UNIVERSITE D'OTTAWA
Departement de Génie Electrique
OTTAWA, CANADA

UNE METHODE DE DETERMINATION DES PARAMETRES D'UN SYSTEME PHYSIQUE

par

Bernard J. Jeux

soumise au départment de génie électrique pour satisfaire une partie des exigences nécessaires à l'obtention du degré de maitrise es sciences.

(janvier, 1967)

- AVANT PROPOS -

Une nouvelle méthode de détermination des paramètres d'un système physique est présentée dans cette thèse.

Une explication de la méthode proposée est d'abord donnée. Puis, en vue de la programmation, une écriture mathématique intéréssante du problème est envisagée. Une application de la méthode est ensuite éffectuée à 2 cas particuliers.

Les résultats obtenus ne permettent pas de conclure sur l'intérêt de la méthode; ils permettent cependant de poser certaines conditions initiales nécéssaires à l'utilisation de la méthode.

REMERCIEMENT

L'auteur exprime ses très sincères remerciements à son directeur de thèse, le docteur Jaan Kruus, pour toutes les suggestions, l'aide, et les encouragements, qu'il a reçu tout au long de son travail de recherche.

Il désire aussi remercier le Conseil des Arts du Canada qui, en lui octroyant une bourse, lui a permis d'éffectuer cette étude.

TABLES DES MATIERES

I: INTRODUCTION

1) Identification d'un système physique.

1a) Généralité:

L'étude mathématique d'un système physique comporte deux parties. La première partie consiste à identifier le système physique, c'est à dire à rechercher les équations pouvant convenablement décrire le système.
La deuxième partie consiste à étudier le comportement du système à partir des équations trouvées, ce qui se fera en résolvant ces équations ou en les discutant.
De ces deux parties, c'est la première qui est la plus importante, parce qu'elle est la plus difficile ou la plus délicate à faire.
Identifier un système physique, ce sera dans certains cas lui appliquer les lois physiques qui le régissent (lois de la mécanique, lois de l'électricité) et en déduire l'équation du système. Dans de nombreux cas cependant, le problème d'identification sera compliqué par le fait que le système étudié sera une "boite noire", c'est à dire que nous n'en connaitrons ni la forme ni les paramètres. La configuration du système devra donc être déterminée à partir de la connaissance de la fonction d'entrée et de la mesure de la fonction de sortie.

1b) Le modèle mathématique

En général, la forme ou l'ordre d'un système peut être approximativement estimé par une premiere analyse. Il est alors possible de décrire le système par un modèle mathématique propre au système. L'identification du système se ramène donc à la détermination des paramètres du modèle mathématique.

Le premier probléme qui se pose est donc le choix du modèle mathématique qui décrit le système. Ce choix sera commandé par les considérations suivantes:

Le système est-il lineaire ou nonlineaire

Le système est-il fonction du temps ou indépendant du temps.

A partir de ces considérations, plusieurs modèles mathématiques peuvent être utilisés pour décrire un système. Le choix dépend de la nature du système et de l'analyse qui doit être faite.

En général, les modèles suivants sont utilisés:

Les équations différentielles

Les fonctions de transfert

Les fonctions de transfert impulsionnelles

Les fonctions de transfert exprimant la réponse en fréquence

Les équations d'état

Les intégrales de convolution.

Bien que différents en apparence, ces modèles ont tous pour point de départ les équations différentielles.

Les fonctions de transfert ne sont que des équations différentielles auxquelles on applique la transformation de Laplace.

Les fonctions de transfert impulsionnelles ne sont que des fonctions de transfert dans lesquelles l'entrée du système est une fonction impulsion. Les fonctions de transfert exprimant la réponse en frequence ne sont que des fonctions de transfert ayant pour entrée une fonction sinusoidale.

Les équations d'état ne sont qu'un ensemble d'équations différentielles du premier degré, décomposition de l'équation différentielle originale du n^{ieme} degré.

Les intégrales de convolution font elles aussi intervenir la réponse impulsionnelle c'est à dire la fonction de transfert impulsionnelle.

Si les modèles présentent quelques analogies entre eux, les méthodes d'identification à partir de ces modéles en présentent aussi.

1c) <u>Les méthodes d'identification:</u>

Les méthodes d'identification peuvent être divisées en deux catégories:

Les méthodes faisant appel à des techniques de corrélation

Les méthodes utilisant les modèles de référence.

Les techniques de corrélation font intervenir les integrales de convolution. Elles permettent de déterminer la réponse impulsionnelle d'un système ; et nous savons qu'un système linéaire est complétement caractérisé par sa réponse impulsionnelle. Les méthodes utilisant les modèles de références sont des méthodes dans lesquelles un modèle, dont les paramètres peuvent être ajustés, est utilisé. Le modèle et le système sont soumis à la même entrée. Leurs sorties sont comparées et l'érreur est utilisée pour ajuster les paramètres dans le modèle. Cet ajustement se fera de facon à minimiser l'érreur, ceci à l'aide de certains critères, pour que les paramètres du modèle se rapprochent le plus possible des paramètres du systéme.

Il éxiste de trés nombreuses publications sur ces differentes méthodes, tel que par exemple:

Hazlerigg et Noton [4] pour les premières; Kalman et Levin [5] pour les dernières.

Ces méthodes se heurtent à des difficultés lorsqu'il s'agit de calculer les fonctions de corrélation, dans le cas des techniques de corrélation, ou la minimisation de l'erreur, dans le cas des méthodes utilisant les modéles de référence.

Dans certaines conditions, il est possible d'utiliser d'autres méthodes d'identification. C'est ce que nous allons voir dans cette thése.

La méthode de Diamessis et celle étudiée dans cette thèse utilisent comme modèle mathématique une équation differentielle de la forme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} \; ; \quad a_n = 1 \qquad (1)$$

ou $e(t)$ est l'entrée et $x(t)$ la sortie du système.

Le système physique sera considéré comme étant déterminé si les coéfficients a_i et b_i, paramètres du système, sont donnés. Dans beaucoup de cas les a_i et b_i ne sont pas connus. Seules, l'entrée et la sortie du système sont connues ou facilement mesurables.

L'identification d'un système revient donc à la détermination des a_i et b_i à partir de $x(t)$ et $e(t)$.

2) Méthode de J.E. Diamessis.[1]

J.E. Diamessis a proposé une méthode d'identification qui part des hypothèses formulées ci-dessus. Cette méthode réduit le problème de détermination des paramètres a_i et b_i à un probleme de résolution d'un système d'équations linéaires algébriques ou les inconnues sont les a_i et b_i et ou leurs coéfficients sont des quantités connues fonction de $x(t)$ et $e(t)$.

Pour déterminer les 2n coéfficients de (1), J.E. Diamessis forme 2n équations linéaires en intégrant (1) n+1 fois de zero à t_k avec $k = 1, 2, \ldots 2n$.

Il obtient

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_{k,n+1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i E_{k,n+1-i} \; ; \; k = 1,2,\ldots 2n. \qquad (1')$$

avec

$$X_{k,n+1-i} \triangleq \underbrace{\int_0^{t_k} \cdots \int_0^{t_k}}_{n+1-i} x(t)dt^{n+1-i} \qquad i = 0, 1, \ldots n$$

$$E_{k,n+1-i} \triangleq \underbrace{\int_0^{t_k} \cdots \int_0^{t_k}}_{n+1-i} e(t)dt^{n+1-i} \qquad i = 0, 1, \ldots n-1$$

Les $X_{k,n+1-i}$ et $E_{k,n+1-i}$ peuvent être calculés à l'aide des calculatrices digitales et analogiques.
Connaissant $X_{k,n+1-i}$ et $E_{k,n+1-i}$, les a_i et b_i peuvent être obtenus en résolvant (1')

3) <u>Exposé général de la méthode proposée</u>.

La méthode d'identification d'un système physique qui fait l'objet de cette thèse, s'inspire un peu de la méthode de Diamessis. Elle s'en distingue cependant dès le départ.
Nous désirons déterminer au temps t les coéfficients a_i et b_i de l'équation (1).
Nous intégrons n fois (1) entre les temps t - T et t
Si nous convenons d'écrire

$$I_n(f,t) = \underbrace{\int_{t-T}^{t} \cdots \int_{t-T}^{t}}_{n} f(\tau)\, d\tau^n \quad \text{et} \quad \frac{d^i x(t)}{dt^i} = x^{(i)}$$

l'équation (1) s'écrit :

$$\sum_{i=0}^{n} I_n(a_i x^{(i)}, t) = \sum_{i=0}^{n-1} I_n(b_i e^{(i)}, t) \qquad (2)$$

Nous choisissons T de telle façon que les a_i et b_i peuvent être considérés comme constants dans l'interval $(t-T, t)$.

(2) peut alors s'écrire

$$\sum_{i=o}^{n} a_i I_n(x^{(i)}, t) = \sum_{i=o}^{n-1} b_i I_n(e^{(i)}, t) \tag{3}$$

Nous obtenons une équation linéaire algébrique où les inconnues sont les paramètres a_i et b_i et où les coéfficients de ces inconnues sont des quantités calculables à l'aide des calculatrices digitales et analogiques.

De même que nous avons obtenu l'équation (3) au temps t; nous obtiendrons aux temps $t - \delta$, $t-2\delta$, ... $t-k\delta$, les équations:

$$\sum_{i=o}^{n} a_i I_n(x^{(i)}, t-\delta) = \sum_{i=o}^{n-1} b_i I_n(e^{(i)}, t-\delta), \tag{3^1}$$

$$\sum_{i=o}^{n} a_i I_n(x^{(i)}, t-2\delta) = \sum_{i=o}^{n-1} b_i I_n(e^{(i)}, t-2\delta), \tag{3^2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sum_{i=o}^{n} a_i I_n(x^{(i)}, t-k\delta) = \sum_{i=o}^{n-1} b_i I_n(e^{(i)}, t-k\delta), \tag{3^k}$$

De l'équation (3) nous pouvons tirer 2n équations, nous donnant la valeur d'un paramètre a_j ou b_j en fonction des 2n-1 autres.

