

## **INFORMATION TO USERS**

This manuscript has been reproduced from the microfilm master. UMI films the text directly from the original or copy submitted. Thus, some thesis and dissertation copies are in typewriter face, while others may be from any type of computer printer.

**The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.** Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleedthrough, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send UMI a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.

Oversize materials (e.g., maps, drawings, charts) are reproduced by sectioning the original, beginning at the upper left-hand corner and continuing from left to right in equal sections with small overlaps.

Photographs included in the original manuscript have been reproduced xerographically in this copy. Higher quality 6" x 9" black and white photographic prints are available for any photographs or illustrations appearing in this copy for an additional charge. Contact UMI directly to order.

Bell & Howell Information and Learning  
300 North Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106-1346 USA  
800-521-0600

**UMI<sup>®</sup>**





Université d'Ottawa • University of Ottawa



ÉTUDE DE BIFURCATION DE HOPF-HOPF AVEC  
RÉSONANCE 1 : 2 POUR UN SYSTÈME DE DEUX NEURONES  
COUPLÉS AVEC DÉLAIS

Par  
Mélanie Langlois  
Septembre 2000

Thèse présentée à l'École des Etudes Supérieures  
de l'Université d'Ottawa pour l'obtention  
de la Maîtrise ès Sciences en Mathématiques<sup>1</sup>

© Copyright 2000  
par Mélanie Langlois, Ottawa, Canada

---

<sup>1</sup>Le programme de la maîtrise est conjoint avec l'Université Carleton et est administré par l'Institut de Mathématiques et de Statistiques d'Ottawa-Carleton



**National Library  
of Canada**

**Acquisitions and  
Bibliographic Services**

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

**Bibliothèque nationale  
du Canada**

**Acquisitions et  
services bibliographiques**

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Voire référence*

*Our file* *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-57127-0

**Canada**

# Résumé

Nous montrons que pour un système de deux neurones couplés avec multiples délais et dont les influences mutuelles et rétroactives sont données par des fonctions non-linéaires, monotones, croissantes ou décroissantes selon le cas, la solution triviale peut subir une bifurcation de Hopf-Hopf, tel qu'il y a une résonance 1 : 2 entre les deux modes de Hopf. Nous obtenons de l'analyse linéaire du système la famille des valeurs critiques des paramètres pour lesquelles le système subit une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. Nous ferons de plus une étude de la stabilité de l'origine afin de montrer que l'origine est toujours instable près des valeurs critiques des paramètres pour lesquelles il y a une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. Nous commentons ensuite des simulations numériques qui illustrent une cascade de dédoublements de période rarement observée dans le cas d'équations aux délais. Finalement, nous procédons à la réduction du système à sa variété du centre puis nous ramenons les équations obtenues sous une forme normale pour une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2.

# Remerciements

L'auteure de cette thèse tient particulièrement à remercier le Conseil de recherches en sciences naturelles et génie du Canada pour la généreuse bourse dont elle a pu disposer tout au long des deux dernières années consacrées à l'obtention de sa maîtrise. De plus, l'auteure tient à remercier son directeur de thèse M. VICTOR LEBLANC pour les judicieux conseils qu'il lui a prodigués et pour l'expertise qu'il lui a permis d'acquérir.

# Dédicace

J'aimerais dédier cette thèse à celui qui simplifie mon quotidien, réalise mes rêves, m'encourage, me chérie et m'aime, à ÉTIENNE.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Dédicace</b>	<b>iv</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Considérations préliminaires . . . . .	1
1.2 Neurones bipolaires et multipolaires . . . . .	2
1.3 Version mathématique du principe de Dale . . . . .	4
1.4 Premiers modèles de réseaux de neurones . . . . .	6
1.5 Délais de réaction . . . . .	9
1.6 Multiples délais de réaction . . . . .	11
1.7 Plan de la thèse . . . . .	12
<b>2 Analyse linéaire</b>	<b>17</b>
2.1 Renormalisation du temps et des paramètres . . . . .	17
2.2 Équation caractéristique . . . . .	21
2.3 Valeurs critiques des paramètres . . . . .	23
2.4 Résumé . . . . .	34
<b>3 Stabilité et dédoublement de période</b>	<b>36</b>
3.1 Instabilité de l'origine . . . . .	36
3.2 Dédoublement de période . . . . .	45

<b>4</b>	<b>Variété du centre et forme normale</b>	<b>54</b>
4.1	Motifs . . . . .	54
4.2	Résumé de la théorie . . . . .	55
4.3	Sous-espace du centre $N$ . . . . .	59
4.4	Forme bilinéaire . . . . .	64
4.5	Base pour le problème adjoint . . . . .	68
4.6	Équations du système restreint à sa variété du centre . . . . .	72
4.7	Forme normale . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>80</b>
<b>A</b>	<b>Calculs Maple</b>	<b>83</b>

# Table des figures

1	Un neurone moteur . . . . .	2
2	Propagation de l'influx nerveux . . . . .	3
3	Réponse d'un neurone en fonction des stimuli . . . . .	8
4	Dédoublement de période de cycles limites . . . . .	14
5	Cascade de dédoublements de période amenant le chaos . . . . .	15
6	Solutions de l'expression $-2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) = 0$ . . . . .	27
7	Graphique de $\theta_2$ en fonction de $\theta_1$ pour $k = 0$ . . . . .	29
8	Graphique de l'équation implicite (62) . . . . .	32
9	Graphique de l'équation implicite (63) . . . . .	33
10	Combinaison des graphiques 8 et 9 . . . . .	33
11	Solutions du système (66) avec $k = 0$ pour $T(\Omega)$ . . . . .	40
12	Solution du système (66) avec $k = 1$ pour $T(\Omega)$ . . . . .	41
13	Solution du système (66) avec $k = 2$ pour $T(\Omega)$ . . . . .	41
14	Solution du système (66) avec $k = 3$ pour $T(\Omega)$ . . . . .	42
15	Solution du système (66) avec $k = 10$ pour $T(\Omega)$ . . . . .	42
16	Solution du système (66) pour $\Omega \in ]20\pi, 22\pi[$ et $k = 1$ . . . . .	43
17	Solutions du système (66) pour $\Omega = 0,5$ et $k = 1$ . . . . .	44
18	Solutions du système (66) pour $\Omega = 2,5$ et $k = 1$ . . . . .	45
19	Simulation numérique du système (18) avec $\tau_s = 1,0$ . . . . .	48
20	Simulation numérique du système (18) avec $\tau_s = 1,0625$ . . . . .	48
21	Simulation numérique du système (18) avec $\tau_s = 1,065$ . . . . .	49
22	Simulation numérique du système (18) avec $\tau_s = 1,0675$ . . . . .	49
23	Simulation numérique du système (18) avec $\tau_s = 1,0725$ . . . . .	50

24	Simulation numérique du système (18) avec $\tau_s = 1,0975$ . . . . .	50
25	Simulation numérique du système (18) avec $\tau_s = 1,1$ . . . . .	51
26	Simulation numérique du système (18) avec $\tau_s = 1,15$ . . . . .	51
27	Cycle limite pour le système (18) avec $\tau_s = 1,0625$ . . . . .	52
28	Cycle limite pour le système (18) avec $\tau_s = 1,0725$ . . . . .	52
29	Cycle limite pour le système (18) avec $\tau_s = 1,1$ . . . . .	53
30	Système (18) dans un état chaotique avec $\tau_s = 1,15$ . . . . .	53
31	Région où l'intégrale est nulle . . . . .	67

# Chapitre 1

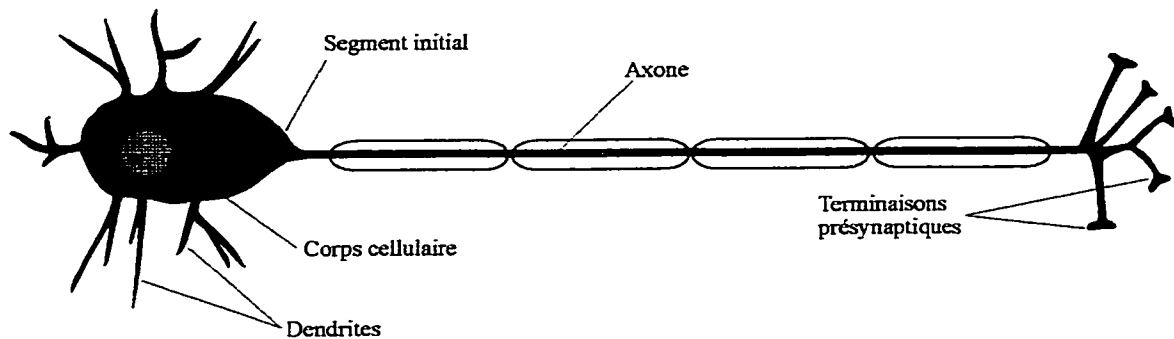
## Introduction

### 1.1 Considérations préliminaires

Le système nerveux humain est particulièrement complexe et est loin d'être totalement compris de nos jours. Les cellules nerveuses, ou neurones, sont d'une grande variété et la façon dont les neurones communiquent entre eux est tout aussi diversifiée. Tels que décrit dans [19, 17], les neurones sont composés de trois parties : de dendrites, d'un axone et d'un corps cellulaire (voir figure 1). De manière générale et d'après MARTIN [19], on regroupe les neurones selon trois classes : unipolaire, bipolaire et multipolaire. Ces classes sont basées sur la configuration particulière des dendrites et des axones des neurones. La première classe regroupe les neurones qui n'ont pas de dendrites et n'ont qu'un seul axone, comme entre autres les neurones qui contrôlent les sécrétions des glandes exocrines, ou ceux qui contrôlent la contraction de certains muscles. Les neurones sensoriels, qui reçoivent les stimuli provenant de l'environnement, font partie de la deuxième classe, alors que la plupart des neurones du cerveau et de la moelle épinière sont ceux de la troisième classe. Les neurones de ces deux dernières classes possèdent tous des dendrites et un axone, mais contrairement aux neurones sensoriels, les neurones de la troisième classe assurent en particulier la communication entre les différentes zones du cerveau et ne reçoivent donc pas directement de stimuli de l'environnement. Les neurones sont reliés entre eux par les synapses. Les axones conduisent l'influx nerveux du corps cellulaire du neurone au

système nerveux central, et les dendrites dirigent l'influx nerveux vers le corps cellulaire du neurone et éventuellement vers l'axone du neurone. Les synapses peuvent être de plusieurs types : dendrite à axone, dendrite à dendrite, comme dans le cas des cellules olfactives [13], axone à axone, axone au corps cellulaire, etc. Ces synapses donnent lieu à des réactions chimiques et électriques. De plus, il peut y avoir plus d'une synapse reliant les deux mêmes neurones, et un neurone, tel que ceux de la moelle épinière, peut recevoir des messages transmis par environ 10 000 synapses.

FIG. 1: Un neurone moteur

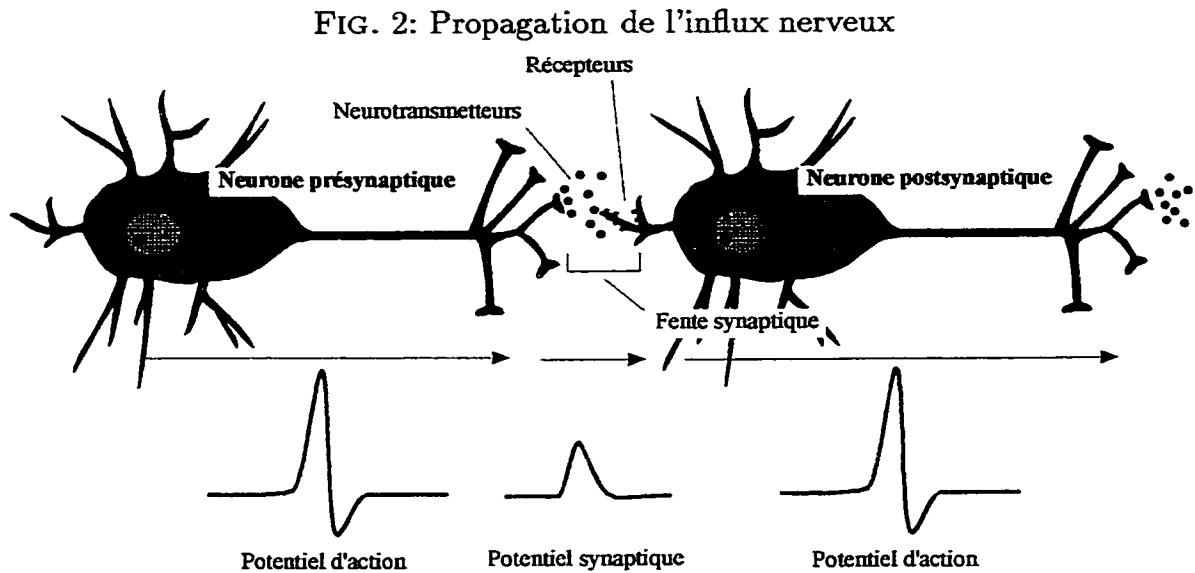


Le modèle étudié dans cette thèse est un modèle empirique et ne tient donc pas compte de toutes les observations neurophysiologiques qu'il est possible d'émettre et, en particulier, ne tient pas compte de toutes celles faites ci-haut. En fait, le modèle initialement considéré par HOPFIELD [12] est pour des neurones ayant des dendrites et un axone, donc pour celles de la deuxième et de la troisième classe. Dans les sections qui suivent nous donnerons un peu plus de détails sur les caractéristiques biologiques des neurones bipolaires et multipolaires, puis nous verrons comment le modèle considéré dans cette thèse est un cas particulier du modèle de HOPFIELD.

## 1.2 Neurones bipolaires et multipolaires

Pour les neurones de type bipolaire ou multipolaire, les synapses connectent les ramifications des axones des neurones au corps cellulaire, au segment initial ou aux dendrites des autres neurones. Une synapse se compose de la membrane du neurone

présynaptique, de la fente synaptique et de la membrane polarisée du neurone postsynaptique. La membrane postsynaptique est de polarisation négative du côté interne et de polarisation positive du côté externe. Lorsqu'un influx arrive à une terminaison synaptique, des neurotransmetteurs sont libérés et viennent se fixer à des récepteurs de la membrane postsynaptique (voir figure 2). Cette fixation dépolarise ou hyperpolarise la membrane et la variation de potentiel de la membrane, ou potentiel synaptique, déclenche alors une excitation ou une inhibition selon que le neurotransmetteur est excitant ou inhibiteur.



Par ailleurs, certains neurotransmetteurs peuvent être à la fois excitants et inhibiteurs. Dans ce cas ce sont les récepteurs de la membrane postsynaptique qui déterminent le rôle joué par le neurotransmetteur. En fait, les synapses localisées sur les dendrites, le corps cellulaire et le segment initial du neurone sont inhibitrices et celles situées sur les épines<sup>1</sup> des dendrites sont excitantes. C'est l'effet de tous les neurotransmetteurs combinés, soient tous ceux reçus à toutes les terminaisons synaptiques du neurone qui déclenche ou non l'influx. Si les neurotransmetteurs excitants sont en quantité suffisante, alors l'influx est déclenché, sinon seule une excitation locale au niveau de la membrane postsynaptique apparaît. Les neurotransmetteurs

<sup>1</sup> *spines* en anglais

sont dégradés ou absorbés aussitôt que la fixation à lieu, mais si une excitation locale se produit alors celle-ci persiste. Cette excitation peut ensuite donner lieu à un influx nerveux si d'autres neurotransmetteurs à effets excitants viennent se fixer en nombre suffisant à la membrane postsynaptique et peut aussi être inhibée si des neurotransmetteurs inhibiteurs viennent hyperpolariser la membrane. Selon les influx reçus et accumulés, ainsi que selon son état interne à un certain moment (influence rétroactive), le corps cellulaire du neurone atteindra ou non le potentiel d'action qui déclenche un signal, que le neurone envoie par son axone aux autres neurones du réseau. Ainsi, le système nerveux peut ajuster sa réaction selon les stimuli reçus de l'environnement.

Ce processus de stimuli-réponses est particulièrement complexe, mais en général il suffit de savoir que les neurones respectent le principe de Dale, c'est-à-dire qu'un neurone possède une influence qui facilite ou retarde l'atteinte du potentiel d'action chez les autres neurones du réseau. On dit alors que le neurone est respectivement excitant ou inhibiteur, et l'on suppose que toutes les terminaisons synaptiques de ce neurone aux autres neurones du réseau sont respectivement excitantes ou inhibitrices.

### 1.3 Version mathématique du principe de Dale

HOPPENSTEADT et IZHKEVICH dans [13] proposent l'interprétation mathématique suivante du principe de Dale.

Supposons que  $x_i$  représente l'activité interne du neurone  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Supposons de plus que  $x_i$  augmentera s'il y a dépolarisation de la membrane postsynaptique du neurone  $i$  et diminuera s'il y a hyperpolarisation de cette même membrane. De manière générale, la variation de  $x_i$  en fonction des autres neurones est donnée par

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n).$$

Le coefficient associé à l'influence d'une terminaison synaptique du neurone  $j$  au neurone  $i$  est donné par

$$s_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0).$$

Il est alors évident que s'il existe une terminaison synaptique du neurone  $j$  au neurone  $i$ , c'est-à-dire que si  $s_{ij} \neq 0$ , alors le neurone  $j$  facilitera la dépolarisation de la membrane du neurone  $i$  si  $s_{ij} > 0$  et retardera celle-ci si  $s_{ij} < 0$ . Nous disons donc que le neurone  $j$  est excitant si  $s_{ij} > 0$  et inhibiteur si  $s_{ij} < 0$ . Finalement, puisque selon le principe de Dale un neurone est soit excitant ou inhibiteur, alors les coefficients associés aux terminaisons synaptiques du neurone  $j$  aux autres neurones du réseau sont tous de même signe. D'où si le neurone  $j$  est excitant (inhibiteur) alors  $s_{ij} \geq 0$  ( $s_{ij} \leq 0$ ),  $\forall i \neq j$ .

Il est intéressant de noter que la version mathématique du principe de Dale est plus générale que le principe de Dale tel qu'énoncé à la section 1.2. En fait, dans l'énoncé du principe de Dale donné à la section 1.2, il a été supposé que les terminaisons synaptiques d'un neurone aux autres neurones du réseau sont respectivement toutes excitantes ou inhibitrices. Toutefois, il a aussi été mentionné à la section 1.2 que généralement les terminaisons synaptiques d'un neurone  $j$  à un autre neurone du réseau ne sont pas nécessairement du même type, et qu'elles peuvent être excitantes ou inhibitrices. Il y a donc une contradiction entre la supposition faite dans l'énoncé du principe de Dale et la réalité. La version mathématique du principe de Dale permet toutefois de tenir compte de cette généralité. Il suffit en fait de considérer plutôt l'ensemble de toutes les terminaisons synaptiques, excitantes et inhibitrices, du neurone  $j$  au neurone  $i$ . Si l'ensemble des terminaisons synaptiques agit comme une terminaison synaptique excitante (inhibitrice), alors on dit que l'influence « moyenne » du neurone  $j$  au neurone  $i$  est excitante (inhibitrice) et on aura alors  $s_{ij} \geq 0$  ( $s_{ij} \leq 0$ ). Puis pour respecter le principe de Dale, il suffira que ceci soit vérifié pour tout  $i$ , soit que  $s_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$  ( $s_{ij} \leq 0, \forall i \neq j$ ).

Par ailleurs, le coefficient  $s_{ii} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$  ne représente pas l'influence d'une terminaison synaptique du neurone  $i$  à lui-même, mais bien l'influence rétroactive. Ainsi, le principe de Dale n'a pas à être appliqué au coefficient  $s_{ii}$ , qui peut être positif ou négatif selon la nature du neurone. D'où il est possible, par exemple, d'avoir à la fois

$$s_{ij} > 0, \forall i \neq j \text{ et } s_{ii} < 0.$$

Pour tous les modèles qui suivront, bien que les auteurs utilisent différentes appellations, il s'agira toujours de l'influence « moyenne » de l'ensemble des terminaisons synaptiques d'un neurone  $j$  à un autre neurone. Toutefois, les auteurs ne tiennent pas nécessairement compte du principe de Dale.

## 1.4 Premiers modèles de réseaux de neurones

HOPFIELD dans [12] présente en 1984 un modèle pour un réseau de  $N$  neurones. Le modèle de HOPFIELD complète le modèle plus simple basé sur les neurones logiques de MCCULLOCH et PITTS [21], que ceux-ci introduisent en 1943. Ces deux modèles, tous deux pour un réseau de  $N$  neurones, possèdent les caractéristiques suivantes :

1. chacun des  $N$  neurones est lié aux  $N - 1$  autres neurones,
2. l'état d'un neurone  $i$  est donné par la valeur  $V_i$  correspondant à la réponse du neurone aux stimuli,
3. les stimuli proviennent de deux sources possibles, soit d'abord d'une source externe, puis de tous les signaux que se transmettent tous les neurones du réseau. Par exemple si  $i$  est un neurone sensoriel alors une source de stimuli provient des messages envoyés par l'organe sensoriel et perçus par une cellule réceptrice rattachée à l'axone du neurone. Ce neurone sensoriel, une fois stimulé, peut ensuite transmettre des signaux par son axone aux dendrites des autres neurones du réseau, qui transmettront possiblement d'autres signaux.

De plus, le modèle basé sur les neurones logiques de MCCULLOCH et PITTS est un modèle discret où

1. un neurone  $i$  ne peut être que dans l'un de deux états, soit actif lorsqu'un influx est déclenché et passif autrement,
2. l'état d'un neurone  $i$  après stimulation dépend d'une valeur limite  $U_i$  tel que le neurone bascule de l'état passif à l'état actif lorsque la valeur de l'apport des stimuli est au dessus de cette valeur limite et bascule de l'état actif à l'état passif lorsque cet apport est en dessous de la valeur limite.

Ainsi dans ce modèle un neurone  $i$  aura pour valeur  $V_i^0$  lorsque son état sera passif et  $V_i^1$  lorsque son état sera actif. De plus, l'état d'un neurone  $i$  est donné par

$$H_i = \sum_{j \neq i} T_{ij} V_j + I_i, \quad (1)$$

où  $I_i$  est une constante correspondant à l'apport des stimuli extérieur au réseau,  $V_j$  est l'apport des stimuli provenant du neurone  $j$  et  $T_{ij}$  est une constante d'interaction entre le neurone  $i$  et le neurone  $j$ . Finalement, le comportement d'un neurone dans le temps est décrit par

$$V_i = \begin{cases} V_i^0 & \text{si } H_i < U_i \\ V_i^1 & \text{si } H_i > U_i \end{cases}, \quad (2)$$

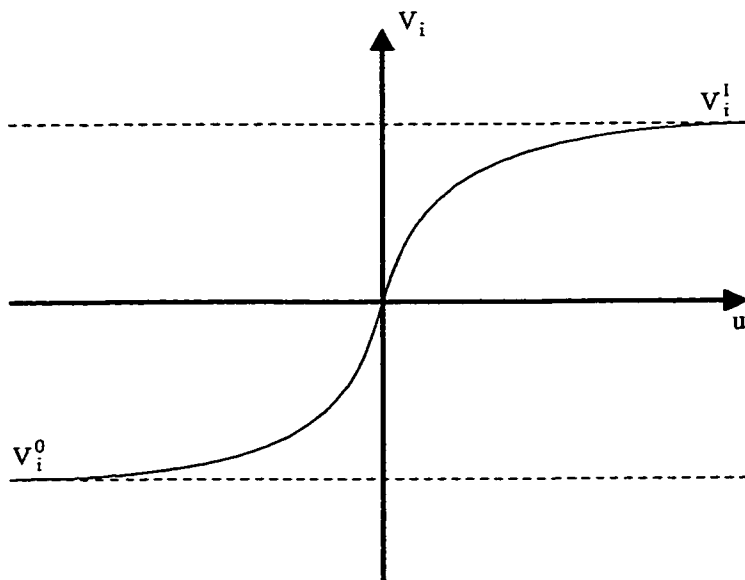
où chaque neurone répond aux stimuli en suivant la règle (2) selon un processus stochastique et change ou non d'état à un taux  $W$  qui est le même pour tous les neurones. Ainsi, les neurones répondent aux stimuli de façon asynchrone. HOPFIELD précise que ceci permet de modéliser les fluctuations et les perturbations pouvant survenir dans le réseau ainsi que les délais de propagation. Ici, pour être en accord avec MCCULLOCH et PITTS [21], il faut interpréter les délais de propagation comme étant le temps entre le moment où les stimuli arrivent aux terminaisons synaptiques d'un neurone et le moment où le neurone réagit aux stimuli en déclenchant par exemple un influx nerveux. Ces délais, que MCCULLOCH et PITTS [21] nomment « délais synaptiques », peuvent être de plus de 1/2 msec. De plus, les auteurs précisent que la vitesse de propagation de l'influx par les axones, qui peut être de plus de 150 m/sec pour les plus gros axones, est de peu d'importance et que seuls les « délais synaptiques » doivent être considérés. Notons que pour ce modèle, puisque  $T_{ii} = 0$ , alors un neurone n'a pas d'influence sur lui-même, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'influence rétroactive. Finalement, HOPFIELD montre que si l'on a comme hypothèses que  $T_{ii} = 0$ , et que les constantes d'interactions sont symétriques, c'est-à-dire que  $T_{ij} = T_{ji}$ ,  $j \neq i$ , alors le système (1), (2) se comporte comme une mémoire associative. Ainsi le système peut reconstituer une donnée mémorisée, soit un point d'équilibre stable du système, à partir de données partielles, soit un ensemble initial d'états pour les  $N$  neurones du réseau.

HOPFIELD suggère de modifier le modèle basé sur les neurones logiques de MCCULLOCH et PITTS de sorte que deux autres caractéristiques soient incorporées au modèle. Ainsi, en considérant que les neurones sont tels que

1. leurs relations stimuli-réponses sont continues dans le temps, c'est-à-dire que les neurones ne changent pas d'état aléatoirement,
2. leurs états varient continûment en fonction des stimuli, c'est-à-dire les neurones ne passent pas directement de l'état passif à l'état actif et vice-versa,

HOPFIELD propose de représenter un réseau de  $N$  neurones par un système d'équations différentielles ordinaires. Pour incorporer au modèle la première caractéristique, HOPFIELD pose que la valeur  $V_i$  pour un neurone  $i$  peut prendre n'importe quelle valeur de l'intervalle  $[V_i^0, V_i^1]$ . Puis, pour incorporer la deuxième caractéristique, HOPFIELD considère que  $V_i$  varie continûment en fonction des stimuli  $u_i$ , arrivant au neurone  $i$  de façon instantanée. Généralement, les relations stimuli-réponse,  $V_i = g_i(u_i)$ , sont croissantes, monotones et de forme sigmoïde avec asymptotes  $V_i^0$  et  $V_i^1$  (voir figure 3).

FIG. 3: Réponse d'un neurone en fonction des stimuli



Au point de vue biologique, HOPFIELD propose de considérer  $u_i$  comme le potentiel synaptique résultant des différents stimuli arrivant à la membrane postsynaptique à un moment donné, et  $V_i$  comme la moyenne à laquelle le neurone subit une excitation et déclenche un influx nerveux. La membrane postsynaptique, telle que décrite à la section 1.2, réagit comme un condensateur et un influx, ou courant, est induit lorsqu'il y a dépolarisation. Or la membrane oppose aussi une certaine résistance à la circulation de l'influx. Ainsi, la variation du potentiel tel qu'obtenue par HOPFIELD est donnée par le système d'équations différentielles ordinaires

$$C_i \frac{du_i}{dt} = \sum_j T_{ij} V_j - \frac{u_i}{R_i} + I_i, \quad (3)$$

où  $I_i$  est ici déterminé,  $C_i$  et  $R_i$  sont respectivement la capacité et la résistance de la membrane postsynaptique du neurone  $i$ , et où HOPFIELD précise que  $T_{ij}$  est l'efficacité des terminaisons synaptiques entre le neurone  $i$  et le neurone  $j$ .

HOPFIELD montre que le modèle (3) conserve les propriétés importantes du modèle basé sur les neurones logiques de MCCULLOCH et PITTS et, en particulier, qu'il se comporte aussi comme une mémoire associative. Le modèle ne tient toutefois pas compte des « délais synaptiques », que nous appellerons plutôt des délais de réaction. De plus, HOPFIELD précise que le système donné par (3) ne présentera pas de comportement oscillatoire ni chaotique tant que les interactions sont symétriques et que le temps de réponse (délai de réaction) des neurones est négligeable. Cet aspect est donc à ne pas omettre si l'on veut obtenir un modèle permettant de décrire toute la dynamique d'un réseau de neurones.

