

"APPLICATIONS DE LA THEORIE DE MORSE"

par

Jacques MARION

Thèse présentée
à l'école des Etudes supérieures
de l'Université d'Ottawa
pour l'obtention de la maîtrise es sciences
en mathématiques

1973

REMERCIEMENT

Je remercie le professeur Marcel DERUAZ qui m'a proposé
ce travail et qui en a suivi de près l'exécution,

RESUME

"APPLICATIONS DE LA THEORIE DE MORSE"

Une démonstration due à H. Samelson du théorème de de Rham, fondée principalement sur la théorie de Morse, est exposée en détails et avec certaines modifications; la même technique de démonstration est ensuite utilisée pour obtenir une preuve directe d'une variante du théorème d'Hurewicz en dimension un.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 1

CHAPITRE PREMIER. L'Homomorphisme de de Rham 1

CHAPITRE II. "L'Isomorphisme de de Rham dans le cas
d'une variété compacte" 23

CHAPITRE III. "Théorème d'Hurewicz en dimension 1" 37

BIBLIOGRAPHIE 52

INTRODUCTION

Plusieurs démonstrations du théorème de de Rham sur l'isomorphisme naturel entre la cohomologie singulière réelle et la cohomologie des formes différentielles d'une variété compacte font depuis longtemps partie de la littérature spécialisée en topologie et géométrie différentielle. En 1967 Hans Samelson donne une démonstration nouvelle du théorème en utilisant une "décomposition en anses" de la variété, méthode basée sur la théorie de Morse, et une technique qui combine quelques résultats élémentaires de la cohomologie des formes différentielles et de la cohomologie singulière.

Les deux premiers chapitres de cette thèse consistent en une exposition détaillée et légèrement modifiée de la publication de Samelson parue dans "Topology, vol. 6, pp. 427-432, 1967". Comme modification principale, nous évitons d'utiliser le concept de "variété à coin", qui joue un rôle important dans la démonstration de Samelson; à la place, nous faisons appel à certains théorèmes sur la cohomologie des formes différentielles (cohomologie de de Rham), entre autres celui d'après lequel la cohomologie de de Rham d'une variété à bord est naturellement isomorphe à celle de l'intérieur de la variété (l'isomorphisme étant induit par l'inclusion), et celui voulant qu'il existe une suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie de de Rham pour tout couple d'ouverts d'une variété.

Dans son livre "Topologie algébrique" (Hermann, Paris, 1970), C. Godbillon utilise les mêmes techniques comprenant des résultats

de la théorie de Morse, des suites exactes d'espaces de cohomologie et un argument d'induction sur la dimension des variétés pour démontrer le théorème de finitude des espaces de cohomologie d'une variété compacte, ainsi que le théorème de Kunneth qui établit un isomorphisme naturel entre le produit tensoriel des cohomologies de deux variétés dont une est compacte et la cohomologie de la variété produit. Egalement par une méthode analogue, J.T. Schwartz prouve le théorème de dualité de Poincaré dans "Differential Geometry and Topology" (Gordon et Breach, 1968).

Dans le même ordre d'idées, le dernier chapitre de la présente thèse illustre une autre application de ces techniques topologiques et algébriques. Il s'agit d'un problème suggéré par C. Godbillon (dans son ouvrage cité plus haut), qui consiste à trouver une démonstration directe, c'est-à-dire sans faire usage de l'homologie et cohomologie singulières, d'une variante du théorème d'Hurewicz en dimension un; ce théorème établit un isomorphisme naturel (lié à l'isomorphisme de de Rham) entre le premier espace de cohomologie de de Rham d'une variété compacte connexe M et l'espace des homomorphismes à valeur réelle du groupe fondamental de M .

CHAPITRE I

L'HOMOMORPHISME DE DE RHAM

1.1 L'espace de cohomologie de de Rham

Soit M une variété à bord de dimension n , qu'on supposera toujours de classe C^∞ et à base dénombrable. On désigne par $D^p(M)$ l'espace des formes différentielles de degré p sur M . En particulier, $D^0(M)$ est l'espace des fonctions différentiables sur M , aussi dénoté par $\mathcal{D}(M)$, et $D^p(M)=0$ pour $p > n$. La somme directe $D(M) = \sum_{p=0}^{\infty} D^p(M)$ est l'espace gradué des formes différentielles sur M .

Le produit extérieur $(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \wedge \beta$ est une application bilinéaire de $D^p(M) \times D^q(M)$ dans $D^{p+q}(M)$ ayant les propriétés suivantes:

1. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$, $\alpha \in D^p(M)$, $\beta \in D^q(M)$;
2. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$, $\alpha \in D^p(M)$, $\beta \in D^q(M)$, $\gamma \in D^r(M)$,
faisant de $D(M)$ une algèbre graduée commutative.

La différentiation extérieure est une application linéaire (sur \mathbb{R}) $d: D(M) \rightarrow D(M)$ telle que

$$(i) \quad d(D^p(M)) \subset D^{p+1}(M)$$

$$(ii) \quad d \circ d = 0$$

$$(iii) \quad d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p (\alpha \wedge d\beta), \quad \alpha \in D^p(M), \quad \beta \in D(M)$$

Considérons la suite d'espaces vectoriels

$$D^0(M) \xrightarrow{d} D^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} D^{p-1}(M) \xrightarrow{d} D^p(M) \xrightarrow{d} D^{p+1}(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Soit $Z^p(M)$ le noyau de $d_p \equiv d|D^p(M)$
et $B^p(M)$ l'image de d_{p-1} . On pose $B^0(M) = 0$.

Une forme α est fermée si $d\alpha = 0$; elle est exacte si elle appartient à l'image de d .

On a que $B^p(M) \subset Z^p(M)$ car $dd = 0$.

L'espace quotient $R^p(M) = Z^p(M)/B^p(M)$ est l'espace de cohomologie de de Rham en dimension p de la variété M . Si α est une p -forme fermée, $\alpha + B^p(M)$ désigne la classe de cohomologie de α dans $R^p(M)$. Deux formes fermées α et β sont homologues si $\alpha - \beta$ est exacte. L'espace gradué $R(M) = \sum_{p=0}^{\infty} R^p(M)$ est la cohomologie de de Rham de M .

1.2 Application et homotopies différentiables.

On utilise sans démonstration le résultat suivant:

Toute fonction différentiable f de M dans une variété N induit un homomorphisme d'espaces vectoriels

$$f^* : D(N) \rightarrow D(M)$$

tel que $df^* = f^*od$.

Par conséquent, $f^*(Z(N)) \subset Z(M)$ et $f^*(B(N)) \subset B(M)$. f^* induit donc à son tour un homomorphisme, encore noté f^* , de $R(N)$ dans $R(M)$. En particulier $f^*(R^p(N)) \subset R^p(M)$ et $f^*(1) = 1$ si 1_M est l'application identique, $1_M^* : R(M) \rightarrow R(M)$ est aussi l'application identique. Si g est une application différentiable de N dans une variété différentiable P ,

on a $(gof)^* = f^*og^*$

D'où

Proposition 1.2.1: si f est un difféomorphisme de M sur N , f^* est un isomorphisme de $R(N)$ sur $R(M)$ et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$

Théorème 1.2.2 [1, p. 164]. Si les applications différentiables f et g de M dans N sont différentiablement homotopes, les homomorphismes f^* et g^* de $R(N)$ dans $R(M)$ sont égaux. La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme suivant:

Lemme: Soit $i_t, t \in R$, l'injection $x \rightarrow (x,t)$ de M dans $M \times R$. Il existe une application linéaire (sur R) $k: D(M \times R) \rightarrow D(M)$ ayant les propriétés suivantes:

- (i) $k(D^p(M \times R)) \subset D^{p-1}(M)$
- (ii) $dk + kod = i_1^* - i_0^*$

k est appelé l'opérateur universel d'homotopie.

Démonstration.

On considère d'abord le cas $M = R^n$ (ou le demi-espace R_+^n)

Posons: $kf = 0$ pour $f \in D^0(R^n \times R)$

$$\left\{ \begin{array}{l} k\alpha = 0 \text{ pour } \alpha = a dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, a \in \mathcal{D}(R^n \times R) \end{array} \right.$$

$$k\beta = \left(\int_0^1 b dt \right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{p-1}} \text{ pour } \beta = b dt \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{p-1}}$$

$$\text{et } b \in \mathcal{D}(R^n \times R)$$

Chaque p -forme est du type α, β ou f .

Donc k est défini sur tout $D^p(R^n \times R)$, et pour tout p .

On a bien $k(D^p(R^n \times R)) \subset D^{p-1}(R^n)$. Aussi, $dkf = 0$ car $kf = 0$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$kdf = k \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + k \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + k \frac{\partial f}{\partial t} dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$= (f \circ i_1) - (f \circ i_0) = i_1^* f - i_0^* f$$

alors $dok(f) + kod(f) = (i_1^* - i_0^*)(f)$

$dk\alpha = 0$ car $k\alpha = 0$

$$k\alpha = k da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$k\alpha = k \left[\left(\frac{\partial a}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial a}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial a}{\partial t} dt \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right]$$

$$= k \left(\frac{\partial a}{\partial t} dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) = \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t} dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$= a \circ i_1 dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} - a \circ i_0 dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$= (i_1^* - i_0^*)\alpha$$

on a toujours $dok(\alpha) + kod(\alpha) = (i_1^* - i_0^*)(\alpha)$

$$i_0^* \beta = b \circ i_0 \frac{\partial(t, x_{j_1}, \dots, x_{j_{p-1}})}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p})} dt \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{p-1}}$$

$= 0$ car t ne dépend pas de x .

$i_1^* \beta = 0$ pour les mêmes raisons

$$dk\beta = d \left(\int_0^1 b dt \right) \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{p-1}}$$

$$= \left(\frac{\partial \int_0^1 b dt}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \int_0^1 b dt}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{p-1}}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial b}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{p-1}} \quad \text{par différen-}$$

tiation sous le signe \int

$$d\beta = db \wedge dt \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{p-1}}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial b}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial b}{\partial t} dt \right) \wedge dt \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{p-1}}}_0$$

$$d\beta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial b}{\partial x_i} dx_i \wedge dt \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{p-1}}$$

$$= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b}{\partial x_i} dt \wedge dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{p-1}}$$

$$kd\beta = - \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{p-1}} = -dk\beta$$

donc $kod(\beta) + dok(\beta) = (i_1^* - i_0^*)(\beta)$

l'opérateur k possède les propriétés voulues lorsque

$$M = \mathbb{R}^n \text{ (ou } \mathbb{R}_+^n)$$

Dans le cas général, soit (U_i, ϕ_i) une famille de cartes sur M ayant les propriétés suivantes:

1. $\{U_i\}$ est un recouvrement ouvert localement fini de M .
2. ϕ_i est un difféomorphisme de U_i sur R^n .

(l'existence d'une telle famille de cartes sera démontrée à la section 1.5). Soit $\{\psi_i\}$ une partition différentiable de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i\}$. La famille $(U_i \times R, \phi_i)$ où $\phi_i(x, t) = (\phi_i(x), t)$ est un ensemble de cartes sur la variété produit $M \times R$, et les fonctions

$$\psi_i : (x, t) \rightarrow \psi_i(x)$$

forment une partition différentiable de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i \times R\}$ de $M \times R$.

On définit $\hat{k}(\gamma) = \phi_j^* k(\phi_j^{-1*} \gamma)$ si $\gamma \in D(M \times R)$ à son support dans l'ouvert $U_j \times R$. Toute forme $\gamma \in D(M \times R)$ s'écrit $\sum_i \psi_i \gamma$, et $\psi_i \gamma$ a son support dans $U_j \times R$. Donc par linéarité on définit

$$\hat{k}(\gamma) = \sum_j \phi_j^* k(\phi_j^{-1*} \psi_j \gamma). \quad \text{Avec cette définition,}$$

$$(i) \quad \hat{k}(D^p(M \times R)) \subset D^{p-1}(M)$$

$$(ii) \quad d \cdot \hat{k}(\gamma) + \hat{k} \cdot d(\gamma) = \sum_j d\hat{k}(\psi_j \gamma) + \hat{k}d(\psi_j \gamma)$$

$$= \sum_j d(\phi_j^* k(\phi_j^{-1*} \psi_j \gamma)) + \phi_j^* k(\phi_j^{-1*} d\psi_j \gamma)$$

$$= \sum_j \phi_j^* dk(\phi_j^{-1*} \psi_j \gamma) + \phi_j^* kd(\phi_j^{-1*} \psi_j \gamma)$$

$$= \sum_j \phi_j^* (i_1^* - i_0^*) \phi_j^{-1*} (\psi_j \gamma)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_j (i_1^* - i_0^*) \psi_j \gamma \\ &= (i_1^* - i_0^*) \gamma \end{aligned}$$

en utilisant la même notation pour i_t dans le cas de M ou de R^n ce qui termine la démonstration du lemme.

Démonstration du théorème 1.2.2

f et g sont différentiablement homotopes s'il existe une application différentiable $H: M \times R \rightarrow N$ telle que $H(x,t) = f(x)$ pour $t \leq 0$ et $H(x,t) = g(x)$ pour $t \geq 1$. De plus, ceci implique dans le cas présent que $Hoi_0 = f$ et $Hoi_1 = g$.