Soit :

$$(E)\begin{cases} a_j = F_{j,t}[a_i, b_i] = \left[\sum_{i=o}^{n-1} b_i I_n(e^{(i)}, t) - \sum_{i=o}^{j-1} a_i I_n(x^{(i)}, t) - \sum_{i=j+1}^{n} a_i I_n(x^{(i)}, t)\right] / I_n(x^{(j)}, t) \\ b_j = G_{j,t}[a_i, b_i] = \left[\sum_{i=o}^{n} a_i I_n(x^{(i)}, t) - \sum_{i=o}^{j-1} b_i I_n(e^{(i)}, t) - \sum_{i=j+1}^{n-1} b_i I_n(e^{(i)}, t)\right] / I_n(e^{(j)}, t) \end{cases}$$

De (3^1), (3^2), ... (3^k) nous tirons de même

$$(E^1)\begin{cases} a_j = F_{j,t-\delta}\,[a_i,\ b_i] \\ b_j = G_{j,t-\delta}\,[a_i,\ b_i] \end{cases}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$(E^k)\begin{cases} a_j = F_{j,t-k\delta}\,[a_i,\ b_i] \\ b_j = G_{j,t-k\delta}\,[a_i,\ b_i] \end{cases}$$

La méthode de détermination des coéfficients a_i et b_i au temps t que nous désirons étudier ici, est la suivante:

Au temps $t-k\delta$, nous donnons des valeurs arbitraires aux a_i et b_i, soit α_i et β_i. Des relations (E^k) nous tirons $\alpha_j(t-k\delta)$ et $\beta_j(t-k\delta)$. Nous portons ces valeurs dans (E^{k-1}), nous en déduisons $\alpha_j(t-\overline{k-1}\delta)$ et $\beta_j(t-\overline{k-1}\delta)$ que nous portons de même dans (E^{k-2}). Nous remontons ainsi jusqu'aux relations (E) qui nous donnent $\alpha_j(t)$ et $\beta_j(t)$.

$$\begin{cases} \alpha_j(t-k\delta) = F_{j,t-k\delta}\,[\alpha_i,\ \beta_i] \\ \beta_j(t-k\delta) = G_{j,t-k\delta}\,[\alpha_i,\ \beta_i]\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_j(t-\overline{k-1}\delta) = F_{j,t-\overline{k-1}\delta}\,[\alpha_i(t-k\delta),\ \beta_i(t-k\delta)] \\ \beta_j(t-\overline{k-1}\delta) = G_{j,t-\overline{k-1}\delta}\,[\alpha_i(t-k\delta),\ \beta_i(t-k\delta)] \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} \alpha_j(t) = F_{j,t}\,[\alpha_i(t-\delta),\ \beta_i(t-\delta)] \\ \beta_j(t) = G_{j,t}\,[\alpha_i(t-\delta),\ \beta_i(t-\delta)] \end{cases}$$

L'objet de cette thèse sera ici de rechercher si cette méthode itérative est bien convergente. C'est à dire qu'en partant de valeurs plus ou moins arbitraires α_i et β_i, nous arrivons après un certain nombre d'itérations à des valeurs $\alpha_i(t)$ et $\beta_i(t)$ égales aux valeurs a_i et b_i vérifiant l'équation (3) c'est à dire (1).

Dans le chapitre II que nous allons aborder maintenant, nous chercherons à rendre les expressions $I_n(j,t)$ calculables, c'est à dire à les écrire sous une forme telle que leur programmation en soit facile. Nous verrons aussi quelles entrées peuvent être utilisées.

Dans le chapitre III nous étudierons la convergence de la méthode proposée, dans 1 cas particulier, celui où l'équation differentielle est du 1e degré.

Dans le chapitre IV nous ferons la même étude, mais pour une équation différentielle du 2eme degré.

Le chapitre V sera la conclusion de cette thèse.

II LES INTEGRATIONS

Nous avons vu que l'équation (1) pouvait s'écrire:

$$\sum_{i=o}^{n} a_i I_n(x^{(i)}, t) = \sum_{i=o}^{n-1} b_i I_n(e^{(i)}, t)$$

les quantités $I_n(x^{(i)}, t)$ et $I_n(e^{(i)}, t)$ étant égales à:

$$I_n(x^{(i)}, t) = \underbrace{\int_{t-T}^{t} \cdots\cdots \int_{t-T}^{t}}_{n} x^{(i)} \, d\tau^n = \underbrace{\int_{t-T}^{t} \cdots\cdots \int_{t-T}^{t}}_{n} \frac{d^i x(\tau)}{d\tau^i} \, d\tau^n$$

$$I_n(e^{(i)}, t) = \underbrace{\int_{t-T}^{t} \cdots\cdots \int_{t-T}^{t}}_{n} e^{(i)} \, d\tau^n = \underbrace{\int_{t-T}^{t} \cdots \int_{t-T}^{t}}_{n} \frac{d^i e(\tau)}{d\tau^i} \, d\tau^n$$

Nous devons préciser ces quantités et voir si elles ne peuvent pas s'écrire sous des formes facilement calculables.

1) Notations et propriétés.

Utilisons les notations suivantes:

$$\Delta(f,t) \triangleq f(t) - f(t-T)$$

$$I_1(f,t) \triangleq \int_{t-T}^{t} f(\tau) \, d\tau$$

Nous pouvons écrire :

$$I_n(f,t) \triangleq I_1(I_{n-1}(f,t),t) \qquad n = 1, 2 \ldots$$

Pour n = 1 nous dirons $I_o(f,t) \triangleq f(t)$

Montrons que sur ces notations nous avons 2 propriétés caractéristiques.

Propriete I : $I_1(f^{(1)},t) \triangleq \Delta(f,t)$

En effet

$$I_1(f^{(1)},t) \triangleq \int_{t-T}^{t} \frac{d}{d\tau} f(\tau)d\tau \triangleq f(t)-f(t-T) = \Delta(f,t)$$

Propriete II : $I_1\,[\Delta(f,t),t\,] \triangleq \Delta\,[I_1(f,t),t\,]$

En effet:

$$\begin{aligned}
I_1[\Delta(f,t),t] &\triangleq I_1\,(f(t) - f(t-T),\ t) \\
&= \int_{t-T}^{t} [f(\tau) - f(\tau-T)]d\tau . \\
&= \int_{t-T}^{t} f(\tau)\ d\tau - \int_{t-T}^{t} f(\tau - T)\ d\tau . \\
&= \int_{t-T}^{t} f(\tau)d\tau - \int_{t-2T}^{t-T} f(\tau)\ d\tau . \\
&= \Delta\,[I_1(f,t),\ t\,] .
\end{aligned}$$

Nous voyons que les Δ et les I_1 commutent.

Nous allons maintenant pouvoir trouver les coéfficients

$$I_n(x^{(i)},t) \quad \text{et} \quad I_n(e^{(i)},\ t).$$

2) <u>Forme générale des coéfficients.</u>

Partons de l'équation différentielle (1)

$$\sum_{i=o}^{n} a_i\, x^{(i)}(t) = \mathop{\Delta}_{i=o}^{n-1} b_i\ e^{(i)}(t) \qquad a_n = 1$$

Intégrons une première fois entre t-T et t. Avec les hypothèses déja faites, nous obtenons:

$$\sum_{i=o}^{n} a_i\ I_1(x^{(i)},t) = \sum_{i=o}^{n-1} b_i\ I_1(e^{(i)},\ t).$$

En remarquant que $x^{(i)} \triangleq \{x^{(i-1)}\}^{(1)}$ et en utilisant la propriété I, l'équation précédente s'écrit:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, \Delta(x^{(i-1)}, t) + a_o I_1(x,t) = \sum_{i=1}^{n-1} b_n \, \Delta(e^{(i-1)}, t) + b_o I_1 (e,t).$$

Intégrons une deuxieme fois entre t-T et t

$$I_1 \{ \sum_{i=1}^{n} a_i \, \Delta(x^{(i-1)}, t), \, t \} + I_1 \{ a_o I_1(x,t), \, t \}$$
$$= I_1 \{ \sum_{i=1}^{n-1} b_n \, \Delta(e^{(n-1)}, t), \, t\} + I_1 \{b_o I_1(e,t), t\}.$$

Considérons le premier membre de cette équation.

En utilisant la propriété II, nous pouvons l'ecrire

$$\sum_{i=1}^{n} a_i I_1 \{ \Delta(x^{(i-1)}, t) + a_o \, I_2 \, (x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta \{I_1(x^{(i-1)}, t), t\} + a_o I_2(x,t).$$

et avec de nouveau la propriété I, nous l'écrirons :

$$= \sum_{i=2}^{n} a_i \, \Delta \{ \Delta(x^{(i-2)}, t), t \} + a_1 \, \Delta\{ I_1(x,t), t \} + a_o I_2(x,t).$$

Convenons d'écrire

$$\underbrace{\Delta(\, \Delta \, (\ldots \, (\Delta}_{m}(f,t), \, t) \ldots) \triangleq \Delta^m(f,t). \qquad m = 0, \, 1 \ldots$$

Avec $m = 0$ $\quad \Delta^o(f,t) \triangleq f(t).$

Notre expréssion précédente s'écrit maintenant

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \, \Delta^2(x^{(i-2)}, t) + \sum_{i=o}^{1} a_i \, \Delta^i \, \{ I_{2-i} \, (x,t), \, t \}$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} b_i \, \Delta^2(e^{(i-2)}, t) + \sum_{i=o}^{1} b_i \, \Delta^i \{I_{2-i}(e,t), t\}$$

En remarquant que $x^{(i)} \triangleq \{x^{(i-1)}\}^{(1)}$ et en utilisant la propriété I, l'équation précédente s'écrit:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, \Delta(x^{(i-1)}, t) + a_o I_1(x,t) = \sum_{i=1}^{n-1} b_n \, \Delta(e^{(i-1)}, t) + b_o I_1(e,t).$$

Intégrons une deuxieme fois entre t-T et t

$$I_1 \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \, \Delta(x^{(i-1)}, t), \; t \right\} + I_1 \left\{ a_o I_1(x,t), \; t \right\}$$
$$= I_1 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} b_n \, \Delta(e^{(n-1)}, t), \; t \right\} + I_1 \left\{ b_o I_1(e,t), t \right\}.$$

Considérons le premier membre de cette équation.