## 1.5 Délais de réaction

MARCUS et WESTERVELT, [18], s'intéressent quant à eux, aux conséquences dues à l'ajout des délais de réaction au modèle (3) de HOPFIELD. Ils supposent que le délai de réaction pour le neurone  $i$  est  $\tau'_i$  et obtiennent le système

$$C_i \dot{u}_i(t') = -\frac{1}{R_i} u_i(t') + \sum_{j=1}^N T_{ij} f_j(u_j(t' - \tau'_j)), \quad (4)$$

où  $u_i(t')$ ,  $R_i$ ,  $C_i$  sont respectivement le potentiel, la résistance et la capacité de la membrane postsynaptique du neurone  $i$ ,  $f_i$  donne la variation des réponses du neurones  $i$  par rapport aux stimuli, et  $T_{ij}$  correspondent encore une fois aux constantes d'interaction entre les neurones  $j$  et  $i$ . Notons par ailleurs que le terme  $I_i$  n'est pas présent dans les équations du système (4). En fait, MARCUS et WESTERVELT mentionnent que leur système est le même que celui de HOPFIELD auquel ils introduisent les délais de réactions pour chacun des neurones, mais ne justifient pas l'omission du terme  $I_i$ . Toutefois, si l'on considère un réseau de neurones de classe multipolaires, alors il est correct de supprimer ce terme car pour ce type de neurones, aucun stimulus ne provient d'une source extérieure. Les auteurs font ensuite une autre simplification : ils supposent que tous les neurones sont identiques, c'est-à-dire que  $C_i = C$ ,  $R_i = R$ ,  $\tau'_i = \tau'$  et  $f_i = f$ . Le système (4) devient alors

$$C\dot{u}_i(t') = -\frac{1}{R}u_i(t') + \sum_{j=1}^N T_{ij}f(u_j(t' - \tau')). \quad (5)$$

Puis en posant  $t = \frac{t'}{RC}$ ,  $\tau = \frac{\tau'}{RC}$  et  $J_{ij} = RT_{ij}$ , les auteurs obtiennent le système

$$\dot{u}_i(t) = -u_i(t) + \sum_{j=1}^N J_{ij}f(u_j(t - \tau)), \quad (6)$$

à partir duquel ils font leur analyse.

MARCUS et WESTERVELT montrent entre autres que pour des interactions symétriques,  $J_{ij} = J_{ji}$ , où  $J_{ii} = 0$ , il existe une valeur critique pour le délai de réaction  $\tau$  tel que pour cette valeur, l'origine perd sa stabilité au profit d'un comportement oscillatoire. De plus, ils ont vérifié expérimentalement que ceci survient lorsque le système (6) subit une bifurcation de Hopf. Finalement, même si pour le modèle de MARCUS et WESTERVELT le délai de réaction est le même pour tous les neurones du réseau, il n'en demeure pas moins que d'autres résultats intéressants ont été trouvés tels ceux obtenus par BÉLAIR [3], GOPALSAMY et LEUGN [9] et par BÉLAIR, CAMPBELL et VAN DER DRIESSCHE [4], qui montrent l'existence pour le système (6) d'une bifurcation de Hopf supercritique et d'une bifurcation de codimension 2, soit l'interaction entre une bifurcation en fourche et de Hopf.

L'ajout de délais de réaction permet donc d'obtenir des résultats sur la dynamique des réseaux de neurones tels qu'ils sont observés pour des réseaux de neurones biologiques. Par exemple, un comportement oscillatoire est nécessaire au réseau de neurones qui contrôle le système respiratoire [1].

## 1.6 Multiples délais de réaction

Plusieurs auteurs ont par la suite considéré des réseaux de neurones avec multiples délais de réaction, par exemple BALDI et ATIYA [2], CAMPBELL [7] ainsi que BÉLAIR et OLIEN [6].

Par ailleurs, SHAYER et CAMPBELL [22] étudient un système de deux neurones identiques, dont l'état de chacun des neurone pris individuellement varie selon l'équation dérivée du modèle (4)

$$\dot{x}_i(t) = -\kappa x_i(t) + \beta \tanh(x_i(t - \tau_s)), \quad (7)$$

où  $x_i$  représente l'activité du neurone, la constante  $\beta$  l'influence rétroactive pour le neurone  $i$  et  $\tau_s > 0$  le délai de réaction. Finalement,  $\kappa > 0$  est égale à  $\frac{1}{R_i C_i}$  et la réponse d'un neurone en fonction des stimuli, soit la fonction  $f_i$  dans le modèle (4), est ici remplacée par la fonction  $\tanh$ .

En couplant ensuite deux neurones, les auteurs proposent le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\kappa x_1(t) + \beta \tanh(x_1(t - \tau_s)) + a_{12} \tanh(x_2(t - \tau_2)) \\ \dot{x}_2(t) &= -\kappa x_2(t) + \beta \tanh(x_2(t - \tau_s)) + a_{21} \tanh(x_1(t - \tau_1)), \end{aligned} \quad (8)$$

où  $\tau_1 > 0$  et  $\tau_2 > 0$  sont les délais de réaction des neurone 1 et 2 aux stimuli provenant respectivement des neurones 2 et 1 et  $a_{12} \neq 0$  et  $a_{21} \neq 0$  sont les coefficients correspondant à l'influence « moyenne » des terminaisons synaptiques.

Pour le système (8), les auteurs déterminent, en fonction des paramètres, la région pour laquelle la solution triviale est stable. Les auteurs montrent ensuite que la solution triviale peut perdre sa stabilité via une bifurcation de Hopf et posent deux conjectures selon lesquelles il est possible que la solution triviale perde la stabilité via une bifurcation en fourche. En fait, les auteurs montrent l'existence de deux points

d'équilibre  $(x_1^*, x_2^*)$  et  $(-x_1^*, -x_2^*)$ , mais n'étudient pas la stabilité de ces points. Ils donnent toutefois des exemples numériques pour appuyer leurs conjectures. Les auteurs concluent ensuite que, d'après leurs résultats obtenus lors de la détermination de la région de stabilité de la solution triviale, il est possible d'avoir des points d'intersection entre les courbes de bifurcations, et donc qu'il existe possiblement des bifurcations de codimension 2, soient Hopf-Hopf, Hopf et en fourche puis Bogdanov-Takens. CAMPBELL et SHAYER [22] ne démontrent toutefois pas rigoureusement l'existence de ces bifurcations. Les auteurs utilisent plutôt un programme Maple, dont la description est donnée dans BÉLAIR et CAMPBELL [5], pour prédire le comportement du système près des points d'interaction.

## 1.7 Plan de la thèse

Nous considérerons aussi le système (8), mais pour plus de généralité, nous remplacerons les fonctions  $\tanh$  du système (8) par les fonctions non-linéaires et monotones  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$f(0) = g(0) = h(0) = 0 \text{ et } \beta = f'(0) \neq 0, a_{12} = g'(0) \neq 0, a_{21} = h'(0) \neq 0. \quad (9)$$

C'est-à-dire que les fonctions  $g$  et  $h$  donnent les réponses des neurones en fonction des stimuli, qui sont, comme vu à la section 1.4, des relations non-linéaires telles que si le neurone est excitant (inhibiteur) alors la fonction associée,  $g$  ou  $h$ , est croissante (décroissante). La fonction  $f$  quant à elle représente l'influence rétroactive pour les neurones du réseau, et est donc croissante ou décroissante selon la nature des neurones. Notre modèle est donc donné par le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\kappa x_1(t) + f(x_1(t - \tau_s)) + g(x_2(t - \tau_2)) \\ \dot{x}_2(t) &= -\kappa x_2(t) + f(x_2(t - \tau_s)) + h(x_1(t - \tau_1)), \end{aligned} \quad (10)$$

où les délais  $\tau_s, \tau_1$  et  $\tau_2$  sont positifs, et les fonctions  $f, g$  et  $h$  satisfont aux conditions données plus haut.

Notre but est de montrer que pour ce système de deux neurones couplés avec multiples délais et dont les influences mutuelles et rétroactives sont données par les

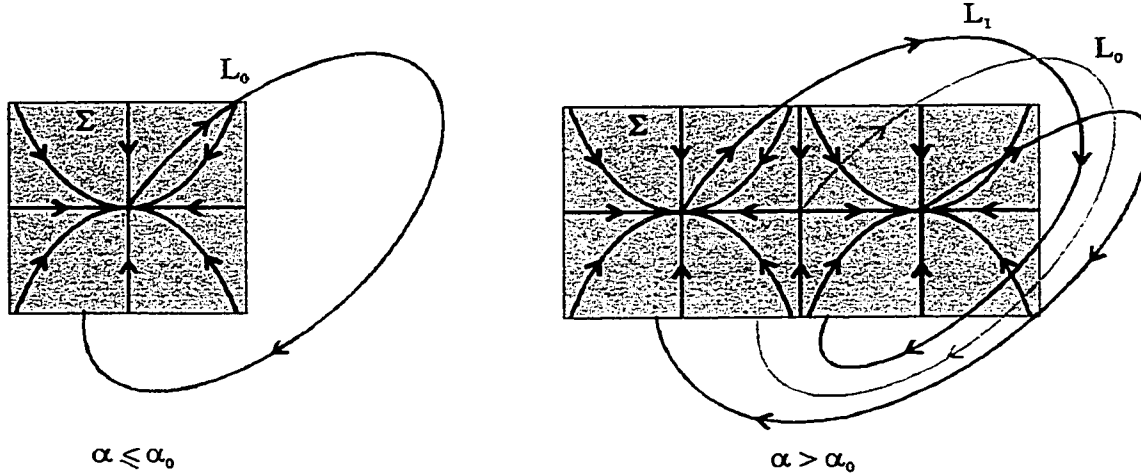
fonctions  $f, g$  et  $h$ , la solution triviale peut subir une bifurcation de Hopf-Hopf, tel qu'il y a une résonance 1 : 2 entre les deux modes de Hopf.

Une bifurcation de Hopf-Hopf se produit lorsque la linéarisation d'un système possède exactement deux paires de valeurs propres sur l'axe imaginaire. Si  $\pm i\omega$  et  $\pm i\gamma$  sont ces valeurs propres et que le rapport  $\gamma/\omega$  est rationnel, nous disons alors que la bifurcation de Hopf-Hopf est avec résonance 1 :  $\gamma/\omega$ . De plus, lorsque le rapport  $\gamma/\omega$  est tel que  $\gamma/\omega = 1, 2$  ou 3, nous parlons alors de cas de résonances fortes. Ces cas sont particulièrement différents des cas où la bifurcation de Hopf-Hopf est sans résonance ou avec résonance faible. La bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 a fait l'objet de plusieurs travaux dont les plus importants sont ceux de KNOBLOCH et PROCTOR [14] en 1988 et de LEBLANC et LANGFORD [16] en 1996. La bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 est en fait très intéressante puisqu'elle donne lieu à une dynamique diversifiée et complexe comportant plusieurs bifurcations plus simples. Par exemple, il est possible, près des valeurs critiques des paramètres pour lesquels le point d'équilibre d'un système perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2, d'observer un dédoublement de période. Plus spécifiquement, considérons le système

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

et supposons que  $L_0$  soit un cycle limite pour ce système de période  $\omega$ . Si nous considérons l'application de Poincaré du système (11),  $P_\alpha : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , où  $\Sigma$  est un plan coupant le cycle limite  $L_0$  en un point, alors le cycle limite  $L_0$  correspond à un cycle de période 1 pour l'application de Poincaré et il est parfois possible en variant le paramètre  $\alpha$ , et tel que décrit par KUZNETSOV [15], d'observer l'apparition d'un deuxième cycle,  $L_1$ , de période deux pour l'application de Poincaré, c'est-à-dire un cycle coupant le plan  $\Sigma$  en deux points (voir figure 4). Ce cycle de période deux pour l'application de Poincaré apparaît à la suite d'une bifurcation en fourche qui se produit dans le plan  $\Sigma$  pour le point auquel  $\Sigma$  coupe le cycle  $L_0$ . De plus, le cycle  $L_1$  pour l'application de Poincaré correspond à un cycle limite pour le système (11) ayant approximativement une période égale au double de la période du cycle limite  $L_0$ , soit une période d'environ  $2\omega$ .

FIG. 4: Dédoublément de période de cycles limites



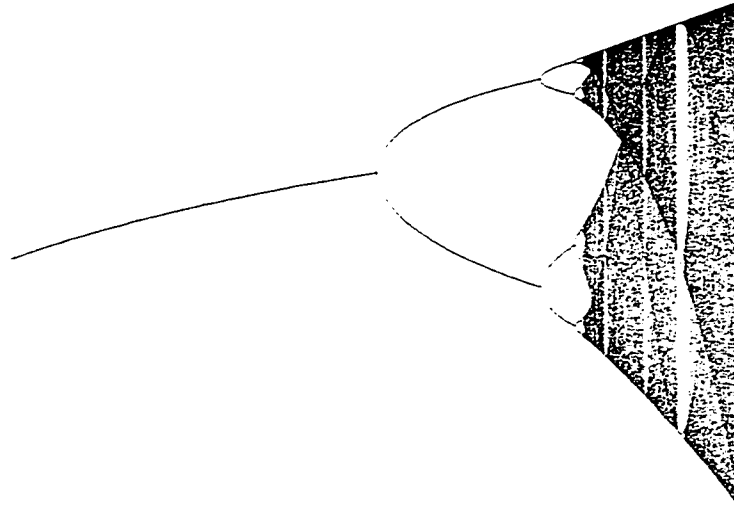
Finalement, un dédoublement de période est une bifurcation intéressante en elle même puisqu'un système peut éventuellement arriver à un état chaotique à la suite d'une cascade de dédoublement de période. Ceci est en fait le cas de l'application proposée par MAY [20] en 1976 pour l'évolution d'une population donnée par l'application discrète

$$x_{t+1} = \alpha x_t(1 - x_t), \quad (12)$$

où  $\alpha$  est le taux de croissance de la population et  $x$  est la population donnée en terme de pourcentage par rapport à une valeur déterminée pour la population maximum. La figure 5 montre le graphique de la population limite  $x_\infty$  pour une certaine condition initiale  $x_0$  et en fonction du taux de croissance  $\alpha$ . Ce graphique permet d'observer que la population limite demeure constante dans le temps (discret) jusqu'à une certaine valeur critique du paramètre  $\alpha$  où à partir de cette valeur la population oscille entre deux valeurs, c'est-à-dire que  $x_t = x_{t+2}$  et  $x_{t+1} = x_{t+3}$ , pour une valeur de  $t$  suffisamment grande. Ceci correspond à un dédoublement de période. Le graphique de la figure 5 montre de plus qu'à mesure que le paramètre  $\alpha$  augmente, d'autres dédoublements de période se produisent de telle sorte que la population oscille entre quatre valeurs, puis entre huit valeurs, puis devient complètement chaotique.

Finalement, voici comment nous procéderons dans cette thèse pour montrer que

FIG. 5: Cascade de dédoublements de période amenant le chaos



le système (10) peut subir une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance  $1 : 2$ . Nous commencerons au chapitre 2 par dériver du système (10) un système nous permettant de voir clairement le rôle des différents paramètres tout au long de l'analyse. Nous étudierons ensuite l'équation caractéristique obtenue de la linéarisation de ce système, de laquelle nous établirons la famille des valeurs critiques des paramètres pour lesquels le point d'équilibre, soit l'origine, subit une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance  $1 : 2$ . Nous verrons ensuite au chapitre 3 que l'origine est toujours instable près des valeurs critiques des paramètres pour lesquelles il y a une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance  $1 : 2$ . Pour appuyer ce fait, nous utiliserons entre autre un argument graphique qui nous permettra en plus d'observer que dans certains cas, l'instabilité de l'origine est causée par une paire de valeurs propres dont la partie réelle est positive mais très près de zéro. Cette observation est importante puisqu'elle nous permettra d'identifier les cas où le système est dans un état transitoire, c'est-à-dire que pour un certain intervalle de temps, les solutions du système se comporteront comme si l'origine était stable. Nous considérerons donc un des cas où le système est dans un état transitoire afin d'illustrer à partir de simulations numériques un dédoublement de période typique à la résonance  $1 : 2$ . De plus, nous terminerons le chapitre 3 en observant un phénomène plus rare dans le cas d'équations aux délais, soit une cascade

de dédoublements de période. Nous procéderons ensuite au chapitre 4 à la réduction du système à sa variété du centre puis nous ramènerons les équations obtenues en une forme normale pour une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. Ces calculs que nous fournissons dans ce chapitre seront éventuellement utilisés lors d'études de la dynamique du système près de la bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 lorsque le système est dans un état transitoire, et seront probablement fort utiles lors d'une étude plus approfondie du phénomène de cascade de dédoublements de période tel qu'observé au chapitre 3. Finalement, nous terminerons en résumant au chapitre 5 tous les résultats obtenus et en énonçant une dernière hypothèse relativement à la stabilité de l'origine dans un réseau de deux neurones couplés avec multiples délais.

# Chapitre 2

## Analyse linéaire

### 2.1 Renormalisation du temps et des paramètres

Afin de bien illustrer le rôle des divers paramètres d'un système lors de l'étude de bifurcations, il est souvent préférable, comme c'est le cas ici, d'effectuer une renormalisation du temps et des paramètres. Tout d'abord,  $(x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$  est un point d'équilibre du système (10). Maintenant, puisque c'est pour ce point d'équilibre que nous nous proposons de trouver les valeurs des paramètres pour lesquels il subira une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2, nous allons commencer par effectuer le développement en série de Taylor des fonctions  $f, g, h$  autour de ce point d'équilibre, puis nous procéderons à une renormalisation du temps et des paramètres. Par ailleurs, pour étudier les orbites périodiques issues de la bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2, il est suffisant de faire ce développement jusqu'à l'ordre 2 (voir le théorème 5.3 LEBLANC et LANGFORD [16]). Ainsi nous obtenons, d'abord pour la fonction  $f$  et  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} f(x_i(t - \tau_s)) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x_i(t - \tau_s) - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(x_i(t - \tau_s) - 0)^2 \\ &\quad + \mathcal{O}((x_i^3(t - \tau_s))) \\ &= \underbrace{f'(0)}_{\beta} x_i(t - \tau_s) + \frac{1}{2} \underbrace{f''(0)}_{d_1} x_i^2(t - \tau_s) \\ &\quad + \mathcal{O}((x_i^3(t - \tau_s))), \end{aligned}$$

puis pour les fonctions  $g$  et  $h$

$$\begin{aligned}
 g(x_2(t - \tau_2)) &= g(0) + \frac{g'(0)}{1!}(x_2(t - \tau_2) - 0) + \frac{g''(0)}{2!}(x_2(t - \tau_2) - 0)^2 \\
 &\quad + \mathcal{O}((x_2^3(t - \tau_2))) \\
 &= \underbrace{g'(0)}_{a_{12}} x_2(t - \tau_2) + \underbrace{\frac{1}{2}g''(0)}_{d_2} x_2^2(t - \tau_2) \\
 &\quad + \mathcal{O}((x_2^3(t - \tau_2))),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(x_1(t - \tau_1)) &= h(0) + \frac{h'(0)}{1!}(x_1(t - \tau_1) - 0) + \frac{h''(0)}{2!}(x_1(t - \tau_1) - 0)^2 \\
 &\quad + \mathcal{O}((x_1^3(t - \tau_1))) \\
 &= \underbrace{h'(0)}_{a_{21}} x_1(t - \tau_1) + \underbrace{\frac{1}{2}h''(0)}_{d_3} x_1^2(t - \tau_1) \\
 &\quad + \mathcal{O}((x_1^3(t - \tau_1))).
 \end{aligned}$$

Le problème non-linéaire que nous allons considérer est donc

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -\kappa x_1(t) + \beta x_1(t - \tau_s) + d_1 x_1^2(t - \tau_s) \\
 &\quad + a_{12} x_2(t - \tau_2) + d_2 x_2^2(t - \tau_2) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \\
 \dot{x}_2(t) &= -\kappa x_2(t) + \beta x_2(t - \tau_s) + d_1 x_2^2(t - \tau_s) \\
 &\quad + a_{21} x_1(t - \tau_1) + d_3 x_1^2(t - \tau_1) + \mathcal{O}(\|x\|^3),
 \end{aligned} \tag{13}$$

où  $\tau_s > 0$ ,  $\tau_1 > 0$  et  $\tau_2 > 0$  et  $a_{12} \neq 0$  et  $a_{21} \neq 0$ , d'après (9).

Maintenant, nous renormalisons le temps en posant  $\eta_i(t) = x_i(\tau_2 t)$  pour  $i = 1, 2$ .

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1(t) &= \tau_2 \dot{x}_1(\tau_2 t) \\
 &= \tau_2 \left( -\kappa x_1(\tau_2 t) + \beta x_1(\tau_2 t - \tau_s) + d_1 x_1^2(\tau_2 t - \tau_s) \right. \\
 &\quad \left. + a_{12} x_2(\tau_2 t - \tau_2) + d_2 x_2^2(\tau_2 t - \tau_2) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \right) \\
 &= -\kappa \tau_2 x_1(\tau_2 t) + \beta \tau_2 x_1(\tau_2(t - \tau_s/\tau_2)) + d_1 \tau_2 x_1^2(\tau_2(t - \tau_s/\tau_2)) \\
 &\quad + a_{12} \tau_2 x_2(\tau_2(t - 1)) + d_2 \tau_2 x_2^2(\tau_2(t - 1)) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \\
 &= -\kappa \tau_2 \eta_1(t) + \beta \tau_2 \eta_1(t - \tau_s/\tau_2) + d_1 \tau_2 \eta_1^2(t - \tau_s/\tau_2) \\
 &\quad + a_{12} \tau_2 \eta_2(t - 1) + d_2 \tau_2 \eta_2^2(t - 1) + \mathcal{O}(\|x\|^3),
 \end{aligned} \tag{14}$$

et

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_2(t) &= \tau_2 \dot{x}_2(\tau_2 t) \\
 &= \tau_2 \left( -\kappa x_2(\tau_2 t) + \beta x_2(\tau_2 t - \tau_s) + d_1 x_2^2(\tau_2 t - \tau_s) \right. \\
 &\quad \left. + a_{21} x_1(\tau_2 t - \tau_1) + d_3 x_1^2(\tau_2 t - \tau_1) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \right) \\
 &= -\kappa \tau_2 x_2(\tau_2 t) + \beta \tau_2 x_2(\tau_2(t - \tau_s/\tau_2)) + d_1 \tau_2 x_2^2(\tau_2(t - \tau_s/\tau_2)) \\
 &\quad + a_{21} \tau_2 x_1(\tau_2(t - \tau_1/\tau_2)) + d_3 \tau_2 x_1^2(\tau_2(t - \tau_1/\tau_2)) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \\
 &= -\kappa \tau_2 \eta_2(t) + \beta \tau_2 \eta_2(t - \tau_s/\tau_2) + d_1 \tau_2 \eta_2^2(t - \tau_s/\tau_2) \\
 &\quad + a_{21} \tau_2 \eta_1(t - \tau_1/\tau_2) + d_3 \tau_2 \eta_1^2(t - \tau_1/\tau_2) + \mathcal{O}(\|x\|^3).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Afin de simplifier les équations (14), (15), et puisque  $a_{21} \neq 0$  et  $\tau_2 \neq 0$ , nous pouvons alors effectuer le changement de variables  $\xi_1 = a_{21} \tau_2 \eta_1(t)$  et  $\xi_2(t) = \eta_2(t)$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1(t) &= a_{21} \tau_2 \dot{\eta}_1(t) \\
 &= -\kappa a_{21} \tau_2^2 \eta_1(t) + \beta a_{21} \tau_2^2 \eta_1(t - \tau_s/\tau_2) + d_1 a_{21} \tau_2^2 \eta_1^2(t - \tau_s/\tau_2) \\
 &\quad + a_{12} a_{21} \tau_2^2 \eta_2(t - 1) + d_2 a_{21} \tau_2^2 \eta_2^2(t - 1) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \\
 &= -\kappa \tau_2 \xi_1(t) + \beta \tau_2 \xi_1(t - \tau_s/\tau_2) + \left( \frac{d_1 a_{21} \tau_2^2}{a_{21}^2 \tau_2^2} \right) \xi_1^2(t - \tau_s/\tau_2) \\
 &\quad + a_{12} a_{21} \tau_2^2 \xi_2(t - 1) + d_2 a_{21} \tau_2^2 \xi_2^2(t - 1) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \\
 &= -\kappa \tau_2 \xi_1(t) + \beta \tau_2 \xi_1(t - \tau_s/\tau_2) + \frac{d_1}{a_{21}} \xi_1^2(t - \tau_s/\tau_2) \\
 &\quad + a_{12} a_{21} \tau_2^2 \xi_2(t - 1) + d_2 a_{21} \tau_2^2 \xi_2^2(t - 1) + \mathcal{O}(\|x\|^3),
 \end{aligned} \tag{16}$$

et

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_2(t) &= \dot{\eta}_2(t) \\
 &= -\kappa \tau_2 \eta_2(t) + \beta \tau_2 \eta_2(t - \tau_s/\tau_2) + d_1 \tau_2 \eta_2^2(t - \tau_s/\tau_2) \\
 &\quad + a_{21} \tau_2 \eta_1(t - \tau_1/\tau_2) + d_3 \tau_2 \eta_1^2(t - \tau_1/\tau_2) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \\
 &= -\kappa \tau_2 \xi_2(t) + \beta \tau_2 \xi_2(t - \tau_s/\tau_2) + d_1 \tau_2 \xi_2^2(t - \tau_s/\tau_2) \\
 &\quad + \left( \frac{a_{21} \tau_2}{a_{21} \tau_2} \right) \xi_1(t - \tau_1/\tau_2) + \left( \frac{d_3 \tau_2}{a_{21}^2 \tau_2^2} \right) \xi_1^2(t - \tau_1/\tau_2) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \\
 &= -\kappa \tau_2 \xi_2(t) + \beta \tau_2 \xi_2(t - \tau_s/\tau_2) + d_1 \tau_2 \xi_2^2(t - \tau_s/\tau_2) \\
 &\quad + \xi_1(t - \tau_1/\tau_2) + \frac{d_3}{a_{21}^2 \tau_2} \xi_1^2(t - \tau_1/\tau_2) + \mathcal{O}(\|x\|^3).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Notons que les simplifications  $\frac{a_{21} \tau_2}{a_{21} \tau_2} = 1$ ,  $\frac{d_3 \tau_2}{a_{21}^2 \tau_2^2} = \frac{d_3}{a_{21}^2 \tau_2}$  et  $\frac{d_1 a_{21} \tau_2^2}{a_{21}^2 \tau_2^2} = \frac{d_1}{a_{21}}$  sont bien définies puisque nous avons supposé que  $\tau_2 > 0$  et  $a_{21} \neq 0$ .

On redéfinit maintenant les variables et les paramètres de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \xi_i &\rightarrow x_i, \quad i = 1, 2 \\
 \kappa\tau_2 &\rightarrow \kappa \\
 \beta\tau_2 &\rightarrow \beta \\
 a_{12}a_{21}\tau_2^2 &\rightarrow \pm\gamma^2 \\
 \frac{d_1}{a_{21}} &\rightarrow \delta_1 \\
 d_2a_{21}\tau_2^2 &\rightarrow \delta_2 \\
 d_1\tau_2 &\rightarrow \delta_3 \\
 \frac{d_3}{a_{21}^2\tau_2} &\rightarrow \delta_4 \\
 \frac{\tau_s}{\tau_2} &\rightarrow \tau_s \\
 \frac{\tau_1}{\tau_2} &\rightarrow 2\tau - 1
 \end{aligned}$$

Le choix de  $\pm\gamma^2$  et  $2\tau - 1$  sera clairement justifié lors de l'étude de l'équation caractéristique du système qui sera faite à la section 2.2. Il est à noter que ce changement de paramètres est surjectif. Pour le voir, il suffit de poser

$$\tau_2 = 1, \quad d_1 = \delta_3, \quad d_2 = \frac{\delta_2\delta_1}{\delta_3}, \quad d_3 = \frac{\delta_4\delta_3^2}{\delta_1^2}, \quad a_{12} = \pm\frac{\gamma^2\delta_1}{\delta_3}, \quad \text{et } a_{21} = \frac{\delta_3}{\delta_1},$$

où nous supposons que  $\delta_1 \neq 0$  et  $\delta_3 \neq 0$ .