Par conséquent, si γ est une forme fermée sur N

$$\begin{aligned} g^* \gamma - f^* \gamma &= i_1^* H^* \gamma - i_0^* H^* \gamma = dk(H^* \gamma) + \underbrace{kd(H^* \gamma)}_0 \\ &= dk(H^* \gamma) \end{aligned}$$

$f^* \gamma$ et $g^* \gamma$ sont cohomologues, ce qui termine la démonstration.

Nous utiliserons encore les résultats suivants:

Théorème 1.2.3 [1, p. 64] Toute application continue de M dans N est homotope à une application différentiable.

Théorème 1.2.4 [1, p. 67] Deux applications différentiables de M dans N continûment homotopes sont différentiablement homotopes.

Ces résultats ont une conséquence immédiate: si $f: M \rightarrow N$ est continue, il existe une application différentiable $f': M \rightarrow N$

homotope à f , et, si $f'' : M \rightarrow N$ est une autre application différentiable homotope à f , alors elle est homotope à f' et donc différentiablement homotope à f' . Par conséquent, les homomorphismes f'^* et f''^* sont égaux. On peut donc dire que f induit un homomorphisme $f^* : R(N) \rightarrow R(M)$ qui ne dépend que de sa classe d'homotopie et possédant les propriétés analogues au cas différentiable

1. si g est une application continue de N dans une variété P
 $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$,
2. si f est un homéomorphisme, f^* est un isomorphisme ayant $(f^{-1})^*$ pour inverse.
3. si f est une équivalence d'homotopie ayant f_0 comme inverse homotopique, f^* est un isomorphisme ayant f_0^* comme inverse.

La cohomologie de de Rham est donc un invariant topologique et homotopique;

Corollaire 1.2.5 Soit A une sous-variété de M , et i l'injection de A dans M . Si A est un rétracte par déformation de M , alors $i^* : R(M) \rightarrow R(A)$ est un isomorphisme.

Démonstration: soit $r : M \rightarrow A$ la rétraction. L'injection $i : A \rightarrow M$ est une équivalence homotopique ayant r comme inverse homotopique.

1.3 Homologie et cohomologie singulière et différentiable

Soit Δ_q le q -simplexe standard de R^q . On donne à Δ_q la topologie de sous-espace de R^q . Un q -simplexe singulier

de la variété M est une application continue $\sigma : \nabla_q \rightarrow M$. Si en plus σ s'étend à une application différentiable sur un voisinage ouvert de ∇_q , on dit que σ est un q -simplexe différentiable.

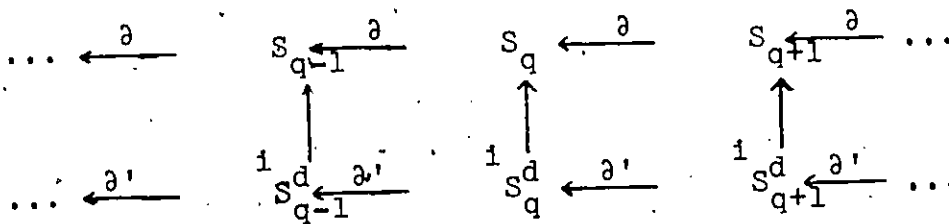
Soit $S_q(M)$ le R -module libre sur l'ensemble des q -simplexes singuliers de M , et, $S_q^d(M)$ le sous-module libre sur les q -simplexes différentiables de M . L'espace gradué $S(M) = \sum_{q=0}^{\infty} S_q(M)$ est le complexe singulier de M , et, $S^d(M) = \sum_{q=0}^{\infty} S_q^d(M)$, sous-espace de $S(M)$, est le complexe différentiable.

L'opérateur bord ∂ est un homomorphisme de $S(M)$ dans $S(M)$ ayant les propriétés

(i) $\partial(S_q) \subset S_{q-1}$

(ii) $\partial \circ \partial = 0$

La construction de ∂ est décrite dans [2, p.40]. On a le diagramme commutatif



où $i : S_q^d \rightarrow S_q$ est l'inclusion et $\partial' = \partial|_{S^d}$.

L'espace quotient $H_q = \ker \partial_q / \text{Im} \partial_{q+1}$ où $\partial_q = \partial|_{S_q}$ et $\partial_0 = 0$

est l'espace d'homologie singulière en dimension q de M .

De même, $H_q^d = \ker \partial'_q / \text{Im} \partial'_{q+1}$ est l'espace d'homologie différentiable en dimension q de M .

On réunit maintenant quelques résultats élémentaires sur l'homologie singulière et différentiable. Pour les démonstrations voir [2, sections 10 et 11].

1. Une application continue $f : M \rightarrow N$ induit un homomorphisme d'espaces gradués $f_* : H_*(M) \rightarrow H_*(N)$

2. Si g est une application continue de N dans une variété P , alors $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$

3. Si $f : M \rightarrow N$ est une équivalence homotopique f_* est un isomorphisme. (En particulier si $A \subset M$ est un rétracte par déformation de M , l'homomorphisme $i_* : H_*(A) \rightarrow H_*(M)$ induit par l'inclusion est un isomorphisme).

Le complexe

$$0 \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_R(S_0, R) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_R(S_q, R) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_R(S_{q+1}, R) \xrightarrow{\delta} \dots$$

est induit par le complexe singulier de M , et l'homomorphisme cobord δ est défini par

$$\delta\phi(\sigma) = \phi(\partial\sigma) \quad \text{où} \quad \phi \in \text{Hom}_R(S_q, R) \quad \text{et} \quad \sigma \in S_{q+1}.$$

On a immédiatement $\delta\delta = 0$. L'espace gradué $H^*(M)$ des quotients $\ker \delta / \text{Im} \delta$ constituent la cohomologie singulière de M .

De façon identique on définit la cohomologie différentiable H_d^* induite par l'homologie différentiable. H_d^* est un sous-espace de H^* .

La fonction continue $f : M \rightarrow N$ induit de façon naturelle (par composition avec les éléments de $\text{Hom}_R(S, R)$) un homomorphisme $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ ayant les propriétés

- (i) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ où $g : N \rightarrow P$.
- (ii) f^* est un isomorphisme si f_* en est un.

1.4 Les cohomologies d'une variété ne dépendent pas de son bord:

Proposition 1.4.1: Soit M° l'intérieur $M - \partial M$ de M , et $i : M^\circ \rightarrow M$ l'inclusion.

Les homomorphismes $i_* : H_*(M^\circ) \rightarrow H_*(M)$ et $i^* : R(M) \rightarrow R(M^\circ)$ sont des isomorphismes.

Démonstration: On utilise le résultat suivant tiré de [5 p.56]. "Il existe un plongement différentiable $k : \partial M \times [0, 1] \rightarrow M$ tel que $k(x, 0) = x$ pour tout $x \in \partial M$, ∂M étant une sous-variété de codimension 1."

Ceci nous permet de définir une sous-variété $N = M - k(\partial M \times [0, 1])$ de M et une application continue $H : M \times I \rightarrow N$ donnée par

$$H(y, s) = \begin{cases} y & , & y \in N \\ k(x, (1-s)t + s) & , & \text{si } y = k(x, t) \end{cases}$$

L'application $y \mapsto H(y, 1)$ est une rétraction par déformation de M (par conséquent de M°) sur N . Donc les injections $j : N \rightarrow M$ et $\hat{j} : N \rightarrow M^\circ$ induisent les isomorphismes $j_* : H(N) \rightarrow H(M)$ et $\hat{j}_* : H_*(N) \rightarrow H_*(M^\circ)$. Mais puisque $j = i \circ \hat{j}$, on a que $j_* = i_* \circ \hat{j}_*$

Par conséquent, i_* est un isomorphisme de $H(M^0)$ sur $H(M)$.
De façon identique, on déduit que $i^* : R(M) \rightarrow R(M^0)$ est aussi un isomorphisme. Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 1.4.2 L'homomorphisme $i^* : H^*(M) \rightarrow H^*(M^0)$ est un isomorphisme.

Ces résultats sont valables aussi bien dans le cas de l'homologie et la cohomologie différentiable que dans le cas singulier.

1.5 L'homologie singulière est isomorphe à l'homologie différentiable.

On démontre d'abord deux lemmes importants.

Lemme 1.5.1 Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}$ d'une variété M il existe un recouvrement ouvert localement fini $\mathcal{V} = \{V_j\}$ de M par des cartes plus fin que \mathcal{U} . (On écrira $\mathcal{V} < \mathcal{U}$).

Démonstration: M est un espace localement compact possédant une base dénombrable d'ouverts. Soit $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ une base de la topologie constituée d'ouverts dont l'adhérence est compacte. Posons $G_1 = W_1$. Supposons que $G_k = W_1 \cup \dots \cup W_{j_k}$. Appelons j_{k+1} le plus petit entier positif supérieur à j_k tel que

$$\overline{G_k} = \bigcup_{n=1}^{j_{k+1}} W_n$$

On définit $G_{k+1} = \bigcup_{n=1}^{j_{k+1}} W_n$. Posons $L_k = \overline{G_k}$.

La famille de compacts $\{L_k\}_1^\infty$ possède les propriétés

(1) $L_k \subset \text{int } L_{k+1}$

(11) $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$

Pour tout $x \in K_r = \overline{L_{k+1} - L_k}$ il existe un ouvert $U_{1(x)} \in \mathcal{U}$ et une carte locale (V_x, ψ_x) de M tels que

1. $x \in V_x$ et $\psi_x(x) = 0$
2. $V_x \subset (L_{k+2} - L_{k-1}) \cap U_{1(x)}$
3. $\psi_x(V_x) = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{R}_+^n , $n = \dim M$

K_r étant compact, il existe un ensemble fini $\{x_{1r}, \dots, x_{\ell(r)r}\} \subset K_r$ tel que $V_{x_{1r}}, \dots, V_{x_{\ell(r)r}}$ soit un recouvrement de K_r . La famille $\mathcal{V} = \{V_{x_{jr}} : 1 \leq j \leq \ell(r), r \in \mathbb{N}\}$

constitue le recouvrement localement fini recherché. (Si M est sans bord, toutes les cartes de \mathcal{V} sont difféomorphes à \mathbb{R}^n).

Lemme 1.5.2 (Thom). Soit Δ le simplexe standard dans \mathbb{R}^n , et $\partial\Delta$ son bord. Toute fonction différentiable $f : \partial\Delta \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. différentiable sur chaque face) possède une extension différentiable sur tout Δ .

Démonstration: Pour $j = 1, \dots, n$, la j^e face se trouve sur l'hyperplan de coordonnées $x_j = 0$ et la $(n+1)^e$ face sur l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Notons par

$$f(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

la restriction de f à la j^e face. C'est une fonction diffé-

rentiable (C^∞) en chaque variable. De plus, pour tout $1 \leq j \leq n$, la fonction $f(x_1, \dots, x_{j-1}, 1 - \sum_{i \neq j} x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$ est différentiable en chaque variable. Pour chaque $p \in \partial \Delta$, il faut déterminer un voisinage V_p sur lequel f peut être étendue différentiablement. On considère quatre cas:

1. p est seulement sur la face $x_j = 0$. Alors on pose $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$ sur un ouvert V_p disjoint des autres faces.

2. p est seulement sur la $n+1^e$ face. On pose $f(x_1, \dots, x_n) = f(1 - \sum_{i=2}^n x_i, x_1, \dots, x_n)$ sur un ouvert V_p disjoint des autres faces.

3. p est sur l'intersection des hyperplans $x_{j_1} = 0, \dots, x_{j_k} = 0$ où $j_1 < \dots < j_k$. On pose

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = & f[x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{k-1}}, 0] + f[x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-2}}, 0, x_{j_k}] \\ & + \dots + \\ & f[0, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}] - \sum f [2 \text{ des } j_1\text{-coordonnées sont nulles}] + \\ & \sum f [3 \text{ des } j_1\text{-coordonnées sont nulles}] - \dots + (-1)^k \sum f [k-1 \text{ des } \\ & j_1\text{-coordonnées sont nulles}] + (-1)^{k+1} f [0, 0, \dots, 0]. \end{aligned}$$

(Les crochets indiquent qu'il n'y a pas de restrictions sur les autres coordonnées). Cette extension est faite à un V_p disjoint des faces qui ne contiennent pas p .

4. p est sur les faces $x_{j_1} = 0, \dots, x_{j_{k-1}} = 0$ et l'hyper-

plan $\sum x_i = 1$. On a une formule presque identique au cas précédent pour \tilde{f} sauf que l'on remplace $x_{j_k} = 0$ par

$$x_{j_k} = 1 - \sum_{i \neq j_k} x_i$$

Maintenant posons $U = \cup_{p \in \partial \Delta} V_p$. Les V_p peuvent être choisis suffisamment grands pour que $\Delta \subset U$. Il existe un recouvrement ouvert localement fini $\{W_i\}$ de U plus fin que $\{V_p\}_{p \in \partial \Delta}$.

On choisit une partition différentiable de l'unité $\{\phi_i\}$ subordonnée à $\{W_i\}$. Soit f_i l'extension de f à chaque W_i .