En utilisant la propriété II, nous pouvons l'ecrire

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, I_1 \left\{ \Delta(x^{(i-1)}, t) + a_o I_2(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta \left\{ I_1(x^{(i-1)}, t), t \right\} + a_o I_2(x,t). \right.$$

et avec de nouveau la propriété I, nous l'écrirons :

$$= \sum_{i=2}^{n} a_i \, \Delta \left\{ \Delta(x^{(i-2)}, t), t \right\} + a_1 \, \Delta \left\{ I_1(x,t), t \right\} + a_o I_2(x,t).$$

Convenons d'écrire

$$\underbrace{\Delta(\Delta (\ldots . (\Delta}_{m}(f,t), \; t) \ldots) \triangleq \Delta^m(f,t). \qquad m = 0, 1 \ldots$$

Avec $m = 0 \qquad \Delta^o(f,t) \triangleq f(t).$

Notre expréssion précédente s'écrit maintenant

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \, \Delta^2(x^{(i-2)}, t) + \sum_{i=o}^{1} a_i \, \Delta^i \left\{ I_{2-i}(x,t), \; t \right\}$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} b_i \, \Delta^2(e^{(i-2)}, t) + \sum_{i=o}^{1} b_i \, \Delta^i \left\{ I_{2-i}(e,t), t \right\}$$

Aprés n intégrations identiques aux 2 premières ci-dessus éffectuées nous obtenons l'équation (3) que nous pourrons maintenant écrire

$$a_n \; \Delta^n \{x,t\} + \sum_{i=o}^{n-1} a_i \; \Delta^i \{I_{n-i}(x,t),\; t\} = \sum_{i=o}^{n-1} b_i \; \Delta^i \{I_{n-i}(e,t),\; t\} \quad ; \quad a_n = 1 \qquad (4)$$

Cette écriture présente l'avantage d'avoir une programmation simple. En effet les I_{n-i} se déduisent de x ou e par n - i recyclages. De même les $\Delta^n \{f(t),t\}$ se déduisent de f(t), par n recyclages.

3) Choix de la fonction d'entrée e(t).

Le choix de la fonction d'entrée e(t) va être commandé par 2 impératifs. D'une part cette fonction doit être une fonction simple du temps, ceci pour permettre une étude analytique du problème. D'autre part, elle doit être telle qu'aucun des coéfficients qui dependent d'elle, ne s'annule , entrainant l'impossibilité de déterminer le paramètre correspondant, et transformant le problème.

Les plus simples fonctions e(t) que nous puissions considérer sont les fonctions $e(t) = t^k$.

La puissance k devra être choisie la plus petite possible pour répondre à la première condition, mais cette valeur minimale est limitée par la deuxieme condition.

En effet, considérons l'équation (1)

$$\sum_{i=o}^{n} a_i \, x^{(i)}(t) = \sum_{i=o}^{n-1} b_i \, e^{(i)}(t) \qquad (1)$$

Elle a étè transformée en l'équation (3)

$$\sum_{i=o}^{n} a_i \, I_n(x^{(i)},\; t) = \sum_{i=o}^{n-1} b_i \, I_n(e^{(i)},\; t) \qquad (3)$$

Il est facile de voir que pour qu'aucun des coéfficients $I_n(e^{(i)}, t)$ ne s'annule il faut et il suffit qu'aucun des $e^{(i)}$ ne s'annule.

Nous avons: $e^{(i)}(t) = \dfrac{d^i e(t)}{dt^i}$.

Pour une équation différentielle de degré n, nous voyons sur l'équation (1) que la fonction e(t) intervient par sa différentielle jusqu'au degré n-1. Pour qu'aucune des différentielles de e(t) ne s'annule nous devrons prendre pour e(t) une fonction de t de degré au moins égal à n-1; c'est à dire $e(t) = t^{n-1}$. Dans ce cas là $e^{(n-1)}(t)$ devient égal à $e^{(n-1)}(t) = (n-1)!$

$I_n(e^{(n-1)}, t)$ est alors égal à une constante.

Pour $i < n-1$ tous les $e^{(i)}$ sont des fonctions de t et tous les coéfficients $I_n(e^{(i)}, t)$ sont donc des fonctions de t.

Si nous choisissons $e(t) = t^{n-2}$ nous voyons immédiatement que $e^{(n-1)}(t) = 0$. La méthode ne nous permettra pas de déterminer b_{n-1} et le problème en sera transformé.

Si nous choisissons $e(t) = t^n$, $e^{(n-1)}(t)$ est alors une fonction du temps, le coéfficient de b_{n-1} sera aussi une fonction du temps. Il n'y a qu'une augmentation de complexité à choisir $e(t) = t^n$.

Nous choisissons donc pour une équation differentielle de degré n une entrée $e(t) = t^{n-1}$.

III EQUATION DIFFERENTIELLE DU 1^{er} DEGRE

Nous avons expliqué brièvement dans l'introduction la méthode que nous désirons utiliser pour déterminer les coéfficients a_i et b_i de l'équation différentielle de notre système physique. Nous allons l'appliquer maintenant à un cas particulier: le cas où l'équation est du premier degré. Nous étudierons la convergence de l'itération pour savoir si la méthode est utilisable ou non.

1) Intégration et choix de l'entrée

Nous avons l'équation:

$$\frac{dx}{dt} + ax = b\, e(t) \tag{5}$$

Comme nous l'avons indiqué plus haut, nous intégrons cette équation une fois entre t-T et t.

En utilisant les résultats du chapitre II, (5) est transformée en

$$\Delta(x,t) + a\, I_1(x,t) = b\, I_1(e,t) \tag{6}$$

L'équation différentielle étant du 1^{er} degré, la fonction d'entrée sera la fonction échelon unitaire $e(t) = 1$.

2) Détermination de a.

Si $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont les approximations de a et b au temps t, (6) devient:

$$\Delta(x,t) + \alpha(t)\, I_1(x,t) = \beta(t)\, I_1(e,t) \tag{6'}$$

De (6) nous pouvons tirer la valeur de $\Delta(x,t)$

$$\Delta(x,t) = b\, I_1(e,t) - a\, I_1(x,t)$$

L'équation (6') s'écrit alors

$$[\alpha(t) - a]\, I_1(x,t) = [\beta(t) - b]\, I_1(e,t) \tag{7}$$

Nous appliquons à (7) la méthode iterative d'échange des paramètres .

Au temps t, pour $\alpha(t)$ nous avons:

$$[\alpha(t) - a] I_1(x,t) = [\beta(t-\delta) - b] I_1(e,t) \tag{8}$$

Au temps $t-\delta$ pour $\beta(t-\delta)$ nous avons :

$$[\alpha(t-2\delta)-a] I_1(x,t-\delta) = [\beta(t-\delta) - b] I_1(e,t-\delta) \tag{8'}$$

En raison de la simplicité du cas que nous étudions, (8) et (8') nous permettent de trouver une relation liant les α, et independante des β.

$$[\alpha(t) - a] = [\alpha(t-2\delta) - a] \frac{I_1(x,t-\delta)}{I_1(x,t)} \frac{I_1(e,t)}{I_1(e,t-\delta)} \tag{9}$$

Nous avons vu que nous prenons comme entrée la fonction échelon unitaire. Nous avons alors, pour $t \geqslant T+\delta$

$$I_1(e,t) = \int_{t-T}^{t} dt = T \ ; \quad I_1(e,t-\delta) = \int_{t-\delta-T}^{t-\delta} dt = T; \frac{I_1(e,t)}{I_1(e,t-\delta)} = 1$$

(9) s'ecrit alors.

$$[\alpha(t) - a] = [\alpha(t-2\delta)-a] \frac{I_1(x,t-\delta)}{I_1(x,t)} \tag{9'}$$

Nous aurons de même

$$[\alpha(t-2\delta)-a] = [\alpha(t-4\delta) - a] \frac{I_1(x,t-3\delta)}{I_1(x,t-2\delta)}$$

$$\vdots$$

$$[\alpha(t-\overline{2k-2}\delta) - a] = [\alpha(t-2k\delta) - a] \frac{I_1(x,t-\overline{2k-1}\delta)}{I_1(x,t-\overline{2k-2}\delta)}$$

De ce système d'équations nous tirons facilement

$$[\alpha(t) - a] = [\alpha(t-2k\delta) - a] \frac{I_1(x,t-\delta)}{I_1(x,t)} \frac{I_1(x,t-3\delta)}{I_1(x,t-2\delta)} \cdots\cdots \frac{I_1(x,t-\overline{2k-1}\delta)}{I_1(x,t-\overline{2k-2}\delta)}$$

soit:

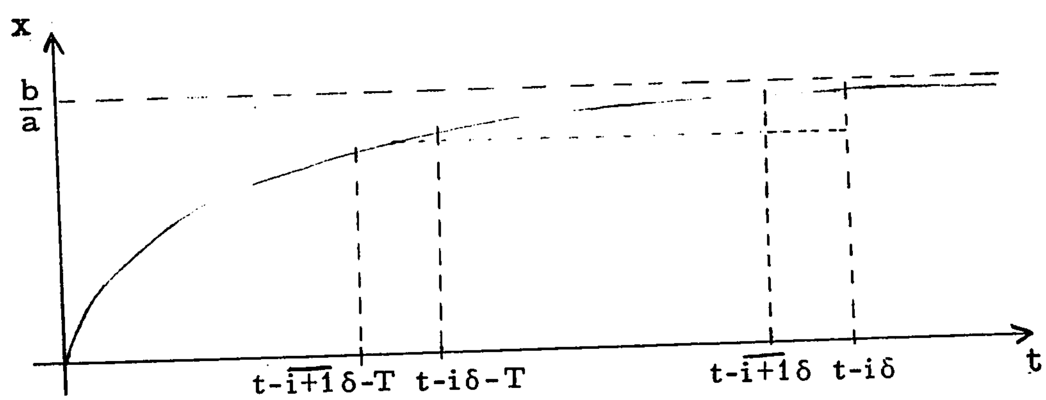
$$[\alpha(t)-a] = [\alpha(t-2k\delta)-a] \prod_{i=0}^{2k-2} \frac{I_1(x,t-\overline{i+1}\delta)}{I_1(x,t-i\delta)} \tag{10}$$

Si le 2^{eme} membre de (10) tend vers zéro et ceci indépendamment de la valeur $\alpha(t-2k\delta)$ alors $[\alpha(t)-a]$ tend vers zéro, $\alpha(t)$ tend vers a, et l'itération proposée nous donne bien a, à partir d'une valeur $\alpha(t-2k\delta)$ tout à fait arbitraire.