Nous obtenons donc, à partir des équations (16) et (17), le système

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -\kappa x_1(t) + \beta x_1(t - \tau_s) \pm \gamma^2 x_2(t - 1) + \delta_1 x_1^2(t - \tau_s) \\
 &\quad + \delta_2 x_2^2(t - 1) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \\
 \dot{x}_2(t) &= -\kappa x_2(t) + \beta x_2(t - \tau_s) + x_1(t - 2\tau + 1) + \delta_3 x_2^2(t - \tau_s) \\
 &\quad + \delta_4 x_1^2(t - 2\tau + 1) + \mathcal{O}(\|x\|^3).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Puis, selon la notation standard [10], nous avons le problème non-linéaire

$$\dot{x}(t) = Lx_t + g(x_t) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \tag{19}$$

où  $x_t = x_t(\theta) = x(t + \theta)$ , et l'opérateur linéaire  $L$  et la fonction non-linéaire  $g$  sont donnés respectivement par

$$Lx_t = \begin{pmatrix} -\kappa x_{1_t}(0) + \beta x_{1_t}(-\tau_s) \pm \gamma^2 x_{2_t}(-1) \\ -\kappa x_{2_t}(0) + \beta x_{2_t}(-\tau_s) + x_{1_t}(-2\tau + 1) \end{pmatrix} \quad (20)$$

et

$$g(x_t) = \begin{pmatrix} \delta_1 x_{1_t}^2(-\tau_s) + \delta_2 x_{2_t}^2(-1) \\ \delta_3 x_{2_t}^2(-\tau_s) + \delta_4 x_{1_t}^2(-2\tau + 1) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

## 2.2 Équation caractéristique

Afin de pouvoir déterminer la stabilité d'un point d'équilibre pour un système d'équations différentielles, il faut d'abord calculer son équation caractéristique. L'équation caractéristique du système (18) est obtenue en considérant les solutions de la forme

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

et la linéarisation  $\dot{x}(t) = Lx_t$  du système (18) faite pour le point d'équilibre  $(x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$ . En substituant (22) dans l'expression (20) pour l'opérateur linéaire  $L$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= L \left( e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -\kappa c_1 e^{\lambda t} + \beta c_1 e^{\lambda(t-\tau_s)} \pm \gamma^2 c_2 e^{\lambda(t-1)} \\ -\kappa c_2 e^{\lambda t} + \beta c_2 e^{\lambda(t-\tau_s)} + c_1 e^{\lambda(t-2\tau+1)} \end{pmatrix} \cdot \\ &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} -\kappa c_1 + \beta c_1 e^{-\lambda\tau_s} \pm \gamma^2 c_2 e^{-\lambda} \\ -\kappa c_2 + \beta c_2 e^{-\lambda\tau_s} + c_1 e^{\lambda(-2\tau+1)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

En multipliant par  $e^{-\lambda t}$  chacun des deux côtés de l'équation (23), nous obtenons

$$\lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa c_1 + \beta c_1 e^{-\lambda\tau_s} \pm \gamma^2 c_2 e^{-\lambda} \\ -\kappa c_2 + \beta c_2 e^{-\lambda\tau_s} + c_1 e^{\lambda(-2\tau+1)} \end{pmatrix},$$

qui correspond au système de deux équations à deux inconnues,  $c_1$  et  $c_2$ , suivant :

$$\begin{cases} (\lambda + \kappa)c_1 - \beta c_1 e^{-\lambda\tau_s} \mp \gamma^2 c_2 e^{-\lambda} & = 0 \\ (\lambda + \kappa)c_2 - \beta c_2 e^{-\lambda\tau_s} - c_1 e^{\lambda(-2\tau+1)} & = 0 \end{cases}$$

et que nous pouvons écrire sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} (\lambda + \kappa) - \beta e^{-\lambda\tau_s} & \mp \gamma^2 e^{-\lambda} \\ -e^{\lambda(-2\tau+1)} & (\lambda + \kappa) - \beta e^{-\lambda\tau_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Désignons maintenant par  $A$ , la matrice de dimension  $2 \times 2$  donnée en (24). Le système (24) possède alors une solution non triviale si et seulement si  $\det(A) = 0$ , soit lorsque

$$((\lambda + \kappa) - \beta e^{-\lambda\tau_s})^2 \mp \gamma^2 e^{-2\lambda\tau} = 0. \quad (25)$$

L'équation (25) est l'équation caractéristique du système (18). Elle se divise en deux cas, tout d'abord, si  $\gamma^2$  est multiplié par  $-1$  dans l'expression (20) pour l'opérateur linéaire  $L$ , alors l'équation (25) est égale à 0 lorsque

$$((\lambda + \kappa) - \beta e^{-\lambda\tau_s})^2 + (\gamma e^{-\lambda\tau})^2 = 0, \quad (26)$$

puis si  $\gamma^2$  est multiplié par 1 dans (20), alors l'équation (25) est égale à 0 lorsque

$$((\lambda + \kappa) - \beta e^{-\lambda\tau_s})^2 - (\gamma e^{-\lambda\tau})^2 = 0. \quad (27)$$

Nous avons donc le cas où l'équation est une somme de carrés (26) et le cas où nous avons plutôt une différence de carrés (27). Par ailleurs nous devons la forme des deux équations (26) et (27) au fait que nous avons posé précédemment (section 2.1),  $a_{12}a_{21}\tau_2^2 \rightarrow \pm\gamma^2$  et  $\frac{\tau_1}{\tau_2} \rightarrow 2\tau - 1$ . Ainsi nous pouvons factoriser les équations (26) et (27) chacune comme suit :

$$(\lambda + \kappa - \beta e^{-\lambda\tau_s} - i\gamma e^{-\lambda\tau})(\lambda + \kappa - \beta e^{-\lambda\tau_s} + i\gamma e^{-\lambda\tau}) = 0, \quad (28)$$

et

$$(\lambda + \kappa - \beta e^{-\lambda\tau_s} - \gamma e^{-\lambda\tau})(\lambda + \kappa - \beta e^{-\lambda\tau_s} + \gamma e^{-\lambda\tau}) = 0. \quad (29)$$

Puisque notre but est de démontrer qu'il existe une interaction de mode 1 : 2, il est alors suffisant de ne considérer qu'un de ces deux cas. D'où, pour le reste de l'analyse faite dans cette thèse, nous avons choisi de considérer le cas (29) (qui correspond en fait au cas où  $a_{12}a_{21} > 0$ ). En fait, après avoir essayer d'étudier chacun des deux cas, nous avons mis de côté le cas (28) étant donné la trop grande complexité des calculs. Ainsi, si nous considérons en particulier l'équation (29), nous aurons que l'équation (25) sera égale à 0 si

$$(\lambda + \kappa - \beta e^{-\lambda\tau_s} - \gamma e^{-\lambda\tau}) = 0, \quad (30)$$

ou si

$$(\lambda + \kappa - \beta e^{-\lambda\tau_s} + \gamma e^{-\lambda\tau}) = 0. \quad (31)$$

Or si nous posons  $\gamma \rightarrow -\gamma$ , l'équation (31) correspondra alors à l'équation (30). Ainsi, puisque nous n'avons pas posé de restriction sur le signe de  $\gamma$ , il est alors suffisant de ne considérer qu'une seule des deux équations. Nous considérerons donc l'équation (30) pour trouver la famille des valeurs critiques des paramètres pour laquelle le système subit une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 pour le point d'équilibre  $(x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$ .

## 2.3 Valeurs critiques des paramètres

Nous voulons maintenant trouver les valeurs des paramètres  $\omega, \kappa, \beta, \gamma, \tau_s$  et  $\tau$  pour lesquels le système (18) subit une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. Un point d'équilibre du système (18) subit une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 lorsque l'équation caractéristique associé à ce point d'équilibre possède deux paires de valeurs propres sur l'axe imaginaire, telles que

$$\lambda = \pm i\omega \text{ et } \lambda = \pm 2i\omega, \text{ avec } \omega \neq 0. \quad (32)$$

En remplaçant  $\lambda = i\omega$  et  $\lambda = 2i\omega$  dans l'équation (30), obtenue pour le point d'équilibre  $(x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$ , nous trouvons les deux équations suivantes :

$$i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s} - \gamma e^{-i\omega\tau} = 0 \quad (33)$$

$$2i\omega + \kappa - \beta e^{-2i\omega\tau_s} - \gamma e^{-2i\omega\tau} = 0. \quad (34)$$

En utilisant l'identité  $e^{-i\mu} = \cos(\mu) - i \sin(\mu)$ , nous pouvons réécrire les équations (33) et (34) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Delta_1 &\equiv i\omega + \kappa - \beta(\cos(\omega\tau_s) - i \sin(\omega\tau_s)) - \gamma(\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) = 0 \\ \Delta_2 &\equiv 2i\omega + \kappa - \beta(\cos(2\omega\tau_s) - i \sin(2\omega\tau_s)) - \gamma(\cos(2\omega\tau) - i \sin(2\omega\tau)) = 0.\end{aligned}$$

Ces égalités sont respectées si et seulement si les parties réelles et imaginaires de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont égales à zéro, c'est-à-dire lorsque

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\Delta_1) &\equiv \kappa - \beta \cos(\omega\tau_s) - \gamma \cos(\omega\tau) = 0 \\ \operatorname{Im}(\Delta_1) &\equiv \omega + \beta \sin(\omega\tau_s) + \gamma \sin(\omega\tau) = 0 \\ \operatorname{Re}(\Delta_2) &\equiv \kappa - \beta \cos(2\omega\tau_s) - \gamma \cos(2\omega\tau) = 0 \\ \operatorname{Im}(\Delta_2) &\equiv 2\omega + \beta \sin(2\omega\tau_s) + \gamma \sin(2\omega\tau) = 0.\end{aligned}\tag{35}$$

Le point d'équilibre  $(x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$  du système (18) subira donc une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 lorsque ces quatre équations sont respectées, c'est-à-dire pour certaines valeurs des paramètres  $\omega, \kappa, \beta, \gamma, \tau_s$  et  $\tau$ , que nous devons maintenant trouver. Pour ce faire, posons  $\theta_1 = \omega\tau_s$  et  $\theta_2 = \omega\tau$ . Les équations (35) deviennent alors

$$\begin{aligned}\kappa - \beta \cos(\theta_1) - \gamma \cos(\theta_2) &= 0 \\ \omega + \beta \sin(\theta_1) + \gamma \sin(\theta_2) &= 0 \\ \kappa - \beta \cos(2\theta_1) - \gamma \cos(2\theta_2) &= 0 \\ 2\omega + \beta \sin(2\theta_1) + \gamma \sin(2\theta_2) &= 0.\end{aligned}\tag{36}$$

Ces quatre nouvelles équations forment le système linéaire en  $\omega, \kappa, \beta$  et  $\gamma$  qui suit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos(\theta_1) & -\cos(\theta_2) \\ 0 & 1 & \sin(\theta_1) & \sin(\theta_2) \\ 1 & 0 & -\cos(2\theta_1) & -\cos(2\theta_2) \\ 0 & 2 & \sin(2\theta_1) & \sin(2\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \\ \omega \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{37}$$

L'objectif est maintenant d'exprimer  $\theta_2$  en fonction de  $\theta_1$  et ensuite de substituer cette expression dans les équations (36) afin de résoudre le système pour  $\omega, \kappa, \beta, \gamma$ , ainsi que pour  $\tau_s$  et  $\tau$ .

Soit  $J$  la matrice de dimension  $4 \times 4$  donnée en (37). Le système aura une solution non triviale si et seulement si  $\det(J) = 0$ , c'est à dire lorsque

$$2(\cos(\theta_2) - 1)(\cos(\theta_1) - 1) \\ \times (2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) - 2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) = 0,$$

qui est le déterminant de  $J$ . Nous remarquons que le déterminant de  $J$  est composé de trois facteurs, et nous verrons sous peu que le troisième facteur se simplifie et permet de trouver une expression pour  $\theta_2$  en fonction de  $\theta_1$ . C'est ce fait qui nous a fait choisir d'étudier le cas (29) plutôt que le cas (28), car bien que le déterminant obtenu pour la matrice  $J$  dans le cas (28) puisse être factorisé en deux facteurs, de sorte que nous avons

$$(\cos(\theta_1) - 1) \\ \times (-4 \cos(\theta_2) \cos(\theta_1) - 2 \cos(\theta_1) + 4 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2)^2 + 2 \cos(\theta_2)^2 - 2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ + 4 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) - 1 - 2 \cos(\theta_2)) = 0,$$

aucun des deux facteurs ne permet d'obtenir une expression pour  $\theta_2$  en fonction de  $\theta_1$  (ou de  $\theta_1$  en fonction de  $\theta_2$ ) avec laquelle il pourrait être possible de poursuivre les calculs.

Revenons maintenant au cas (29), puisque

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \pm \cos(\theta_1) \sin(\theta_2)$$

nous avons alors que  $\det(J) = 0$  lorsque

$$2(\cos(\theta_2) - 1)(\cos(\theta_1) - 1)(-2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) = 0. \quad (38)$$

Ainsi  $\det(J) = 0$  lorsqu'au moins un des facteurs est égal à zéro, soit lorsque

$$\cos(\theta_2) - 1 = 0, \quad (39)$$

$$\cos(\theta_1) - 1 = 0 \quad (40)$$

ou

$$-2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) = 0. \quad (41)$$

Considérons d'abord le premier cas (39). Tout d'abord, puisque  $\cos(\theta_2) = 1$ , alors  $\sin(\theta_2) = 0$ . Ainsi pour la deuxième équation de (36), nous avons

$$\omega + \beta \sin(\theta_1) = 0. \quad (42)$$

Par ailleurs, puisque  $\sin(2\theta_i) = 2 \sin(\theta_i) \cos(\theta_i)$ ,  $i = 1, 2$ , alors la quatrième équation de (36) se réduit alors à

$$2\omega + 2\beta \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) = 0. \quad (43)$$

Ainsi en considérant les équations (42) et (43) ensemble, nous trouvons que

$$-2\beta \sin(\theta_1) + 2\beta \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) = 0,$$

d'où

$$\beta \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) = \beta \sin(\theta_1). \quad (44)$$

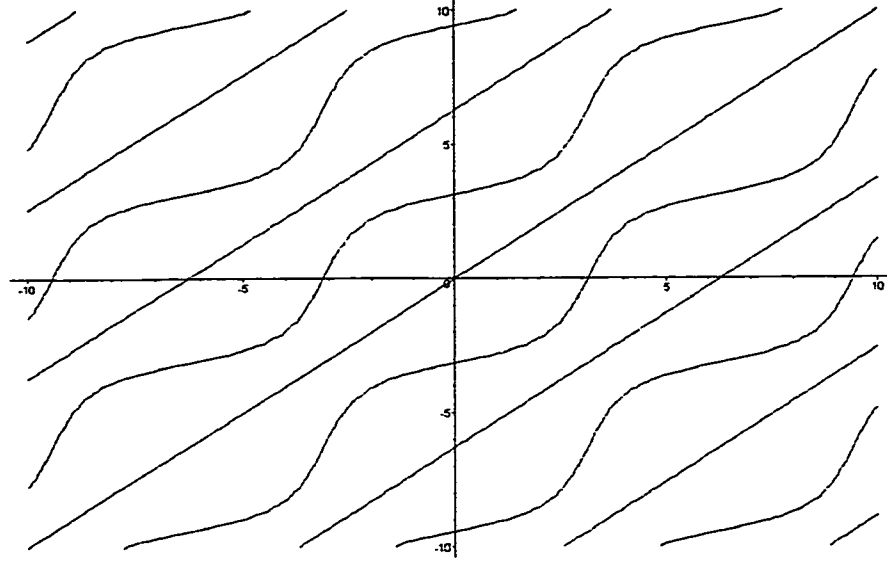
L'équation (44) nous permet de conclure que si  $\sin(\theta_1) \neq 0$ , alors  $\cos(\theta_1) = 1$ . Autrement, si  $\sin(\theta_1) = 0$ , nous devons alors avoir que  $\cos(\theta_1) = \pm 1$ . Ainsi dans tous les cas, nous avons que  $\cos(\theta_1) = \pm 1$ . Or, si  $\cos(\theta_1) = \pm 1$ ,  $\sin(\theta_1) = 0$  et alors la deuxième équation de (36) se réduit à  $\omega = 0$  qui est contraire à notre hypothèse sur  $\omega$  (32). Nous devons donc exclure le cas (39). Par ailleurs, il est possible de montrer que si nous avons plutôt  $\cos(\theta_1) = 1$  comme dans le cas (40), nous aurons alors que  $\cos(\theta_2) = \pm 1$ , d'où  $\sin(\theta_2) = 0$ , et encore une fois que  $\omega = 0$  par la deuxième équation de (36). Nous devons donc aussi exclure le cas (40). Considérons maintenant le troisième cas (41). Les solutions de l'expression (41) sont données à la figure 6 par le graphique implicite tracé pour  $\theta_1$  en fonction de  $\theta_2$ .

Plus exactement, l'expression (41) est égale à zéro lorsque

$$\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (45)$$

ou, tel que calculé avec Maple, lorsque

$$\theta_2 = \arctan_{xy} \left( -3 \frac{\sin(\theta_1)}{4 \cos(\theta_1) + 5}, -\frac{5 \cos(\theta_1) + 4}{4 \cos(\theta_1) + 5} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (46)$$

FIG. 6: Solutions de l'expression  $-2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) = 0$ 


où pour des valeurs de paramètres  $a, b \in \mathbb{R}$ , la fonction  $\arctan_{xy}(b, a)$  calcule la valeur principale de l'argument du nombre complexe  $a + ib$  de sorte que  $-\pi < \arctan_{xy}(b, a) \leq \pi$ . En d'autres mots,

$$z = \arctan_{xy}(b, a) \Leftrightarrow \cos(z) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(z) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (47)$$

Considérons d'abord la première des deux possibilités (45). Dans ce cas, nous obtenons de la deuxième équation de (36) que

$$\omega + \beta \sin(\theta_1) + \gamma \sin(\theta_1 + 2k\pi) = 0. \quad (48)$$

Or, puisque  $\sin(\theta_1 + 2k\pi) = \sin(\theta_1)$ , alors l'équation (48) devient

$$\omega + \beta \sin(\theta_1) + \gamma \sin(\theta_1) = 0, \quad (49)$$

d'où, en isolant  $\sin(\theta_1)$ , nous obtenons

$$\omega + (\beta + \gamma) \sin(\theta_1) = 0.$$

Ainsi, si  $\beta + \gamma = 0$  ou si  $\sin(\theta_1) = 0$  alors  $\omega = 0$ . Supposons donc que  $\beta + \gamma \neq 0$  et que  $\sin(\theta_1) \neq 0$ . Considérons maintenant en plus de la deuxième équation de (36) la

quatrième équation de (36) :

$$\omega + (\beta + \gamma) \sin(\theta_1) = 0 \quad (50)$$

$$2\omega + (\beta + \gamma) \sin(2\theta_1) = 0. \quad (51)$$

De (50) nous isolons  $\omega$  et nous obtenons

$$\omega = -(\beta + \gamma) \sin(\theta_1).$$

Nous substituons ensuite ce résultat dans l'équation (51) pour obtenir

$$-2(\beta + \gamma) \sin(\theta_1) + (\beta + \gamma) \sin(2\theta_1) = 0,$$

et puisque nous avons supposé que  $\beta + \gamma \neq 0$ , nous obtenons en simplifiant l'équation précédente

$$-2 \sin(\theta_1) + \sin(2\theta_1) = 0. \quad (52)$$

Or, puisque  $\sin(2\theta_1) = 2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1)$ , alors l'équation précédente (52) devient

$$-2 \sin(\theta_1) + 2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) = 0,$$

puis

$$-2 \sin(\theta_1)(1 - \cos(\theta_1)) = 0. \quad (53)$$

Finalement, puisque nous avons supposé que  $\sin(\theta_1) \neq 0$ , nous pouvons maintenant conclure de (53) que

$$1 - \cos(\theta_1) = 0,$$

qui constitue le deuxième cas (40) étudié plus haut et que nous avons déjà exclus.

Ainsi, nous avons que  $\theta_2$  en fonction de  $\theta_1$  est donné par l'expression

$$\theta_2 = \arctan_{xy} \left( -3 \frac{\sin(\theta_1)}{4 \cos(\theta_1) + 5}, -\frac{5 \cos(\theta_1) + 4}{4 \cos(\theta_1) + 5} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (54)$$

Maintenant, puisque

$$\left( -3 \frac{\sin(\theta_1)}{4 \cos(\theta_1) + 5} \right)^2 + \left( -\frac{5 \cos(\theta_1) + 4}{4 \cos(\theta_1) + 5} \right)^2 = 1,$$

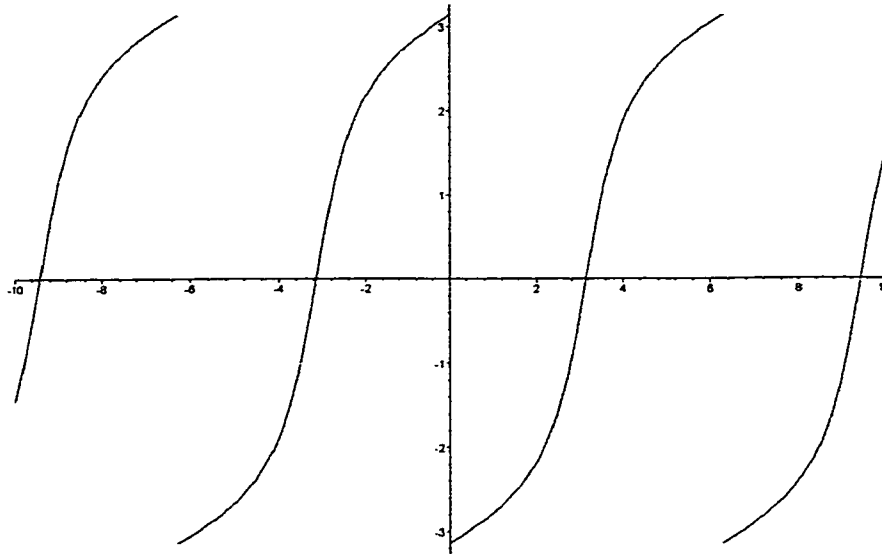
nous avons alors, d'après l'identité (47), que  $\theta_2$  donné par (54) est tel que

$$\cos(\theta_2) = -\frac{5 \cos(\theta_1) + 4}{4 \cos(\theta_1) + 5} \quad (55)$$

$$\sin(\theta_2) = -3 \frac{\sin(\theta_1)}{4 \cos(\theta_1) + 5}. \quad (56)$$

Finalement, si nous posons  $k = 0$  dans l'expression (54) pour  $\theta_2$  en fonction de  $\theta_1$ , nous ne conservons alors que les branches *ondulées* se situant entre les droites  $\theta_2 = -\pi$  et  $\theta_2 = \pi$  du graphique à la figure 6, en allant d'une branche à l'autre entre ces deux droites. Nous obtenons alors la courbe représentée à la figure 7 pour  $\theta_2$  en fonction de  $\theta_1$ .

FIG. 7: Graphique de  $\theta_2$  en fonction de  $\theta_1$  pour  $k = 0$



En substituant maintenant les expressions (55) et (56) dans les équations du système linéaire (36) et en solutionnant ces équations en fonctions de  $\theta_1 = \omega\tau_s$ ,

nous obtenons les expressions suivantes pour les divers paramètres :

$$\begin{aligned}
 \omega &= \omega \\
 \kappa &= -\frac{\omega (10 \cos^2(\omega\tau_s) + 4 \cos(\omega\tau_s) - 5)}{3 (2 \cos(\omega\tau_s) + 1) \sin(\omega\tau_s)} \\
 \beta &= \frac{9\omega \sin(\omega\tau_s)}{2 (\cos(\omega\tau_s) - 1)(2 \cos(\omega\tau_s) + 1)(\cos(\omega\tau_s) + 2)} \\
 \gamma &= -\frac{\omega (4 \cos(\omega\tau_s) + 5)^2 \sin(\omega\tau_s)}{6 (2 \cos(\omega\tau_s) + 1)(\cos(\omega\tau_s) + 2)(\cos(\omega\tau_s) + 1)}.
 \end{aligned} \tag{57}$$

Nous pouvons vérifier que les équations (36) ne possèdent pas de solution lorsque  $\cos(\omega\tau_s) = -\frac{1}{2}$  et lorsque  $\sin(\omega\tau_s) = 0$ , avec  $\omega \neq 0$ . Il faut donc retrancher de la famille des valeurs critiques des paramètres toutes les valeurs telles que

$$\omega\tau_s = \left(\pi \pm \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{58}$$

$$\omega\tau_s = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{59}$$

Il faut aussi retrancher les valeurs correspondant aux valeurs pour lesquelles nous avons  $\cos(\omega\tau_s) = 1$  qui correspond au cas (40) et que nous avons précédemment exclus. Or, en excluant les valeurs pour lesquelles  $\sin(\omega\tau_s) = 0$ , c'est-à-dire tous les multiples de  $\pi$ , nous avons aussi exclus tous les multiples de  $2\pi$ , soient les valeurs pour lesquelles  $\cos(\omega\tau_s) = 1$ .

Finalement, pour  $\tau_s$  et  $\tau$ , nous avons

$$\tau = \frac{1}{\omega} \left( \arctan_{xy} \left( -3 \frac{\sin(\omega\tau_s)}{4 \cos(\omega\tau_s) + 5}, -\frac{5 \cos(\omega\tau_s) + 4}{4 \cos(\omega\tau_s) + 5} \right) + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{60}$$

où  $\tau_s$  est un paramètre libre.