On pose

$$\tilde{f} = \sum_i \phi_i f_i$$

qui est définie sur $U \supset \Delta$. Si $x \in \Delta$, $f_i(x) = f(x)$ et $\tilde{f}(x) = f(x) \sum \phi_i(x) = f(x)$. Par conséquent \tilde{f} est bien une extension différentiable de f sur tout Δ , ce qui démontre le lemme.

Définition 1.5.3 Soit $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ un recouvrement d'un ensemble E . L'étoilé de \mathcal{V} est le recouvrement $\mathcal{V}^* = \{\text{st}(V_\alpha, \mathcal{V}) : V_\alpha \in \mathcal{V}\}$ où $\text{st}(V_\alpha, \mathcal{V}) = \cup \{V_\alpha \in \mathcal{V} : V_\alpha \cap V_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$.

La proposition suivante est une conséquence directe d'une caractérisation des espaces T_1 paracompacts. (Voir [6], p. 151 corollaire 20.15).

Proposition 1.5.4 Pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} d'une variété M , il existe un recouvrement ouvert \mathcal{V} tel que $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{U}$.

A l'aide de ces résultats préliminaires, on peut commencer la démonstration du premier résultat fondamental de ce chapitre.

Théorème 1.5.5 Soit M une variété. L'homomorphisme

$i_* : H_*^d(M) \rightarrow H_*(M)$ induit par l'inclusion $i : S^d(M) \rightarrow S(M)$ est un isomorphisme.

Démonstration: D'après 1.4.1, il suffit de considérer les homologies de l'intérieur de la variété. Soit \mathcal{V}_0 un recouvrement ouvert localement fini de $\text{int} M$ par des cartes (toutes difféomorphes à R^n). Soit \mathcal{V}_1 un deuxième recouvrement ouvert localement fini par des cartes tel que $\mathcal{V}_1^* < \mathcal{V}_0$. On forme ainsi une suite de m recouvrements du même genre tels que

$$\mathcal{V}_m^* < \mathcal{V}_{m-1}^* < \dots < \mathcal{V}_1^* < \mathcal{V}_0$$

Désignons par E le sous-complexe $\{S_0(M), \dots, S_m(M), 0, 0, \dots\}$, par E_1 (resp. E_m) le sous-complexe de E engendré par les simplexes "petits d'ordre" \mathcal{V}_1 (resp. \mathcal{V}_m). [Un simplexe est petit d'ordre \mathcal{V}_1 si son image est située dans un ouvert de \mathcal{V}_1]. Dénnotons également par E^d , E_1^d et E_m^d les intersections de E , E_1 , E_m avec $S^d(M)$, respectivement. On a les inclusions $j_1 : E_1^d \rightarrow E^d$ et $j_m : E_m^d \rightarrow E^d$.

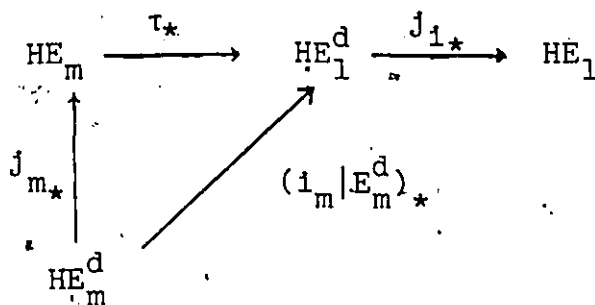
Il suffira de démontrer l'existence d'une application de chaîne $\tau : E_m^d \rightarrow E_1^d$, et d'une homotopie de chaîne $T : E_m^d \rightarrow E_1^d$ entre $j_1 \circ \tau$ et l'inclusion $i_m : E_m^d \rightarrow E_1^d$ telles que $\tau|_{E_m^d} = \text{identité}$ et $T(E_m^d) \subset E_1^d$.

En effet, dans ces conditions

$$\partial \circ T + T \circ \partial = j_1 \circ \tau - i_m$$

par définition d'une homotopie de chaîne, et par conséquent $j_{1*} \circ \tau_* = i_{m*}$. De par le théorème de l'invariance par rapport aux subdivisions ([7] p. 44) i_{m*} est un isomorphisme de H_*E_m sur H_*E_1 . De plus, $T|E_m^d$ est une homotopie de chaîne entre $\tau \circ j_m$ et $i_m|E_m^d$, d'où $\tau_* \circ j_{m*} = (i_m|E_m^d)_*$ un isomorphisme de $H_*E_m^d$ sur $H_*E_1^d$.

Le diagramme

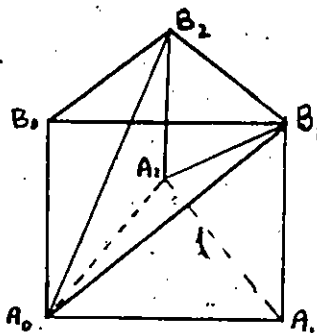
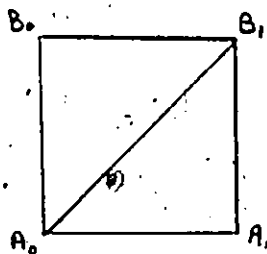


commute. Par conséquent j_{m*} et j_{1*} sont des isomorphismes ce qui implique (toujours à cause de l'invariance par rapport aux subdivisions) que l'inclusion $\ell : E^d \rightarrow E$ induit l'isomorphisme $\ell_* : H_*E^d \xrightarrow{\sim} H_*E$. On aurait donc un isomorphisme des groupes d'homologie de M jusqu'à la dimension $m-1$; m étant arbitraire le théorème serait démontré.

L'opérateur d'homotopie $T : E_m \rightarrow E_1$, qui à un i -simplexe associe une $i+1$ -chaîne, se construit de façon inductive.

Soit E_0, E_1, \dots, E_i les sommets du i -simplexe standard Δ_i . On subdivise $\Delta_i \times I$ ($I = [0, 1]$ l'intervalle unité) comme suit: On pose

$$A_k = (E_k, 0) \text{ et } B_k = (E_k, 1), \quad k = 0, \dots, i$$



On considère alors le $i+1$ -chaîne

$$K = \sum_{j=0}^1 (-1)^j A_0 \dots A_j B_j \dots B_1$$

dont le support est $\Delta_1 \times I$. Si l'on définit pour chaque i -simplexe singulier $u : \Delta_1 \rightarrow M$ une application continue $Tu : \Delta_1 \times I \rightarrow M$, et si l'on désigne par $(A_0 \dots A_j B_j \dots B_1)$ la restriction de l'application Tu au simplexe $A_0 \dots A_j B_j \dots B_1$ du complexe K il en résulte une chaîne singulière notée $T(u)$ définie par

$$T(u) = \sum_{j=0}^1 (-1)^j (A_0 \dots A_j B_j \dots B_1)$$

Dans cette notation, et parce que Tu sera construit tel que $Tu|_{\Delta_1 \times 0} = u$ et $Tu|_{\Delta_1 \times 1}$ définisse $\tau(u)$, on écrit

$$u = (A_0 \dots A_1) \text{ et } \tau(u) = (B_0 \dots B_1)$$

Construction de Tu :

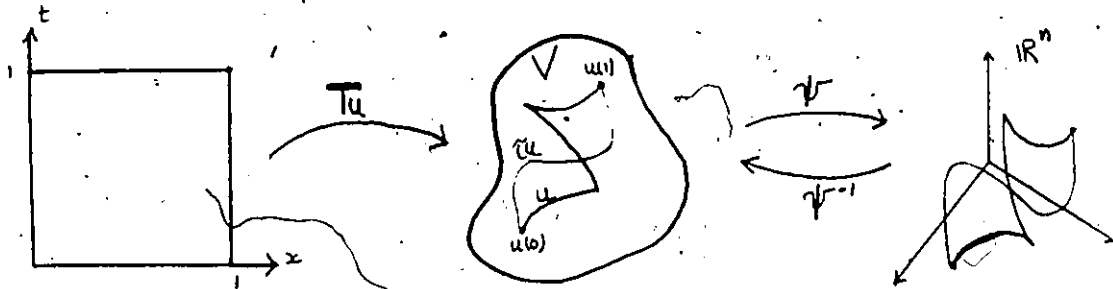
1. Si $u \in E_m^d$, on définit $Tu : \Delta_1 \times I \rightarrow M$ par $Tu(x,t) = u(x)$ pour tout $t \in I$. Alors $\tau|_{E_m^d} \equiv \text{id}$.

2. Si $u \in E_m - E_m^d$

(i) Le cas $i=0$: $Tu : \{0\} \times I \rightarrow M$ est l'application constante $Tu \equiv u(0) = \tau u$

(ii) Le cas $i=1$. Pour le 1-simplexe $u : I \rightarrow M$, on

(ii) Soit (V, ψ) la carte de \mathcal{U}_n contenant $u(I)$. On définit une application continue $Tu : I \times I \rightarrow M$ telle que $Tu|_{\Delta_1 \times 0} = u$ et $Tu|_{\Delta_1 \times 1} = \tau u$, où τu est un certain chemin différentiable dans V allant de $u(0)$ à $u(1)$.

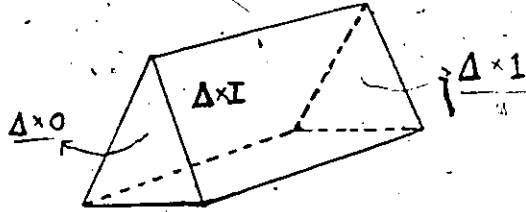


Posons $\bar{u} = \psi \circ u$

et $\bar{\tau u} = \psi \circ \tau u$. On pose $\bar{T}\bar{u}(x, t) = (1-t)\bar{u}(x) + t\bar{\tau u}(x)$ et l'on définit Tu par : $Tu = \psi^{-1} \circ \bar{T}\bar{u}$.

(iii) L'hypothèse d'induction: Supposons que les applications T et τ soient construites pour les j -simplexes u où $j \leq i$, et telles que l'image de chaque simplexe de la chaîne Tu soit contenue dans le même ouvert du recouvrement \mathcal{U}_{m-j} . Cette hypothèse est satisfaite pour $i = 0$ et $i = 1$.

(iv) Le passage de i à $i + 1$: Soit u un $i + 1$ -simplexe. Pour chacune de ses faces u_r , la chaîne Tu_r est contenue dans un ouvert de \mathcal{U}_{m-i} . Le simplexe u lui-même est contenu dans un ouvert de \mathcal{U}_{m-i} (car $u \in E_m$). Alors, de par la construction des \mathcal{U}_j , la réunion de u avec les Tu_r est contenue dans un des ouverts de \mathcal{U}_{m-i-1} , (qui est une carte) difféomorphe à \mathbb{R}^n .



La famille $\{\overline{Tu}_r\}$ représente une application continue $\overline{Tu} : \partial\Delta_{i+1} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\overline{Tu}|_{\partial\Delta_{i+1} \times 1}$ est différentiable. D'après le lemme 1.5.2, $\overline{Tu}|_{\partial\Delta_{i+1} \times 1}$ s'étend à $\Delta_{i+1} \times 1$ en une fonction différentiable \overline{u} . Alors on définit $\overline{Tu} : \Delta_{i+1} \times 1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $(q,t) \mapsto (1-t)\overline{u}(q) + t\overline{u}(q)$ ce qui, en composant avec la carte, définit Tu .

(v) Finalement on pose $T \equiv 0$ sur les m -simplexes. Par conséquent T et τ sont définis sur tout E_m .

Il suffit maintenant de vérifier que T est bien une homotopie entre τ et l'identité, c'est-à-dire que

$$\partial T(u) + T\partial(u) = \tau(u) - u$$

où $u = (E_0 \dots E_q)$, un q -simplexe singulier. Directement des définitions de ∂ et T , on obtient les relations

$$\begin{aligned} T\partial(u) &= T\left[\sum_{j=0}^q (-1)^j (E_0 \dots \hat{E}_j \dots E_q)\right] = \sum_{j=0}^q (-1)^j T(E_0 \dots \hat{E}_j \dots E_q) \\ &= \sum_{j=0}^q (-1)^j \left[\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i (A_0 \dots A_i B_1 \dots \hat{E}_j \dots B_q) + \sum_{i=j+1}^q (-1)^{i+1} (A_0 \dots \hat{A}_j \dots A_i B_1 \dots B_q) \right] \\ &= \sum_{j<i=1}^q (-1)^{i+j+1} (A_0 \dots \hat{A}_j \dots A_i B_1 \dots B_q) + \sum_{1<j=1}^q (-1)^{i+j} (A_0 \dots A_i B_1 \dots \hat{B}_j \dots B_q) \\ \partial T(u) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial(A_0 \dots A_i B_1 \dots B_q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \left[\sum_{j=0}^i (-1)^j (A_0 \dots \hat{A}_j \dots A_i B_1 \dots B_q) + \sum_{j=i}^q (-1)^{j+1} (A_0 \dots A_i B_1 \dots \hat{B}_j \dots B_q) \right] \\
 &= \sum_{j \leq i=0}^q (-1)^{1+j} (A_0 \dots \hat{A}_j \dots A_i B_1 \dots B_q) + \sum_{i \leq j=0}^q (-1)^{1+j+1} (A_0 \dots A_i B_1 \dots \hat{B}_j \dots B_q)
 \end{aligned}$$

et ici les termes où $j = i$ s'annulent, sauf $(B_0, \dots, B_q) - (A_0 \dots A_q)$

$$\partial T(u) = (B_0 \dots B_q) - (A_0 \dots A_q) + \sum_{j < i=1}^q (-1)^{1+j} (A_0 \dots \hat{A}_j \dots A_i B_1 \dots B_q)$$

$$+ \sum_{i < j=1}^q (-1)^{1+j+1} (A_0 \dots A_i B_1 \dots \hat{B}_j \dots B_q)$$

Donc on a bien

$$\partial T(u) + T \partial(u) = (B_0 \dots B_q) - (A_0 \dots A_q) = \pi(u) - u$$

ce qui termine la démonstration du théorème 1.5.5.