Etudions le terme $\dfrac{I_1(x, t-\overline{i+1}\,\delta)}{I_1(x, t-i\,\delta)}$

Si $e = 1$ la résolution de (5) donne

$$x = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$



Représentation graphique de $x = \dfrac{b}{a}(1-e^{-at})$

Il est facile de voir sur ce graphique que quelque soit i et T par rapport à t nous aurons toujours

$$I_1(x, t-\overline{i+1}\,\delta) < I_1(x, t-i\delta)$$

donc

$$\frac{I_1(xt-\overline{i+1}\,\delta)}{I_1(x, t-i\delta)} < 1$$

Tous les termes du produit $\prod_{i=o}^{2k-2} \dfrac{I_1(x, t-\overline{i+1}\,\delta)}{I_1(x, t-i\,\delta)}$ sont inférieurs à 1.

Donc lorsque $k \to \infty$, ce produit tend vers zéro.

$[\alpha(t) - a] \longrightarrow o$, quelque soit la valeur initiale $\alpha(t-2k\delta)$: $\alpha(t) \to a$.

Pour une équation différentielle du 1e degré l'itération exposée au chapitre 1 est parfaitement convergente lorsqu'on l'applique à la détermination du coéfficient a .

3) Détermination de b.

Nous opérons pour le coéfficient b de la même façon que nous l'avons fait pour a.

A partir de (6) nous écrivons

$$\Delta(x,t) + \alpha(t-\delta)\, I_1(x,t) = \beta(t)\, I_1(e,t) \tag{11}$$

$$\Delta(x,t-\delta) + \alpha(t-\delta)\, I_1(x,t-\delta) = \beta(t-2\delta)\, I_1(e,t-\delta)$$

En remplacant $\Delta(x,t)$ et $\Delta(x,t-\delta)$ par leur valeur, nous obtenons:

$$[\alpha(t-\delta) - a]\, I_1(x,t) = [\beta(t) - b]\, I_1(e,t) \tag{12}$$

$$[\alpha(t-\delta) - a]\, I_1(x,t-\delta) = [\beta(t-2\delta) - b]\, I_1(e,t-\delta)$$

De (12) nous obtenons la relation entre $\beta(1)$ et $\beta(t-2\delta)$.

$$[\beta(t) - b] = [\beta(t-2\delta) - b]\, \frac{I_1(e,t-\delta)}{I_1(x,t-\delta)} \cdot \frac{I_1(x,t)}{I_1(e,t)} \tag{13}$$

et avec l'hypothèse sur l'entrée, (13) s'écrit

$$[\beta(t) - b] = [\beta(t-2\delta) - b]\, \frac{I_1(x,t)}{I_1(x,t-\delta)}$$

Nous aurons de même

$$[\beta(t-2\delta) - b] = [\beta(t-4\delta) - b] \frac{I_1(x,t-2\delta)}{I_1(x,t-3\delta)}$$

$$\vdots$$

$$[\beta(t-\overline{2k-2}\delta)-b] = [\beta(t-2k\delta) - b] \frac{I_1(x,t-\overline{2k-2}\delta)}{I_1(x,t - \overline{2k-1}\delta)}$$

Ce système nous donne

$$[\beta(t)-b] = [\beta(t-2k\delta) - b] \prod_{i=o}^{2k-2} \frac{I_1(x,t-i\delta)}{I_1(x,t-\overline{i+1}\delta)} \qquad (14)$$

Si nous comparons (14) et (10) nous voyons que le produit de l'équation (14) est éxactement l'inverse du produit de l'équation (10)

Donc puisque $\prod_{i=o}^{2k-2} \frac{I_1(x,t-i+1\delta)}{I_1(x,t-i\delta)} \to o$ alors $\prod_{i=o}^{2k-2} \frac{I_1(x,t-i\delta)}{I_1(x,t-i+1\delta)} \to \infty$

Par suite nous pouvons conclure que $[\beta(t)-b]$ tend vers ∞ quand $k \to \infty$.

La méthode itérative est divergente pour la détermination du coéfficient b. Nous ne pouvons donc pas déterminer le coéfficient b par la méthode proposée.

Cependant puisque la détermination de a, indépendante de b, est possible, il est facile, une fois a trouvé, de calculer b à partir de l'équation (6).

Nous avons en éffet:

$$\Delta(x,t) + a\ I_1(x,t) = b\ I_1(e,t)$$

Soit :

$$b = \frac{\Delta(x,t) + a\ I_1(x,t)}{I_1(e,t)}.$$

IV EQUATION DIFFERENTIELLE DU 2^e DEGRE

Nous avons l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_o x = b_1 \frac{de}{dt} + b_o e \qquad (15)$$

1) Ecriture matricielle de la méthode itérative.

Avec la méthode précédemment exposée (15) est transformée en:

$$\Delta(x, t) - \Delta(x, t-T) + a_1 [I_1(x,t) - I_1(x,t-T)] + a_o I_2(x,t)$$
$$= b_1 [I_1(e,t) - I_1(e,t-T)] + b_o I_2(e,t). \qquad (16)$$

Et si $\alpha_1(t)$, $\alpha_o(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_o(t)$ sont les estimations de a_1, a_o, b_1, b_o, au temps t, nous pourrons écrire les équations

$$\Delta(x,t) - \Delta(x,t-T) + \alpha_1(t)\ \Delta(I_1(x,t),t) + \alpha_o(t-\delta)\ I_2(x,t)$$
$$= \beta_1(t-\delta)\ \Delta(I_1(e,t),t) + \beta_o(t-\delta) I_2(e,t) \qquad (17)$$

Si nous remplaçons dans (17), $\Delta(x,t) - \Delta(x,t-T)$ par sa valeur tirée de (16) nous obtenons

$$[\alpha_1(t) - a_1]\ \Delta(I_1(x,t),t) + [\alpha_o(t-\delta) - a_o]\ I_2(x,t) \qquad (18)$$
$$= [\beta_1(t-\delta) - b_1]\Delta(I_1(e,t),t) + [\beta_o(t-\delta) - b_o] I_2(e,t).$$

Nous avons de même

$$[\alpha_1(t-\delta) - a_1]\ \Delta(I_1(x,t),t) + [\alpha_o(t) - a_o] I_2(x,t)$$
$$= [\beta_1(t-\delta) - b_1]\Delta(I_1(e,t),t) + [\beta_o(t-\delta) - b_o] I_2(e,t)$$

$$[\alpha_1(t-\delta) - a_1]\ \Delta(I_1(x,t),t) + [\alpha_o(t-\delta) - a_o]\ I_2(x,t)$$
$$= [\beta_1(t) - b_1]\Delta(I_1(e,t),t) + [\beta_o(t-\delta) - b_o] I_2(e,t)$$

$$[\,a_1(t-\delta) - a_1\,]\,\Delta(I_1(x,t),t) + [a_o(t-\delta)-a_o]I_2(x,t)$$
$$= [\,\beta_1(t-\delta)-b_1\,]\Delta(I_1(e,t),t)+[\beta_o(t)-b_o)I_2(e,t)\,.$$

Ces 4 équations peuvent s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \Delta(I_1(x,t),t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2(x,t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(I_1(e,t),t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2(e,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t) - a_1 \\ a_o(t) - a_o \\ \beta_1(t) - b_1 \\ \beta_o(t) - b_o \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -I_2(x,t) & \Delta(I_1(e,t),t) & I_2(e,t) \\ -\Delta(I_1(x,t),t) & 0 & \Delta(I_1(e,t),t) & I_2(e,t) \\ -\Delta(I_1(x,t),t) & -I_2(x,t) & 0 & I_2(e,t) \\ -\Delta(I_1(x,t),t) & -I_2(x,t) & \Delta(I_1(e,t),t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t-\delta) - a_1 \\ a_o(t-\delta) - a_o \\ \beta_1(t-\delta) - b_1 \\ \beta_o(t-\delta) - b_o \end{bmatrix}$$

Soit en multipliant les 2 membres de cette équation par l'inverse de la matrice du 1e membre, nous obtenons.