Maintenant, de cette famille de valeurs critiques des paramètres il faut retrancher toutes les valeurs pour lesquels il y a d'autres valeurs propres entrant en interaction avec les valeurs propres  $\lambda = i\omega$  et  $\lambda = 2i\omega$ . Considérons donc  $\lambda = i\alpha\omega$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ . En substituant cette nouvelle valeur de  $\lambda$  dans (30) et en effectuant les mêmes manipulations que nous avons faites précédemment pour  $\lambda = i\omega$  et  $\lambda = 2i\omega$ ,

nous trouvons que les valeurs des paramètres à retrancher doivent satisfaire les deux équations

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\Delta_\alpha) &\equiv \kappa - \beta \cos(\alpha\omega\tau_s) - \gamma \cos(\alpha\omega\tau) = 0 \\ \operatorname{Im}(\Delta_\alpha) &\equiv \alpha\omega + \beta \sin(\alpha\omega\tau_s) + \gamma \sin(\alpha\omega\tau) = 0, \end{aligned} \quad (61)$$

où les paramètres  $\omega, \kappa, \beta, \gamma$  ainsi que  $\tau_s$  et  $\tau$  doivent satisfaire (57) et (60). En remplaçant les expressions (57) et (60) dans (61), nous avons alors que les valeurs des paramètres à retrancher des valeurs critiques de la famille des paramètres sont celles pour lesquelles il existe une valeur de  $\alpha$  telle que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\omega}{\varepsilon_1} \left( 30\alpha \cos(\omega\tau_s)^3 - 30\alpha \cos(\omega\tau_s) - 12\alpha + 12\alpha \cos(\omega\tau_s)^4 \right. \\ &\quad + 27 \sin(\omega\tau_s) \sin(\alpha\omega\tau_s) \cos(\omega\tau_s) + 27 \sin(\omega\tau_s) \sin(\alpha\omega\tau_s) \\ &\quad - 24 \sin(\omega\tau_s) \sin(\alpha\omega\tau) \cos(\omega\tau_s)^2 - 16 \sin(\omega\tau_s) \sin(\alpha\omega\tau) \cos(\omega\tau_s)^3 \\ &\quad \left. + 15 \sin(\omega\tau_s) \sin(\alpha\omega\tau) \cos(\omega\tau_s) + 25 \sin(\omega\tau_s) \sin(\alpha\omega\tau) \right), \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\omega}{\varepsilon_2} \left( -16 \cos(\alpha\omega\tau) \cos(\omega\tau_s)^3 - 20 \cos(\omega\tau_s)^3 - 24 \cos(\alpha\omega\tau) \cos(\omega\tau_s)^2 \right. \\ &\quad - 48 \cos(\omega\tau_s)^2 + 27 \cos(\alpha\omega\tau_s) \cos(\omega\tau_s) + 15 \cos(\alpha\omega\tau) \cos(\omega\tau_s) \\ &\quad \left. - 6 \cos(\omega\tau_s) + 20 + 27 \cos(\alpha\omega\tau_s) + 25 \cos(\alpha\omega\tau) \right), \end{aligned} \quad (63)$$

où nous avons

$$\omega\tau = \arctan_{xy} \left( -3 \frac{\sin(\tau_s\omega)}{4 \cos(\tau_s\omega) + 5}, -\frac{5 \cos(\tau_s\omega) + 4}{4 \cos(\tau_s\omega) + 5} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

et où les dénominateurs de (62) et (63) sont

$$\varepsilon_1 = 6(-1 + \cos(\omega\tau_s))(2 \cos(\omega\tau_s) + 1)(\cos(\omega\tau_s) + 2)(\cos(\omega\tau_s) + 1),$$

et

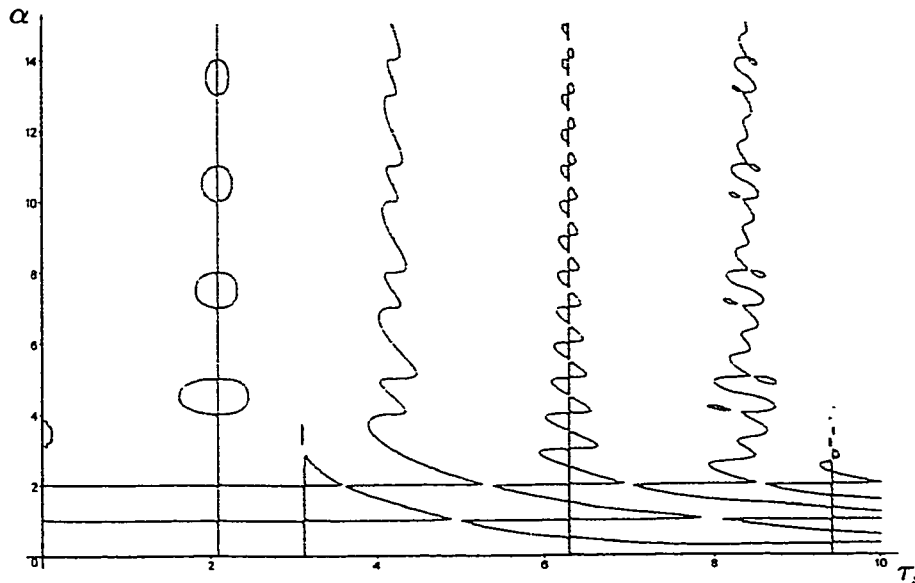
$$\varepsilon_2 = 6(\cos(\omega\tau_s) + 2)(2 \cos(\omega\tau_s) + 1) \sin(\omega\tau_s).$$

Les équations (62) et (63) forment un système de deux équations à trois inconnus,  $\omega$ ,  $\tau_s$  et  $\alpha$ . En solutionnant ce système, nous trouverions une famille de solutions telle que deux des trois variables seraient exprimées en fonction d'un paramètre libre, soit une

courbe dans un espace tridimensionnel. Toutefois, ce système étant particulièrement complexe à résoudre, nous nous contenterons d'observer où, dans le plan  $\omega = 1$  de l'espace  $(\alpha, \tau_s, \omega)$ , se trouvent des points pour lesquels nous aurons les interactions  $1 : \alpha$  et  $2 : \alpha$  en plus de la résonance  $1 : 2$ . Notons par ailleurs que puisque  $\omega$  est fixé, nous nous attendons de ne pouvoir observer que des solutions discrètes, soit des points isolés, dans le plan  $(\alpha, \tau_s)$ .

Considérons d'abord les graphiques aux figures 8 et 9 tracés pour  $\alpha$  en fonction de  $\tau_s$ . Ces graphiques montrent pour quelles valeurs de  $\alpha$  et de  $\tau_s$  les équations implicites (62) et (63) sont vérifiées. Les valeurs critiques à retrancher de la famille des paramètres, donnés en fonction des paramètres libres  $\omega$  et  $\tau_s$ , correspondent à toutes les valeurs pour lesquelles nous avons  $\omega = 1$  et  $\tau_s$  égale à chacune des valeurs pris parmi l'ensemble des valeurs pour lesquelles il y a un point d'intersection entre les deux graphiques des figures 8 et 9. Le graphique à la figure 10 est la combinaison de ces deux graphiques.

FIG. 8: Graphique de l'équation implicite (62)



Nous remarquons que la plupart des points d'intersections ont pour valeur de  $\tau_s$  soit  $\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi, \frac{8\pi}{3}$  ou  $3\pi$ . D'où, puisque  $\omega = 1$ , nous avons  $\omega\tau_s = \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi, \frac{8\pi}{3}$  ou  $3\pi$ . Or, comme expliqué plus tôt (voir (58) et (59)), il n'y a pas de résonance  $1 : 2$

FIG. 9: Graphique de l'équation implicite (63)

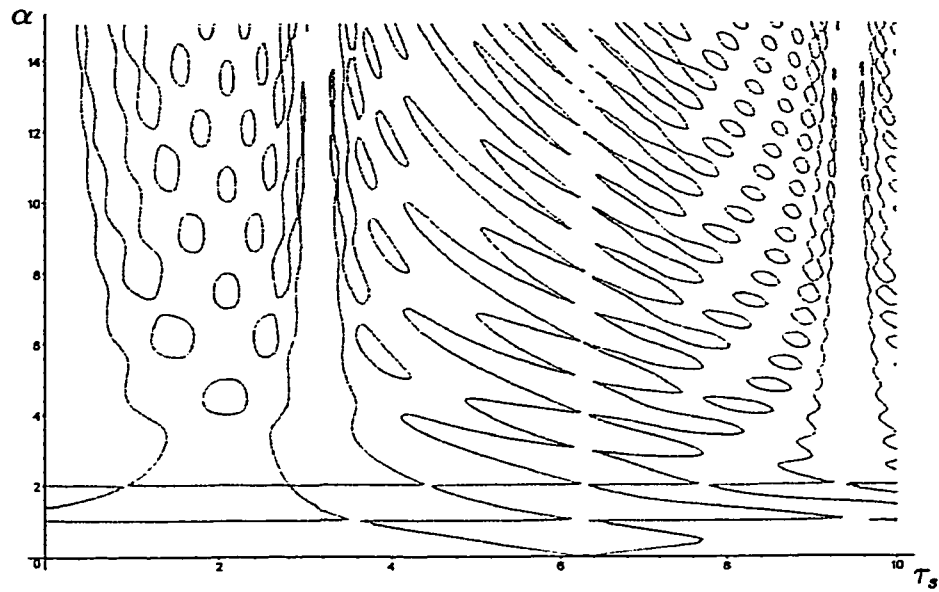
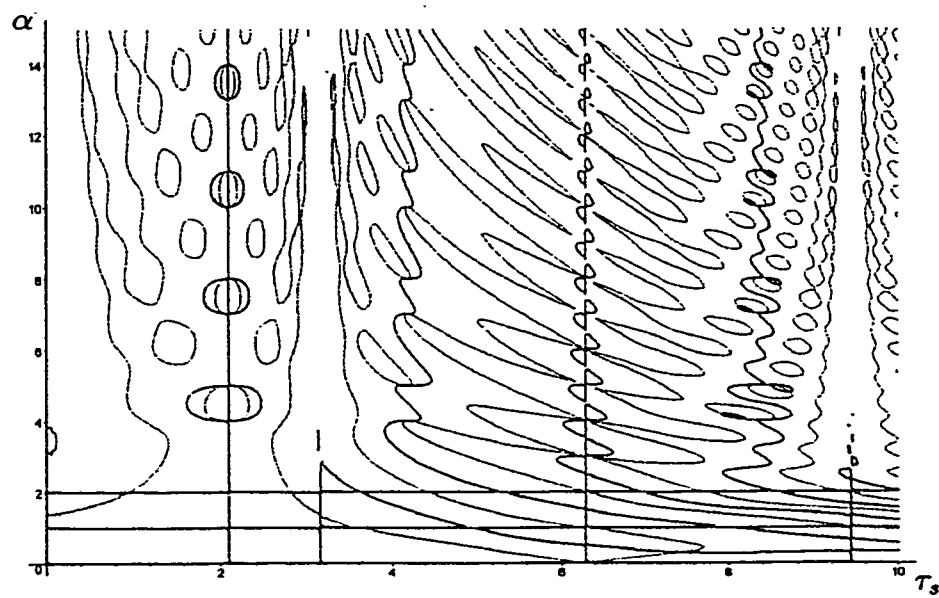


FIG. 10: Combinaison des graphiques 8 et 9



pour ces valeurs de  $\omega\tau_s$ . Ainsi nous n'avons pas à considérer ces points d'intersection. Il ne reste plus que très peu de points d'intersection, par exemple,  $\tau_s \approx 7.4$  et  $\alpha \approx 0.3$ . Toutefois, nous savons que pour avoir une bifurcation avec résonance 1 : 2 nous ne devons génériquement avoir aucune autre valeur propre sur l'axe imaginaire. Ainsi, bien que ce dernier graphique n'illustre pas tous les cas où il y a à la fois les interactions 1 :  $\alpha$  et 2 :  $\alpha$  en plus de la résonance 1 : 2, il est toutefois suffisant pour nous convaincre que le choix des valeurs pour  $\tau_s$  lors des simulations numériques que nous ferons au chapitre 3, avec  $\omega = 1$ , sera tel que nous n'aurons que la résonance 1 : 2.

## 2.4 Résumé

Le travail fait tout au long de ce chapitre démontre le théorème suivant :

**Théorème 1.** *Pour le système*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\kappa x_1(t) + \beta x_1(t - \tau_s) \pm \gamma^2 x_2(t - 1) + \delta_1 x_1^2(t - \tau_s) \\ &\quad + \delta_2 x_2^2(t - 1) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \\ \dot{x}_2(t) &= -\kappa x_2(t) + \beta x_2(t - \tau_s) + x_1(t - 2\tau + 1) + \delta_3 x_2^2(t - \tau_s) \\ &\quad + \delta_4 x_1^2(t - 2\tau + 1) + \mathcal{O}(\|x\|^3), \end{aligned}$$

*l'origine subit une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 lorsque les valeurs des paramètres  $\{\kappa, \beta, \gamma, \tau\}$  respectent les expressions données en termes des paramètres libres  $\{\omega, \tau_s\}$  suivantes*

$$\begin{aligned} \kappa(\omega, \tau_s) &= -\frac{\omega (10 \cos^2(\omega\tau_s) + 4 \cos(\omega\tau_s) - 5)}{3 (2 \cos(\omega\tau_s) + 1) \sin(\omega\tau_s)} \\ \beta(\omega, \tau_s) &= \frac{9\omega \sin(\omega\tau_s)}{2 (\cos(\omega\tau_s) - 1)(2 \cos(\omega\tau_s) + 1)(\cos(\omega\tau_s) + 2)} \\ \gamma(\omega, \tau_s) &= \pm \frac{\omega (4 \cos(\omega\tau_s) + 5)^2 \sin(\omega\tau_s)}{6 (2 \cos(\omega\tau_s) + 1)(\cos(\omega\tau_s) + 2)(\cos(\omega\tau_s) + 1)} \\ \tau(\omega, \tau_s) &= \frac{1}{\omega} \left( \arctan_{xy} \left( -3 \frac{\sin(\omega\tau_s)}{4 \cos(\omega\tau_s) + 5}, -\frac{5 \cos(\omega\tau_s) + 4}{4 \cos(\omega\tau_s) + 5} \right) + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{64}$$

où  $\tau_s > 0$ ,  $\tau > 0$  et  $\omega\tau_s \neq (\pi \pm \frac{\pi}{3}) + 2k\pi$ ,  $\omega\tau_s \neq k\pi$ , et tel que pour  $\omega$ ,  $\tau_s$ , il n'y a pas d'autres valeurs propres sur l'axe imaginaire.

# Chapitre 3

## Stabilité et dédoublement de période

### 3.1 Instabilité de l'origine

À notre connaissance, tous les systèmes d'équations aux délais pour lesquels la dynamique près d'une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 a fait l'objet d'études constituaient tous des exemples de systèmes tel qu'il est toujours possible de trouver des valeurs critiques pour les paramètres de sorte que le point d'équilibre du système soit stable. Le résultat qui suit est donc particulièrement surprenant.

**Conjecture 1.** *L'origine pour le système (18) est toujours instable près des valeurs critiques pour lesquelles il y a une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2.*

Pour démontrer rigoureusement cette conjecture et pouvoir alors l'énoncer comme théorème, il faudrait montrer que peu importe les valeurs critiques pour lesquelles il y a une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2, l'équation caractéristique (25) du système (18) possède toujours au moins une valeur propre avec partie réelle positive. Plus précisément, pour tout choix de  $\omega > 0$  et  $\tau_s > 0$ , nous devons démontrer que l'équation caractéristique

$$\lambda + \kappa(\omega, \tau_s) - \beta(\omega, \tau_s)e^{-\lambda\tau_s} \pm \gamma(\omega, \tau_s)e^{\lambda\tau(\omega, \tau_s)} = 0, \quad (65)$$

où  $\kappa(\omega, \tau_s), \beta(\omega, \tau_s), \gamma(\omega, \tau_s)$  et  $\tau(\omega, \tau_s)$  sont donnés par les expressions (64), possède

en plus des valeurs propres  $\lambda = \pm i\omega$  et  $\lambda = \pm 2i\omega$  au moins une autre valeur propre  $\lambda = u \pm iv$  avec  $u > 0$  et  $v \geq 0$ .

Avant de poursuivre notre discussion sur cette conjecture, considérons le lemme suivant :

**Lemme 1.** *Supposons que  $(\Omega, u, v) \in \mathbb{R}^3$  est une solution du système d'équations*

$$\begin{cases} u + K(\Omega) - B(\Omega)e^{-u\Omega} \cos(v\Omega) - \sigma\Gamma(\Omega)e^{-uT(\Omega)} \cos(vT(\Omega)) = 0 \\ v + B(\Omega)e^{-u\Omega} \sin(v\Omega) + \sigma\Gamma(\Omega)e^{-uT(\Omega)} \sin(vT(\Omega)) = 0, \end{cases} \quad (66)$$

où

$$\begin{aligned} K(\Omega) &= \frac{1}{3} \frac{(10 \cos^2(\Omega) + 4 \cos(\Omega) - 5)}{(2 \cos(\Omega) + 1) \sin(\Omega)} \\ B(\Omega) &= \frac{9}{2} \frac{\sin(\Omega)}{(\cos(\Omega) - 1)(2 \cos(\Omega) + 1)(\cos(\Omega) + 2)} \\ \Gamma(\Omega) &= \pm \frac{1}{6} \frac{(4 \cos(\Omega) + 5)^2 \sin(\Omega)}{(2 \cos(\Omega) + 1)(\cos(\Omega) + 2)(\cos(\Omega) + 1)} \\ T(\Omega) &= \arctan_{xy} \left( -3 \frac{\sin(\Omega)}{4 \cos(\Omega) + 5}, -\frac{5 \cos(\Omega) + 4}{4 \cos(\Omega) + 5} \right) + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (67)$$

sont des fonctions  $2\pi$ -périodiques, et  $\sigma = \pm 1$ . Alors  $\lambda = \omega u + i\omega v$  satisfait à l'équation caractéristique (65) aux valeurs critiques des paramètres telles que données en (64) et ce, pour toutes les valeurs permises pour les paramètres libres  $(\omega, \tau_s)$  telles que  $\omega\tau_s = \Omega$ . En particulier, nous devons avoir  $\Omega \neq (\pi \pm \frac{\pi}{3}) + 2k\pi$  et  $\Omega \neq k\pi$ .

**Démonstration:**

Soit  $\lambda = \omega u + i\omega v$  avec  $\omega\tau_s = \Omega$ . En substituant  $\lambda$  dans l'équation caractéristique (65), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta(\omega u + i\omega v) &= \omega u + i\omega v + \kappa(\omega, \tau_s) - \beta(\omega, \tau_s)e^{-(\omega u + i\omega v)\tau_s} \pm \gamma(\omega, \tau_s)e^{-(\omega u + i\omega v)\tau(\omega, \tau_s)} \\ &= \omega u + i\omega v + \omega \frac{\kappa(\omega, \tau_s)}{\omega} - \omega \frac{\beta(\omega, \tau_s)}{\omega} e^{-\omega(u+iv)\tau_s} \pm \omega \frac{\gamma(\omega, \tau_s)}{\omega} e^{-\omega(u+iv)\frac{1}{\omega}\omega\tau(\omega, \tau_s)} \\ &= \omega \left( u + iv + \frac{\kappa(\omega, \tau_s)}{\omega} - \frac{\beta(\omega, \tau_s)}{\omega} e^{-(u+iv)\omega\tau_s} \pm \frac{\gamma(\omega, \tau_s)}{\omega} e^{-(u+iv)\omega\tau(\omega, \tau_s)} \right) \end{aligned}$$

or puisque  $\frac{\kappa(\omega, \tau_s)}{\omega} = K(\Omega)$ ,  $\frac{\beta(\omega, \tau_s)}{\omega} = B(\Omega)$ ,  $\frac{\gamma(\omega, \tau_s)}{\omega} = \Gamma(\Omega)$  et  $\omega\tau(\omega, \tau_s) = T(\Omega)$ , nous avons alors que

$$\Delta(\omega u + i\omega v) = \omega(u + iv + K(\Omega) - B(\Omega)e^{-(u+iv)\Omega} \pm \Gamma(\Omega)e^{-(u+iv)T(\Omega)}).$$

Nous pouvons maintenant regrouper les coefficients réels et imaginaires de sorte que  $\Delta = \text{Re}(\Delta) + i \text{Im}(\Delta)$ . Nous obtenons alors

$$\text{Re}(\Delta) = \omega(u + K(\Omega) - B(\Omega)e^{-u\Omega} \cos(v\Omega) \pm \Gamma(\Omega)e^{-uT(\Omega)} \cos(vT(\Omega))) = \omega \cdot 0 = 0,$$

et

$$\text{Im}(\Delta) = \omega(v - B(\Omega)e^{-u\Omega} \sin(v\Omega) \pm \Gamma(\Omega)e^{-uT(\Omega)} \sin(vT(\Omega))) = \omega \cdot 0 = 0.$$

D'où  $\Delta(\omega u + i\omega v) = 0$ . □

Ce lemme nous permet de passer de l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les paramètres libres  $(\omega, \tau_s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , à un ensemble plus restreint, soit  $\Omega \in \mathbb{R}^+$ . Ainsi, plutôt que de démontrer que pour tout choix de  $\omega > 0$  et  $\tau_s > 0$ , l'équation caractéristique (65) possède toujours au moins une paire de valeurs propres avec partie réelle positive, il est suffisant de démontrer que  $\forall \Omega > 0$ , le système d'équations (66) possède toujours au moins une solution  $(\Omega, u, v)$  avec  $u > 0$ . À ce propos nous avons le théorème suivant :

**Théorème 2.**  $\forall \Omega \in ]2\pi/3, \pi[$  et  $\forall \Omega \in ]4\pi/3, 2\pi[$ , le système d'équations (66) possède toujours comme solution  $(\Omega, u_\Omega, 0)$  pour un certain  $u_\Omega > 0$ .

**Démonstration:**

Posons  $\sigma = 1$ . Définissons la fonction  $f_\Omega(u)$  comme étant égale à la partie gauche de la première équation du système (66) avec  $v = 0$ , c'est-à-dire que

$$f_\Omega(u) = u + K(\Omega) - B(\Omega)e^{-u\Omega} - \Gamma(\Omega)e^{-uT(\Omega)}.$$

En remplaçant  $K(\Omega)$ ,  $B(\Omega)$  et  $\Gamma(\Omega)$  par leurs expressions données en (67) et en évaluant  $f_\Omega$  en  $u = 0$ , nous avons alors que

$$\begin{aligned} f_\Omega(0) &= K(\Omega) - B(\Omega) - \Gamma(\Omega) \\ &= 6 \frac{\sin(\Omega)}{2 \cos(\Omega) + 1} \\ &< 0, \quad \forall \Omega \in ]2\pi/3, \pi[ \text{ et } \forall \Omega \in ]4\pi/3, 2\pi[. \end{aligned}$$

En dérivant  $f_\Omega$ , nous obtenons

$$\frac{df_\Omega}{du}(u) = 1 + \Omega B(\Omega)e^{-u\Omega} - T(\Omega)\Gamma(\Omega)e^{-uT(\Omega)},$$

de sorte que la limite de la dérivée de  $f_\Omega$  lorsque  $u \rightarrow \infty$  est

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (1 + \Omega B(\Omega)e^{-u\Omega} - T(\Omega)\Gamma(\Omega)e^{-uT(\Omega)}) = 1,$$

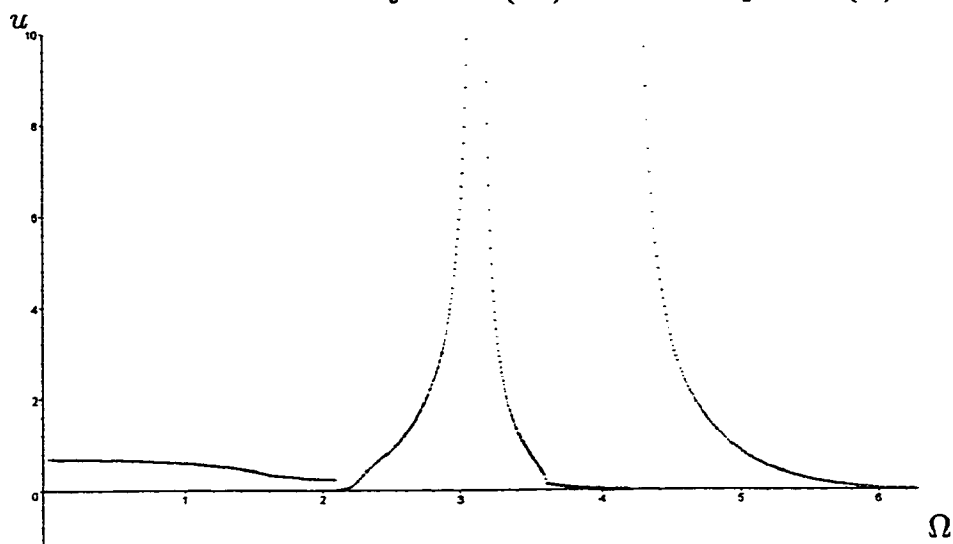
car  $\Omega > 0$  et  $T(\Omega) > 0$  (sauf possiblement lorsque  $k = 0$ , mais comme  $T(\Omega)$  est l'équivalent du paramètre  $\tau(\omega, \tau_s)$ , alors seules les valeurs positives de  $T(\Omega)$  doivent être considérées.) D'où la dérivée de  $f_\Omega$  est éventuellement positive, donc la fonction  $f_\Omega$  est éventuellement croissante. Puisque  $f_\Omega$  est continue,  $f_\Omega(0) < 0$  et  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{df_\Omega}{du} > 0$ , alors la fonction  $f_\Omega$  doit nécessairement prendre la valeur 0 pour un certain  $u_\Omega > 0$ . Par ailleurs, en  $v = 0$ , la deuxième équation du système (66) est toujours égale à zéro. D'où  $(\Omega, u_\Omega, 0)$  est une solution du système (66) avec  $u_\Omega > 0$ , et ce,  $\forall \Omega \in ]2\pi/3, \pi[ \cup ]4\pi/3, 2\pi[$ .  $\square$

Le théorème établit donc que le système (18) possède toujours aux valeurs critiques des paramètres pour lesquels il y a une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance  $1 : 2$ , une valeur propre  $\lambda = \omega u_\Omega$  avec  $u_\Omega > 0$  (et  $\omega > 0$ ) pour tout  $\Omega = \omega \tau_s \in ]2\pi/3, \pi[ \cup ]4\pi/3, 2\pi[$ . Notons que puisque  $f_\Omega(0)$  est périodique de période  $2\pi$ , alors le théorème 2 s'applique pour tout  $\Omega > 0$  tel que  $\Omega \bmod 2\pi \in ]2\pi/3, \pi[ \cup ]4\pi/3, 2\pi[$ . Ainsi, pour avoir une preuve complète de la conjecture 1, il faudrait maintenant prouver un résultat similaire pour  $\Omega \in ]0, 2\pi/3[$  et  $\Omega \in ]\pi, 4\pi/3[$ . Toutefois, comme nous n'avons pas pu établir clairement ce résultat, nous allons maintenant considérer un argument graphique plutôt convainquant qui permet d'appuyer la conjecture 1.

Les graphiques aux figures 11, 12, 13, 14 et 15 montrent que le système d'équations (66) possède pour chaque valeur de  $\Omega \in ]0, 2\pi[$ , une solution  $(\Omega, u_\Omega, v_\Omega)$ , avec  $u_\Omega > 0$ . Ces solutions ont été trouvées en résolvant numériquement le système d'équations (66) pour lequel nous avons pris respectivement pour chacun des cinq graphiques,  $k = 0, 1, 2, 3$  et 10 pour l'expression de  $T(\Omega)$ . Puisque seules les valeurs de  $u_\Omega$  dans les solutions,  $(\Omega, u_\Omega, v_\Omega)$ , trouvées par les résolutions numériques nous intéressent, les graphiques ont été alors tracés pour  $u$  en fonction de  $\Omega$ . De plus, puisqu'il suffit d'une seule valeur propre avec partie réelle positive pour que l'origine soit instable,

les graphiques ne donnent qu'une valeur de  $u_\Omega$  avec  $u_\Omega > 0$  pour chaque choix de  $\Omega$  dans l'intervalle  $]0, 2\pi[$ .