Corollaire 1.5.6: $i^* : H_d^*(M) \rightarrow H^*(M)$ est un isomorphisme.

1.6 L'homomorphisme $\rho : R(M) \rightarrow H^*(M)$:

A chaque $\alpha \in D^p(M)$ correspond une application $\theta(\alpha) : S_p^d(M) \rightarrow R$

définie par
$$\theta(\alpha) : C = \sum_{j=1}^k r_j \sigma_j \mapsto \sum_{j=1}^k r_j \int_{\sigma_j} \alpha$$

et
$$\int_{\sigma} \alpha = \int_{\Delta_p} \sigma_* \alpha = \int_{\Delta_p} f, \text{ où } \sigma_* \alpha = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \in D^p(\mathbb{R}^p)$$

La correspondance $\alpha \mapsto \theta(\alpha)$ est un homomorphisme

$$\theta_p : D^p(M) \rightarrow \text{Hom}_R (S_p^d, R) = S_p^d(M)$$

La famille $\{\theta_p\}_{p=0}^\infty$ définit l'homomorphisme de cochaînes

$$\theta : D(M) \rightarrow S_d^*(M)$$

car $\theta \circ d = \delta \circ \theta$ (conséquence directe du théorème de Stokes).

Considérons l'homomorphisme induit $\theta^* : R(M) \rightarrow H_d^*(M)$ et l'isomorphisme naturel (induit par l'inclusion $i : S^d \subset S$) $i^* : H_d^*(M) \rightarrow H^*(M)$

Définition 1.6.1 La composition $\rho = i^* \circ \theta^* : R(M) \rightarrow H^*(M)$ est l'homomorphisme de de Rham.

Proposition 1.6.2 Soit $g : M \rightarrow N$ une application différentiable, $g^* : R(N) \rightarrow R(M)$ et $g^\# : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ les homomorphismes induits. Alors

$$\rho \circ g^* = g^\# \circ \rho$$

Démonstration: De par la définition de ρ , il suffit de montrer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} D^p(N) & \xrightarrow{\theta_p} & S_d^p(N) \\ g^* \downarrow & & g^\# \downarrow \\ D^p(M) & \xrightarrow{\theta_p} & S_d^p(M) \end{array}$$

Si $\alpha \in D^p(N)$, $g^*\alpha \in D^p(M)$ et $\theta(g^*\alpha)$ est l'homomorphisme défini par $\sigma \mapsto \int_{\sigma} g^*\alpha$, où σ est un p -simplexe singulier de M .

Mais $\int_{\sigma} g^*\alpha = \int_{\Delta^p} \sigma^* g^*\alpha = \int_{\Delta^p} (g \circ \sigma)^*\alpha$, et d'autre part, $g^\#(\theta(\alpha))$

est l'homomorphisme défini par $\sigma \mapsto \int_{g \circ \sigma} \alpha = \int_{\Delta^p} (g \circ \sigma)^*\alpha$.

D'où $\theta \circ g^\# = g^\# \circ \theta$, ce qui démontre la proposition.

CHAPITRE II

"L'isomorphisme de de Rham dans le cas d'une variété compacte".

Dans ce chapitre M désigne une variété compacte à bord de dimension n .

2.1 Fonction de Morse

Définition 2.1.1.: Soit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Un point $p \in M$ est un point critique de f si dans un certain système de coordonnées locales

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p = \dots = \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_p = 0 .$$

De plus, p est un point critique non-dégénéré si

$$\det \left(\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_p \right) \neq 0 .$$

Lemme 2.1.2: (Morse) Si p est un point critique non-dégénéré de f , il existe un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) dans un voisinage U de p tel que

- (i) $x_i(p) = 0$ pour chaque i
- (ii) $f = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$
sur U , pour un certain λ appelé l'indice de f en p .

Démonstration: voir [3, p. 6].

Définition 2.1.3: Une fonction de Morse sur M est une fonction différentiable $f: M \rightarrow [a, b]$ telle que

- (1) $f^{-1}(b) = \partial M$ (le bord de M)

- (2) tous les points critiques de f sont non-dégénérés, et se trouvent tous dans l'intérieur $M - \partial M$.

De plus, f est "strictement non-dégénérée" si pour toute paire de points critiques $p_1 \neq p_2$, $f(p_1) \neq f(p_2)$.

Remarque: le lemme de Morse a deux conséquences immédiates:

- (a) les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés.
(b) M étant compacte, il n'y a qu'un nombre fini de points critiques.

Théorème 2.1.4. Il existe des fonctions de Morse strictement non-dégénérées sur M .

Démonstration: voir [4, p. 9-18].

2.2 Une décomposition de M .

Soit p_1, \dots, p_k les points critiques d'une fonction de Morse strictement non dégénérée f sur M , les indices étant choisis de façon à ce que les valeurs critiques $c_i = f(p_i)$ forment une suite croissante

$$c_1 < c_2 < \dots < c_k$$

c_1 est alors le minimum de f . On choisit des nombres réels b_1, \dots, b_{k-1} tels que $c_i < b_i < c_{i+1}$, et b_k un nombre supérieur au maximum de f sur M .

Ensuite on pose $M_1 = \{x \in M : f(x) \leq b_1\}$

De cette façon on obtient une filtration

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_k = M$$

où les M_i sont des sous-variétés de dimension n .

Notation: pour $a \in \mathbb{R}$, $M_a = \{x \in M : f(x) \leq a\}$.

Théorème 2.2.1. Si $\{x \in M : a \leq f(x) \leq b\}$ ne contient aucun point critique de f , alors M_a est difféomorphe à M_b , et M_a est un rétracte par déformation de M_b .

Démonstration: voir [3, p. 12].

Corollaire 2.2.2. Dans la filtration $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_k$, M_1 est homéomorphe à une n -boule fermée.

Démonstration: c_1 est le minimum de f . Alors dans un voisinage U de p_1 , il existe un système de coordonnées locales tel que $f = c_1 + x_1^2 + \dots + x_n^2$, (car $\lambda = 0$). Pour ϵ suffisamment petit, l'image de U par le plongement $(x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ contient la n -boule fermée $\{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq \epsilon\}$. Mais $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq \epsilon \iff f - c_1 \leq \epsilon$. Donc $M_{c_1+\epsilon}$ est homéomorphe à une n -boule fermée. Il n'y a pas de points critiques "entre" $M_{c_1+\epsilon}$ et M_1 . Alors d'après 2.2.1, M_1 est homéomorphe à une n -boule fermée.

Proposition 2.2.3. Si $\dim M = n = 0$, l'homomorphisme de de Rham est un isomorphisme.

Démonstration: $R^p(M) = 0$ si $p > 0$ et $R^0(M) = R$.

De la définition de ρ , on a immédiatement $\rho|_{R^0(M)} \neq 0$.

Corollaire 2.2.4. L'homomorphisme $\rho : R(M_1) \rightarrow H^*(M_1)$ est un isomorphisme.

Démonstration: Soit $r : M_1 \rightarrow p_1$ une rétraction (par déformation) de M_1 sur le point p_1 . L'application r induit les isomorphismes $r^* : R(\{p_1\}) \rightarrow R(M_1)$ et

$$r\# : H^*(\{p_1\}) \rightarrow H^*(M_1)$$

De plus $\rho : R(\{p_1\}) \rightarrow H^*(\{p_1\})$ est un isomorphisme d'après 2.2.3.

Alors, étant donné la commutativité du diagramme

$$R(\{p_1\}) \xrightarrow{p} H^*(\{p_1\})$$

$$\downarrow r^* \qquad \downarrow r^\#$$

$$R(M_1) \xrightarrow{p} H^*(M_1)$$

le corollaire est démontré.

Par la suite, on procédera par induction sur la dimension de la variété et sur l'indice de la filtration.

Dans un voisinage U_1 de p_1 , il existe un système de coordonnées locales tel que

$$f = c_1 - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$$

$$\text{alors, } M_{i-1} \cap U_1 = \{p \in U_1 : c_1 - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 \leq b_{i-1}\}$$

et pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$(1) \quad f^{-1}[c_1 - \varepsilon, c_1 + \varepsilon] = \{x \in M : c_1 - \varepsilon \leq f(x) \leq c_1 + \varepsilon\}$$

ne contient pas de point critique autre que p_1 .

(2) l'image de U_1 par le plongement

$$(x_1, \dots, x_n) : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ contient la boule fermée } \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 2\varepsilon\}$$

On définit la λ -cellule e^λ comme étant

$$\{p \in U_1 : x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 \leq \varepsilon, \quad x_{\lambda+1} = \dots = x_n = 0\}$$

Remarque: On peut supposer avoir choisi les b_1, \dots, b_{k-1} tels que $b_i = c_i + \varepsilon$, c'est-à-dire chaque b_i suffisamment près de c_i .

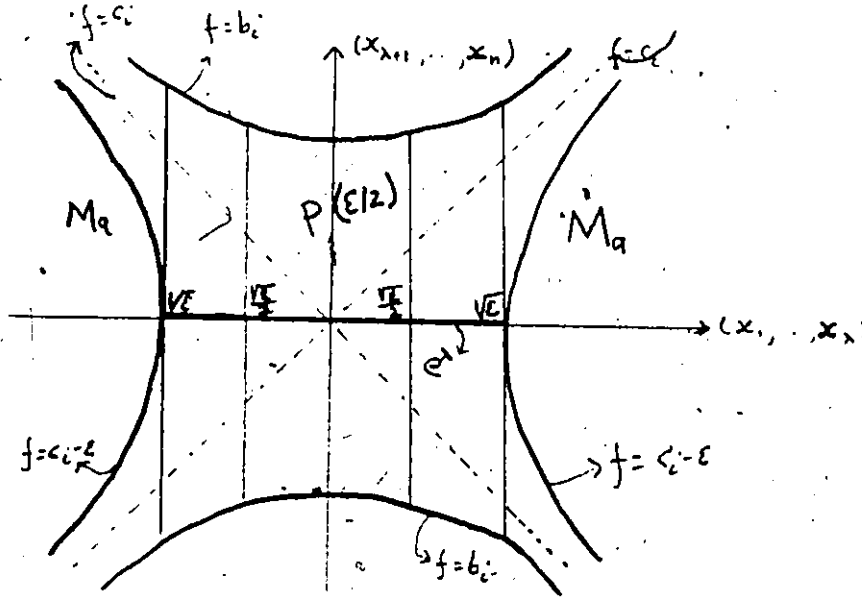
Considérons maintenant les sous-variétés

$$M_a = M_{c_1 - \varepsilon} \quad \text{et} \quad M_i = M_{b_i} = M_{c_i + \varepsilon}$$

Posons, $M_1^o = M_1 - \partial M_1$, $M_a^o = M_a - \partial M_a$

$$P(\epsilon) = \{p \in M_1 \cap U_1 : x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 \leq \epsilon\}, \quad P^o(\epsilon) = \{p \in M_1^o \cap U_1 : x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 < \epsilon\}$$

$$M_1^o(\epsilon/2) = M_1^o - P(\epsilon/2), \quad M_1(\epsilon/2) = \overline{M_1 - P(\epsilon/2)}$$



Le bord e^λ de la n -cellule e^λ est contenu dans ∂M_a car $x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 = \epsilon$ et $x_{\lambda+1} = \dots = x_n = 0 \rightarrow f = c_1 - \epsilon$.

Proposition 2.2.5. $M_a \cup e^\lambda$ est un rétracte par déformation de M_1 .

Démonstration: voir [3, p. 14-19].

D'après la décomposition de M décrite plus haut, ce résultat a la conséquence suivante.

Corollaire 2.2.6. M_a est un rétracte par déformation de $M_1(\epsilon/2)$, (donc de $M_1^o(\epsilon/2)$).

Démonstration: $M_a \cup \{p \in U_1 : \epsilon/2 \leq x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 \leq \epsilon, x_{\lambda+1} = \dots = x_n = 0\}$
est une rétracte par déformation de $M_1(\epsilon/2)$. Egalement, le bord
 $\dot{e}^\lambda = \{p \in U_1 : x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 = \epsilon, x_{\lambda+1} = \dots = x_n = 0\}$ est un
rétracte par déformation (le long des rayons) de $\{x \in U_1 : \epsilon/2 \leq$
 $x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 \leq \epsilon, x_{\lambda+1} = \dots = x_n = 0\}$. La composition de ces deux
rétractions par déformation est une rétraction par déformation de
 $M_1(\epsilon/2)$ sur M_a .