$$\begin{bmatrix} a_1(t) - a_1 \\ a_o(t) - a_o \\ \beta_1(t) - b_1 \\ \beta_o(t) - b_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{I_2(x,t)}{\Delta(I_1(x,t),t)} & \dfrac{\Delta(I_1(e,t),t)}{\Delta(I_1(x,t),t)} & \dfrac{I_2(e,t)}{\Delta(I_1(x,t),t)} \\ -\dfrac{\Delta(I_1(x,t),t)}{I_2(x,t)} & 0 & \dfrac{\Delta(I_1(e,t),t)}{I_2(x,t)} & \dfrac{I_2(e,t)}{I_2(x,t)} \\ -\dfrac{\Delta(I_1(x,t)t)}{\Delta(I_1(e,t),t)} & -\dfrac{I_2(x,t)}{\Delta(I_1(e,t),t)} & 0 & \dfrac{I_2(e,t)}{\Delta(I_1(e,t),t)} \\ -\dfrac{\Delta(I_1(x,t),t)}{I_2(e,t)} & \dfrac{I_2(x,t)}{I_2(e,t)} & \dfrac{\Delta(I_1(e,t),t)}{I_2(e;t)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t-\delta) - a_1 \\ a_o(t-\delta) - a_o \\ \beta_1(t-\delta) - b_1 \\ \beta_o(t-\delta) - b_o \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\Gamma(t) = A(t)\;\Gamma(t-\delta)$$

Nous aurons de même

$$\Gamma(t-\delta) = A(t-\delta)\ \Gamma(t-2\delta)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\Gamma(t-\overline{k-1}\,\delta) = A(t-\overline{k-1}\,\delta)\ \Gamma(t-k\delta)$$

Ce système d'équations nous donne

$$\Gamma(t) = A(t)\ A(t-\delta) \ldots A(t-\overline{k-1}\,\delta)\ \ \Gamma(t-k\,\delta).$$

L'itération sera convergente et indépendante des valeurs de départ $\alpha_1(t-k\delta)$, $\alpha_o(t-k\delta)$, $\beta_1(t-k\delta)$, $\beta_o(t-k\delta)$, si et seulement si le produit de matrices $A(t).\ A(t-\delta)\ldots A(t-\overline{k-1}\,\delta) \to 0$ quand $k \to \infty$.
Ce produit de matrices a des termes beaucoup trop compliqués pour pouvoir voir son comportement lorsque $k \to \infty$.
L'étude de l'équation aux différences (19) est, elle aussi, très compliquée en raison de la matrice $A(t)$ qui n'est pas indépendante du temps. [2][3] Nous ne pouvons donc pas, comme nous l'avons fait dans le cas d'un équation différentielle du 1^e degré, étudier la convergence de l'itération proposée pour les coéfficients a_1, a_o, b_1, b_o, en gardant une écriture générale. Nous pouvons cependant étudier la stabilité des solutions du problème.
Considérons l'équation (16).
Si $\alpha_1, \alpha_o, \beta_1, \beta_o$, sont les estimations de a_1, a_o, b_1, b_1, ils doivent vérifier (16).

$$\Delta(x,t) - \Delta(x,t-T) + \alpha_1\ [I_1(x,t) - I_1(x,t-T)] + \alpha_o\ I_2(x,t)$$
$$= \beta_1\ [I_1(e,t) - I_1(e,t-T)] + \beta_o\ I_2\,(e,t). \qquad (20)$$

2) Calcul des coéfficients de l'équation différentielle intégrée

D'aprés le chapitre II nous choisissons comme fonction d'entrée la fonction en échelon de vitesse $e = t$

Nous avons alors: $e = t$

$$I_1(e,t) = \int_{t-T}^{t} \tau d\tau = Tt - \frac{T^2}{2}$$

$$I_1(e,t-T) = \int_{t-2T}^{t-T} \tau d\tau = Tt - \frac{T^2}{2} - T^2$$

$$I_1(e,t) - I_1(e,t-T) = T^2$$

$$I_2(e,t) = \int_{t-T}^{t} d\tau' \int_{\tau'-T}^{\tau'} \tau d\tau = T^2(t-T).$$

Pour calculer les coéfficients de 1[e] membre de (20) nous devons trouver $x(t)$.

Résolvons l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_o x = b_1 \frac{de}{dt} + b_o e.$$

En utilisant la transformation de Laplace

$$(s^2 + a_1 s + a_o) X = (b_1 s + b_o) E$$

$$e = t \qquad E = \frac{1}{s^2}$$

$$X = \frac{b_1 s + b_o}{s^2(s^2+a_1 s+a_o)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-m_1} + \frac{D}{s-m_2}$$

$$A = \frac{b_o}{a_o} \qquad B = \frac{b_1}{a_o} - \frac{b_o a_1}{a_o^2}$$

Au temps $t = o$ nous choisissons des conditions initiales telles que, la fonction de réponse $x(t)$ soit hors de son régime transitoire.

Nous aurons donc sous ces conditions

$$x = \frac{b_o}{a_o} t + B.$$

Nous calculons dans ce cas là :

$$\Delta(x,t) - \Delta(x,t-T) = [(\frac{b_o}{a_o} t + B) - (\frac{b_o}{a_o}(t-T)+B)] - [(\frac{b_o}{a_o}(t-T)+B) - (\frac{b_o}{a_o}(t-2T)+B)] = 0$$

$$I_1(x,t) = \int_{t-T}^{t} (\frac{b_o}{a_o} \tau + B) d\tau = \frac{b_o}{a_o}\frac{t^2}{2} + Bt - \frac{b_o}{a_o}\frac{(t-T)^2}{2} - B(t-T)$$

$$= \frac{b_o}{a_o} tT - \frac{b_o}{a_o}\frac{T^2}{2} + BT$$

$$I_1(x,t-T) = \frac{b_o}{a_o}(t-T)T - \frac{b_o}{a_o}\frac{T^2}{2} + BT$$

$$I_1(x,t) - I_1(x,t-T) = \frac{b_o}{a_o} T^2$$

$$I_2(x,t) = \int_{t-T}^{t} [\frac{b_o}{a_o} T(\tau - \frac{T}{2}) + BT] d\tau$$

$$I_2(x,t) = T^2 (B - \frac{b_o}{a_o} T) + \frac{b_o}{a_o} T^2 t.$$

(20) s'écrit maintenant

$$\frac{b_o}{a_o} T^2 \alpha_1 + [T^2(B - \frac{b_o}{a_o} T) + \frac{b_o}{a_o} T^2 t] \alpha_o$$
$$= T^2 \beta_1 + T^2(t-T)\beta_o$$

Soit en simplifiant.

$$\alpha_1 + \left(t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T\right) \alpha_o = \frac{a_o}{b_o} \beta_1 + \frac{a_o}{b_o}(t-T)\, \beta_o \qquad (21)$$

Une solution de l'équation (21) est la solution $\alpha_1 = a_1 \quad \alpha_o = a_o$

$$\beta_1 = b_1 \quad \beta_o = b_o$$

3) Application de la méthode itérative.

Nous appliquons la méthode itérative précédemment exposée à l'équation (21) pour en déterminer les coéfficients α_1, α_o, β_1 et β_o .

Nous obtenons

$$\alpha_1(t) = -\left(t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T\right) \alpha_o(t-\delta) + \frac{a_o}{b_o} \beta_1(t-\delta) + \frac{a_o}{b_o}(t-T)\, \beta_o(t-\delta)$$

$$\alpha_o(t) = -\frac{1}{t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T}\, \alpha_1(t-\delta) + \frac{a_o/b_o}{t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T}\, \beta_1(t-\delta) + \frac{\frac{a_o}{b_o}(t-T)}{t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T}\, \beta_o(t-\delta)$$

$$\beta_1(t) = \frac{1}{a_o/b_o}\, \alpha_1(t-\delta) + \frac{(t + b_1/b_o - a_1/a_o - T)}{a_o/b_o}\, \alpha_o(t-\delta) - (t-T)\, \beta_o(t-\delta)$$

$$\beta_o(t) = \frac{1}{a_o/b_o(t-T)}\, \alpha_1(t-\delta) + \frac{(t + b_1/b_o - a_1/a_o - T)}{a_o/b_o(t-T)}\, \alpha_o(t-\delta) - \frac{1}{(t-T)}\, \beta_1(t-\delta)$$

En faisant

$$t = t + \delta$$

$$\alpha_1(t-\delta) = \alpha_1(t)$$

$$\alpha_o(t-\delta) = \alpha_o(t)$$

$$\beta_1(t-\delta) = \beta_1(t)$$

$$\beta_o(t-\delta) = \beta_o(t)$$

et en répétant cette opération nous réalisons l'itération de la méthode proposée.

Le calcul, fait à partir de données et de conditions initiales différentes donnent toujour pour α_1, α_o β_1, β_o, des valeurs divergeantes de leurs valeurs réelles a_1, a_o, b_1, b_o.

Nous allons étudier les raisons de cette divergence, en etudiant la stabilité de la solution $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_o = a_o$ $\beta_1 = b_1$ $\beta_o = b_o$.

4) <u>Stabilité de la solution de l'équation (21)</u>

Au temps t l'équation (21) s'écrit:

$$\alpha_1(t) + (t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T)\ \alpha_o(t) = \frac{a_o}{b_o}\ \beta_1(t) + \frac{a_o}{b_o}\ (t-T)\ \beta_o(t) \tag{22}$$

Au temps $t + \delta t$, nous aurons

$$\alpha_1(t+\delta t) + (t+\delta t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T)\ \alpha_o(t+\delta t) = \frac{a_o}{b_o}\ \beta_1(t+\delta t) + \frac{a_o}{b_o}(t+\delta t-T)\beta_o(t+\delta t) \tag{23}$$

Pour déterminer $\alpha_1(t+\delta t)$ nous remplaçons dans (23) $\alpha_o(t+\delta t)$ par $\alpha_o(t)$, $\beta_1(t+\delta t)$ par $\beta_1(t)$, $\beta_o(t+\delta t)$ par $\beta_o(t)$.