FIG. 11: Solutions du système (66) avec  $k = 0$  pour  $T(\Omega)$



En regardant les graphiques, nous remarquons que les courbes de  $u$  en fonction de  $\Omega$  sont très semblables à partir de  $k = 1$ . D'où les graphiques nous permettent de supposer que pour  $k = 1, 2, 3, \dots$ , la valeur de  $u_\Omega$  des solutions pour chaque valeur de  $\Omega$  prises dans l'intervalle  $]0, 2\pi[$  ne varie que très peu. Par ailleurs, nous remarquons aussi que plus  $k$  augmente plus la valeur de  $u_\Omega$  tend vers 0 pour certaine valeur de  $\Omega$ . Pour ce qui est des solutions  $(\Omega, u_\Omega, v_\Omega)$  avec des valeurs de  $u_\Omega$  très positives, il est important de remarquer que ces solutions sont obtenues pour des choix de  $\Omega$  près des valeurs où il y a des discontinuités dans les expressions des variables  $K(\Omega)$ ,  $B(\Omega)$  et  $\Gamma(\Omega)$ , c'est-à-dire que ces variables sont, en valeur absolue, très grandes pour ces choix de  $\Omega$ , et il s'ensuit que les valeurs pour  $u_\Omega$  sont alors très positives. Finalement, puisque la conjecture 1 doit être vérifiée pour tout choix de  $\Omega$ , nous devons aussi vérifier que le système d'équations (66) possède une solution  $(\Omega, u_\Omega, v_\Omega)$ , avec  $u_\Omega$  pour des valeurs de  $\Omega > 2\pi$ . Le dernier graphique à la figure 16 illustre ceci et montre que pour les valeurs permises de  $\Omega$  prises dans l'intervalle  $]20\pi, 22\pi[$ , le système d'équations (66) possède aussi une solution  $(\Omega, u_\Omega, v_\Omega)$ , avec  $u_\Omega > 0$ . Ces graphiques, le théorème 2,

FIG. 12: Solution du système (66) avec  $k = 1$  pour  $T(\Omega)$

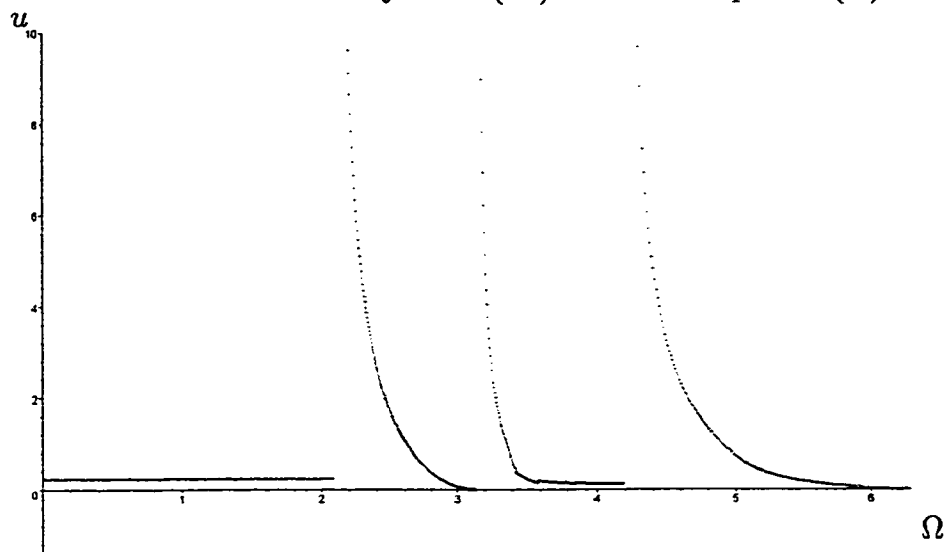


FIG. 13: Solution du système (66) avec  $k = 2$  pour  $T(\Omega)$

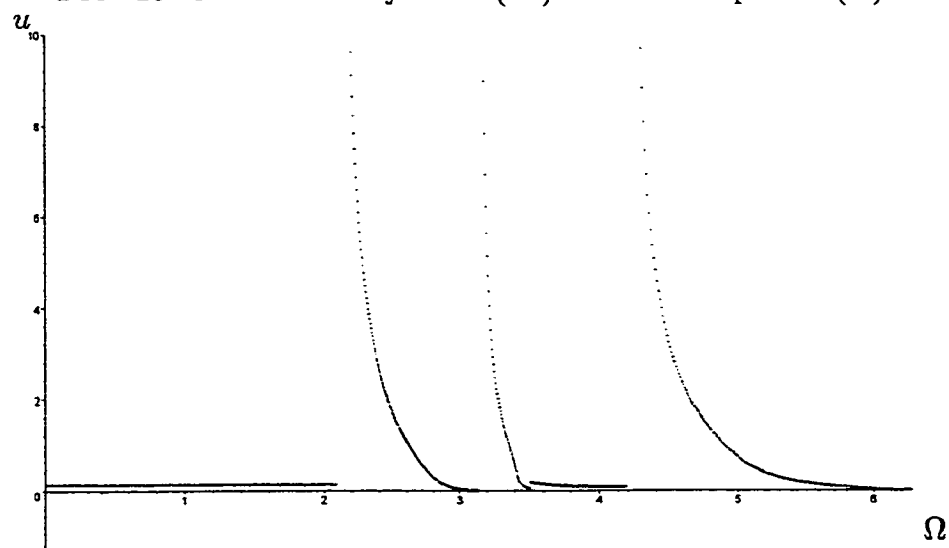


FIG. 14: Solution du système (66) avec  $k = 3$  pour  $T(\Omega)$

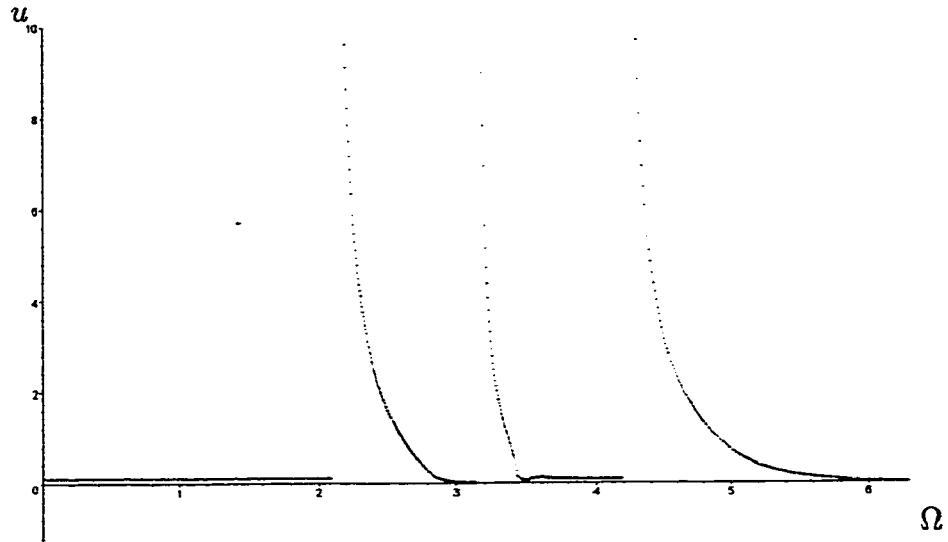
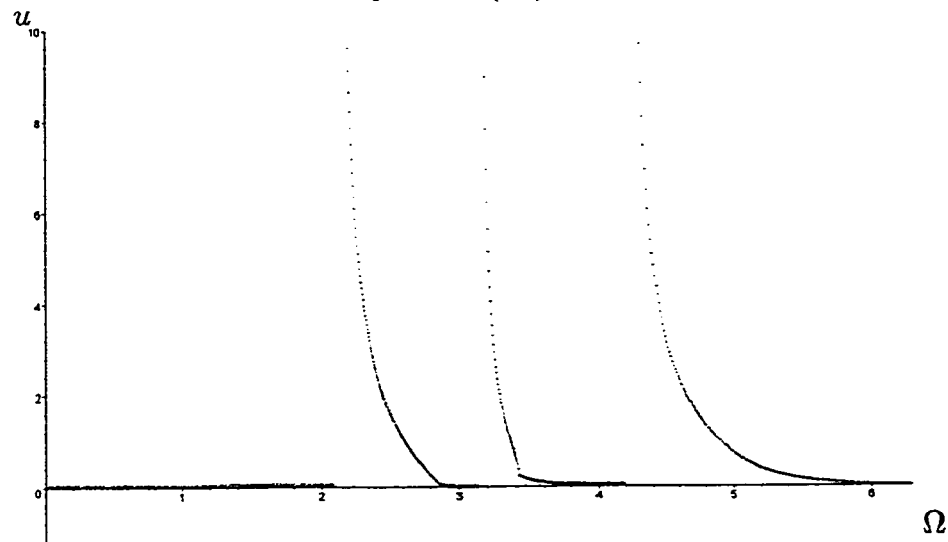
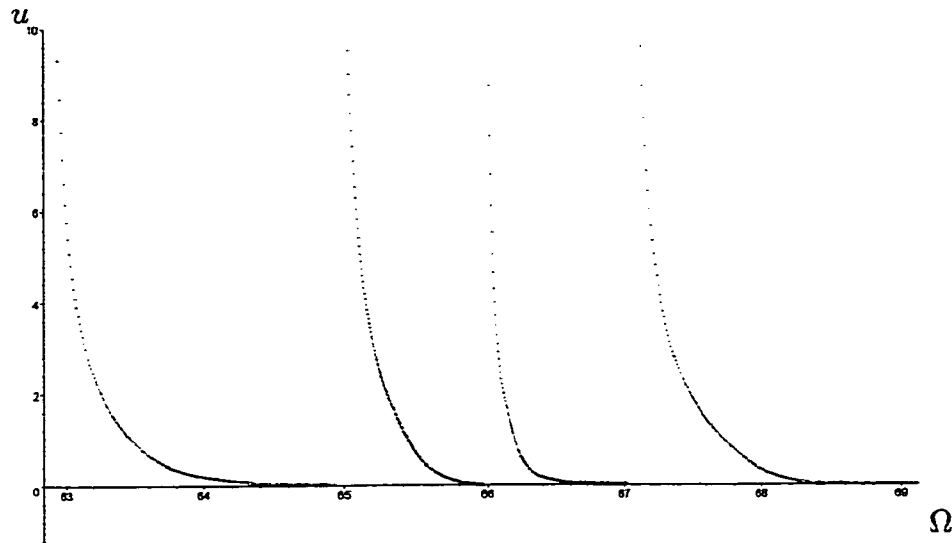


FIG. 15: Solution du système (66) avec  $k = 10$  pour  $T(\Omega)$



ainsi que le lemme 1 qui établit l'équivalence entre l'équation caractéristique (65) et le système d'équations (66), nous permettent d'établir la conjecture 1 faite au début de cette section.

FIG. 16: Solution du système (66) pour  $\Omega \in ]20\pi, 22\pi[$  et  $k = 1$



Pour terminer cette section, nous voulons émettre une autre conjecture, que nous appuierons aussi d'un argument graphique, et qui à trait au nombre de valeurs propres à parties réelles positives que possède le système (18) aux valeurs critiques des paramètres pour lesquels il y a une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2.

**Conjecture 2.** *Les solutions  $(\Omega, u_\Omega, v_\Omega)$  pour le système d'équation (66) avec  $u_\Omega > 0$  sont au nombre de*

- 2 lorsque  $\Omega \in ]0, 2\pi/3[ \cup ]\pi, 4\pi/3[$ . De plus, ces solutions sont de la forme  $(\Omega, u_\Omega, v_\Omega)$  et  $(\Omega, u_\Omega, -v_\Omega)$ ,
- 3 lorsque  $\Omega \in ]2\pi/3, \pi[ \cup ]4\pi/3, 2\pi[$ . De plus, ces solutions sont de la forme  $(\Omega, u_\Omega, v_\Omega)$ ,  $(\Omega, u_\Omega, -v_\Omega)$  et  $(\Omega, \tilde{u}_\Omega, 0)$ .

Ainsi, selon cette conjecture et le lemme 1, nous avons que le système (18), aux valeurs critiques des paramètres pour lesquels il y a une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2, possède toujours lorsque  $\omega\tau_s \in ]0, 2\pi/3[ \cup ]\pi, 4\pi/3[$  une seule paire

de valeurs propres avec partie réelle positive et lorsque  $\omega\tau_s \in ]2\pi/3, \pi[ \cup ]4\pi/3, 2\pi[$ , possède en plus une valeur propre avec partie imaginaire égale à zéro et partie réelle positive (ceci a été démontré au théorème 2).

Notre argument graphique se compose de deux graphiques donnés aux figures 17 et 18. Ces graphiques sont les combinaisons des courbes implicites tracées pour chacune des deux équations du système d'équations (66) où, pour chacun des graphiques,  $k = 1$ , et une valeur pour  $\Omega$  à été choisie dans chacune des deux région  $]0, 2\pi/3[ \cup ]\pi, 4\pi/3[$  et  $]2\pi/3, \pi[ \cup ]4\pi/3, 2\pi[$ . Les points d'intersection entre les courbes, tracées pour  $v$  en fonction de  $u$ , des graphiques, correspondent aux solutions  $(\Omega, u_\Omega, v_\Omega)$  du système d'équations (66) pour  $\Omega$  tel que choisi. Les graphiques sont symétriques par rapport à l'axe des  $u$  de sorte que lorsque nous avons un point d'intersection entre les deux courbes d'un des quatre graphiques tel que  $v_\Omega \neq 0$ , nous avons automatiquement aussi le point d'intersection  $(u_\Omega, -v_\Omega)$ . Pour chacun des deux graphiques, nous n'observons qu'une de ces paires de points d'intersection. Puis pour le graphique à la figure 18 nous observons en plus un et un seul point d'intersection avec  $v_\Omega = 0$ . Nous pouvons aussi observer pour chacun des deux graphiques les solutions sur l'axe imaginaire  $v_\Omega = \pm i$  et  $v_\Omega = \pm 2i$ , qui correspondent aux valeurs propres  $\lambda = \pm\omega i$  et  $\lambda = \pm 2\omega i$ .

FIG. 17: Solutions du système (66) pour  $\Omega = 0,5$  et  $k = 1$

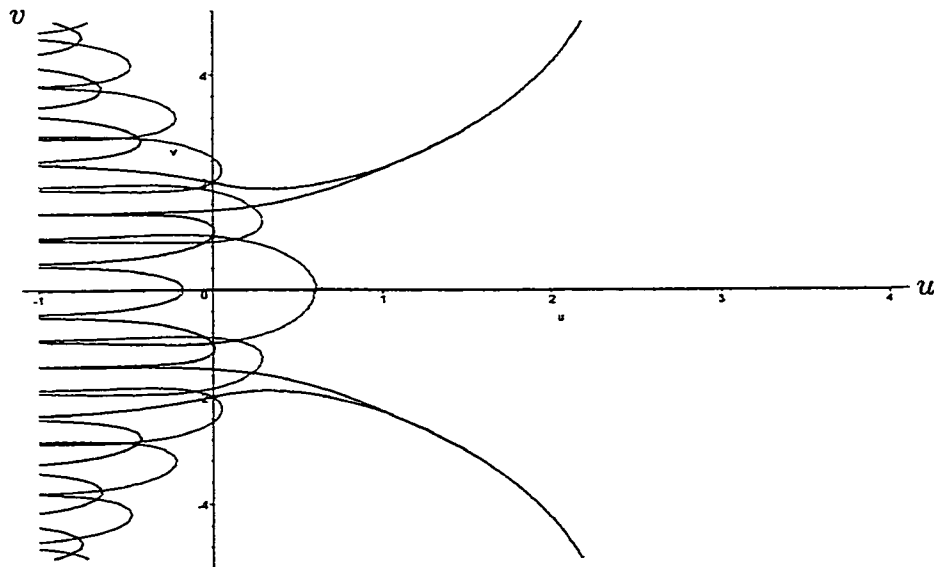
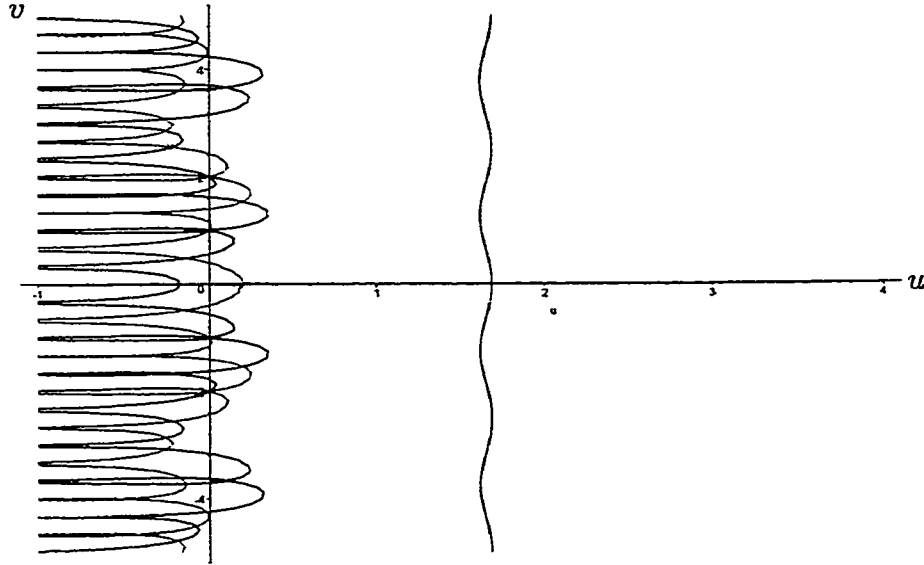


FIG. 18: Solutions du système (66) pour  $\Omega = 2,5$  et  $k = 1$ 

### 3.2 Dédoublément de période

Dans l'introduction, nous avons présenté le concept de dédoublement de période qui est une caractéristique fondamentale d'une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. C'est en fait le dédoublement de période qui distingue les cas de résonance 1 : 2 de tous les autres cas de résonances, que ce soit un cas de résonance forte 1 : 1, 1 : 3, ou de résonance faible (voir LEBLANC et LANGFORD [16]). Nous allons donc effectuer dans cette section des simulations numériques, réalisées avec le logiciel *winpp* par BARD ERMENTROUT, pour le système (18) sans les termes d'ordre trois, soit pour le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\kappa x_1(t) + \beta x_1(t - \tau_s) \pm \gamma^2 x_2(t - 1) + \delta_1 x_1^2(t - \tau_s) + \delta_2 x_2^2(t - 1) \\ \dot{x}_2(t) &= -\kappa x_2(t) + \beta x_2(t - \tau_s) + x_1(t - 2\tau + 1) + \delta_3 x_2^2(t - \tau_s) + \delta_4 x_1^2(t - 2\tau + 1), \end{aligned}$$

et près des valeurs critiques des paramètres pour lesquels il y a un bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. Ces simulations numériques permettront d'illustrer ce qui semble être une cascade de dédoublements de période menant vers la chaos.

Toutes les simulations numériques que nous avons tentées initialement ne nous ont pas permis d'observer aucun comportement propre à la résonance 1 : 2. Ceci nous avait alors amené à penser que l'origine était toujours instable pour le système (18) aux valeurs critiques des paramètres pour lesquelles il y a une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. L'analyse graphique dont nous avons parlé à la section 3.1 nous a convaincu que s'était fort probablement le cas, mais nous a aussi révélé qu'en particulier pour  $\Omega \in ]0, 2\pi/3 [$ , plus la valeur de  $T(\Omega)$  est grande, c'est-à-dire à mesure que la valeur de  $k$  augmente, plus la partie réelle positive  $u_\Omega$  est près de 0. La conjecture 2 nous permet de supposer qu'en plus pour  $\Omega \in ]0, 2\pi/3 [$ , il n'y a que deux solutions avec  $u_\Omega > 0$ , qui sont  $(\Omega, u_\Omega, v_\Omega)$  et  $(\Omega, u_\Omega, -v_\Omega)$ . D'où, l'instabilité du système (18) est dû, lorsque  $\Omega \in ]0, 2\pi/3 [$ , à une et une seule paire de valeurs propres avec partie réelle positive, et cette partie réelle positive peut être prise très près de zéro en choisissant  $k$  très grand. L'instabilité de l'origine pour le système (18) n'est donc due qu'à cette paire de valeur propre de sorte que lorsque la partie réelle est très près de zéro, le système se comporte comme si l'origine était stable pour un certain intervalle de temps, c'est-à-dire que le système est dans un état transitoire. Cet état transitoire, peut de plus être d'une durée considérable. Il suffit pour cela que la partie réelle positive de la paire de valeurs propres soit quasi nulle. Nous avons donc tenté à nouveau des simulations numériques en prenant  $k$  très grand et  $\Omega \in ]0, 2\pi/3 [$ .

Les graphiques qui suivent ont été obtenus avec les valeurs des paramètres calculés à partir des expressions (64) lorsque  $\omega = 1$ ,  $\tau_s = 1$  et  $k = 100$ , soit pour

$$\begin{aligned} \kappa &= -0,01532185172, \quad \beta = -1,558491273, \\ \gamma^2 &= 0,7804757071, \quad \tau = 625,5371923, \end{aligned} \tag{68}$$

et avec  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_4 = 1$  et  $\delta_3 = -1$  comme valeurs pour les termes d'ordre deux.

Le graphique à la figure 19 montre que pour les valeurs exactes des paramètres (68), nous avons une solution périodique de période d'environ  $1,33\pi$ . Cette solution périodique augmente d'amplitude à mesure que  $\tau_s$  augmente, ce que nous pouvons voir en comparant le graphique à la figure 19 où nous avons pris  $\tau_s = 1,0$  et le graphique à la figure 20 où  $\tau_s = 1,0625$ . À partir de cette dernière valeur de  $\tau_s$ , un dédoublement de période se produit comme nous pouvons l'observer par les graphiques donnés aux figures 21 et 22 où  $\tau_s = 1,065$  et  $\tau_s = 1,0675$ . Les graphiques aux figures 21, 22

et 23 sont toutes des solutions de période égale approximativement à  $2,66\pi$ , donc le double de la période des solutions aux figures 19 et 20. Nous observons ensuite par les graphiques aux figures 24 et 25, où  $\tau_s = 1,0975$  et  $\tau_s = 1,1$ , la naissance d'un deuxième dédoublement de période. Puis, à partir de cette valeur de  $\tau_s$ , nous voyons clairement au graphique de la figure 26 où  $\tau_s = 1,15$ , que le système est devenu chaotique. Finalement, pour des valeurs plus grandes de  $\tau_s$ , nous ne pouvons plus rien observer puisque les solutions s'échappent vers l'infini. Pour compléter nos observations, considérons ce qui survient dans le plan  $(x_2, x_1)$ , tel que l'illustrent les graphiques aux figures 27, 28, 29, 30. Nous remarquons qu'en passant de  $\tau_s = 1,0625$  à  $\tau_s = 1,0725$ , le cycle limite semble s'être dédoublé, puis en comparant les cycles limites aux figures 28 et 29, que le cycle limite semble s'être à nouveau dédoublé. Finalement, le graphique de la figure 30 nous montre l'état chaotique du système lorsque  $\tau_s = 1,15$ . Nous croyons que ce que nous avons observé est une cascade de dédoublements de période. Notons qu'à notre connaissance, ce phénomène n'a jamais été observé dans des systèmes tel que celui que nous avons étudié dans cette thèse.

Ce que nous observons par ces graphiques n'est cependant pas local à la bifurcation. En fait, puisque l'amplitude des cycles ne tend pas vers 0 près des valeurs critiques des paramètres pour lesquels il y a une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2, et puisque les périodes des cycles ne sont pas égales à  $\pi$  ou  $2\pi$ , nous sommes donc en présence d'un phénomène global à la bifurcation. Ce phénomène est probablement causé par la non-linéarité du système (18) ainsi que possiblement par la résonance 1 : 2 étant donné que nous observons des dédoublements de période. Pour mieux comprendre les causes de ce phénomène, il serait utile de mener une étude plus approfondie en considérant par exemple les équations de la forme normale pour une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 pour le système (18). Cette approche demande toutefois d'effectuer d'abord plusieurs calculs, que nous avons faits, et que nous détaillons au chapitre qui suit.