Corollaire 2.2.7. M_{1-1} est une rétracte par déformation de
 $M_1^0(\epsilon/2)$.

Démonstration: D'après le théorème 2.2.1, M_{1-1} est un rétracte par
déformation de M_a .

Remarques: D'après les constructions précédentes, on a

(i) $P(\epsilon) = \{p \in U_1 : x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 \leq \epsilon, x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 \leq 2\epsilon\}$,
ce qui est homéomorphe au produit des boules $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$,
donc contractile.

(ii) $M_1(\epsilon/2) \cap P(\epsilon) = \{p \in U_1 : \epsilon/2 \leq x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 \leq \epsilon, x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 \leq 2\epsilon\}$ ce qui est homéomorphe au produit
 $S^{\lambda-1} \times D^1 \times D^{n-\lambda}$ (où $S^{\lambda-1}$ est la $(\lambda-1)$ -sphère) qui
a le même type d'homotopie que $S^{\lambda-1}$ puisque $D^1 \times D^{n-\lambda}$
est contractile.

2.3 Suites de Mayer-Vietoris.

Cette section contient des résultats tirés de [8, p. 180].

Soit U_1 et U_2 , des ouverts de M tels que $U_1 \cup U_2 = M$ les

$$\text{inclusions } j_1: U_1 \cap U_2 \rightarrow U_1, j_2: U_1 \cap U_2 \rightarrow U_2$$

$$i_1: U_1 \rightarrow M, i_2: U_2 \rightarrow M$$

induisent la suite exacte

$$0 \rightarrow D(M) \xrightarrow{i_1^* \oplus i_2^*} D(U_1) \oplus D(U_2) \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} D(U_1 \cap U_2) \rightarrow 0$$

où $i_1^* \oplus i_2^*(\alpha) = (i_1^* \alpha, i_2^* \alpha)$ pour $\alpha \in D(M)$

$$j_1^* - j_2^*(\beta_1, \beta_2) = j_1^* \beta_1 - j_2^* \beta_2 \text{ pour } (\beta_1, \beta_2) \in D(U_1) + D(U_2).$$

En passant à la cohomologie, on obtient la longue suite exacte (dite de Mayer-Vietoris)

$$\dots \rightarrow R^p(M) \xrightarrow{\lambda_{\#}} R^p(U_1) \oplus R^p(U_2) \xrightarrow{\mu_{\#}} R^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial} R^{p+1}(M) \rightarrow \dots$$

où $\lambda_{\#}$ est induit par $\lambda = i_1^* \oplus i_2^*$ et $\mu_{\#}$ par $\mu = j_1^* - j_2^*$ et ∂ est le "connecting homomorphism" (voir [8, p. 10]).

D'autre part, dans le cas de l'homologie singulière, et par suite pour la cohomologie singulière, on a toujours une suite exacte de Mayer-Vietoris associée à un couple d'ouverts (U_1, U_2) , $U_1 \cup U_2 = M$, $\dots \rightarrow H^p(M) \xrightarrow{\lambda_{\#}} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{\mu_{\#}} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(M) \rightarrow \dots$ où les homomorphismes $\lambda_{\#}$ et $\mu_{\#}$ sont induits par les inclusions.

Pour la construction de cette suite voir [9, p. 189 et p. 239].

Si l'on note $S^d U_1 + S^d U_2$ l'ensemble des chaînes différentiables de la forme $C_1 + C_2$ où $C_1 \in S^d U_1$ et $C_2 \in S^d U_2$, on peut définir un homomorphisme $\theta : D(M) \rightarrow \text{Hom}_R(S^d U_1 + S^d U_2, R)$ par $\theta(\alpha) = C_1 + C_2 \mapsto \int_{C_1+C_2} \alpha = \int_{C_1} \alpha + \int_{C_2} \alpha = \int_{C_1} i_1^* \alpha = \int_{C_1} i_2^* \alpha + \int_{C_2} i_2^* \alpha$.

Le plongement naturel

$$S^d U_1 \oplus S^d U_2 \rightarrow S^d U_1 + S^d U_2$$

induit un homomorphisme $\text{Hom}_R(S^d U_1 + S^d U_2, R) \rightarrow S^d U_1 \oplus S^d U_2$

(cf. p.10,11), et le diagramme

$$0 \rightarrow D(M) \rightarrow D(U_1) \oplus D(U_2) \rightarrow D(U_1 \cap U_2) \rightarrow 0$$

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} & \theta \downarrow & & \theta + \theta \downarrow & & \theta \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}_R(S^d U_1 + S^d U_2, R) & \rightarrow & S_d^* U_1 \oplus S_d^* U_2 & \rightarrow & S_d^*(U_1 \cap U_2) \rightarrow 0 \end{array}$$

où les deux suites courtes sont exactes, est commutatif.

Théorème 2.3.1

Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H^p U_1 \oplus H^p U_2 & \xrightarrow{\mu_{\#}} & H^p(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\partial} & H^{p+1} M & \xrightarrow{\lambda_{\#}} & H^{p+1} U_1 \oplus H^{p+1} U_2 & \rightarrow \\ & \rho_1 \oplus \rho_2 \uparrow & & \textcircled{1} \quad \rho_3 \uparrow & & \textcircled{2} \quad \rho_4 \uparrow & & \textcircled{3} \quad \rho_1 \oplus \rho_2 \uparrow & \\ \rightarrow & R^p U_1 \oplus R^p U_2 & \xrightarrow{\mu_{\#}} & R^p(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\partial} & R^{p+1} M & \xrightarrow{\lambda_{\#}} & R^{p+1} U_1 \oplus R^{p+1} U_2 & \rightarrow \end{array}$$

où les ρ_i sont les homomorphismes de de Rham, commute.

Démonstration: Les carrés $\textcircled{1}$ et $\textcircled{3}$ commutent, car les égalités $\mu_{\#} \circ (\rho_1 \oplus \rho_2) = \rho_3 \circ \mu_{\#}$

$$\lambda_{\#} \circ \rho_4 = (\rho_1 \oplus \rho_2) \circ \lambda_{\#}$$

proviennent directement de 1.6.2. On établit la commutativité de $\textcircled{2}$ comme suit: l'inclusion $S^d U_1 + S^d U_2 \rightarrow S^d M$ induit un isomorphisme $H_d^*(S^d U_1 + S^d U_2) \simeq H_d^*(M)$ car la triade (M, U_1, U_2) est propre [2, p. 72]. Alors, compte tenu du diagramme (*) de cette section, et ∂ représentant le "connecting homomorphism" on a d'après [9, p. 182] le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R^p(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\partial} & R^{p+1}(M) \\ \downarrow \theta^* & & \downarrow \theta^* \\ H_d^p(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\partial} & H_d^{p+1}(M) \end{array}$$

Vu que l'inclusion $S^d \rightarrow S$ induit un isomorphisme naturel de la cohomologie (cf. p. 16), le carré (2) est commutatif, ce qui termine la démonstration.

2.4 Démonstration de l'isomorphisme de de Rham.

On fait les hypothèses d'induction

- (1) $\rho : R(M_{1-1}) \rightarrow H^*(M_{1-1})$ est un isomorphisme.
- (2) Si W est une variété de dimension inférieure à n , $\rho : R(W) \rightarrow H^*(W)$ est un isomorphisme.

Théorème 2.4.1 (de Rham)

$$\rho : R(M) \rightarrow H^*(M)$$

est un isomorphisme.

Démonstration: Considérer le diagramme commutatif du théorème 2.3.1 dans le cas particulier où $(U_1, U_2) = (M_1^0(\epsilon/2), P^0(\epsilon))$, [donc $U_1 \cup U_2 = M_1^0$]. On remarque d'abord que $\rho_2 : R(U_2) \rightarrow H^*(U_2)$ est un isomorphisme car $U_2 = P^0(\epsilon)$ est contractile. (cf. p. 28). D'autre part $\rho_1 : R(U_1) \rightarrow H^*(U_1)$ est aussi un isomorphisme car M_{1-1} est un rétracte par déformation de $M_1^0(\epsilon/2) = U_1$ (cf. 28) et l'on applique l'hypothèse d'induction. Egalement, $\rho_3 : R(U_1 \cap U_2) \rightarrow H^*(U_1 \cap U_2)$ est un isomorphisme car $U_1 \cap U_2 = M_1^0(\epsilon/2) \cap P^0(\epsilon)$ a le type d'homotopie de la sphère $S^{\lambda-1}$ (cf. p. 28) qui est de dimension inférieure à n pour tout $\lambda \in \{0, \dots, n\}$; par conséquent

l'hypothèse d'induction (sur la dimension) s'applique.

Enfin, d'après le lemme des cinq (voir [1, p. 184]) appliqué au diagramme de la proposition 2.4.1, $\rho_4 : R(M_1^0) \rightarrow H^*(M_1^0)$ est un isomorphisme. Vu que l'inclusion $M_1^0 \rightarrow M_1$ induit un isomorphisme de la cohomologie (cf. p. 11), on peut conclure également que $\rho : R(M_1) \rightarrow H^*(M_1)$ est un isomorphisme, ce qui prouve l'étape d'induction, et termine la démonstration.

2.5 Appendice.

La technique de démonstration utilisant des suites de Mayer-Vietoris et une induction sur la dimension des variétés peut être employée pour calculer la cohomologie de de Rham à support compact de l'espace euclidien R^n .

Notation: $D_c(M)$ désigne l'espace gradué des formes différentielles à support compact sur une variété M , $R_c(M)$ la cohomologie de de Rham à support compact de M . (cf. [1, p. 167]).

Lemme 2.5.1 Pour tout p , $R_c^p(R_+^n) = 0$

où $R_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n \geq 0\}$

Démonstration: Posons $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in R^n$ et $R_{+\lambda}^n = \{x \in R^n : x_n \geq \lambda \geq 0\}$

Considérons une forme ω à support compact sur R_+^n . Pour λ suffisamment grand, $(\text{supp } \omega) \cap R_{+\lambda}^n = \emptyset$. On définit une homotopie propre et différentiable

$$F_\lambda : R_+^n \times R \rightarrow R_+^n$$

$$F_\lambda(x, t) = x + g(t)e_n$$

où $g : R \rightarrow R$ est C^∞ et $g(t) = 0$ si $t \leq 0$
 $g'(t) > 0$ pour $0 < t < 1$ et $g(t) = 1$ pour $t \geq 1$

(voir [5, p.6], pour la définition de g).

entre l'identité et l'application propre et différentiable

$\phi : R_+^n \rightarrow R_+^n$ définie par $\phi(x) = F_\lambda(x, 1)$. Soit J_t , $t \in R$ l'injection $x \mapsto (x, t)$ de R_+^n dans $R_+^n \times R$ et $D_K(R_+^n \times R)$ l'espace des formes $\alpha \in D(R_+^n \times R)$ (dont le support a une projection compacte sur R_+^n). D'après [1, p. 169, proposition 5.3] il existe une application linéaire K de $D_K(R_+^n \times R)$ dans $D_c(R_+^n)$ ayant

les propriétés suivantes:

$$(i) \quad K(D_K^p(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R})) \subset D_C^{p-1}(\mathbb{R}_+^n)$$

$$(ii) \quad d \circ K + K \circ d = J_1^* - J_0^* \quad \text{où } d \text{ est la différentiation extérieure.}$$

On a $F_\lambda \circ J_0 = \text{identité}$ et $F_\lambda \circ J_1 = \phi$. De plus

$$\begin{aligned} \phi^* \omega - \omega &= J_1^* F_\lambda^* \omega - J_0^* F_\lambda^* \omega \\ &= dK(F_\lambda^* \omega) + Kd(F_\lambda^* \omega) \\ &= d(KF_\lambda^* \omega) \end{aligned}$$

Par conséquent $\phi^* \omega$ et ω sont cohomologues. Mais $\phi^* \omega = 0$ car ω évaluée à $\phi(x)$ est nulle pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$ puisque $\phi(x) \notin \text{supp } \omega$.
Donc $R_c(\mathbb{R}_+^n) = 0$.

Lemme 2.5.2

Soit A^n le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n \leq 1\}$. La suite

$$0 \rightarrow D_C(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{i_1^* \oplus i_2^*} D_C(A^n) \oplus D_C(\mathbb{R}_+^n) \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} D_C(A^n \cap \mathbb{R}_+^n) \rightarrow 0$$

où les homomorphismes sont induits par les inclusions $i_1: A^n \subset \mathbb{R}^n$, $i_2: \mathbb{R}_+^n \subset \mathbb{R}^n$, $j_1: A^n \cap \mathbb{R}_+^n \subset A^n$ et $j_2: A^n \cap \mathbb{R}_+^n \subset \mathbb{R}_+^n$ est exacte.