(23) s'écrit alors

$$\alpha_1(t+\delta t) + (t+\frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T)\ \alpha_o(t) + \delta t\ \alpha_o(t) = \frac{a_o}{b_o}\ \beta_1(t) + \frac{a_o}{b_o}\ (t-T)\beta_o(t) + \frac{a_o}{b_o}\ \delta t\ \beta_o(t)\ . \tag{24}$$

En soustrayant (24) à (22), il vient:

$$\alpha_1(t+\delta t) - \alpha_1(t) = \delta\ t\ [\frac{a_o}{b_o}\ \beta_o(t) - \alpha_o(t)]$$

$$\delta\,\alpha_1(t) = \delta t\ [\frac{a_o}{b_o}\ \beta_o(t) - \alpha_o(t)]$$

$$\frac{d\alpha_1(t)}{dt} = \frac{a_o}{b_o}\ \beta_o(t) - \alpha_o(t).$$

et en répétant cette opération nous réalisons l'itération de la méthode proposée.

Le calcul, fait à partir de données et de conditions initiales différentes donnent toujour pour α_1, α_o β_1, β_o, des valeurs divergeantes de leurs valeurs réelles a_1, a_o, b_1, b_o.

Nous allons étudier les raisons de cette divergence, en etudiant la stabilité de la solution $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_o = a_o$ $\beta_1 = b_1$ $\beta_o = b_o$.

4) <u>Stabilité de la solution de l'équation (21)</u>

Au temps t l'équation (21) s'écrit:

$$\alpha_1(t) + (t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T) \; \alpha_o(t) = \frac{a_o}{b_o} \beta_1(t) + \frac{a_o}{b_o} (t-T) \; \beta_o(t) \qquad (22)$$

Au temps $t + \delta t$, nous aurons

$$\alpha_1(t+\delta t) + (t+\delta t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T) \; \alpha_o(t+\delta t) = \frac{a_o}{b_o} \beta_1(t+\delta t) + \frac{a_o}{b_o}(t+\delta t - T) \beta_o(t+\delta t) \qquad (23)$$

Pour déterminer $\alpha_1(t+\delta t)$ nous remplaçons dans (23) $\alpha_o(t+\delta t)$ par $\alpha_o(t)$, $\beta_1(t+\delta t)$ par $\beta_1(t)$, $\beta_o(t+\delta t)$ par $\beta_o(t)$.

(23) s'écrit alors

$$\alpha_1(t+\delta t) + (t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T) \; \alpha_o(t) + \delta t \; \alpha_o(t) = \frac{a_o}{b_o} \beta_1(t) + \frac{a_o}{b_o} (t-T) \beta_o(t) + \frac{a_o}{b_o} \delta t \; \beta_o(t) \, . \qquad (24)$$

En soustrayant (24) à (22), il vient:

$$\alpha_1(t+\delta t) - \alpha_1(t) = \delta t \; [\frac{a_o}{b_o} \beta_o(t) - \alpha_o(t)]$$

$$\delta \alpha_1(t) = \delta t \; [\frac{a_o}{b_o} \beta_o(t) - \alpha_o(t)]$$

$$\frac{d\alpha_1(t)}{dt} = \frac{a_o}{b_o} \beta_o(t) - \alpha_o(t).$$

Déterminons de même $\frac{d\alpha_o(t)}{dt}$, $\frac{d\beta_1(t)}{dt}$, $\frac{d\beta_o(t)}{dt}$ à partir de (22) et (23).

$\alpha_o(t+\delta t)$ est obtenu en faisant $\alpha_1(t+\delta t) = \alpha_1(\delta)$, $\beta_1(t+\delta t) = \beta_1(t)$, $\beta_o(t+\delta t) = \beta_o(t)$.

Nous avons alors:

$$\left(t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T\right)\left[\alpha_o(t+\delta t) - \alpha_o(t)\right] + \delta t\, \alpha_o(t+\delta t) = \frac{a_o}{b_o}\,\delta t\, \beta_o(t).$$

$$\left(t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T\right)\delta\, \alpha_o(t) = \delta t\left[\frac{a_o}{b_o}\,\beta_o(t) - \alpha_o(t)\right]$$

$$\frac{d\alpha_o(t)}{dt} = \frac{\frac{a_o}{b_o}\,\beta_o(t) - \alpha_o(t)}{t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T}$$

$\beta_1(t+\delta t)$ est obtenu en faisant $\alpha_1(t+\delta t) = \alpha_1(t)$, $\alpha_o(t+\delta t) = \alpha_o(t)$, $\beta_o(t+\delta) = \beta_o(t)$

nous avons alors:

$$\delta t\, \alpha_o(t) = \frac{a_o}{b_o}\,\delta\, \beta_1(t) + \frac{a_o}{b_o}\,\delta t \cdot \beta_o(t)$$

$$\frac{d\beta_1(t)}{dt} = \frac{b_o}{a_o}\,\alpha_o(t) - \beta_o(t)$$

$\beta_o(t+\delta t)$ est obtenu en faisant $\alpha_1(t+\delta t) = \alpha_1(t)$, $\alpha_o(t+\delta t) = \alpha_o(t)$, $\beta_1(t+\delta t) = \beta_1(t)$

$$\delta t\ \alpha_o(t) = \frac{a_o}{b_o}(t-T)\ \delta\, \beta_o(t) + \frac{a_o}{b_o}\,\delta t \cdot \beta_o(t)$$

$$\frac{d\,\beta_o(t)}{dt} = \frac{\frac{b_o}{a_o}\,\alpha_o(t) - \beta_o(t)}{t - T}$$

Nous obtenons donc le système d'équations différentielles

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{a_o}{b_o}\,\beta_o - \alpha_o \qquad \text{a)}$$

$$\frac{d\alpha_o}{dt} = \frac{\frac{a_o}{b_o}\,\beta_o - \alpha_o}{t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T} = \frac{\frac{a_o}{b_o}\,\beta_o - \alpha_o}{t + c - T} \qquad \text{b)}$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = \frac{b_o}{a_o}\,\alpha_o - \beta_o \qquad \text{c)}$$

$$\frac{d\beta_o}{dt} = \frac{\frac{b_o}{a_o}\,\alpha_o - \beta_o}{t - T} \qquad \text{d)}$$

L'étude de la stabilité revient à résoudre ce système.
Nous constatons que seul α_o, β_o et t interviennent dans le 2eme membre de ces 4 equations. Nous pouvons donc resoudre b) et d) indépendamment de a) et c)

$$\frac{d\alpha_o}{dt} = \frac{\frac{a_o}{b_o}\,\beta_o - \alpha_o}{t + c - T} \qquad \text{b)}$$

$$\frac{d\beta_o}{dt} = \frac{\frac{b_o}{a_o}\,\alpha_o - \beta_o}{t - T} \qquad \text{d)}$$

De b) et d) nous tirons

$$(t + c - T)\ \frac{d\alpha_o}{dt} = -\frac{a_o}{b_o}\ (t - T)\ \frac{d\beta_o}{dt} \qquad (25)$$

d) peut s'écrire

$$\frac{a_o}{b_o}\ (t-T)\ \frac{d\beta_o}{dt} = \alpha_o - \frac{a_o}{b_o}\ \beta_o \ .$$

Differencions cette équation. Il vient

$$\frac{a_o}{b_o}\ (t-T)\ \frac{d^2\beta_o}{dt^2} + \frac{a_o}{b_o}\ \frac{d\beta_o}{dt} = -\frac{a_o}{b_o}\ \frac{d\beta_o}{dt} + \frac{d\alpha_o}{dt} \qquad (26)$$

Portons (25) dans (26). Il vient.

$$\frac{a_o}{b_o}\ (t-T)\ \frac{d^2\beta_o}{dt^2} + \frac{d\beta_o}{dt}\ \left[\frac{a_o}{b_o} + \frac{a_o}{b_o} + \frac{a_o}{b_o}\ \frac{t - T}{t+c-T}\right] = 0$$

Soit, après simplification

$$(t-T)\ \frac{d^2\beta_o}{dt^2} = -\frac{d\beta_o}{dt}\ \left[2 + \frac{t-T}{t + c-T}\right]$$

$$\frac{d^2\beta_o}{dt^2} = -\frac{d\beta_o}{dt}\ \left[\frac{2}{t-T} + \frac{1}{t+c-T}\right]$$

Intégrons cette équation différentielle

$$u = \frac{d\beta_o}{dt}\ ; \quad \frac{du}{dt} = -\left[\frac{2}{t - T} + \frac{1}{t+c-T}\right] u.$$

$$\frac{du}{u} = -\left[\frac{2}{t-T} + \frac{1}{t+c - T}\right] dt.$$

$$u = \frac{d\beta_o}{dt} = \frac{k_1}{(t-T)^2(t+c-T)} = k_1 \left[\frac{1/c}{(t-T)^2} - \frac{1/c^2}{(t-T)} + \frac{1/c^2}{t+c-T} \right]$$

$$\beta_o = k_2 - k_1 \left[\frac{1}{c} \frac{1}{t-T} - \frac{1}{c^2} \log \left(1 + \frac{c}{t-T}\right) \right]$$

Connaissant β_o et $\frac{d\beta_o}{dt}$ il est facile de trouver α_o à partir de d)

$$\frac{b_o}{a_o} \alpha_o = \frac{k_1}{(t-T)(t+c)} + k_2 + k_1 \left[- \frac{1}{c} \frac{1}{t-T} + \frac{1}{c^2} \log \left(1 + \frac{c}{t-T}\right) \right]$$

Nous avons donc les 2 solutions du système d'équation b) d).

$$\alpha_o = \frac{a_o}{b_o} k_2 + \frac{a_o}{b_o} k_1 \left[- \frac{1}{(t+c)c} + \frac{1}{c^2} \log \left(1 + \frac{c}{t-T}\right) \right] \quad (27)$$

$$\beta_o = k_2 + k_1 \left[- \frac{1}{(t-T)c} + \frac{1}{c^2} \log \left(1 + \frac{c}{t-T}\right) \right] \quad (28)$$

