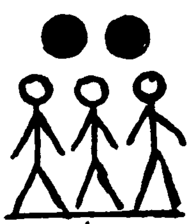
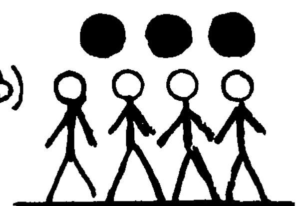
+ □ = □ + □

Pourquoi ?

18. A)  B) 

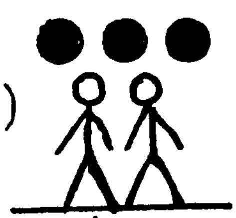
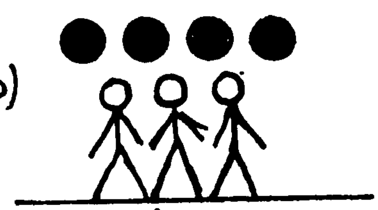
+ □ = □ + □

Pourquoi ?

19. A)  B) 

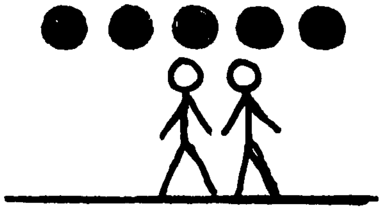
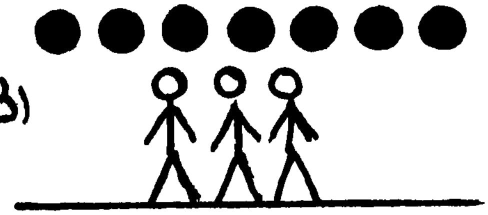
+ □ = □ + □

Pourquoi ?

20. A)  B) 

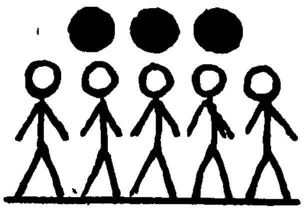
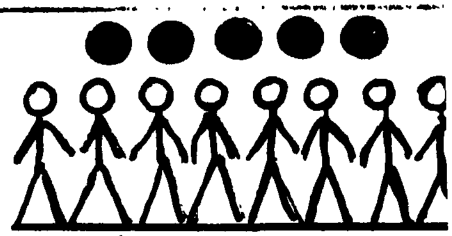
+ □ = □ + □

Pourquoi ?

21. A)  B) 

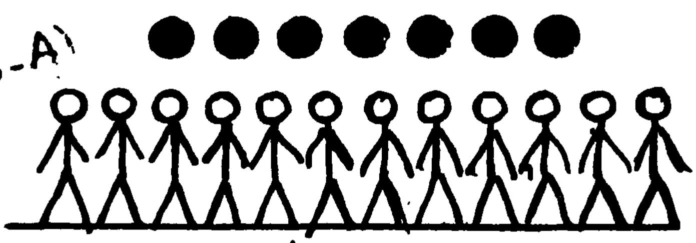
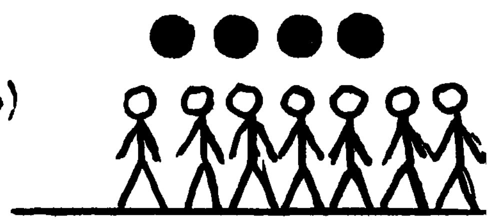
+ □ = □ + □

Pourquoi ? ______________________________

22- A)  B) 

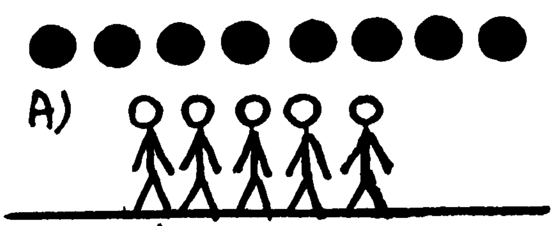
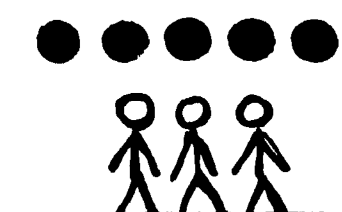
+ □ = □ + □

Pourquoi ? ______________________________

23- A)  B) 

+ □ = □ + □

Pourquoi ? ______________________________

24- A)  B) 

+ □ = □ + □

Pourquoi ? ______________________________

Appendice II

Sommaire

SOMMAIRE

ETUDE DE LA NOTION DE PROPORTION CHEZ LES GARCONS DE 9 A 16 ANS EN UTILISANT L'EPREUVE DES PARTAGES (24 ITEM) ET APPLICATION DES RESULTATS AU PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES DU MINISTERE DE L'EDUCATION DU QUEBEC AUX NIVEAUX ELEMENTAIRE ET SECONDAIRE

Le but de la présente recherche était d'étudier la notion de proportion selon la théorie de Piaget et Noelting. Ceux-ci avaient déjà élaboré des stades sur cette notion mais avec des instruments de mesure différents. Nous allons vérifier l'existence des stades de la notion de proportion en utilisant un nouveau test, l'Epreuve des Partages (24 item). Par la suite nous allons tenter d'appliquer ces stades aux programmes d'enseignement des fractions, suivis par nos sujets.

Deux buts de recherche furent avancés. L'un de ses buts était une hypothèse.

Dans notre hypothèse nous nous attendions à ce qu'il existe une relation positive entre nos résultats et ceux de Piaget et Noelting, au niveau de la formation et de l'ordre de succession des stades. Pour vérifier cette hypothèse, nous avons utilisé un nouvel instrument collectif, à savoir l'Epreuve des Partages (24 item). Celui-ci à été administré à 240 garçons de 9 à 16 ans des niveaux élémentaire et secondaire. Après l'analyse des résultats, nous avons obtenu des différences significatives au Kolmogorov-Smirnov, permettant ainsi la construction des stades (entre le stade I et II: .01, entre le stade II et le sous-stade IIIA: .001, entre le sous-stade IIIA et IIIA^1: .01 et entre le sous-stade IIIA^1 et IIIB: .05). Par la suite, l'analyse structurale des arguments utilisés par les sujts confirma ces stades. Ceux-ci étaient semblables à ceux élaborés antérieurement par Piaget et Noelting. Nous validons par le fait même notre instrument de mesure, c'est-à-dire l'Epreuve des Partages (24 item).

Notre deuxième but concernait l'application des stades au programme de l'enseignement des fractions ou proportions aux niveaux élémentaire et secondaire. Cette application des stades aux programmes avait pour but de déterminer si ceux-ci respectaient le développement cognitif de l'enfant et de l'adolescent. Après cette analyse comparative, nous sommes maintenant en mesure de le confirmer positivement. Le programme de l'enseignement des fractions ou des proportions du Ministère de L'Education du Québec aux niveaux élémentaire et secondaire, respecte le développement cognitif de l'enfant et de l'adolescent.