Démonstration: $\mathbb{R}_+^n \cup A^n = \mathbb{R}^n$; les égalités $\ker(i_1^* \oplus i_2^*) = 0$

$\ker(j_1^* - j_2^*) = \text{Im}(i_1^* \oplus i_2^*)$ sont immédiates. D'autre part $A^n \cap \mathbb{R}_+^n$

étant une sous-variété fermée (à bord) de \mathbb{R}^n , d'après [1, p. 176

théorème 4.1], pour toute p-forme α à support compact sur $A^n \cap \mathbb{R}_+^n$,

il existe une p-forme β à support compact sur \mathbb{R}^n telle que

$\beta|_{A^n \cap \mathbb{R}_+^n} = \alpha$; alors $(2\beta|_{A^n}, \beta|_{\mathbb{R}_+^n}) \in D_C(A^n) \oplus D_C(\mathbb{R}_+^n)$ et

$(j_1^* - j_2^*)(2\beta|_{A^n}, \beta|_{\mathbb{R}_+^n}) = \alpha$, c'est-à-dire $(j_1^* - j_2^*)$ est surjectif,

ce qui démontre le lemme.

Corollaire 2.5.3

La suite de Mayer-Vietoris du couple $(A^n, R_+^n), \dots \rightarrow R_c^{p-1}(R^n) \rightarrow R_c^{p-1}(A^n) \oplus R_c^{p-1}(R_+^n) \rightarrow R_c^{p-1}(A^n \cap R_+^n) \rightarrow R_c^p(R^n) \rightarrow R_c^p(R_+^n) \oplus R_c^p(A_+^n) \rightarrow \dots$
est exacte.

Théorème 2.5.4

$$R_c^p(R^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ R & \text{si } p = n \end{cases}$$

démonstration: On procède par induction sur n . Le théorème est vrai pour $n = 0$ car $R^0 = \{q\}$ et $R_c^0(\{q\}) = R^0(\{q\}) = R$. Considérons la suite de Mayer-Vietoris du corollaire 2.5.3. D'après le lemme 2.5.1 $R_c^p(R_+^n) = 0$ pour tout p . Egalement $R_c(A^n) = 0$ car A^n est difféomorphe à R_+^n . D'autre part, $A^n \cap R_+^n = R^{n-1} \times [0, 1]$, ce qui possède le même type d'homotopie propre et différentiable que R^{n-1} : en effet soit $r : R^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow R^{n-1} \times \{0\}$ la rétraction propre $(x, s) \mapsto (x, 0)$ et $i : R^{n-1} \times \{0\} \subset R^{n-1} \times [0, 1]$ l'inclusion; on définit une homotopie propre et différentiable

$$F : R^{n-1} \times [0, 1] \times R \rightarrow R^{n-1} \times [0, 1] \text{ entre } i \text{ or } R^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow R^{n-1} \times [0, 1]$$

et l'identité sur $R^{n-1} \times [0, 1]$ par

$$(x, s, t) \mapsto (x, sg(t))$$

(où g est défini à la page 33).

De plus soit $r : R^{n-1} \times \{0\} \rightarrow R^{n-1} \times \{0\}$ est l'identité sur $R^{n-1} \times \{0\}$

Donc r est bien une équivalence d'homotopie différentiable et propre entre \mathbb{R}^{n-1} et $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,1]$. Par conséquent

$R_c(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,1]) = R_c(\mathbb{R}^{n-1})$. De la suite de Mayer-Vietoris on tire

la suite exacte $0 \rightarrow R_c^{p-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow R_c^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow 0$ d'où l'isomorphisme

$R_c^p(\mathbb{R}^n) \simeq R_c^{p-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Maintenant par hypothèse d'induction

$$R_c^{p-1}(\mathbb{R}^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p-1 \neq n-1 \\ R & \text{si } p-1 = n-1 \end{cases} \quad \text{d'où le résultat } R_c^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ R & \text{si } p = n \end{cases}$$

CHAPITRE III

"THEOREME D'HUREWICZ EN DIMENSION 1"

3.1 L'homomorphisme naturel $I : R^1(M) \rightarrow \text{Hom}(\pi(M), R)$.

Désormais M désignera toujours une variété compacte, connexe.

Dans [1, chapitre XIV, section 1], on définit un homomorphisme $I : R^1(M) \rightarrow \text{Hom}(\pi(M), R)$ où $(\pi(M))$ est le groupe fondamental de M par $[\alpha] \mapsto I_\alpha$

où $I_\alpha([\phi]) = \int_{S^1} \hat{\phi}^* \alpha$, $[\phi]$ étant la classe d'homotopie du lacet ϕ sur M ; $\hat{\phi}$ est l'application continue du cercle S^1 dans M telle que $\phi = \hat{\phi} \circ q$, où q est la projection $t \mapsto e^{2\pi i t}$ de l'intervalle $[0,1]$ sur le cercle S^1 . L'homomorphisme I est bien défini car la valeur de l'intégrale $\int_{S^1} \hat{\phi}^* \alpha$ ne dépend que de la classe d'homotopie de ϕ et de la classe de cohomologie de α .

D'autre part, il existe un isomorphisme naturel

$$H^1(M) \rightarrow \text{Hom}(H_1(M), R)$$

défini par $[f] \mapsto ([c] \mapsto f(c))$;

cette correspondance ne dépendant que de la classe de cohomologie du cocycle f et de la classe d'homologie du cycle c , (voir [2, p. 132]).

Egalement, il existe un homomorphisme naturel

$$\pi(M) \rightarrow H_1(M)$$

qui, à la classe d'homotopie du lacet $\phi : I \rightarrow M$ fait correspondre la classe d'homologie du 1-simplexe $\phi : I \rightarrow M$. Si M est connexe, cet homomorphisme est surjectif et son noyau constitue le sous-groupe des commutateurs de $\pi(M)$; voir [2, p. 48]. On a donc un isomorphisme naturel

$$\pi(M) / [\pi(M), \pi(M)] \approx H_1(M)$$

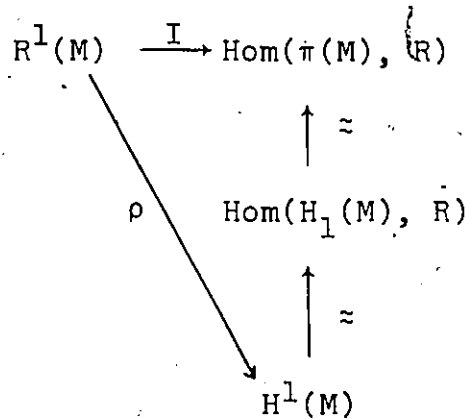
R étant un groupe abélien ceci induit un isomorphisme

$$\text{Hom}(\pi(M), R) \approx \text{Hom}(H_1(M), R).$$

Enfin, comme M est compacte on a l'isomorphisme de de Rham

$$\rho : R^1(M) \rightarrow H^1(M) = H^1(M, R)$$

ce qui complète le diagramme



Proposition 3.1.1 Le diagramme ci-dessus est commutatif, et par conséquent I est un isomorphisme.

Démonstration

$$\begin{array}{ccc}
 R^1(M) & \xrightarrow{\rho} & H^1(M) \\
 [\alpha] & \longmapsto & [c \xrightarrow{c} f\alpha]
 \end{array}$$

$$H^1(M) \rightarrow \text{Hom}(H_1(M), \mathbb{R}), \text{Hom}(H_1(M), \mathbb{R}), \rightarrow \text{Hom}(\pi(M), \mathbb{R})$$

$$[c \mapsto \int_c \alpha] \mapsto ([c] \mapsto \int_c \alpha), ([c] \mapsto \int_c \alpha) \mapsto ([\phi] \mapsto \int_\phi \alpha)$$

on a $\phi = \hat{\phi} \circ q$, donc $\phi^* = q^* \circ \hat{\phi}^*$

$$\text{et } \int_\phi \alpha = \int_I \phi^* \alpha = \int_I q^* \hat{\phi}^* \alpha = \int_{S^1} \hat{\phi}^* \alpha \text{ puisque } \int_I q^* \beta = \int_{S^1} \beta$$

pour tout $\beta \in \mathcal{D}L(S^1)$. Donc en composant les trois isomorphismes

$$\text{ci-dessus on obtient la correspondance } [\alpha] \mapsto ([\phi] \mapsto \int_{S^1} \hat{\phi}^* \alpha),$$

c'est-à-dire l'isomorphisme I.

C.Q.F.D.

Remarque

Sans avoir recours au théorème de de Rham, on peut démontrer directement à partir de sa définition et à l'aide de techniques de la théorie de Morse que l'homomorphisme $I : R^1(M) \rightarrow \text{Hom}(\pi(M), \mathbb{R})$, où M est compacte connexe est un isomorphisme. C'est précisément le sujet de ce troisième chapitre.

Proposition 3.1.2 Soit $f : M \rightarrow N$ une application continue de M dans une variété compacte connexe N et x un point base de M ; l'homomorphisme naturel $f_* : \pi(M, x) \rightarrow \pi(N, f(x))$ induit un homomorphisme $f^\# : \text{Hom}(\pi(N, f(x)), \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(\pi(M, x), \mathbb{R})$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R^1(N) & \xrightarrow{I} & \text{Hom}(\pi(N, f(x)), \mathbb{R}) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^\# \\ R^1(N) & \xrightarrow{I} & \text{Hom}(\pi(M, x), \mathbb{R}) \end{array}$$

commute. (pour la définition de f^* voir 1.2.4)

démonstration: voir [1, p. 208].

On utilisera souvent une propriété élémentaire des groupes fondamentaux: si $f, g : M \rightarrow N$ sont homotopes alors $f_* = g_* : \pi(M) \rightarrow \pi(N)$; donc si M et N ont le même type d'homotopie, $\pi(M)$ est isomorphe à $\pi(N)$.

3.2 Décomposition de M

Considérons la décomposition de M décrite à la section 2.2 où $(U_1, U_2) = (M_1^0(\epsilon/2), P^0(\epsilon))$ et $U_1 \cup U_2 = M_1^0$.

- M_1 est une n -boule; donc $R^1(M_1) = 0$ et $\pi(M_1) = 0$.
- $I : R^1(M_1) \rightarrow \text{Hom}(\pi(M_1), R)$ est l'isomorphisme trivial
- si $\dim M = n = 0$, $R^1(M) = \pi(M) = 0$ et I est également trivial.

On peut donc faire les hypothèses d'induction:

- (1) $I : R^1(M_{i-1}) \rightarrow \text{Hom}(\pi(M_{i-1}), R)$ est un isomorphisme.
- (2) Si W est une variété de dimension inférieure à n
 $I : R^1(W) \rightarrow \text{Hom}(\pi(W), R)$ est un isomorphisme.

Proposition 3.2.1 $I : R^1(U_1) \rightarrow \text{Hom}(\pi(U_1), R)$ est un isomorphisme.

Démonstration: M_{i-1} est un rétracte par déformation de U_1 ; donc l'inclusion $M_{i-1} \rightarrow U_1$ induit des isomorphismes $R^1(U_1) \approx R^1(M_{i-1})$ et $\pi(U_1) \approx \pi(M_{i-1})$.

Alors d'après l'hypothèse d'induction et la commutativité du dia-

gramme

$$\begin{array}{ccc} R^1(U_1) & \xrightarrow{I} & \text{Hom}(\pi(U_1), R) \\ \approx \uparrow & & \parallel \approx \uparrow \\ R^1(M_{i-1}) & \xrightarrow{I} & \text{Hom}(\pi(M_{i-1}), R) \end{array}$$

la proposition est démontrée.

3.3 Suite de Mayer-Vietoris

D'après la section 2.3, la suite

$$R^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial} R^1(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{\lambda_{\#}} R^1(U_1) \oplus R^1(U_2) \xrightarrow{\mu_{\#}} R^1(U_1 \cap U_2)$$

est exacte. En particulier, on peut démontrer que si $U_1 \cap U_2$ est connexe $\lambda_{\#}$ est injectif.

Proposition 3.3.1 Si $U_1 \cap U_2$ est connexe la suite

$$0 \rightarrow R^1(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{\lambda_{\#}} R^1(U_1) \oplus R^1(U_2) \xrightarrow{\mu_{\#}} R^1(U_1 \cap U_2) \text{ est exacte.}$$

Démonstration: Soit α une 1-forme fermée sur $U_1 \cup U_2$ et $\alpha + B(U_1 \cup U_2)$ sa classe de cohomologie. Supposons que

$$\lambda_{\#}(\alpha + B(U_1 \cup U_2)) = (i_1^* \alpha + B(U_1)) \oplus (i_2^* \alpha + B(U_2)) = 0$$

alors $i_1^* \alpha \in B(U_1)$ et $i_2^* \alpha \in B(U_2)$. Donc il existe $\gamma_1 \in C^{\infty}(U_1)$ et $\gamma_2 \in C^{\infty}(U_2)$ tels que

$$i_1^* \alpha = \alpha|_{U_1} = d\gamma_1 \quad \text{et} \quad i_2^* \alpha = \alpha|_{U_2} = d\gamma_2.$$

De plus, pour toute constante c , $d(\gamma_1 + c) = d\gamma_1$ et $d(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$

sur $U_1 \cap U_2 \Rightarrow \gamma_1 - \gamma_2 = \text{constante}$ sur $U_1 \cap U_2$. On peut donc

choisir γ_1 et γ_2 tels que $\gamma_1 = \gamma_2$ sur $U_1 \cap U_2$. Posons alors

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_1 & \text{sur } U_1 \\ \gamma_2 & \text{sur } U_2 \end{cases}$$

On a bien $dy = \alpha$; donc $\alpha \in B(U_1 \cup U_2)$ et $\lambda_{\#}$ est injectif, ce qui termine la démonstration.