Si t est grand $\alpha_o \simeq \frac{a_o}{b_o} k_2$

$$\beta_o \simeq k_2$$

Donc la solution obtenue lorsque t augmente indéfiniment, dépend de la constante k_2, c'est à dire des conditions initiales.
Si $\alpha_o(o)$ et $\beta_o(o)$ sont les valeurs initiales de $\alpha_o(t)$ et $\beta_o(t)$, exprimons k_1 et k_2 en fonction de ces valeurs initiales.
A partir de (27) et (28) nous pouvons écrire

$$\alpha_o(t) - \frac{a_o}{b_o} \beta_o(t) = \frac{a_o}{b_o} k_1 \left[- \frac{1}{(t+c)c} + \frac{1}{(t-T)c} \right]$$

Pour $t = 0$ cette équation s'écrit.

$$a_o(o) - \frac{a_o}{b_o}\ \beta_o(o) = \frac{a_o}{b_o}\ k_1 \left[- \frac{1}{c^2} - \frac{1}{Tc} \right] = - \frac{a_o}{b_o}\ \frac{T+c}{c^2\ T}\ k_1$$

$$k_1 = \left[\beta_o(o) - \frac{b_o}{a_o}\ a_o(o) \right] \frac{c^2\ T}{T+c}$$

Nous en déduisons k_2

$$k_2 = \beta_o(o) - \left[\beta_o(o) - \frac{b_o}{a_o}\ a_o(o) \right] \frac{c^2 T}{T+c} \left[+ \frac{1}{cT} + \frac{1}{c^2} \log \left(\frac{T-c}{T} \right) \right]$$

Nous voyons que k_2 depend des conditions initiales $a_o(o)$ et $\beta_o(o)$.

Donc lorsque t devient grand

$$a_o(t) \simeq \frac{a_o}{b_o}\ k_2 \quad \text{et} \quad \beta_o \simeq k_2$$ ne tendent pas vers la solution

$$a_o = a_o \qquad \beta_o = b_o .$$

Nous ne pouvons donc pas déterminer les coéfficients a_1, a_o, β_1, β_o à partir des hypothèses que nous nous sommes données. Nous allons voir maintenant s'il n'est pas possible de trouver certains coéfficients sous certaines conditions.

5) Cas ou β_o reste constamment egal a b_o.

Le système d'équations différentielles b) d) se réduit à l'équation b)

$$(t + c - T)\ \frac{da_o}{dt} = \frac{a_o}{b_o}\ b_o - a_o = a_o - a_o .$$

Intégrons cette équation.

$$\frac{d\alpha_o}{a_o - \alpha_o} = \frac{dt}{t+c-T} \quad ; \quad -\log \frac{a_o - \alpha_o}{k} = \log(t+c-T)$$

$$a_o - \alpha_o = \frac{k}{t+c-T}$$

$$\alpha_o = a_o - \frac{k}{t+c-T}$$

lorsque t devient grand, α_o tend vers a_o quelles que soient les conditions initiales.

Nous pouvons écrire l'équation:

$$\alpha_o(t) = \alpha_o(t-\delta) + \delta\alpha_o(t-\delta)$$

$$\alpha_o(t) = \alpha_o(t-\delta) + \delta t \; . \left[\frac{a_o - \alpha_o(t-\delta)}{t+c-T} \right]$$

$\alpha_o(t)$ tend vers a_o lorsque t devient grand.

Nous arrivons à cette première conclusion:

La solution $\alpha_o = a_o$ est stable à la condition que β_o soit et reste égal à b_o.

6) <u>Stabilité pour les solutions α_1 et β_1.</u>

Nous avons:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{a_o}{b_o}\,\beta_o - \alpha_o$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = \frac{b_o}{a_o}\,\alpha_o - \beta_o$$

Nous avons vu qu'il fallait que β_o soit égal à b_o pour que α_o tende vers a_o.

Voyons quelles sont les valeurs que prennent α_1 et β_1 lorsque $\beta_o = b_o$ et que α_o devient égal à a_o.

L'équation (22) s'écrit sous ces conditions

$$\alpha_1(t) + \left(t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T\right) a_o = \frac{a_o}{b_o} \beta_1(t) + \frac{a_o}{b_o}(t-T)\, b_o$$

Soit après simplification

$$\alpha_1(t) = \frac{a_o}{b_o} \beta_1(t) - \left(\frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o}\right) a_o .$$

Nous écrirons donc d'après notre méthode itérative

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = \dfrac{a_o}{b_o} \beta_1(t-\delta) - \left(\dfrac{b_1}{b_o} - \dfrac{a_1}{a_o}\right) a_o \\[2ex] \beta_1(t) = \dfrac{b_o}{a_o} \alpha_1(t-\delta) + \left(\dfrac{b_1}{b_o} - \dfrac{a_1}{a_o}\right) b_o \end{cases}$$

De ce système nous tirons

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = \alpha_1(t-2\delta) \\[1ex] \beta_1(t) = \beta_1(t-2\delta) \end{cases}$$

Nous voyons que α_1 et β_1 prennent à la limite des valeurs proportionnelles aux valeurs initiales $\alpha_1(o)$ et $\beta_1(o)$

Nous voyons donc que la condition $\alpha_o = a_o$ et $\beta_o = b_o$ n'est pas suffisante pour déterminer α_1 et β_1 par la méthode proposée. Il nous faut en plus nous donner $\alpha_1 = a_1$ pour obtenir $\beta_1 = b_1$ ou nous donner $\beta_1 = b_1$ pour obtenir $\alpha_1 = a$.

Nous venons de voir que la détermination des coéfficients d'une équation différentielle du 2eme degré, n'était possible par la méthode iterative proposée, lorsque l'entrée est une fonction en échelon de vitesse, que sous certaines conditions initiales bien déterminées. Nous allons voir si cette impossibilité de résoudre le problème sans connaitre 2 coefficients particuliers sur 4 est due à la méthode utilisée ou seulement à l'entrée choisie. Pour cela nous allons considérer un problème semblable.

7) Résolution de l'équation (22) par la methode de Diamessis .

Nous pouvons écrire l'équation (22) à 4 temps différents t_1, t_2, t_3, t_4.
Nous rejoignons ainsi la méthode de Diamessis.
Nous obtenons un système de 4 équations à 4 inconnues.

$$\alpha_1 + (t_1 + c - T)\,\alpha_o = \frac{a_o}{b_o}\,\beta_1 + \frac{a_o}{b_o}\,(t_1 - T)\,\beta_o$$

$$\alpha_1 + (t_2 + c - T)\,\alpha_o = \frac{a_o}{b_o}\,\beta_1 + \frac{a_o}{b_o}\,(t_2 - T)\,\beta_o$$

$$\alpha_1 + (t_3 + c - T)\,\alpha_o = \frac{a_o}{b_o}\,\beta_1 + \frac{a_o}{b_o}\,(t_3 - T)\,\beta_o$$

$$\alpha_1 + (t_4 + c - T)\,\alpha_o = \frac{a_o}{b_o}\,\beta_1 + \frac{a_o}{b_o}\,(t_4 - T)\,\beta_o$$

La résolution de ce système conduit à considérer l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 + c - T & -\frac{a_o}{b_o} & -\frac{a_o}{b_o}(t_1 - T) \\ 1 & t_2 + c - T & -\frac{a_o}{b_o} & -\frac{a_o}{b_o}(t_2 - T) \\ 1 & t_3 + c - T & -\frac{a_o}{b_o} & -\frac{a_o}{b_o}(t_3 - T) \\ 1 & t_4 + c - T & -\frac{a_o}{b_o} & -\frac{a_o}{b_o}(t_4 - T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_o \\ \beta_1 \\ \beta_o \end{bmatrix} = 0 \qquad (29)$$

Nous pouvons écrire l'équation (29)

$$M \,.\, \Gamma = 0 \,.$$

Pour que ce système admette une solution et une seule , le deuxieme membre de cette équation et le déterminant de la matrice M doivent être différents de zéro. Hors, avec les hypotheses que nous nous sommes fixées, le deuxieme membre est nul, et le déterminant de M est égal à zéro pour 2 raisons: d'une part parce que les 2 collonnes 1 et 3 sont proportionnelles d'autre part parce que les collonnes 2 et 4 le sont aussi.

Si nous nous fixons α_o ou β_o nous réduisons le problème à une resolution d'équations à 3 inconnues. Par exemple:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 + c - T & -\frac{a_o}{b_o} \\ 1 & t_2 + c - T & -\frac{a_o}{b_o} \\ 1 & t_3 + c - T & -\frac{a_o}{b_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_o \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 - T \\ t_2 - T \\ t_3 - T \end{bmatrix} b_o$$

Cette condition ne suffit pas, car nous avons encore, dans le nouveau déterminant, 2 collonnes (1 et 3) proportionnelles. Nous devons nous fixer soit α_1 soit β_1.

Donc si le deuxieme membre de l'équation (29) est nul et si le déterminant de la matrice M l'est aussi, le système ne peut admettre qu'une solution dépendant d'une ou de plusieurs constantes arbitraires. Nous voyons apparaitre les raisons pour lesquelles nous devions nous fixer 2 coéfficients pour trouver les 2 autres.

Nous allons voir dans le chapitre suivant, si, le fait de modifier certaines de nos hypothèses ne nous permet pas d'obtenir l'équation (29) sous une forme telle que les conditions précédemment exposées soient remplies. Avec ces nouvelles hypothèses nous envisagerons l'utilisation de notre méthode.

V CONCLUSION

Nous devons exposer tout d'abord les résultats obtenus en fonction des hypothèses choisies. Nous vérrons ensuite la possibilité de changer ces hypothèses pour que notre problème réponde à certaines conditions de résolution. Avec ces nouvelles conditions nous étudierons les résultats obtenus sur l'équation du 1^{er} degré pour en déduire les résultats susceptibles d'être obtenus sur l'équation du 2^{e} degré.

1) Equation du premier degré:les hypothèses, les résultats.