FIG. 19: Simulation numérique du système (18) avec  $\tau_s = 1,0$

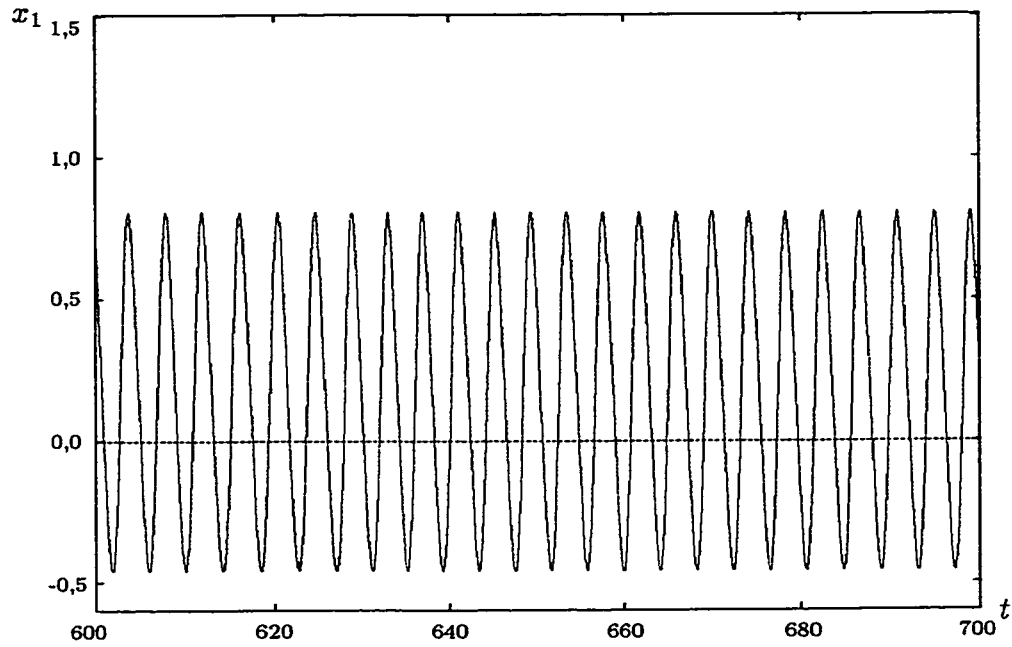


FIG. 20: Simulation numérique du système (18) avec  $\tau_s = 1,0625$

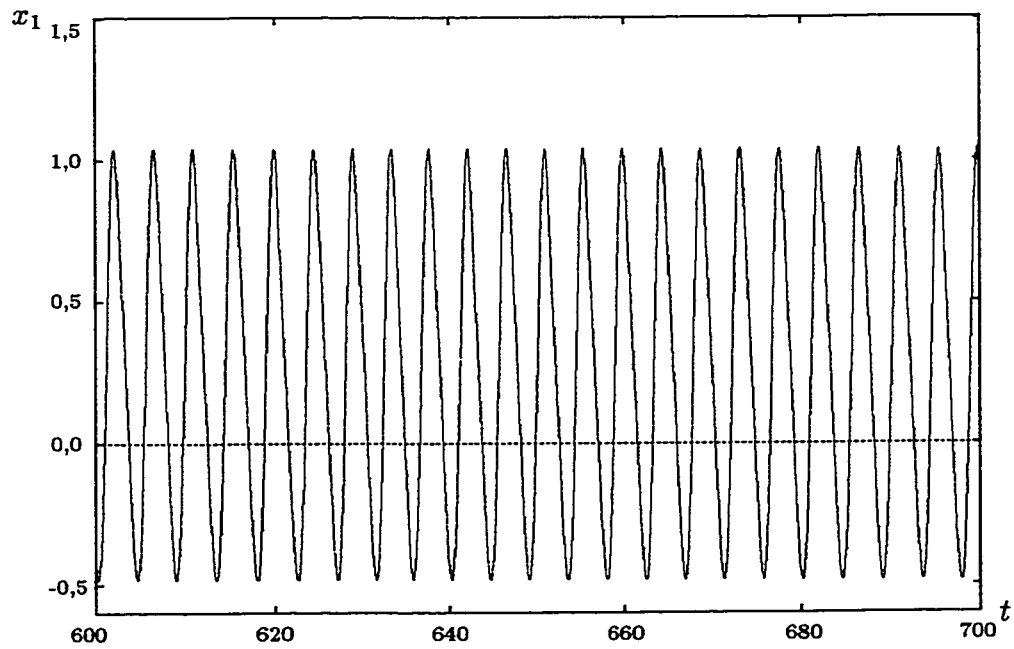


FIG. 21: Simulation numérique du système (18) avec  $\tau_s = 1,065$

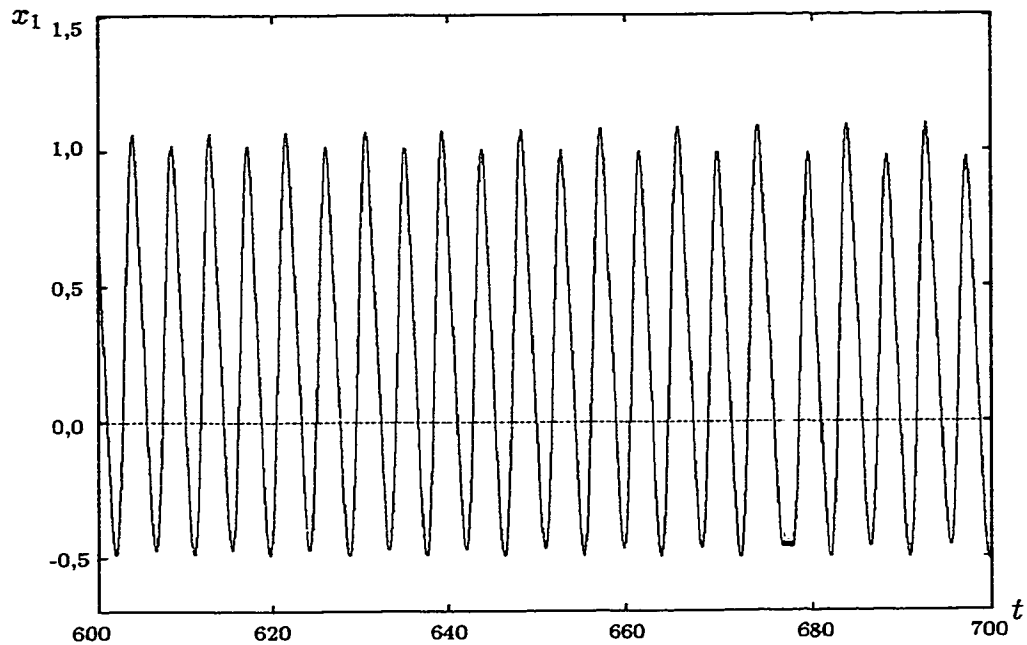


FIG. 22: Simulation numérique du système (18) avec  $\tau_s = 1,0675$

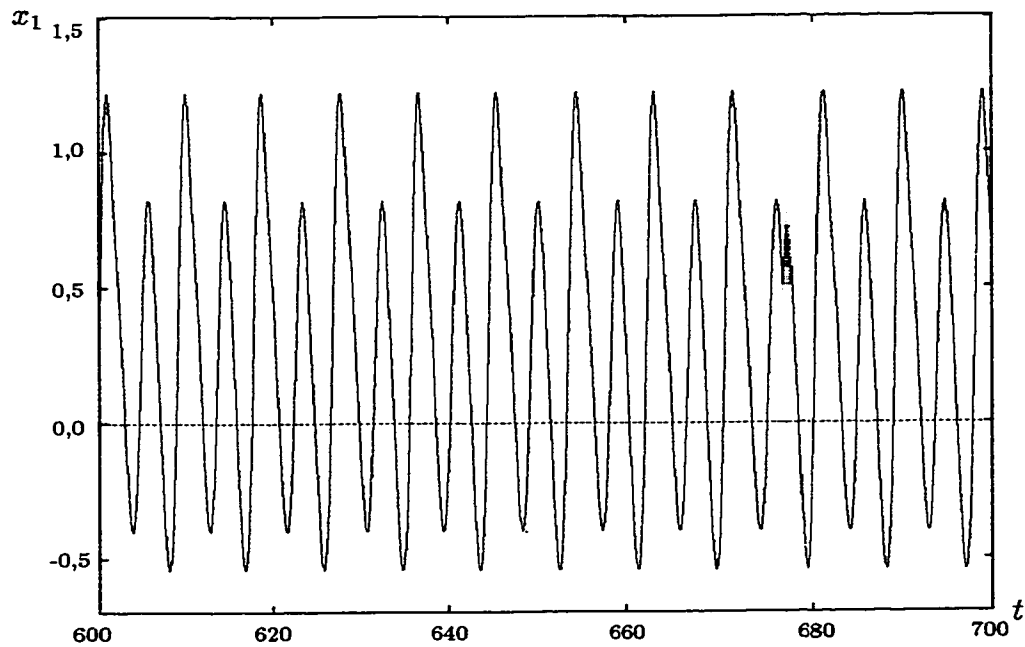


FIG. 23: Simulation numérique du système (18) avec  $\tau_s = 1,0725$

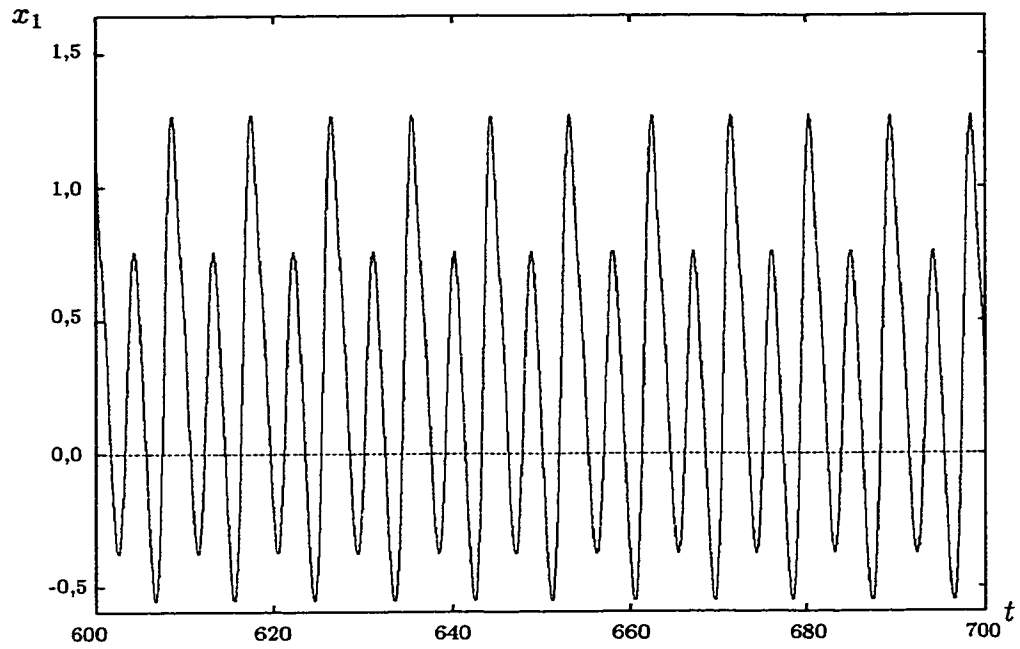


FIG. 24: Simulation numérique du système (18) avec  $\tau_s = 1,0975$

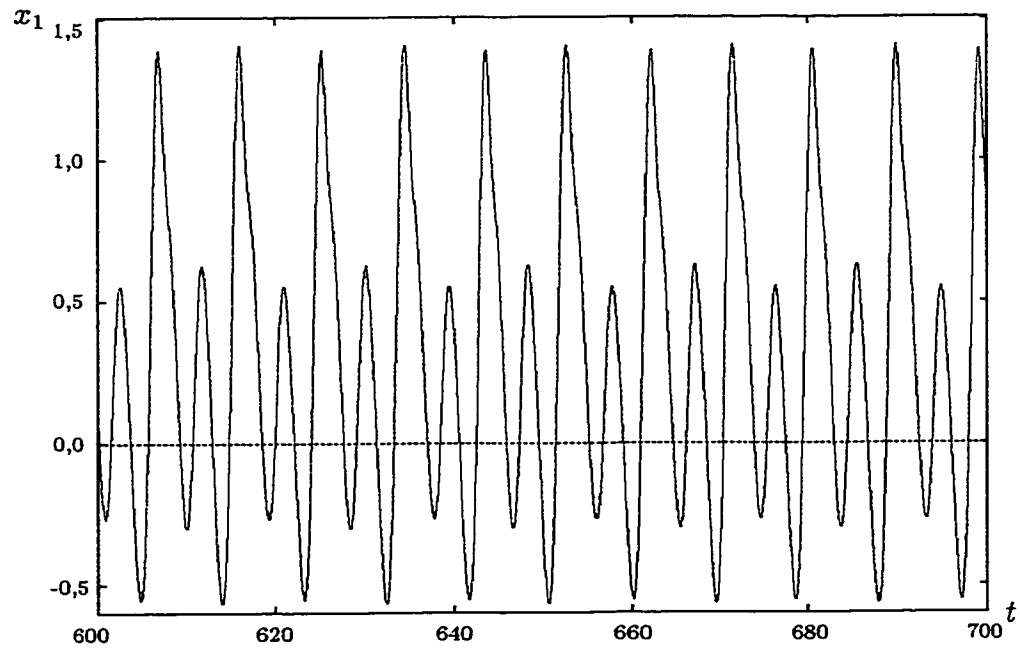


FIG. 25: Simulation numérique du système (18) avec  $\tau_s = 1,1$

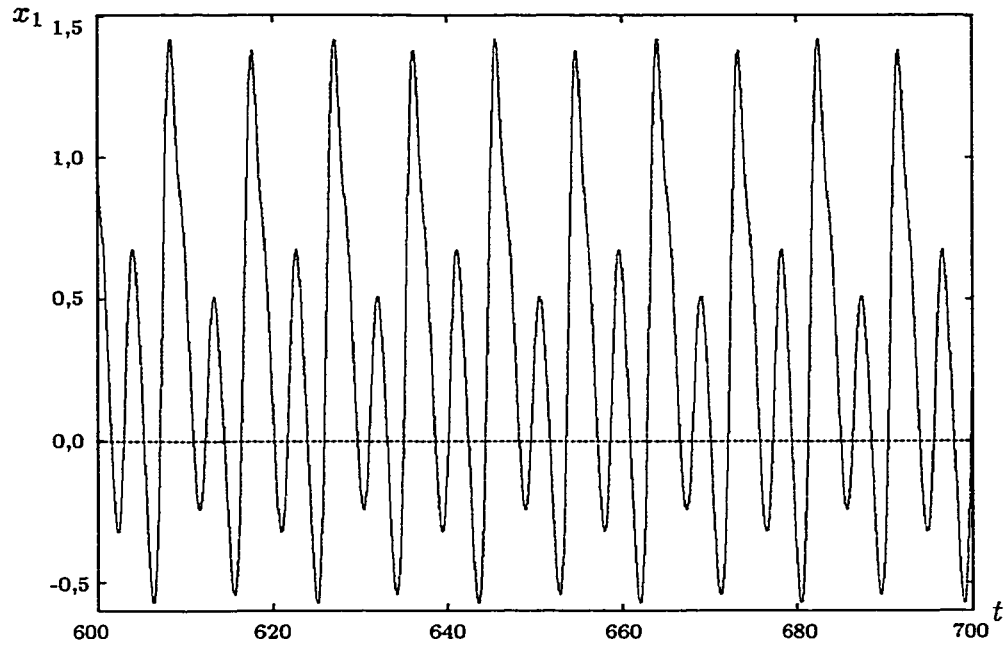


FIG. 26: Simulation numérique du système (18) avec  $\tau_s = 1,15$

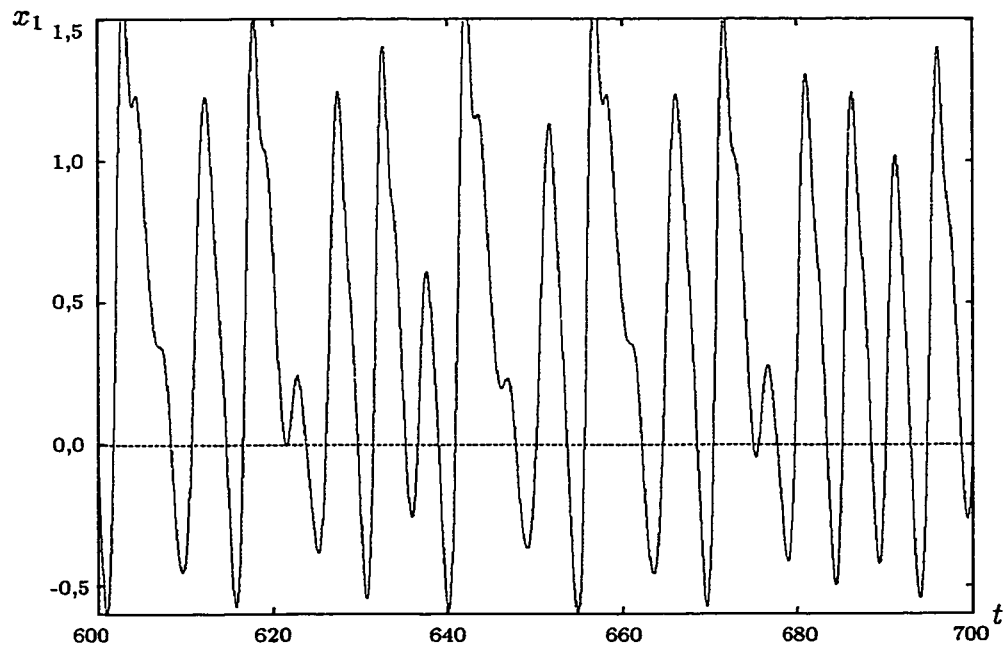


FIG. 27: Cycle limite pour le système (18) avec  $\tau_s = 1,0625$

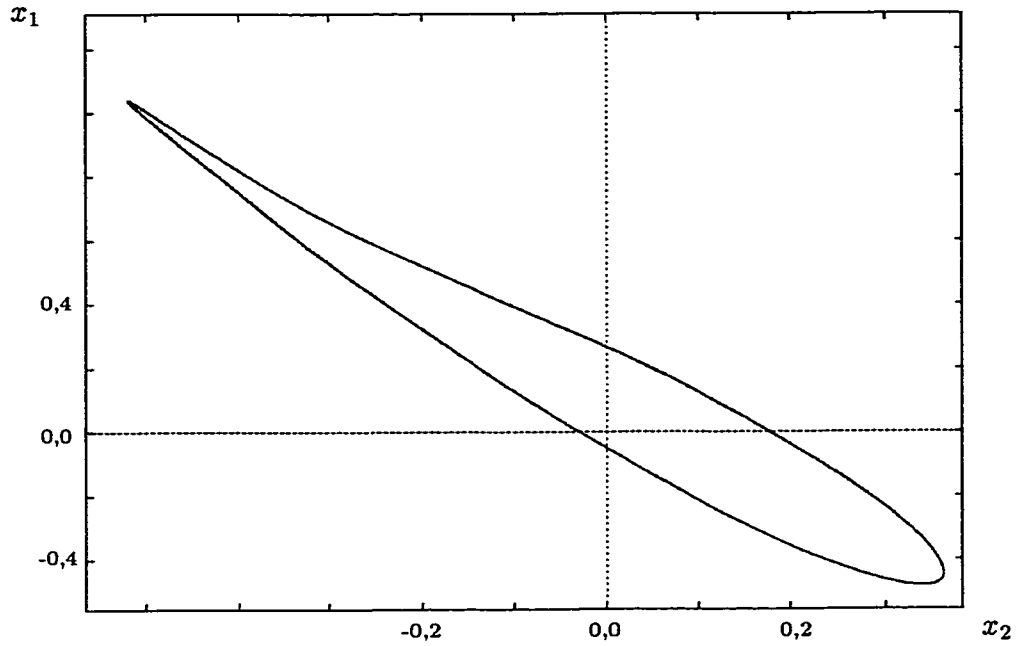


FIG. 28: Cycle limite pour le système (18) avec  $\tau_s = 1,0725$

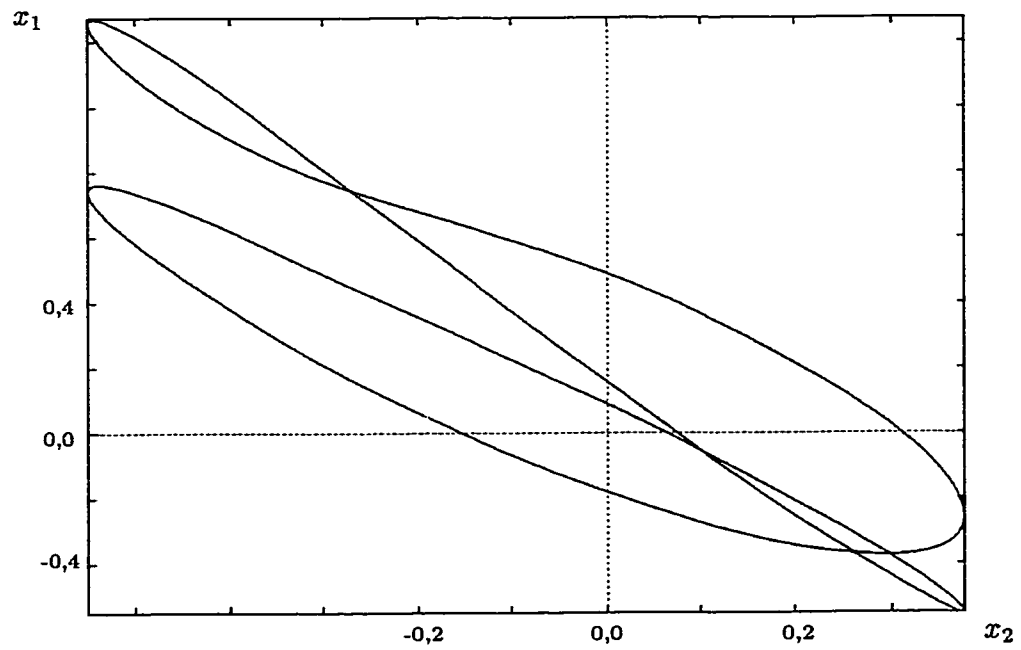


FIG. 29: Cycle limite pour le système (18) avec  $\tau_s = 1,1$

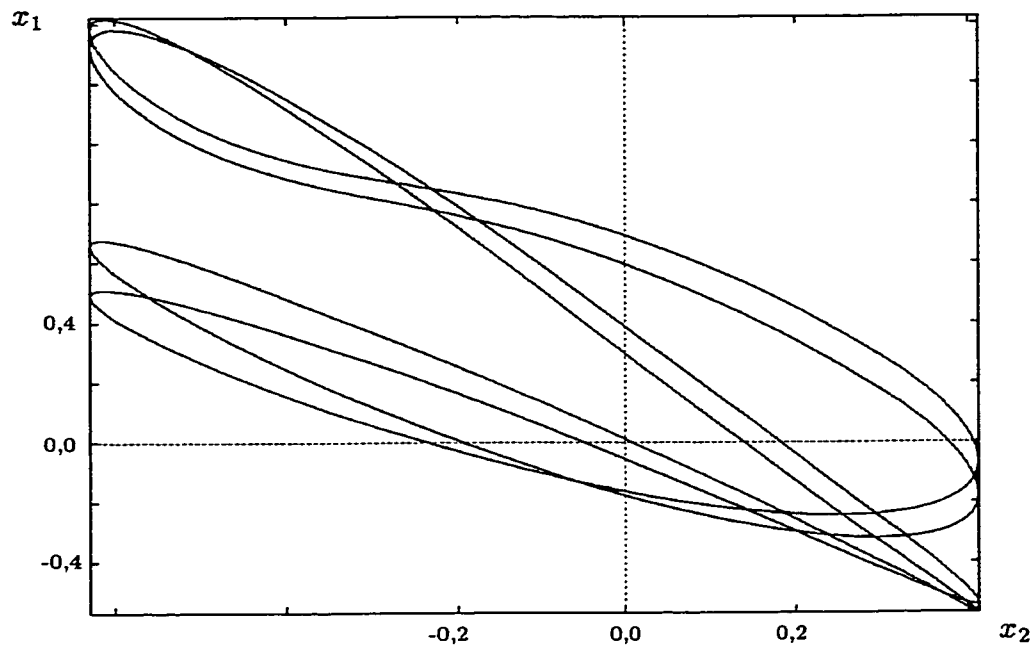


FIG. 30: Système (18) dans un état chaotique avec  $\tau_s = 1,15$



# Chapitre 4

## Variété du centre et forme normale

### 4.1 Motifs

Tout d'abord, notons que les calculs faits dans ce chapitre auraient été particulièrement utiles pour l'étude de la dynamique du système (18) près de la résonance  $1 : 2$  si l'origine avait été stable. Toutefois, comme mentionné à la section 3.2, ces calculs pourraient très bien être utilisés lors d'une étude de la dynamique du système (18) lorsque ce dernier est dans un état transitoire et que dans ce cas, pour un certain intervalle de temps qui peut être considérable, les solutions du système (18) se comportent tout à fait comme si l'origine était stable. Plus spécifiquement, ces calculs pourraient être utilisés afin de mener une étude approfondie permettant de mieux comprendre le phénomène plus rare qu'est la cascade de dédoublements de période. En fait, une telle étude s'impose puisqu'une cascade de dédoublements de période telle qu'observée à la section 3.2 est un phénomène pour lequel très peu de résultats sont connus dans le contexte des équations aux délais.

C'est donc afin de faciliter les diverses études qui seront probablement faites ultérieurement et qui dépassent le cadre de cette thèse, que nous allons, au cours de ce chapitre, effectuer les calculs nécessaires pour obtenir une forme normale pour une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance  $1 : 2$  pour le système (18).

## 4.2 Résumé de la théorie

Soit le système de  $n$  équations différentielles avec délais

$$\dot{x}(t) = Lx_t + g(x_t), \quad (69)$$

où  $x_t = x(t + \theta)$  avec  $-h \leq \theta \leq 0$ ,  $L : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un opérateur linéaire continu,  $X = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ , et  $g \in C^r(X, \mathbb{R}^n)$ ,  $r \geq 1$  est la partie non-linéaire du système (69).

Supposons que  $x = 0$  soit un point d'équilibre de (69). La linéarisation de (69), faite pour ce point d'équilibre afin d'en étudier sa stabilité, est

$$\dot{x}(t) = Lx_t. \quad (70)$$

Tout d'abord, puisque  $[-h, 0]$  est un espace de Hausdorff localement compact et que  $L$  est un opérateur linéaire borné, alors le théorème de représentation de Riesz nous permet de représenter l'opérateur  $L$  par l'intégrale

$$L\phi = \int_{-h}^0 [d\eta(\theta)]\phi(\theta), \quad \forall \phi \in X, \quad (71)$$

où  $\eta : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de variation bornée. Soit maintenant  $\phi \in X$  une condition initiale pour le système (70). Pour cette condition initiale,  $x(\cdot; \phi)$  est la solution unique du système (70) passant par  $\phi$ . En fait, l'état du système (70) au temps  $t$  correspond à la restriction de la fonction  $x(\cdot; \phi)$  à l'intervalle  $[t-h, t]$ , de sorte qu'au temps  $t$ , nous avons  $\theta \mapsto x(t + \theta; \phi) = x_t(\theta; \phi)$  pour  $-h \leq \theta \leq 0$ . En ramenant ensuite  $x(\cdot; \phi)$  à l'intervalle  $[-h, 0]$  nous aurons alors que  $x(\cdot; \phi) \in X$ . Nous pouvons alors écrire le système (70) de la manière suivante

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^0 [d\eta(\theta)]x_t(\theta). \quad (72)$$

Soit maintenant  $X^* = C([0, h], \mathbb{R}^{n*})$  où  $\mathbb{R}^{n*}$  est l'espace vectoriel de dimension  $n$  composé de vecteurs lignes. On définit alors le système d'équations différentielles adjoint au système (72) par (voir [10])

$$\dot{y}(\tau) = - \int_0^h y(\tau - \theta) d\eta(\theta), \quad (73)$$

tel que si  $y(\cdot; \psi)$  est une solution de (73) sur l'intervalle  $]-\infty, \sigma+h]$ , alors  $y^\tau(\cdot; \psi) \in X^*$  pour chaque  $\tau \in ]-\infty, \sigma]$  est tel que

$$y^\tau(\xi; \psi) = y(\tau + \xi; \psi), \quad 0 \leq \xi \leq h.$$

Par ailleurs, on définit la forme bilinéaire entre les éléments  $\psi$ , de  $X^*$  et  $\phi$ , de  $X$ , de la manière suivante :

$$\langle \psi | \phi \rangle = (\psi(0) | \phi(0)) - \int_{-h}^0 \int_0^\theta \psi(\xi - \theta) [d\eta(\theta)] \phi(\xi) d\xi, \quad (74)$$

où  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est le produit scalaire euclidien.

Supposons maintenant que  $x = 0$  soit pour le système (69) un point d'équilibre non-hyperbolique et que l'opérateur linéaire  $L$  (70) possède  $m$  valeurs propres avec parties réelles nulles et un nombre fini de valeurs propres avec parties réelles positives. L'espace  $X$  peut alors être décomposé de la manière suivante :

$$X = U \oplus N \oplus S, \quad (75)$$

où  $U$  et  $N$  sont des espaces de dimension finie et tels que  $U$  correspond à l'espace propre généralisé associé aux valeurs propres avec parties réelles strictement positives de l'opérateur linéaire  $L$  (70), et  $N$  à l'espace propre généralisé associé aux valeurs propres avec parties réelles nulles. Selon cette décomposition de  $X$ , si  $\phi \in X$ , alors on aura

$$\phi = \phi^U + \phi^N + \phi^S,$$

où  $\phi^U \in U$ ,  $\phi^N \in N$  et  $\phi^S \in S$  sont tels que  $\phi^U = \pi_U \phi$ ,  $\phi^N = \pi_N \phi$  et  $\phi^S = \pi_S \phi$ , pour  $\pi_U : X \rightarrow U$ ,  $\pi_N : X \rightarrow N$  et  $\pi_S : X \rightarrow S$ , les projections définies par la décomposition de  $X$ . Si maintenant  $\Phi$  est une base pour l'espace  $N$  et  $\Psi$  est une base pour l'espace adjoint  $N^\top$ , alors  $\langle \Psi | \Phi \rangle = \mathbf{I}$  et  $\pi_N \phi = \Phi \langle \Psi | \phi \rangle$ , où  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est la forme bilinéaire donnée plus tôt (74). Il est à noter que l'espace adjoint  $N^\top$  dépend du problème adjoint (73) car on peut décomposer  $X^*$  tout comme l'espace  $X$  de sorte que  $X^* = U^* \oplus N^* \oplus S^*$  et tel que l'on aura  $N^* = N^\top$ .

Considérons en particulier le cas où le point d'équilibre  $x = 0$  subit une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. Ce point d'équilibre est alors non-hyperbolique et

la linéarisation (70) possède comme valeurs propres  $\lambda_1 = i\omega$  et  $\lambda_2 = 2i\omega$ . Une base pour l'espace  $N$  dans la décomposition  $X = U \oplus N \oplus S$ , engendré par les fonctions propres et les fonctions propres généralisées est

$$\Phi = \{\operatorname{Re}(\phi_1), \operatorname{Im}(\phi_1), \operatorname{Re}(\phi_2), \operatorname{Im}(\phi_2)\}, \quad (76)$$

où  $\phi_i \in X$  est une fonction propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  pour le système (72). En considérant que les éléments de  $\Psi$ , la base pour l'espace adjoint  $N^\top$ , sont des combinaisons des éléments transposés de  $\Phi$ , c'est-à-dire que si  $\Psi = K\Phi^\top$  où  $K$  est une matrice de constantes de dimensions  $4 \times 4$ , il est alors possible de trouver une façon de calculer les éléments de  $\Psi$  à partir de ceux de  $\Phi$ . En fait, si  $\Psi = K\Phi^\top$ , alors on a que

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Phi \rangle &= \langle K\Phi^\top | \Phi \rangle \\ &= K \langle \Phi^\top | \Phi \rangle \end{aligned}$$

et puisque  $\langle \Psi | \Phi \rangle = \mathbf{I}$ , on a alors  $K = \langle \Phi^\top | \Phi \rangle^{-1}$ , d'où  $\Psi = \langle \Phi^\top | \Phi \rangle^{-1} \Phi^\top$ .

Considérons maintenant la définition 2.2 et le théorème 2.1 de HALE et LUNEL [11] qui mettent en relation la décomposition de l'espace  $X$  (75) et la variété du centre locale  $W_{loc}^c(0)$ , pour le point d'équilibre  $x = 0$  du système (69).

**Définition 2.2.** *Pour un voisinage  $V$  de  $0 \in X$ , une variété du centre locale,  $W_{loc}^c(0) \stackrel{def}{=} W^c(0, V)$ , pour le point d'équilibre  $x = 0$  du système (69), est une sous-variété de classe  $C^1$  tangente à  $N$  en 0 et localement invariante pour le flot défini par le système (69). En d'autres mots,*

$$W_{loc}^c(0) \cap V = \{\varphi \in X \mid \varphi = \phi + h(\phi), \phi \in N \cap V\}$$

où  $h : N \rightarrow U \oplus S$  est une application de classe  $C^1$  telle que  $h(0) = 0$  et  $D_\phi h(0) = 0$ . Finalement, toute orbite sur  $W_{loc}^c(0)$  demeure dans cet ensemble tant qu'elle demeure dans le voisinage  $V$ .

**Théorème 2.1.** *Si  $g$  dans (69) est une fonction de classe  $C^r$ , alors il existe un voisinage  $V$  de  $0 \in X$  tel que les ensembles  $W_{loc}^{ss}(0)$ ,  $W_{loc}^{su}(0)$ ,  $W_{loc}^c(0)$ ,  $W_{loc}^{cu}(0)$  et  $W_{loc}^{cs}$  existent et sont des sous-variétés de classe  $C^r$ . Les variétés  $W_{loc}^{ss}(0)$  et  $W_{loc}^{su}(0)$  sont*

uniques alors que les variétés  $W_{loc}^c(0)$ ,  $W_{loc}^{cu}(0)$  et  $W_{loc}^{cs}(0)$  ne le sont pas. Finalement, tout ensemble invariant du système (69) qui demeure dans le voisinage  $V$  doit être inclus dans  $W_{loc}^c(0)$ .