3.4 Le cas $\lambda \geq 2$

Dans la décomposition de M , où $(U_1, U_2) = (M_1^0(\epsilon/2), P^0(\epsilon))$, considérons le cas où l'indice λ du point critique p_1 est supérieur ou égal à 2. Dans ce cas $U_1 \cap U_2$ est connexe.

Le théorème de Van-Kampen ([1, p. 91]) montre que $\pi(U_1 \cup U_2)$ est déterminé par $\pi(U_1)$ et $\pi(U_2)$ de la façon suivante:

- soit J le sous groupe normal de $\pi(U_1)$ engendré par l'image de j_{1*} , où j_1 est l'inclusion $U_1 \cap U_2 \rightarrow U_1$
 - soit $\ell : j_{1*}(\pi(U_1 \cap U_2)) \rightarrow J$ et $k : J \rightarrow \pi(U_1)$ les inclusions,
- et

$j : \pi(U_1 \cap U_2) \rightarrow j_{1*}(\pi(U_1 \cap U_2))$ la surjection définie par j_{1*}

Proposition 3.4.1 La suite $0 \rightarrow J \xrightarrow{k} \pi(U_1) \xrightarrow{i_{1*}} \pi(U_1 \cup U_2) \rightarrow 0$

est exacte.

Démonstration: $U_2 = P^0(\epsilon)$ est contractile. Donc $\pi(U_2) = 0$.

D'après le théorème de Van-Kampen, [1, p. 94 # 4.8] i_{1*} induit un isomorphisme de $\pi(U_1)/J$ sur $\pi(U_1 \cup U_2)$. Donc $J \cong \ker i_{1*}$, d'où l'exactitude de la suite.

Corollaire 3.4.2 La suite $0 \rightarrow \text{Hom}(\pi(U_1 \cup U_2), R) \xrightarrow{i_{1*}} \text{Hom}(\pi(U_1), R)$

$\xrightarrow{k*} \text{Hom}(J, R) \rightarrow 0$ est exacte.

Proposition 3.4.3 La suite

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\pi(U_1 \cup U_2), R) \xrightarrow{i_1^*} \text{Hom}(\pi(U_1), R) \xrightarrow{j_1^*} \text{Hom}(\pi(U_1 \cap U_2), R)$$

est exacte.

Démonstration: $j_{1*} = k \circ l$ par définition de k , j et l .

$$\pi(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{j} j_{1*}(\pi(U_1 \cap U_2)) \xrightarrow{l} J \rightarrow \pi(U_1).$$

Donc, $j_1^* = j^* \circ l^* \circ k^*$

$$\text{Hom}(\pi(U_1), R) \xrightarrow{k^*} \text{Hom}(J, R) \xrightarrow{l^*} \text{Hom}(j_{1*}(\pi(U_1 \cap U_2)), R) \xrightarrow{j_1^*} \text{Hom}(\pi(U_1 \cup U_2), R)$$

j_* est injectif car j est surjectif. Il suffit maintenant de montrer que $\ker j_1^* = \ker k^*$. Clairement on a $\ker k^* \subset \ker j_1^*$.

Soit $f \in \ker j_1^*$; alors

$$0 = l^* \circ k^*(f) = (k \circ l)^*(f) = f \circ (k \circ l)$$

c'est-à-dire $f|_{j_{1*}(\pi(U_1 \cap U_2))} \equiv 0$. Mais dans ce cas, $f|_J \equiv 0$

car J est le sous groupe normal engendré par $j_{1*}(\pi(U_1 \cap U_2))$.

Donc $0 = f \circ k = k^* f$, d'où $\ker k^* = \ker j_1^*$ ce qui démontre la proposition.

Proposition 3.4.4 $I : R^1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \text{Hom}(\pi(U_1 \cap U_2), R)$ est un isomorphisme.

Démonstration: On a vu que $U_1 \cap U_2$ a le même type d'homotopie que la sphère $S^{\lambda-1}$, et par l'hypothèse d'induction sur la dimen-

sion, $I : R^1(S^{\lambda-1}) \rightarrow \text{Hom}(\pi(S^{\lambda-1}), R)$ est un isomorphisme, d'où le résultat.

En combinant les résultats de 3.3.1 et 3.4.3 et en tenant compte du fait que $R^1(U_2) = 0$, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \text{Hom}(\pi(U_1 \cup U_2), R) & \rightarrow & \text{Hom}(\pi(U_1), R) & \rightarrow & \text{Hom}(\pi(U_1 \cap U_2), R) \\
 & & \uparrow I & & \uparrow I_1 & & \uparrow I_2 \\
 0 & \rightarrow & R^1(U_1 \cup U_2) & \longrightarrow & R^1(U_1) & \longrightarrow & R^1(U_1 \cap U_2)
 \end{array}$$

Théorème 3.4.5 * $I : R^1(M_1) \rightarrow \text{Hom}(\pi(M_1), R)$ est un isomorphisme.

Démonstration: Les lignes du diagramme précédent sont exactes, et I_1, I_2 sont des isomorphismes. Donc, en appliquant le lemme des cinq, on obtient que $I : R^1(M_1^0) \rightarrow \text{Hom}(\pi(M_1^0), R)$, est un isomorphisme.

De plus, l'inclusion $M_1^0 \subset M_1$ induit des isomorphismes

$R^1(M_1^0) \cong R^1(M_1)$ et $\pi(M_1^0) \cong \pi(M_1)$, ce qui démontre le théorème.

3.5 Le cas $\lambda = 1$

Dans ce cas on ne peut plus utiliser le couple d'ouverts $(U_1, U_2) = (M_1^0(\epsilon), P_1^0(\epsilon))$ car l'intersection $U_1 \cap U_2$ n'est plus connexe (elle possède le type d'homotopie de S^0). On va définir un autre couple d'ouverts (X_1, X_2) tel que $X = X_1 \cup X_2$ possède le même type d'homotopie que M_1 et tel que $X_1 \cap X_2$ soit connexe. D'abord un lemme topologique:

Lemme 3.5.1 Soit A un espace connexe par arcs. Si l'on attache

à A une 1-cellule $[0,1]$ au moyen d'une application $\phi : \{0,1\} \rightarrow A$ où $\phi(0) \neq \phi(1)$, l'espace obtenu $A \cup_{\phi} [0,1]$ a le même type d'homotopie que $A \cup_{\psi} [0,1]$ où $\psi : \{0,1\} \rightarrow A$ satisfait $\psi(0) = \psi(1) = \phi(0)$.

Démonstration: c'est un cas particulier d'un lemme de Whitehead, voir [3;p. 20 lemme 3.6].

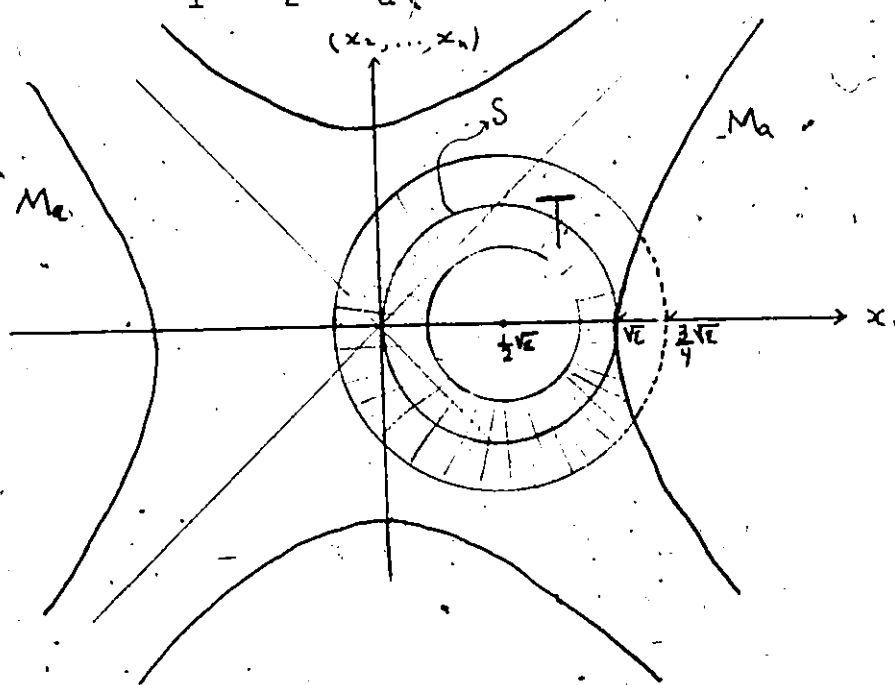
On revient à la notation de la section 2.2. Posons

$S = \{x \in U_1 \cap M_1^0 : (x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\epsilon})^2 + x_2^2 = \epsilon/4, x_3 = \dots = x_n = 0\}$ où U_1 est la carte autour du point critique p_1 , et $T = \bigcup_{p \in S} \bar{B}(p, \frac{1}{4}\sqrt{\epsilon})$,

où $\bar{B}(p, \frac{1}{4}\sqrt{\epsilon})$ est la n -boule fermée de U_1 centrée en p et de rayon $\sqrt{\epsilon}/4$. Ainsi défini, S est un cercle dans U_1 tangent à M_a au point $(\sqrt{\epsilon}, 0, \dots, 0)$ et $T^{\circ} = \text{Int } T$ est un voisinage tubulaire ouvert de S . On définit

$$X_1 = M_a^{\circ}, \quad X_2 = T^{\circ}$$

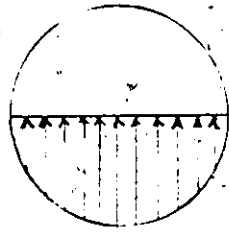
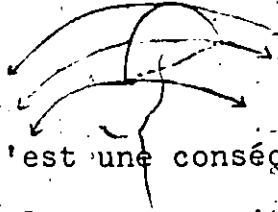
alors $X = X_1 \cup X_2 = M_a^{\circ} \cup T^{\circ}$



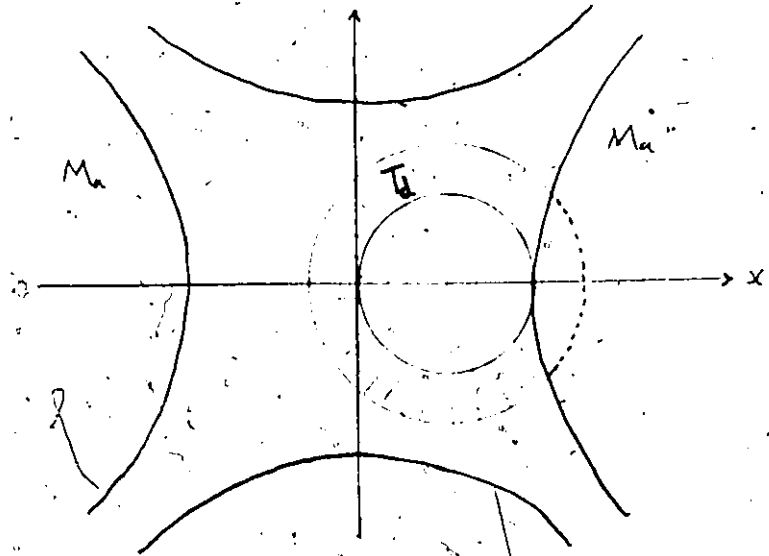
Proposition 3.5.2 $T \cup M_a$ a le même type d'homotopie que $S \cup M_a$

Démonstration:

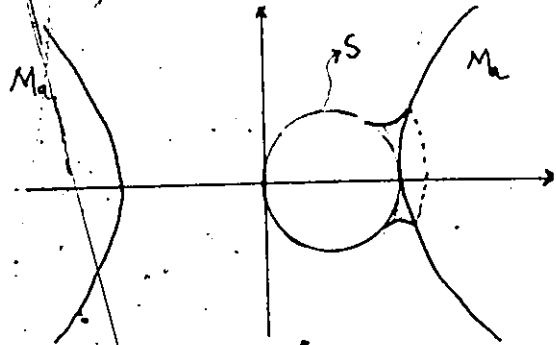
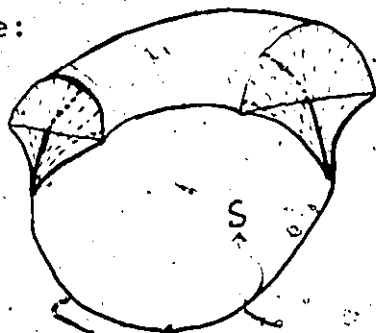
Le "demi-tore" T_d est un rétracte par déformation du tore T . C'est une conséquence immédiate de la rétraction continue d'une boule sur sa moitié supérieure:



(x_1, \dots, x_n)