Dans l'équation différentielle du 1^{er} degré l'entrée était une fonction à échelon unitaire.

Nous appliquions notre méthode itérative à l'équation

$$\Delta(x,t) + \alpha\, I_1(x,t) = \beta\, I_1(e,t) \qquad (b')$$

Nous nous placions dans le régime transitoire de la réponse pour que le terme $\Delta(x,t)$ ne soit pas nul.

Nous trouvions qu'aprés plusieurs itérations α convergeait vers a alors que β divergeait de b.

Voyons ce que donne la méthode de Diamessis appliquée à l'équation (6')

Nous avons le système

$$\begin{cases} \Delta(x,t_1) + \alpha\, I_1(x,t_1) = \beta I_1(e,t_1) \\ \Delta(x,t_2) + \alpha\, I_1(x,t_2) = \beta I_1(e,t_2) \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont

$$\alpha = \frac{\begin{bmatrix} -\Delta(x,t_1) & -I_1(e,t_1) \\ -\Delta(x,t_2) & -I_1(e,t_2) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} I_1(x,t_1) & -I_1(e,t_1) \\ I_1(x,t_2) & -I_1(e,t_2) \end{bmatrix}}$$

$$\beta = \frac{\begin{bmatrix} I_1(x,t_1) & -\Delta(x,t_1) \\ I_1(x,t_2) & -\Delta(x,t_2) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} I_1(x,t_1) & -I_1(e,t_1) \\ I_1(x,t_2) & -I_1(e,t_2) \end{bmatrix}}$$

Nous avons l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} + ax = be$.

Si $e = 1$ et $x(o) = o$ alors $x = \frac{b}{a}\,(1 - e^{-at})$

$$\Delta(y,t_1) = \frac{b}{a}\, e^{-at_1}\,(e^{aT} - 1)$$

$$\Delta(y,t_2) = \frac{b}{a}\, e^{-at_2}\,(e^{aT} - 1)$$

$$I_1(y,t_1) = \frac{b}{a}\left[T + \frac{e^{-at_1}}{a}(1 - e^{aT})\right]$$

$$I_1(y,t_2) = \frac{b}{a}\left[T + \frac{e^{-at_2}}{a}(1 - e^{aT})\right]$$

$$I_1(e,t_1) = T$$

$$I_1(e,t_2) = T .$$

En portant ces valeurs dans les déterminants nous obtenons après simplification quelque soit t_1 et t_2

$$\alpha = a$$
$$\beta = b.$$

Donc $\alpha = a$, et $\beta = b$ est bien la solution de l'équation (b')
Nous pouvons l'obtenir comme nous venons de le voir par la méthode de Diamessis. Nous pouvons aussi l'obtenir, comme nous l'avons vu par notre méthode itérative en déterminant d'abord a, et en utilisant cette valeur a trouvée pour déterminer b.

2) Equation du 2^{eme} degré: les hypothèses, les résultats.

Dans l'équation différentielle du 2^{eme} degré, nous avions choisi une entrée à échelon de vitesse $e(t) = t$.
Nous avions l'équation

$$\Delta^2(x,t) + \alpha_1 \Delta(I_1(x,t),t) + \alpha_o I_2(x,t) = \beta_1 \ \Delta(I_1(e,t),t) + \beta_o I_2(e,t)$$

Nous nous placions dans le régime constant de la réponse .
Dans cette hypothèse, le terme $\Delta^2(x,t)$ était nul.
A $e(t) = t$ correspondait la fonction $x(t) = \frac{b_o}{a_o} t + \frac{b_1 a_o - b_o a_1}{a_o^2}$

En remplacant les coéfficients par leur valeur nous obtenions l'équation

$$\alpha_1 + \left(t + \frac{b_1}{b_o} - \frac{a_1}{a_o} - T\right) \alpha_o = \frac{a_o}{b_o} \beta_1 + \frac{a_o}{b_o} (t-T) \beta_o \qquad (22)$$

Notre méthode itérative était divergente pour toute les inconnues de cette équation.

Une étude de la stabilité de la solution de cette équation, montrait que cette solution était fonction de constantes arbitraires et que le fait de se fixer 2 inconnues (α_o ou β_o et α_1 ou β_1) permettait d'éliminer ces constantesarbitraires et de trouver les 2 autres inconnues. L'application de la méthode de Diamessis à cette même équation (22) montrait trés clairement pourquoi la solution dépendait de constantes arbitraires, et pourquoi alors nous devions nous fixer α_o ou β_o et α_1 ou β_1 pour obtenir une solution unique à l'équation. Ces raisons étaient au nombre de 3

- Le deuxieme membre de l'équation $M.\Gamma = O$ était nul
- Le déterminant de M était nul en raison de la proportionnalité des collonnes 1 et 3.
- Le déterminant de M était nul en raison de la proportionnalité des collonnes 2 et 4.

3) Modification des hypothèses faites pour l'équation différentielle du 2eme degré.

La modification de nos hypothèses va être commandée par la nécéssité de rendre le deuxieme membre de l'équation $M.\Gamma = O$ différent de zéro et les collonnes du déterminant de M non proportionnelles. Le deuxieme membre sera différent de zéro si le terme

$\Delta^2(x,t)$ est différent de zéro.

$$\Delta^2(x,t) = \int_{t-T}^{t} \int_{t-T}^{t} \frac{d^2x}{d\tau^2} \, d\tau^2$$

Ce terme s'annulait parce que nous avions choisi $e(t) = t$ et parce que nous nous placions dans le régime constant de la réponse. Choisissons $e(t) = t^k$ avec $k \geqslant 2$ et continuons à ne considérer que le régime constant de la réponse. Alors $x(t)$ est un polynome en t de degré k et $\Delta^2(x,t)$ est un polynôme en t de degré $k-2$, différent de zéro.

Donc par le choix de cette nouvelle entrée nous répondons à la première condition, à savoir que le deuxieme membre de $M.\Gamma = O$ devient différent de zéro. Nous ne repondons cependant pas à la deuxième condition. En effet $I_2(e,t)$ et $I_2(x,t)$ sont des polynômes en t de degré k et $\Delta(I_1(e,t),t)$ et $\Delta(I_1(x,t),t)$ sont des polynômes en t de degré $k-1$. Le déterminant de M a encore les deux mêmes raisons d'être nul.

Gardons $e(t) = t$, mais plaçons nous dans le régime transitoire de la réponse. Alors le terme $\Delta^2(x,t)$ est différent de zéro et la première condition est remplie.

Les termes $\Delta(I_1(x,t),t)$, $I_2(x,t)$ deviennent des fonctions exponentielles de t alors que les termes $\Delta(I_1(e,t),t)$ et $I_2(e,t)$ restent des polynômes en t.

Le déterminant de la matrice M ne s'annule plus et l'équation (20) admet une solution et une seule. C'est donc bien l'hypothèse que nous devons changer dans notre étude du chapitre IV : nous devons nous placer dans le régime transitoire de la réponse.

4) Résultats susceptibles d'être obtenus sous cette nouvelle condition.

En nous plaçant dans le régime transitoire de la réponse nous faisons en sorte que l'équation (20) admette une solution et une seule. La méthode de Diamessis est applicable et donne une solution unique $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_o = a_o$, $\beta_1 = b_1$, $\beta_o = b_o$.

Cette hypothèse est donc nécessaire à l'utilisation de notre méthode itérative. Elle n'entraine pas obligatoirement la convergence des itérations effectuées. Il est même probable que, comme l'équation différentielle du premier degré nous ayons la convergence de la méthode pour certains coefficients et la divergence pour d'autres. Il se peut aussi que la méthode converge pour tous les coéfficients à l'exception de β_o celui ci s'obtenant alors de la même façon que dans l'équation du 1^e degré.

En raison de la complexite des termes $\Delta^2(x,t)$, $\Delta(I_1(x,t),t)$, $I_2(x,t)$, seule une calculatrice pourrait nous donner la réponse cherchée.

Nous n'avons voulu ici que faire une étude théorique de la méthode itérative proposée. Elle nous a conduit à la conclusion que nous devions nous placer dans le regime transitoire de la réponse, et que s'il y a certainement convergence des itérations pour certains coéfficients il y a peut être aussi divergence pour d'autres.

REFERENCES

[1] J.E. DIAMESSIS - A new method for determining the parameters of physical systems. Proceedings of the I.E.E.E. - Vol. 53 No. 2 - pp. 205, 206 February 1965.

- On the determination of the parameters of certain nonlinear systems. Proceedings of the I.E.E.E. - Vol. 53 No. 3 pp 319 - 320 - March 1965.

- A method for determining the parameters of certain time-varying systems. Proceedings of the I.E.E.E. - Vol. 53 No. 4 pp 396 - 397 - April 1965.

[2] R. BELLMAN - Stability theory of differential equations N.Y., McGraw Hill, 1953.

[3] R. BELLMAN - Introduction to Matrix Analysis, N.Y., McGraw Hill, 1960.

[4] HAZLERIGG,A.D.G. - and NOTON A.R.M. "An application of cross correlation equipment to linear system identification", Proc. of IEE, Vol. 112, pages 2385-2400 - Dec. 1965.

[5] R.E. KALMAN - "Design of a self-optimizing control system", Trans. ASMI, Vol. 80, pp 468-478, February, 1958.

- M.J. LEVIN - "Estimation of a system pulse transfer function in the presence noise". I.E.E.E. Trans. on Automatic Control, Vol. AC-9 pp 229-235 - July 1964.

VITAE

NOM	:	JEUX, Bernard Jean
NAISSANCE	:	Sousse - TUNISIE - mars 7, 1939
ETUDES	:	Enseignement Primaire: Collége de Bizerte - Tunisie Enseignement secondaire: Lycee Ampére - Lyon - FRANCE Enseignement Supérieur: Université de Grenoble - FRANCE Diplomes: Ingenieur en Electrotechnique (I. E. G), Licencié es sciences.