Les variétés  $W_{loc}^{ss}(0)$ ,  $W_{loc}^{su}(0)$ ,  $W_{loc}^{cs}$  et  $W_{loc}^{cu}$  du théorème correspondent respectivement aux variétés locales dites très stable, très instable, centre stable et centre instable. Les deux premières variétés,  $W_{loc}^{ss}(0)$  et  $W_{loc}^{su}(0)$  correspondent aux variétés dont les éléments sont les points  $\phi \in X$  pour lesquels la solution  $x_t(\cdot; \phi) \in V$ , pour  $t \geq 0$ , (respectivement  $t \leq 0$ ) s'approche de zéro avec une vitesse exponentielle alors que  $t \rightarrow \infty$ , (respectivement  $t \rightarrow -\infty$ ). Les deux autres variétés,  $W_{loc}^{cs}$  et  $W_{loc}^{cu}$ , correspondent aux variétés obtenues en remplaçant dans la définition 2.2, pour la première variété,  $N$  par  $N \oplus S$  et  $U \oplus S$  par  $U$ , puis pour la deuxième variété,  $N$  par  $N \oplus U$  et  $U \oplus S$  par  $S$ . Il est à noter que pour  $W_{loc}^{cs}$  et  $W_{loc}^{cu}$ , les orbites qui demeurent dans le voisinage  $V$  pour  $t \geq 0$  sont contenues dans  $W_{loc}^{cs}$ , alors que celles qui demeurent dans le voisinage  $V$  pour  $t \leq 0$  sont celles qui demeurent dans  $W_{loc}^{cu}$ .

De toutes ces variétés locales, nous allons maintenant ne considérer que la variété du centre  $W_{loc}^c(0)$ . Si  $X = U \oplus N \oplus S$ , il est alors possible décrire,  $\forall \phi \in X$

$$\phi = \phi^N + \phi^{U \oplus S}, \quad \phi^N \in N, \phi^{U \oplus S} \in U \oplus S.$$

De plus, si  $\Phi$  est une base pour l'espace  $N$  et  $\Psi$  est la base pour les solutions du problème adjoint (73) tel que  $\langle \Psi | \Phi \rangle = \mathbf{I}$ , alors  $T(t)\Phi = \Phi e^{Bt}$ , où  $T(t) : X \rightarrow X$  est un opérateur défini par la relation  $x_t(\cdot; \phi) = T(t)\phi$ , et  $B$  est une matrice de dimension  $m \times m$  dont les valeurs propres ont leurs parties réelles nulles. Si on pose maintenant  $x_t^N = \Phi z(t) \in N$ , alors la solution  $x_t = \Phi z(t) + x_t^{U \oplus S}$  avec comme condition initiale  $x_0 = \phi \in X$ , est une solution du système

$$\dot{z} = Bz + \Psi(0)g(\Phi z + x_t^{U \oplus S}),$$

où  $x_t^{U \oplus S} \in U \oplus S$ .

Après quelques étapes que font HALE et LUNEL [11] et qui permettent de modifier la fonction  $g$  de sorte qu'il soit possible de considérer des éléments arbitraire de l'espace  $N$  plutôt que seulement des éléments dans un voisinage  $V$  restreint de 0, on

obtient que la variété du centre locale est alors donnée par

$$W_{loc}^c(0) = \{\phi \in X \mid \phi = \Phi z + h(z), |z| \leq \eta\},$$

où  $\eta$  est suffisamment petit et  $h$  est une fonction de classe  $C^r$ . Le flot sur cette variété du centre locale est donné par les solutions de

$$\dot{z} = By + bg(\Phi z + h(\Phi z)), \quad (77)$$

pour la condition initiale  $z_0 = \langle \Psi | \phi \rangle$ , et où  $b = \Psi(0)$ . En fait, les solutions du système (69) sont données par

$$x_t(\cdot; \phi) = \Phi z(t; y_0) + h(\Phi z(t; z_0)),$$

avec  $\phi \in W_{loc}^c(0)$ .

Ainsi, le comportement du système (69) est donné par le comportement du système d'équations différentielles ordinaires donné en (77).

### 4.3 Sous-espace du centre $N$

Comme donné en (76), une base pour le sous-espace du centre  $N$  pour la linéarisation du système (18) est composée des parties réelles et imaginaires des vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda = i\omega$  et  $\lambda = 2i\omega$ . Exprimée en fonction de  $\theta$ , la partie linéaire (20) du système (18) a pour expression

$$\dot{x}(\theta) = \begin{pmatrix} -\kappa x_1(\theta) + \beta x_1(\theta - \tau_s) + \gamma^2 x_2(\theta - 1) \\ -\kappa x_2(\theta) + \beta x_2(\theta - \tau_s) + x_1(\theta - 2\tau + 1) \end{pmatrix}, \quad (78)$$

avec les solutions de la forme

$$x(\theta) = e^{\lambda\theta} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Nous devons maintenant trouver les constantes  $c_1$  et  $c_2$  pour les valeurs propres  $\lambda = i\omega$  et  $\lambda = 2i\omega$  et pour les valeurs des paramètres  $\omega, \kappa, \beta, \gamma$  et  $\tau_s, \tau$  tels que donnés en (57)

et (60). Si  $\lambda = i\omega$ , alors en remplaçant  $\lambda$  dans (79) puis en substituant cette fonction dans (78) nous obtenons

$$\begin{aligned} i\omega e^{i\omega\theta} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\kappa c_1 e^{i\omega\theta} + \beta c_1 e^{i\omega(\theta-\tau_s)} + \gamma^2 c_2 e^{i\omega(\theta-1)} \\ -\kappa c_2 e^{i\omega\theta} + \beta c_2 e^{i\omega(\theta-\tau_s)} + c_1 e^{i\omega(\theta-2\tau+1)} \end{pmatrix} \\ &= e^{i\omega\theta} \begin{pmatrix} -\kappa c_1 + \beta c_1 e^{i\omega(-\tau_s)} + \gamma^2 c_2 e^{i\omega(-1)} \\ -\kappa c_2 + \beta c_2 e^{i\omega(-\tau_s)} + c_1 e^{i\omega(-2\tau+1)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Après simplification du terme  $e^{i\omega\theta}$ , nous obtenons

$$i\omega \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa c_1 + \beta c_1 e^{-i\omega\tau_s} + \gamma^2 c_2 e^{-i\omega} \\ -\kappa c_2 + \beta c_2 e^{-i\omega\tau_s} + c_1 e^{i\omega(-2\tau+1)} \end{pmatrix},$$

qui est équivalent au système de deux équations à deux variables,  $c_1$  et  $c_2$ , suivant :

$$\begin{cases} (i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s})c_1 - \gamma^2 e^{-i\omega} c_2 &= 0 \\ (i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s})c_2 - e^{i\omega(-2\tau+1)} c_1 &= 0. \end{cases}$$

Ces deux équations sont satisfaites lorsque

$$c_1 = A_1 \gamma^2 e^{-i\omega} \text{ et } c_2 = A_1 (i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s}), \quad A_1 \in \mathbb{R}$$

car

$$\begin{aligned} &(i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s})c_1 - \gamma^2 e^{-i\omega} c_2 \\ &= (i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s})(A_1 \gamma^2 e^{-i\omega}) - \gamma^2 e^{-i\omega}(A_1 (i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &(i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s})c_2 - e^{i\omega(-2\tau+1)} c_1 \\ &= (i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s})(A_1 (i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s})) - e^{i\omega(-2\tau+1)}(A_1 \gamma^2 e^{-i\omega}) \\ &= A_1 (i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s})^2 - A_1 \gamma^2 e^{i\omega(-2\tau+1)-i\omega} \\ &= A_1 ((i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s})^2 - \gamma^2 e^{-2i\omega\tau+i\omega-i\omega}) \\ &= A_1 ((i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s})^2 - \gamma^2 e^{-2i\omega\tau}) \\ &= 0 \text{ selon (27)}. \end{aligned}$$

Les fonctions propres pour  $\lambda = i\omega$  sont donc de la forme

$$x_1(\theta) = A_1 e^{i\omega\theta} \begin{pmatrix} \gamma^2 e^{-i\omega} \\ i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s} \end{pmatrix}.$$

De la même manière que précédemment, nous obtenons que les solutions pour  $\lambda = 2i\omega$  sont de la forme

$$x_2(\theta) = A_2 e^{2i\omega\theta} \begin{pmatrix} \gamma^2 e^{-2i\omega} \\ 2i\omega + \kappa - \beta e^{-2i\omega\tau_s} \end{pmatrix},$$

où  $A_2$  est une constante arbitraire.

Afin d'avoir la première composante de chacun des vecteurs de la base  $\Phi$  pour le sous-espace du centre  $N$  en termes de  $\cos(\omega\theta)$ ,  $\sin(\omega\theta)$ ,  $\cos(2\omega\theta)$  et  $\sin(2\omega\theta)$  respectivement, posons

$$A_1 = \frac{1}{\gamma^2 e^{-i\omega}}$$

et

$$A_2 = \frac{1}{\gamma^2 e^{-2i\omega}}.$$

Les fonctions propres que nous considérons pour calculer les vecteurs de la base  $\Phi$  du sous-espace du centre  $N$  sont donc

$$x_1(\theta) = \frac{1}{\gamma^2 e^{-i\omega}} e^{i\omega\theta} \begin{pmatrix} \gamma^2 e^{-i\omega} \\ i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s} \end{pmatrix} = e^{i\omega\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s}}{\gamma^2 e^{-i\omega}} \end{pmatrix}$$

et

$$x_2(\theta) = \frac{1}{\gamma^2 e^{-2i\omega}} e^{2i\omega\theta} \begin{pmatrix} \gamma^2 e^{-2i\omega} \\ 2i\omega + \kappa - \beta e^{-2i\omega\tau_s} \end{pmatrix} = e^{2i\omega\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2i\omega + \kappa - \beta e^{-2i\omega\tau_s}}{\gamma^2 e^{-2i\omega}} \end{pmatrix},$$

Ainsi, le sous-espace du centre  $N$  est engendré par les vecteurs

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \operatorname{Re} \left( e^{i\omega\theta} \left( \frac{1}{i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s}} \right) \right) \\ \phi_2 &= \operatorname{Im} \left( e^{i\omega\theta} \left( \frac{1}{i\omega + \kappa - \beta e^{-i\omega\tau_s}} \right) \right) \\ \phi_3 &= \operatorname{Re} \left( e^{2i\omega\theta} \left( \frac{1}{2i\omega + \kappa - \beta e^{-2i\omega\tau_s}} \right) \right) \\ \phi_4 &= \operatorname{Im} \left( e^{2i\omega\theta} \left( \frac{1}{2i\omega + \kappa - \beta e^{-2i\omega\tau_s}} \right) \right),\end{aligned}$$

où  $\omega, \kappa, \beta, \gamma$  et  $\tau, \tau_s$  sont donnés par (57) et (60). Il suffit maintenant d'utiliser les identités  $e^{\pm i\mu} = \cos(\mu) \pm i \sin(\mu)$  pour écrire les solutions en coordonnées complexes afin de pouvoir extraire leurs parties réelles et imaginaires. Nous obtenons alors

$$x_1(\theta) = \left( \frac{\cos(\omega\theta) + i \sin(\omega\theta)}{(\cos(\omega\theta) + i \sin(\omega\theta))(i\omega + \kappa - \beta \cos(\omega\tau_s) + i\beta \sin(\omega\tau_s))} \right)$$

et

$$x_2(\theta) = \left( \frac{\cos(2\omega\theta) + i \sin(2\omega\theta)}{(\cos(2\omega\theta) + i \sin(2\omega\theta))(2i\omega + \kappa - \beta \cos(2\omega\tau_s) + i\beta \sin(2\omega\tau_s))} \right).$$

Finalement, nous obtenons, après avoir développé chacun des termes des deuxièmes composantes de chacun des vecteurs précédant

$$\begin{aligned}x_{12}(\theta) &= \frac{1}{\gamma^2} \left( i\omega \cos(\omega) \cos(\omega\theta) - \omega \sin(\omega) \cos(\omega\theta) + \kappa \cos(\omega) \cos(\omega\theta) \right. \\ &\quad + i\kappa \sin(\omega) \cos(\omega\theta) - \beta \cos(\omega) \cos(\omega\theta) \cos(\omega\tau_s) - i\beta \sin(\omega) \cos(\omega\theta) \cos(\omega\tau_s) \\ &\quad + i\beta \cos(\omega) \cos(\omega\theta) \sin(\omega\tau_s) - \beta \sin(\omega) \cos(\omega\theta) \sin(\omega\tau_s) + \omega \cos(\omega) \sin(\omega\theta) \\ &\quad + i\omega \sin(\omega) \sin(\omega\theta) + i\kappa \cos(\omega) \sin(\omega\theta) - i\beta \cos(\omega) \cos(\omega\tau_s) \sin(\omega\theta) \\ &\quad - \kappa \sin(\omega) \sin(\omega\theta) + \beta \sin(\omega) \cos(\omega\tau_s) \sin(\omega\theta) - \beta \cos(\omega) \sin(\omega\tau_s) \sin(\omega\theta) \\ &\quad \left. - i\beta \sin(\omega) \sin(\omega\tau_s) \sin(\omega\theta) \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 x_{22}(\theta) = & \frac{1}{\gamma^2} \left( 2i\omega \cos(2\omega) \cos(2\omega\theta) - 2\omega \sin(2\omega) \cos(2\omega\theta) + \kappa \cos(2\omega) \cos(2\omega\theta) \right. \\
 & + i\kappa \sin(2\omega) \cos(2\omega\theta) + i\kappa \cos(2\omega) \sin(2\omega\theta) - i\beta \sin(2\omega) \cos(2\omega\theta) \cos(2\omega\tau_s) \\
 & + i\beta \cos(2\omega) \cos(2\omega\theta) \sin(2\omega\tau_s) - \beta \sin(2\omega) \cos(2\omega\theta) \sin(2\omega\tau_s) \\
 & + 2i\omega \sin(2\omega) \sin(2\omega\theta) - \kappa \sin(2\omega) \sin(2\omega\theta) - \beta \cos(2\omega) \cos(2\omega\theta) \cos(2\omega\tau_s) \\
 & - i\beta \cos(2\omega) \cos(2\omega\tau_s) \sin(2\omega\theta) + \beta \sin(2\omega) \cos(2\omega\tau_s) \sin(2\omega\theta) \\
 & - \beta \cos(2\omega) \sin(2\omega\tau_s) \sin(2\omega\theta) - i\beta \sin(2\omega) \sin(2\omega\tau_s) \sin(2\omega\theta) \\
 & \left. + 2\omega \cos(2\omega) \sin(2\omega\theta) \right).
 \end{aligned}$$

Après avoir regroupé ensemble les termes réels et les termes imaginaires, nous pouvons exprimer les quatre vecteurs de la base  $\Phi$  du sous-espace du centre  $N$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \begin{pmatrix} \cos(\omega\theta) \\ a_1 \sin(\omega\theta) + b_1 \cos(\omega\theta) \end{pmatrix} \\
 \phi_2 &= \begin{pmatrix} \sin(\omega\theta) \\ b_1 \sin(\omega\theta) - a_1 \cos(\omega\theta) \end{pmatrix} \\
 \phi_3 &= \begin{pmatrix} \cos(2\omega\theta) \\ a_2 \sin(2\omega\theta) + b_2 \cos(2\omega\theta) \end{pmatrix} \\
 \phi_4 &= \begin{pmatrix} \sin(2\omega\theta) \\ b_2 \sin(2\omega\theta) - a_2 \cos(2\omega\theta) \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{80}$$

où

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{-\omega \cos(\omega) - \beta \cos(\omega) \sin(\omega\tau_s) - \kappa \sin(\omega) + \beta \sin(\omega) \cos(\omega\tau_s)}{\gamma^2} \\
 b_1 &= \frac{\kappa \cos(\omega) - \beta \cos(\omega) \cos(\omega\tau_s) - \omega \sin(\omega) - \beta \sin(\omega) \sin(\omega\tau_s)}{\gamma^2} \\
 a_2 &= \frac{-2\omega \cos(2\omega) - \beta \cos(2\omega) \sin(2\omega\tau_s) - \kappa \sin(2\omega) + \beta \sin(2\omega) \cos(2\omega\tau_s)}{\gamma^2} \\
 b_2 &= \frac{\kappa \cos(2\omega) - \beta \cos(2\omega) \cos(2\omega\tau_s) - 2\omega \sin(2\omega) - \beta \sin(2\omega) \sin(2\omega\tau_s)}{\gamma^2}.
 \end{aligned} \tag{81}$$

## 4.4 Forme bilinéaire

Nous devons maintenant définir une forme bilinéaire associée au problème linéaire  $\dot{x}(t) = Lx_t$  pour le système (18), où  $L$  tel que donné en (20) est

$$Lx_t = \begin{pmatrix} -\kappa x_{1_t}(0) + \beta x_{1_t}(-\tau_s) - \gamma^2 x_{2_t}(-1) \\ -\kappa x_{2_t}(0) + \beta x_{2_t}(-\tau_s) + x_{1_t}(-2\tau + 1) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, dans le cas de délais discrets, la fonction  $\eta(\theta)$  qui permet de représenter  $L$  par une intégrale comme en (71), est la « fonction » delta de Dirac [8],

$$x(t - \tau) = x_t(-\tau) = \int_{-\tau}^0 \delta(\theta + \tau)x(t + \theta)d\theta. \quad (82)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} x_{i_t}(-\tau_s) &= \int_{-\tau_s}^0 \delta(\theta + \tau_s)x_i(t + \theta)d\theta, \quad i = 1, 2 \\ x_{2_t}(-1) &= \int_{-1}^0 \delta(\theta + 1)x_2(t + \theta)d\theta \\ x_{1_t}(-2\tau + 1) &= \int_{-2\tau+1}^0 \delta(\theta + 2\tau - 1)x_1(t + \theta)d\theta. \end{aligned} \quad (83)$$

Or la « fonction » delta de Dirac est telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0),$$

et en fait, si  $k$  est une constante, nous avons alors que

$$\int_{-a}^b f(t + k)\delta(t)dt = f(k), \quad (84)$$

en autant que  $0 \in [-a, b]$ . Plus particulièrement, nous avons que

$$\int_{-a}^0 f(t + k)\delta(t)dt = f(k),$$

est indépendante de la valeur de  $a$ , tant que  $a > 0$ . Nous pouvons alors choisir une valeur commune pour la borne inférieure des intégrales données en (83). En fait, en

prenant  $T > \max\{1, \tau_s, 2\tau - 1\}$ , nous aurons

$$\begin{aligned} \int_{-\tau_s}^0 \delta(\theta + \tau_s) x_i(t + \theta) d\theta &= \int_{-T}^0 \delta(\theta + \tau_s) x_i(t + \theta) d\theta, \quad \text{pour } i = 1, 2 \\ \int_{-1}^0 \delta(\theta + 1) x_2(t + \theta) d\theta &= \int_{-T}^0 \delta(\theta + 1) x_2(t + \theta) d\theta \\ \int_{-2\tau+1}^0 \delta(\theta + 2\tau - 1) x_1(t + \theta) d\theta &= \int_{-T}^0 \delta(\theta + 2\tau - 1) x_1(t + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire notre opérateur linéaire  $L$  de la façon suivante

$$\begin{aligned} Lx_t &= \int_{-T}^0 \begin{pmatrix} -\kappa\delta(\theta)x_1(t + \theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s)x_1(t + \theta) - \gamma^2\delta(\theta + 1)x_2(t + \theta) \\ -\kappa\delta(\theta)x_2(t + \theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s)x_2(t + \theta) + \delta(\theta + 2\tau - 1)x_1(t + \theta) \end{pmatrix} d\theta \\ &= \int_{-T}^0 \begin{pmatrix} -\kappa\delta(\theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s) & -\gamma^2\delta(\theta + 1) \\ \delta(\theta + 2\tau - 1) & -\kappa\delta(\theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t + \theta) \\ x_2(t + \theta) \end{pmatrix} d\theta. \end{aligned}$$

Donc  $d\eta(\theta)$  pour notre opérateur linéaire est

$$d\eta(\theta) = \begin{pmatrix} -\kappa\delta(\theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s) & -\gamma^2\delta(\theta + 1) \\ \delta(\theta + 2\tau - 1) & -\kappa\delta(\theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s) \end{pmatrix} d\theta.$$

Ainsi, d'après (74), la forme bilinéaire est

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= (\psi(0) | \phi(0)) \\ &\quad - \int_{-T}^0 \int_0^\theta \psi(\xi - \theta) \begin{pmatrix} -\kappa\delta(\theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s) & -\gamma^2\delta(\theta + 1) \\ \delta(\theta + 2\tau - 1) & -\kappa\delta(\theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s) \end{pmatrix} \phi(\xi) d\xi d\theta. \end{aligned}$$

Il est possible de simplifier cette expression. Pour ce faire, nous commençons par changer l'ordre d'intégration de l'intégrale double. Ainsi nous avons maintenant

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= (\psi(0) | \phi(0)) \\ &\quad - \int_{-T}^0 \int_\xi^{-T} \psi(\xi - \theta) \begin{pmatrix} -\kappa\delta(\theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s) & -\gamma^2\delta(\theta + 1) \\ \delta(\theta + 2\tau - 1) & -\kappa\delta(\theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s) \end{pmatrix} \phi(\xi) d\theta d\xi, \end{aligned}$$

puis en changeant les bornes de la deuxième intégrale, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= (\psi(0) | \phi(0)) \\ &\quad + \int_{-T}^0 \int_{-T}^\xi \psi(\xi - \theta) \begin{pmatrix} -\kappa\delta(\theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s) & -\gamma^2\delta(\theta + 1) \\ \delta(\theta + 2\tau - 1) & -\kappa\delta(\theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s) \end{pmatrix} \phi(\xi) d\theta d\xi. \end{aligned}$$

(85)

Par ailleurs, puisque

$$\begin{pmatrix} -\kappa\delta(\theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s) & -\gamma^2\delta(\theta + 1) \\ \delta(\theta + 2\tau - 1) & -\kappa\delta(\theta) + \beta\delta(\theta + \tau_s) \end{pmatrix} = \\ -\kappa \begin{pmatrix} \delta(\theta) & 0 \\ 0 & \delta(\theta) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \delta(\theta + \tau_s) & 0 \\ 0 & \delta(\theta + \tau_s) \end{pmatrix} \\ -\gamma^2 \begin{pmatrix} 0 & \delta(\theta + 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta(\theta + 2\tau - 1) & 0 \end{pmatrix},$$

alors nous avons que (85) peut s'écrire de la manière suivante

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= (\psi(0) | \phi(0)) \\ &- \kappa \int_{-T}^0 \int_{-T}^{\xi} \psi(\xi - \theta) \begin{pmatrix} \delta(\theta) & 0 \\ 0 & \delta(\theta) \end{pmatrix} d\theta \phi(\xi) d\xi \\ &+ \beta \int_{-T}^0 \int_{-T}^{\xi} \psi(\xi - \theta) \begin{pmatrix} \delta(\theta + \tau_s) & 0 \\ 0 & \delta(\theta + \tau_s) \end{pmatrix} d\theta \phi(\xi) d\xi \\ &- \gamma^2 \int_{-T}^0 \int_{-T}^{\xi} \psi(\xi - \theta) \begin{pmatrix} 0 & \delta(\theta + 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\theta \phi(\xi) d\xi \\ &+ \int_{-T}^0 \int_{-T}^{\xi} \psi(\xi - \theta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta(\theta + 2\tau - 1) & 0 \end{pmatrix} d\theta \phi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Nous avons donc maintenant quatre différentes intégrales doubles à considérer. Pour chacune de ces intégrales, nous devons considérer en particulier l'intégrale suivante

$$\int_{-T}^{\xi} \psi(\xi - \theta) \delta(\theta + \mu) d\theta,$$

où  $\mu = 0, 1, \tau_s$  ou  $2\tau - 1$ . D'après (84), nous avons

$$\int_{-T}^{\xi} \psi(\xi - \theta) \delta(\theta + \mu) d\theta = \psi(\xi + \mu),$$

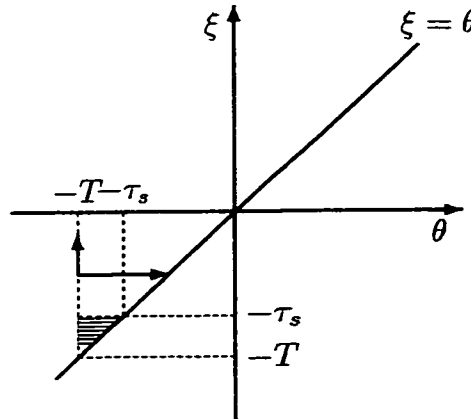
en autant que  $\mu \in [-T, \xi]$  de sorte qu'en variant,  $\theta$  puisse prendre  $\mu$  comme valeur. En fait, puisque  $\xi$  varie de  $-T$  à  $0$  où  $T > \max\{\tau_s, 1, 2\tau - 1\}$  alors nous aurons qu'en variant  $\theta = -\tau_s$ ,  $\theta = -1$ ,  $\theta = 2\tau + 1$  et aussi  $\theta = 0$ . Cependant, dans ce dernier cas

nous avons alors que

$$\int_{-T}^0 \int_{-T}^{\xi} \psi(\xi - \theta) \delta(\theta) d\theta \phi(\xi) d\xi = \int_0^0 \int_{-T}^{\xi} \psi(\xi - \theta) \delta(\theta) d\theta \phi(\xi) d\xi = 0,$$

car lorsque  $\xi < 0$ ,  $\theta \notin [-T, \xi]$ .