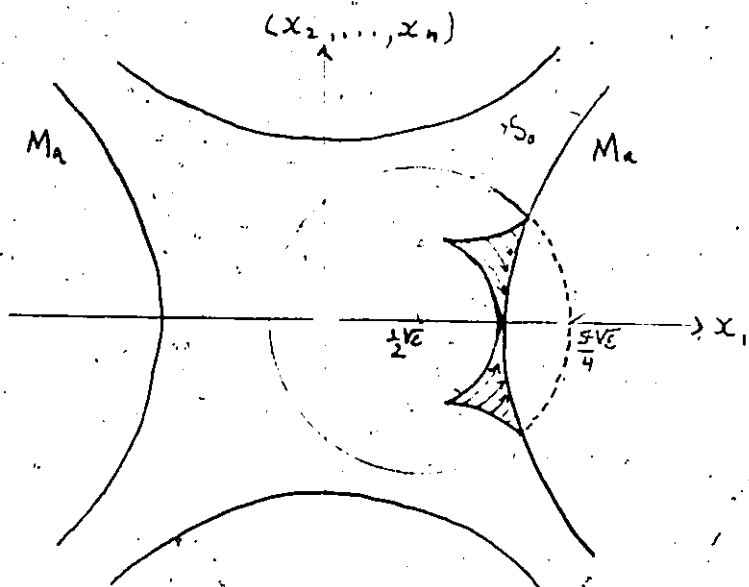


Avec cette rétraction particulière on obtient que $T_d \cup M_a$ est un rétracte par déformation de $T \cup M_a$. D'autre part, T_d se rétracte de façon continue sur un sous-ensemble S ayant la forme suivante:



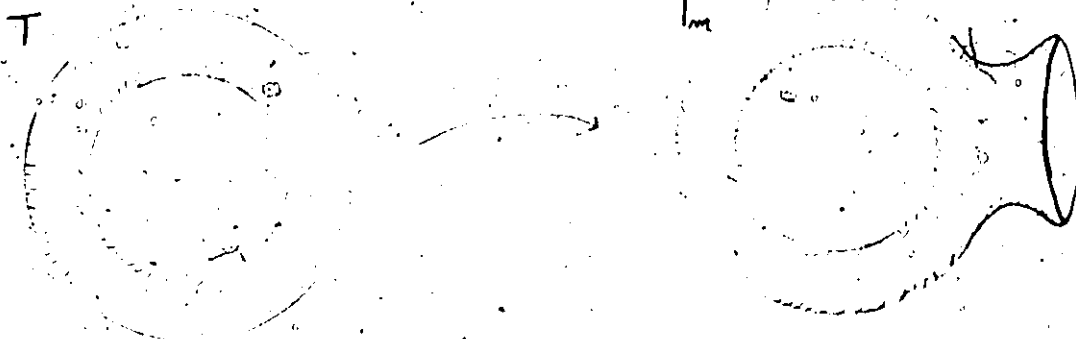
avec cette rétraction, $T_S \cup M_a$ est un rétracte par déformation de $T_d \cup M_a$. Appelons Ω le sous-ensemble $\overline{T_S - S}$ de T et S_0 le cercle défini par

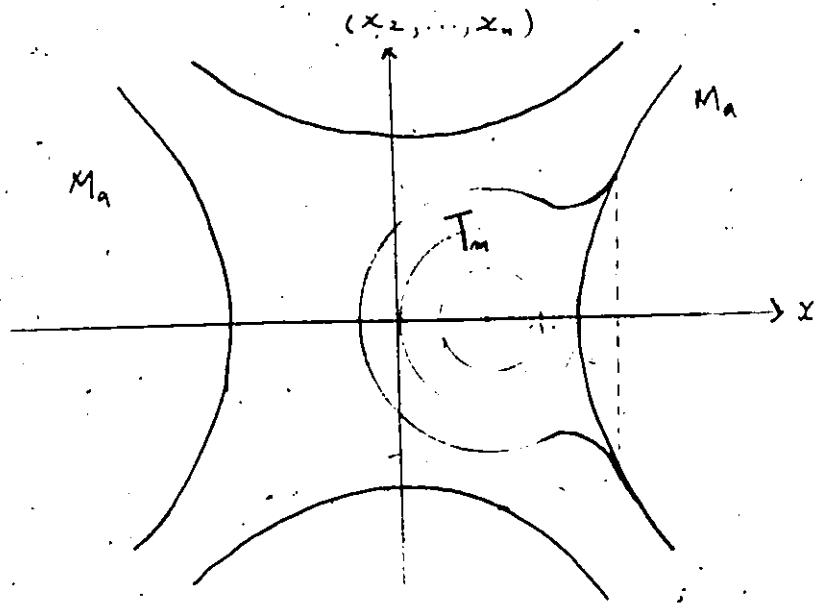
$$S_0 = \{x \in U_1 \cap M_1^0 : (x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\epsilon})^2 + x_2^2 = (\frac{3}{4}\sqrt{\epsilon})^2, x_3 = \dots = x_n = 0\}$$



Selon le lemme 3.5.1 $T_S \cup M_a$ et $\Omega \cup S_0 \cup M_a$ ont le même type d'homotopie. De plus, $\Omega \cup S_0 \cup M_a$ se rétracte de façon continue sur $S_0 \cup M_a$ (car Ω se rétracte de façon continue le long des parallèles du tore). Et toujours d'après 3.5.1 $S_0 \cup M_a$ a le même type d'homotopie que $S \cup M_a$ ce qui termine la démonstration.

Par un homéomorphisme, on peut modifier le tore T près de son intersection avec le bord de M_a de façon à ce que la réunion $T_m \cup M_a$ de ce tore modifié T_m avec M_a soit une variété à bord.





On a donc que $T^\circ \cup M_a^\circ$ est homéomorphe à $T_m^\circ \cup M_a^\circ$ et $T_m^\circ \cup M_a^\circ = (T_m \cup M_a)^\circ$ a le même type d'homotopie que $T_m \cup M_a$ (puisque $T_m \cup M_a$ est une variété à bord). Utilisant 3.5.2 on peut conclure:

Proposition 3.5.3 $T^\circ \cup M_a^\circ$ a le même type d'homotopie que $M_a \cup S$.

Proposition 3.5.4 M_1° a le même type d'homotopie que X .

Démonstration: Suivant la proposition 2.2.5, M_1 a le même type d'homotopie que $M_a \cup e^1$; d'après le lemme 3.5.1, $M_a \cup e^1$ a le même type d'homotopie que $M_a \cup S$, qui à son tour a le même type d'homotopie que $T^\circ \cup M_a^\circ = X$, d'où le résultat.

Corollaire 3.5.4

$I : R^1(X) \rightarrow \text{Hom}(\pi(X), R)$ est un isomorphisme $\Leftrightarrow I : R^1(M_1) \rightarrow \text{Hom}(\pi(M_1), R)$ en est un.

Pour accomplir l'étape d'induction sur la filtration des M_i , il suffit de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.5.7

Si $\dim M = n > 1$, $I : R^1(X) \rightarrow \text{Hom}(\pi(X), R)$ est un isomorphisme.

Démonstration:

X_1 et X_2 est contractile, X_2 a le type d'homotopie de S et X_1 a le type d'homotopie de M_{1-1} . On applique le théorème de Van Kampen au couple (X_1, X_2) . D'après [1, p. 94], $\pi(X)$ est isomorphe au produit libre $\pi(X_1) * \pi(X_2)$. Par conséquent les homomorphismes $k_1 : \pi(X_1) \rightarrow \pi(X)$ et $k_2 : \pi(X_2) \rightarrow \pi(X)$ induits par les inclusions sont injectifs et l'homomorphisme canonique

$$k_1^* \oplus k_2^* : \text{Hom}(\pi(X), R) \rightarrow \text{Hom}(\pi(X_1), R) \oplus \text{Hom}(\pi(X_2), R)$$

$$f \longmapsto (f \circ k_1, f \circ k_2)$$

est un isomorphisme.

D'autre part, on a la situation analogue pour la cohomologie. Au moyen de la suite de Mayer-Viétoris du couple (X_1, X_2) on obtient l'isomorphisme

$$i_1^* \oplus i_2^* : R^1(X_1) \oplus R^1(X_2) \xrightarrow{\cong} R^1(X)$$

où i_1^* et i_2^* sont induits par les inclusions $i_1 : X_1 \rightarrow X$
 $i_2 : X_2 \rightarrow X$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R^1(X) & \xrightarrow{i_1^* \oplus i_2^*} & R^1(X_1) \oplus R^1(X_2) \\ \downarrow I & & \downarrow I_1 \oplus I_2 \\ \text{Hom}(\pi(X), R) & \xrightarrow{k_1^* \oplus k_2^*} & \text{Hom}(\pi(X_1), R) \oplus \text{Hom}(\pi(X_2), R) \end{array}$$

commute. Enfin, par l'hypothèse d'induction sur l'in-

dice de filtration (puisque X_1 a le type d'homotopie de M_{1-1})
 I_1 est un isomorphisme. Vu que $\dim M = n > 1$, I_2 est un isomor-
 phisme par l'hypothèse d'induction sur la dimension (puisque X_2
 a le type d'homotopie de S). Par conséquent $I : R^1(X) \rightarrow \text{Hom}(\pi(X), R)$
 est aussi un isomorphisme.

Ceci termine la démonstration par induction du résultat
 suivant: si $\dim M = n > 1$, l'homomorphisme $I : R^1(M) \rightarrow \text{Hom}(\pi(M), R)$
 est un isomorphisme.

Si $n = 1$, M est difféomorphe à la 1-sphère S^1 (cf. [10,
 p. 127 théorème 3.4.1]). Vérifions que $I : R^1(S^1) \rightarrow \text{Hom}(\pi(S^1), R)$
 est un isomorphisme; pour ce, on a recours aux lemmes suivants:

Lemme 3.5.8

$R^1(S^1)$ est isomorphe à R .

Démonstration: Une preuve de ce lemme utilise des suites exactes
 de cohomologie (de de Rham) et le théorème d'excision. La démon-
 stration complète se trouve dans [1; p. 181, théorème 6.1].

Lemme 3.5.9

Soit $\alpha \in D^1(S^1)$, $\int_{S^1} \alpha = 0$ si et seulement si $\alpha = df$ pour
 un certain $f \in C^\infty(S^1)$.

Démonstration: S^1 étant orienté, on définit l'application

$\Phi : Z^1(S^1) \rightarrow R$ par $\alpha \mapsto \int_{S^1} \alpha$. D'après le théorème de Stokes,

si $\alpha = df$ on a

$$\int_{S^1} \alpha = \int_{S^1} df = \int_{\partial S^1} f = 0 \text{ car } \partial S^1 \text{ est vide}$$

En passant au quotient par $B^1(S^1)$, ϕ induit une application $\bar{\phi} : Z^1(S^1)/B^1(S^1) = R^1(S^1) \rightarrow R$ qui dépend canoniquement de l'orientation donnée à S^1 et est un homomorphisme d'espaces vectoriels. Egalement, il existe une forme volume ω et on a $\int_{S^1} \omega > 0$, donc $\bar{\phi}([\omega]) > 0$ où $[\omega]$ est la classe de cohomologie de ω dans $R^1(S^1)$. Il s'ensuit que $\bar{\phi}$ est un homomorphisme surjectif. Mais d'après 3.5.8 $\dim R^1(S^1) = 1$. Donc $\bar{\phi}$ est un isomorphisme; alors $\ker \bar{\phi} = [0]$ d'où $\ker \phi = B^1(S^1)$, ce qui démontre le lemme.

Maintenant, on remarque que $\text{Hom}(\pi(S^1), R) \approx R$ car $\pi(S^1) \approx \mathbb{Z}$. Il suffit donc de vérifier l'injectivité de l'homomorphisme (d'espaces vectoriels) I . Soit α une forme fermée sur S^1 telle que $I(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $\int_{S^1} \hat{\phi}^* \alpha = 0$ pour tout lacet ϕ dans S^1 , et en particulier si $\phi = \gamma : t \mapsto e^{2\pi i t}$ $\int_{S^1} \alpha = 0$ car $\hat{\phi} =$ identité; alors d'après le lemme 3.5.9 α est exacte i.e. $[\alpha] = 0$. Par conséquent $I : R^1(S^1) \rightarrow \text{Hom}(\pi(S^1), R)$ est bien un isomorphisme.

On a donc de façon générale:

Théorème 3.5.10

Soit M une variété compacte connexe. L'homomorphisme $I : R^1(M) \rightarrow \text{Hom}(\pi(M), R)$ est un isomorphisme.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GODBILLON, C.
Eléments de topologie algébrique, Hermann, Paris, 1970.
- [2] GREENBERG, M.
Lectures on algebraic topology, W.A. Benjamin, New York, 1967.
- [3] MILNOR, J.
Morse Theory, Annals of Mathematics Studies # 51, Princeton University Press, 1963.
- [4] ———, Lectures on the h-cobordism Theorem, Princeton Mathematical Notes, Princeton University Press, 1965.
- [5] MUNKRES, J.
Elementary Differential Topology, Annals of Mathematics Studies # 54, Princeton University Press, 1966.
- [6] WILLARD, S.
General Topology, Addison-Wesley, 1970.
- [7] DOLD, A.
Lectures on algebraic topology, Springer-Verlag, 1972.
- [8] GREUB, HALPERIN et VAN STONE
Connections, Curvature and Cohomology, Academic Press, 1972.
- [9] SPANIER, E.H.
Algebraic Topology, McGraw-Hill, New York, 1966..
- [10] BERGER, M., GOSTIAUX, B.
Géométrie différentielle, Armand Collin, Paris, 1972.
- [11] SAMELSON, H.
On de Rham's Theorem, Topology, [6], (427-432), 1967.