FIG. 31: Région où l'intégrale est nulle



Finalement, pour les intégrales correspondantes aux autres valeurs de  $\mu = \tau_s$ ,  $\mu = 1$  et  $\mu = 2\tau - 1$ , il est suffisant d'intégrer de  $\xi = -\tau_s$  à 0,  $\xi = -1$  à 0 ou  $\xi = -2\tau + 1$  à 0 selon le cas, car comme le montre le graphique à la figure 31 pour  $-\tau_s > -T$ , l'intégrale double est 0 pour la région hachurée, puisque dans cette région  $\theta$  ne prend jamais la valeur égale à  $-\tau_s$ . D'où la forme bilinéaire est maintenant

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= (\psi(0) | \phi(0)) \\ &+ \beta \int_{-\tau_s}^0 \psi(\xi + \tau_s) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \phi(\xi) d\xi \\ &- \gamma^2 \int_{-1}^0 \psi(\xi + 1) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \phi(\xi) d\xi \\ &+ \int_{-2\tau+1}^0 \psi(\xi + 2\tau - 1) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \phi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Si nous écrivons maintenant  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  et  $\phi = (\phi_1, \phi_2)^\top$ , nous pouvons alors simplifier l'expression précédente comme suit :

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= (\psi(0) | \phi(0)) \\ &+ \beta \int_{-\tau_s}^0 (\psi_1(\xi + \tau_s), \psi_2(\xi + \tau_s)) \begin{pmatrix} \phi_1(\xi) \\ \phi_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi \\ &- \gamma^2 \int_{-1}^0 (\psi_1(\xi + 1), \psi_2(\xi + 1)) \begin{pmatrix} \phi_2(\xi) \\ 0 \end{pmatrix} d\xi \\ &+ \int_{-2\tau+1}^0 (\psi_1(\xi + 2\tau - 1), \psi_2(\xi + 2\tau - 1)) \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_1(\xi) \end{pmatrix} d\xi, \end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement l'expression suivante pour la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= \sum_{i=1}^2 \psi_i(0) \phi_i(0) \\ &+ \beta \int_{-\tau_s}^0 (\psi_1(\xi + \tau_s) \phi_1(\xi) + \psi_2(\xi + \tau_s) \phi_2(\xi)) d\xi \\ &- \gamma^2 \int_{-1}^0 \psi_1(\xi + 1) \phi_2(\xi) d\xi \\ &+ \int_{-2\tau+1}^0 \psi_2(\xi + 2\tau - 1) \phi_1(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{86}$$

## 4.5 Base pour le problème adjoint

Nous écrivons ici  $\Phi$ , la base pour le sous-espace du centre  $N$ , sous la forme d'une matrice de dimension  $2 \times 4$ . Soit  $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4]$  où les fonctions  $\phi_i$  ont été calculées à la section 4.3 et sont donnée en (80) et (81). Les composantes des vecteurs de la base  $\Psi$  pour le problème adjoint tel que défini en (73), aussi écrite comme une matrice de dimension  $4 \times 2$ ,  $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4]^\top$ , peuvent se calculer en utilisant la formule

$$\psi_{i,j} = \sum_{k=1}^2 K_{ik} \phi_{k,j}, \tag{87}$$

où la matrice

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix},$$

est telle que les  $K_{ij}, i, j = 1, 2, 3, 4$  sont des constantes données par

$$K = \Pi^{-1},$$

où

$$\Pi = \begin{bmatrix} \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle & \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle & \langle \phi_1 | \phi_3 \rangle & \langle \phi_1 | \phi_4 \rangle \\ \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle & \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle & \langle \phi_2 | \phi_3 \rangle & \langle \phi_2 | \phi_4 \rangle \\ \langle \phi_3 | \phi_1 \rangle & \langle \phi_3 | \phi_2 \rangle & \langle \phi_3 | \phi_3 \rangle & \langle \phi_3 | \phi_4 \rangle \\ \langle \phi_4 | \phi_1 \rangle & \langle \phi_4 | \phi_2 \rangle & \langle \phi_4 | \phi_3 \rangle & \langle \phi_4 | \phi_4 \rangle \end{bmatrix}.$$

Pour obtenir chacun des vecteurs de la base du problème adjoint, il faut calculer chacun des  $K_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  et  $j = 1, 2$ . Pour ce faire il faut d'abord calculer chacun des produits scalaires

$$k_{ij} = \langle \phi_i | \phi_j \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Voici, par exemple, les résultats obtenus avec Maple pour  $k_{11}, k_{24}$  et  $k_{43}$ .

$$\begin{aligned} k_{11} &= 1 + b_1^2 \\ &+ \frac{\beta}{2\omega} \left( \sin(\omega\tau_s)(1 - a_1^2 + b_1^2) + \tau_s\omega \cos(\omega\tau_s)(1 + b_1^2 + a_1^2) \right) \\ &+ \frac{\gamma^2}{2\omega} \left( \sin(\omega)(\omega a_1 - b_1) - b_1 \cos(\omega) \right) \\ &+ \frac{1}{2\omega} \left( \sin(2\omega\tau - \omega)(b_1 + 2a_1\omega\tau - a_1\omega) + b_1\omega \cos(2\omega\tau - \omega)(2\tau - 1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{24} &= a_1 a_2 \\
&\quad - \frac{\beta}{3\omega} \left( \sin(\omega\tau_s)(2 + a_1 a_2 + 2b_1 b_2) + \cos(\omega\tau_s)(b_1 a_2 - 2a_1 b_2) \right. \\
&\quad \quad \left. - \sin(2\omega\tau_s)(1 + 2a_1 a_2 + b_1 b_2) + \cos(2\omega\tau_s)(-b_1 a_2 + 2a_1 b_2) \right) \\
&\quad + \frac{\gamma^2}{3\omega} \left( 2b_2 \sin(\omega) + a_2 \cos(\omega) - b_2 \sin(2\omega) - a_2 \cos(2\omega) \right) \\
&\quad + \frac{1}{3} \left( -2b_1 \sin(2\omega\tau - \omega) + 2a_1 \cos(2\omega\tau - \omega) \right. \\
&\quad \quad \left. + b_1 \sin(4\omega\tau - 2\omega) - 2a_1 \cos(4\omega\tau - 2\omega) \right) \\
k_{43} &= -a_2 b_2 \\
&\quad + \frac{\beta}{2\omega} \left( \sin(2\omega\tau_s)(-a_2 b_2 + \omega\tau_s + \tau_s \omega a_2^2 + \tau_s \omega b_2^2) \right) \\
&\quad - \frac{\gamma^2}{4} \left( \sin(2\omega)(-a_2 + 2b_2 \omega) + 2a_2 \omega \cos(2\omega) \right) \\
&\quad - \frac{1}{4\omega} \left( \sin(4\omega\tau - 2\omega)(a_2 - 4b_2 \omega\tau + 2b_2 \omega) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2a_2 \omega \cos(4\omega\tau - 2\omega)(2\tau - 1) \right)
\end{aligned}$$

Nous devons ensuite inverser la matrice  $\Pi$  pour obtenir chacun des  $K_{ij}$ . Toutefois, il fut impossible avec Maple d'obtenir l'inverse directement. Nous pouvons cependant exprimer les  $K_{ij}$  en utilisant la formule pour calculer l'inverse d'une matrice à l'aide de sa matrice adjointe

$$\Pi^{-1} = \frac{1}{\det \Pi} \text{adj } \Pi.$$

Ainsi nous avons par exemple que

$$K_{11} = \frac{1}{\Delta} (k_{22}k_{33}k_{44} - k_{22}k_{34}k_{43} - k_{32}k_{23}k_{44} + k_{32}k_{24}k_{43} + k_{42}k_{23}k_{34} - k_{42}k_{24}k_{33})',$$

où

$$\begin{aligned}
\Delta = & k_{11}k_{22}k_{33}k_{44} - k_{11}k_{22}k_{34}k_{43} - k_{11}k_{32}k_{23}k_{44} + k_{11}k_{32}k_{24}k_{43} \\
& - k_{21}k_{12}k_{33}k_{44} + k_{21}k_{12}k_{34}k_{43} + k_{21}k_{32}k_{13}k_{44} - k_{21}k_{32}k_{14}k_{43} \\
& + k_{31}k_{12}k_{23}k_{44} - k_{31}k_{12}k_{24}k_{43} - k_{31}k_{22}k_{13}k_{44} + k_{31}k_{22}k_{14}k_{43} \\
& - k_{41}k_{12}k_{23}k_{34} + k_{41}k_{12}k_{24}k_{33} + k_{41}k_{22}k_{13}k_{34} - k_{41}k_{22}k_{14}k_{33} \\
& + k_{11}k_{42}k_{23}k_{34} - k_{11}k_{42}k_{24}k_{33} - k_{21}k_{42}k_{13}k_{34} + k_{21}k_{42}k_{14}k_{33} \\
& + k_{31}k_{42}k_{13}k_{24} - k_{31}k_{42}k_{14}k_{23} - k_{41}k_{32}k_{13}k_{24} + k_{41}k_{32}k_{14}k_{23}
\end{aligned}$$

est le déterminant de la matrice  $\Pi$ .

Évidemment, donner une expression explicite pour chacun des vecteurs de la base du problème adjoint est particulièrement difficile. En fait, sans remplacer les  $K_{ij}$  par leurs expressions données plus haut et d'après (87), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\psi_{1,1} &= K_{11}\phi_{1,1}(\theta) + K_{12}\phi_{2,1}(\theta) \\
\psi_{1,2} &= K_{11}\phi_{1,2}(\theta) + K_{12}\phi_{2,2}(\theta) \\
\psi_{2,1} &= K_{21}\phi_{1,1}(\theta) + K_{22}\phi_{2,1}(\theta) \\
\psi_{2,2} &= K_{21}\phi_{1,2}(\theta) + K_{22}\phi_{2,2}(\theta) \\
\psi_{3,1} &= K_{31}\phi_{1,1}(\theta) + K_{32}\phi_{2,1}(\theta) \\
\psi_{3,2} &= K_{31}\phi_{1,2}(\theta) + K_{32}\phi_{2,2}(\theta) \\
\psi_{4,1} &= K_{41}\phi_{1,1}(\theta) + K_{42}\phi_{2,1}(\theta) \\
\psi_{4,2} &= K_{41}\phi_{1,2}(\theta) + K_{42}\phi_{2,2}(\theta).
\end{aligned}$$

D'où les vecteur de la base  $\Psi$  du problème adjoint sont

$$\begin{aligned}\psi_1^\top &= \begin{pmatrix} K_{11}\phi_{1,1}(\theta) + K_{12}\phi_{2,1}(\theta) \\ K_{11}\phi_{1,2}(\theta) + K_{12}\phi_{2,2}(\theta) \end{pmatrix} \\ \psi_2^\top &= \begin{pmatrix} K_{21}\phi_{1,1}(\theta) + K_{22}\phi_{2,1}(\theta) \\ K_{21}\phi_{1,2}(\theta) + K_{22}\phi_{2,2}(\theta) \end{pmatrix} \\ \psi_3^\top &= \begin{pmatrix} K_{31}\phi_{1,1}(\theta) + K_{32}\phi_{2,1}(\theta) \\ K_{31}\phi_{1,2}(\theta) + K_{32}\phi_{2,2}(\theta) \end{pmatrix} \\ \psi_4^\top &= \begin{pmatrix} K_{41}\phi_{1,1}(\theta) + K_{42}\phi_{2,1}(\theta) \\ K_{41}\phi_{1,2}(\theta) + K_{42}\phi_{2,2}(\theta) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

## 4.6 Équations du système restreint à sa variété du centre

Les équations du système restreint à sa variété du centre sont données par (77). Posons  $z = [x, y, u, v]^\top$ . Nous devons maintenant déterminer  $B$  et  $b$  tels que donné dans (77). Pour la matrice  $B$  de dimension  $4 \times 4$  dont les entrées correspondent aux valeurs propres  $\lambda = i\omega$  et  $\lambda = 2i\omega$ , nous avons

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Puis pour la matrice  $b = \Psi(0)$  nous avons

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{11}b_1 - K_{12}a_1 \\ K_{21} & K_{21}b_1 - K_{22}a_1 \\ K_{31} & K_{31}b_1 - K_{32}a_1 \\ K_{41} & K_{41}b_1 - K_{42}a_1 \end{bmatrix},$$

car

$$\begin{aligned}\phi_1(0) &= \begin{pmatrix} \cos(0) \\ a_1 \sin(0) + b_1 \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ \phi_2(0) &= \begin{pmatrix} \sin(0) \\ b_1 \sin(0) - a_1 \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a_1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\psi_1^\top(0) &= \begin{pmatrix} K_{11}\phi_{1,1}(0) + K_{12}\phi_{2,1}(0) \\ K_{11}\phi_{1,2}(0) + K_{12}\phi_{2,2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{11}b_1 + K_{12}(-a_1) \end{pmatrix} \\ \psi_2^\top(0) &= \begin{pmatrix} K_{21}\phi_{1,1}(0) + K_{22}\phi_{2,1}(0) \\ K_{21}\phi_{1,2}(0) + K_{22}\phi_{2,2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{21} \\ K_{21}b_1 + K_{22}(-a_1) \end{pmatrix} \\ \psi_3^\top(0) &= \begin{pmatrix} K_{31}\phi_{1,1}(0) + K_{32}\phi_{2,1}(0) \\ K_{31}\phi_{1,2}(0) + K_{32}\phi_{2,2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{31} \\ K_{31}b_1 + K_{32}(-a_1) \end{pmatrix} \\ \psi_4^\top(0) &= \begin{pmatrix} K_{41}\phi_{1,1}(0) + K_{42}\phi_{2,1}(0) \\ K_{41}\phi_{1,2}(0) + K_{42}\phi_{2,2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{41} \\ K_{41}b_1 + K_{42}(-a_1) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Pour obtenir les équations du système restreint à sa variété du centre selon (77), nous allons commencer par calculer  $g(\Phi z)$ . Tout d'abord, le produit du vecteur  $z$  par la matrice  $\Phi$  donne

$$\Phi z = \begin{pmatrix} \cos(\omega\theta)x + \sin(\omega\theta)y + \cos(2\omega\theta)u + \sin(2\omega\theta)v \\ (a_1 \sin(\omega\theta) + b_1 \cos(\omega\theta))x \\ + (b_1 \sin(\omega\theta) - a_1 \cos(\omega\theta))y \\ + (a_2 \sin(2\omega\theta) + b_2 \cos(2\omega\theta))u \\ + (b_2 \sin(2\omega\theta) - a_2 \cos(2\omega\theta))v \end{pmatrix}, \quad (88)$$

D'après (21), nous avons que

$$g(\nu) = \begin{pmatrix} \delta_1 \nu_1^2(-\tau_s) + \delta_2 \nu_2^2(-1), \\ \delta_3 \nu_2^2(-\tau_s) + \delta_4 \nu_1^2(-2\tau + 1) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|x\|^3), \quad (89)$$

où les constantes  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  et  $\delta_4$  sont les coefficients des termes d'ordre 2 du développement en série de Taylor des fonctions  $f, g$  et  $h$  et tel que redéfinit après

la renormalisation du temps et des paramètres fait à la section 2.1. Finalement, en remplaçant  $\eta$  par  $\Phi z$ , comme calculé en (88), dans (89), nous obtenons

$$g(\Phi z) = \left( \begin{array}{l} \delta_1(\cos(\omega\tau_s)x - \sin(\omega\tau_s)y + \cos(2\omega\tau_s)u - \sin(2\omega\tau_s)v)^2 \\ + \delta_2((-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))x \\ - (a_1 \cos(\omega) + b_1 \sin(\omega))y \\ + (b_2 \cos(2\omega) - a_2 \sin(2\omega))u \\ - (a_2 \cos(2\omega) + b_2 \sin(2\omega))v)^2 \\ \delta_3((-a_1 \sin(\omega\tau_s) + b_1 \cos(\omega\tau_s))x \\ - (a_1 \cos(\omega\tau_s) + b_1 \sin(\omega\tau_s))y \\ + (b_2 \cos(2\omega\tau_s) - a_2 \sin(2\omega\tau_s))u \\ - (a_2 \cos(2\omega\tau_s) + b_2 \sin(2\omega\tau_s))v)^2 \\ + \delta_4(\cos(\omega(-2\tau + 1))x + \sin(\omega(-2\tau + 1))y \\ + \cos(2\omega(-2\tau + 1))u + \sin(2\omega(-2\tau + 1))v)^2 \end{array} \right) + \mathcal{O}(\|x\|^3).$$

En combinant les résultats précédent, nous obtenons les équations du système restreint à sa variété du centre,  $\dot{z} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{u}, \dot{v}]^T$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -\omega y + K_{11}(\delta_1(\cos(\omega\tau_s)x - \sin(\omega\tau_s)y + \cos(2\omega\tau_s)u - \sin(2\omega\tau_s)v)^2 \\ & + \delta_2((-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))x - (a_1 \cos(\omega) + b_1 \sin(\omega))y \\ & + (-a_2 \sin(2\omega) + b_2 \cos(2\omega))u - (a_2 \cos(2\omega) + b_2 \sin(2\omega))v)^2) \\ & + (K_{11}b_1 - K_{12}a_1)(\delta_3((-a_1 \sin(\omega\tau_s) + b_1 \cos(\omega\tau_s))x \\ & - (a_1 \cos(\omega\tau_s) + b_1 \sin(\omega\tau_s))y + (-a_2 \sin(2\omega\tau_s) + b_2 \cos(2\omega\tau_s))u \\ & - (a_2 \cos(2\omega\tau_s) + b_2 \sin(2\omega\tau_s))v)^2 + \delta_4(\cos(\omega(-2\tau + 1))x \\ & + \sin(\omega(-2\tau + 1))y + \cos(2\omega(-2\tau + 1))u + \sin(2\omega(-2\tau + 1))v)^2) \\ & + \mathcal{O}(\|x\|^3) \end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{y} = & \omega x + K_{21}(\delta_1(\cos(\omega\tau_s)x - \sin(\omega\tau_s)y + \cos(2\omega\tau_s)u - \sin(2\omega\tau_s)v)^2 \\
 & + \delta_2((-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))x - (a_1 \cos(\omega) + b_1 \sin(\omega))y \\
 & + (-a_2 \sin(2\omega) + b_2 \cos(2\omega))u - (a_2 \cos(2\omega) + b_2 \sin(2\omega))v)^2) \\
 & + (K_{21}b_1 - K_{22}a_1)(\delta_3((-a_1 \sin(\omega\tau_s) + b_1 \cos(\omega\tau_s))x \\
 & - (a_1 \cos(\omega\tau_s) + b_1 \sin(\omega\tau_s))y + (-a_2 \sin(2\omega\tau_s) + b_2 \cos(2\omega\tau_s))u \\
 & - (a_2 \cos(2\omega\tau_s) + b_2 \sin(2\omega\tau_s))v)^2 + \delta_4(\cos(\omega(-2\tau + 1))x \\
 & + \sin(\omega(-2\tau + 1))y + \cos(2\omega(-2\tau + 1))u + \sin(2\omega(-2\tau + 1))v)^2) \\
 & + \mathcal{O}(\|x\|^3)
 \end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{u} = & -2\omega v + K_{31}(\delta_1(\cos(\omega\tau_s)x - \sin(\omega\tau_s)y + \cos(2\omega\tau_s)u - \sin(2\omega\tau_s)v)^2 \\
 & + \delta_2((-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))x - (a_1 \cos(\omega) + b_1 \sin(\omega))y \\
 & + (-a_2 \sin(2\omega) + b_2 \cos(2\omega))u - (a_2 \cos(2\omega) + b_2 \sin(2\omega))v)^2) \\
 & + (K_{31}b_1 - K_{32}a_1)(\delta_3((-a_1 \sin(\omega\tau_s) + b_1 \cos(\omega\tau_s))x \\
 & - (a_1 \cos(\omega\tau_s) + b_1 \sin(\omega\tau_s))y + (-a_2 \sin(2\omega\tau_s) + b_2 \cos(2\omega\tau_s))u \\
 & - (a_2 \cos(2\omega\tau_s) + b_2 \sin(2\omega\tau_s))v)^2 + \delta_4(\cos(\omega(-2\tau + 1))x \\
 & + \sin(\omega(-2\tau + 1))y + \cos(2\omega(-2\tau + 1))u + \sin(2\omega(-2\tau + 1))v)^2) \\
 & + \mathcal{O}(\|x\|^3)
 \end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{v} = & 2\omega u + K_{41}(\delta_1(\cos(\omega\tau_s)x - \sin(\omega\tau_s)y + \cos(2\omega\tau_s)u - \sin(2\omega\tau_s)v)^2 \\
 & + \delta_2((-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))x - (a_1 \cos(\omega) + b_1 \sin(\omega))y \\
 & + (-a_2 \sin(2\omega) + b_2 \cos(2\omega))u - (a_2 \cos(2\omega) + b_2 \sin(2\omega))v)^2) \\
 & + (K_{41}b_1 - K_{42}a_1)(\delta_3((-a_1 \sin(\omega\tau_s) + b_1 \cos(\omega\tau_s))x \\
 & - (a_1 \cos(\omega\tau_s) + b_1 \sin(\omega\tau_s))y + (-a_2 \sin(2\omega\tau_s) + b_2 \cos(2\omega\tau_s))u \\
 & - (a_2 \cos(2\omega\tau_s) + b_2 \sin(2\omega\tau_s))v)^2 + \delta_4(\cos(\omega(-2\tau + 1))x \\
 & + \sin(\omega(-2\tau + 1))y + \cos(2\omega(-2\tau + 1))u + \sin(2\omega(-2\tau + 1))v)^2) \\
 & + \mathcal{O}(\|x\|^3)
 \end{aligned} \tag{93}$$

où les diverses constantes ont été données dans cette section et les précédentes.

## 4.7 Forme normale

Puisque le système subit une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2, alors la forme normale pour ce système est d'après LEBLANC et LANGFORD, [16],

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -\omega y + (A_1 + B_1 u - B_2 v)x - (A_2 - B_1 v - B_2 u)y \\
 \dot{y} &= \omega x + (A_2 + B_2 u + B_1 v)x + (A_1 + B_2 v - B_1 u)y \\
 \dot{u} &= -2\omega v + C_1 u - C_2 v + D_1(x^2 - y^2) - 2D_2 xy \\
 \dot{v} &= 2\omega u + C_2 u + C_1 v + D_2(x^2 - y^2 + 2D_1 xy)
 \end{aligned} \tag{94}$$

où  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$  et  $D_2$  sont des fonctions à valeurs réelles de domaine  $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^6$  telles que  $A_1, A_2, C_1$  et  $C_2$  sont zéro pour  $(x, y, u, v, \omega, \kappa, \beta, \gamma, \tau_s, \tau) = (0, 0, 0, 0, \tilde{\omega}, \tilde{\kappa}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\tau}_s, \tilde{\tau}) = (0, \tilde{\alpha})$ , c'est-à-dire lorsqu'elles sont évaluées au point d'équilibre du système et pour des valeurs de la famille des valeurs critiques des paramètres,  $\tilde{\alpha}$ , pour lesquels il y a bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. De plus les fonctions  $B_1, B_2, D_1$  et  $D_2$  en ce même point sont données par

$$\begin{aligned}
 B_1(0, \tilde{\alpha}) &= \frac{1}{4}(f_{,13}^1(0, \tilde{\alpha}) + f_{,24}^1(0, \tilde{\alpha}) + f_{,14}^2(0, \tilde{\alpha}) - f_{,23}^2(0, \tilde{\alpha})) \\
 B_2(0, \tilde{\alpha}) &= \frac{1}{4}(f_{,23}^1(0, \tilde{\alpha}) - f_{,14}^1(0, \tilde{\alpha}) + f_{,13}^2(0, \tilde{\alpha}) + f_{,24}^2(0, \tilde{\alpha})) \\
 D_1(0, \tilde{\alpha}) &= \frac{1}{8}(f_{,11}^3(0, \tilde{\alpha}) - f_{,22}^3(0, \tilde{\alpha}) + 2f_{,12}^4(0, \tilde{\alpha})) \\
 D_2(0, \tilde{\alpha}) &= \frac{1}{8}(f_{,11}^4(0, \tilde{\alpha}) - f_{,22}^4(0, \tilde{\alpha}) - 2f_{,12}^3(0, \tilde{\alpha}))
 \end{aligned} \tag{95}$$

où  $f_{,jk}^i(0, \tilde{\alpha})$  est la dérivée partielle de 2<sup>ième</sup> ordre par rapport à  $v_j, v_k$  de la  $i$ -ième composante de  $f$ . Dans notre cas, nous avons

$$\begin{cases} v_1 = x \\ v_2 = y \\ v_3 = u \\ v_4 = v \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f^1 = \dot{x} \\ f^2 = \dot{y} \\ f^3 = \dot{u} \\ f^4 = \dot{v} \end{cases},$$

et les dérivées de 2<sup>ième</sup> ordre  $f_{,jk}^i(0, \tilde{\alpha})$  correspondent aux coefficients de Taylor du terme  $v_j v_k$  dans les équations du système restreint à sa variété du centre (90), (91),

(92) et (93). Ainsi, la forme normale pour le système (18) est

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -\omega y + (B_1 u - B_2 v)x + (B_1 v + B_2 u)y \\
 \dot{y} &= \omega x + (B_2 u + B_1 v)x + (B_2 v - B_1 u)y \\
 \dot{u} &= -2\omega v + D_1(x^2 - y^2) - 2D_2 xy \\
 \dot{v} &= 2\omega u + D_2(x^2 - y^2) + 2D_1 xy
 \end{aligned} \tag{96}$$

où

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{4}(K_{11}(2\delta_1 \cos(2\omega\tau_s) \cos(\omega\tau_s) + 2\delta_2(-a_2 \sin(2\omega) + b_2 \cos(2\omega)) \\
 &\quad (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))) \\
 &+ \frac{1}{4}(K_{11}b_1 - K_{12}a_1)(2d_3(-a_2 \sin(2\omega\tau_s) + b_2 \cos(2\omega\tau_s)) \\
 &\quad (-a_1 \sin(\omega\tau_s) + b_1 \cos(\omega\tau_s)) \\
 &\quad + 2\delta_4 \cos(2\omega(-2\tau + 1)) \cos(\omega(-2\tau + 1))) \\
 &+ \frac{1}{4}K_{11}(2d_1 \sin(2\omega\tau_s) \sin(\omega\tau_s) + 2\delta_2(-a_2 \cos(2\omega) - b_2 \sin(2\omega)) \\
 &\quad (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega))) \\
 &+ \frac{1}{4}(K_{11}b_1 - K_{12}a_1)(2d_3(-a_2 \cos(2\omega\tau_s) - b_2 \sin(2\omega\tau_s)) \\
 &\quad (-a_1 \cos(\omega\tau_s) - b_1 \sin(\omega\tau_s)) \\
 &\quad + 2\delta_4 \sin(2\omega(-2\tau + 1)) \sin(\omega(-2\tau + 1))) \\
 &+ \frac{1}{4}K_{21}(-2\delta_1 \sin(2\omega\tau_s) \cos(\omega\tau_s) + 2\delta_2(-a_2 \cos(2\omega) - b_2 \sin(2\omega)) \\
 &\quad (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))) \\
 &+ \frac{1}{4}(K_{21}b_1 - K_{22}a_1)(2\delta_3(-a_2 \cos(2\omega\tau_s) - b_2 \sin(2\omega\tau_s)) \\
 &\quad (-a_1 \sin(\omega\tau_s) + b_1 \cos(\omega\tau_s)) \\
 &\quad + 2\delta_4 \sin(2\omega(-2\tau + 1)) \cos(\omega(-2\tau + 1))) \\
 &- \frac{1}{4}K_{21}(-2\delta_1 \cos(2\omega\tau_s) \sin(\omega\tau_s) + 2\delta_2(-a_2 \sin(2\omega) + b_2 \cos(2\omega)) \\
 &\quad (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega))) \\
 &- \frac{1}{4}(K_{21}b_1 - K_{22}a_1)(2\delta_3(-a_2 \sin(2\omega\tau_s) + b_2 \cos(2\omega\tau_s)) \\
 &\quad (-a_1 \cos(\omega\tau_s) - b_1 \sin(\omega\tau_s)) \\
 &\quad + 2\delta_4 \cos(2\omega(-2\tau + 1)) \sin(\omega(-2\tau + 1)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & \frac{1}{4}K_{11}(-2\delta_1 \cos(2\omega\tau_s) \sin(\omega\tau_s) + 2\delta_2(-a_2 \sin(2\omega) + b_2 \cos(2\omega)) \\
& \quad (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega))) \\
& + \frac{1}{4}(K_{11}b_1 - K_{12}a_1)(2\delta_3(-a_2 \sin(2\omega\tau_s) + b_2 \cos(2\omega\tau_s)) \\
& \quad (-a_1 \cos(\omega\tau_s) - b_1 \sin(\omega\tau_s)) \\
& \quad + 2\delta_4 \cos(2\omega(-2\tau + 1)) \sin(\omega(-2\tau + 1))) \\
& - \frac{1}{4}K_{11}(-2\delta_1 \sin(2\omega\tau_s) \cos(\omega\tau_s) + 2\delta_2(-a_2 \cos(2\omega) - b_2 \sin(2\omega)) \\
& \quad (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))) \\
& - \frac{1}{4}(K_{11}b_1 - K_{12}a_1)(2\delta_3(-a_2 \cos(2\omega\tau_s) - b_2 \sin(2\omega\tau_s)) \\
& \quad (-a_1 \sin(\omega\tau_s) + b_1 \cos(\omega\tau_s)) \\
& \quad + 2\delta_4 \sin(2\omega(-2\tau + 1)) \cos(\omega(-2\tau + 1))) \\
& + \frac{1}{4}K_{21}(2\delta_1 \cos(2\omega\tau_s) \cos(\omega\tau_s) + 2\delta_2(-a_2 \sin(2\omega) + b_2 \cos(2\omega)) \\
& \quad (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))) \\
& + \frac{1}{4}(K_{21}b_1 - K_{22}a_1)(2\delta_3(-a_2 \sin(2\omega\tau_s) + b_2 \cos(2\omega\tau_s)) \\
& \quad (-a_1 \sin(\omega\tau_s) + b_1 \cos(\omega\tau_s)) \\
& \quad + 2\delta_4 \cos(2\omega(-2\tau + 1)) \cos(\omega(-2\tau + 1))) \\
& + \frac{1}{4}K_{21}(2\delta_1 \sin(2\omega\tau_s) \sin(\omega\tau_s) + 2\delta_2(-a_2 \cos(2\omega) - b_2 \sin(2\omega)) \\
& \quad (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega))) \\
& + \frac{1}{4}(K_{21}b_1 - K_{22}a_1)(2\delta_3(-a_2 \cos(2\omega\tau_s) - b_2 \sin(2\omega\tau_s)) \\
& \quad (-a_1 \cos(\omega\tau_s) - b_1 \sin(\omega\tau_s)) \\
& \quad + 2\delta_4 \sin(2\omega(-2\tau + 1)) \sin(\omega(-2\tau + 1)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 = & \frac{1}{16}K_{31}(2\delta_1 \cos(\omega\tau_s)^2 + 2\delta_2(-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))^2) \\
 & + \frac{1}{16}(K_{31}b_1 - K_{32}a_1) + (2\delta_3(-a_1 \sin(\omega\tau_s) + b_1 \cos(\omega\tau_s))^2 \\
 & \quad + 2\delta_4 \cos(\omega(-2\tau + 1))^2) \\
 & - \frac{1}{16}K_{31}(2\delta_1 \sin(\omega\tau_s)^2 + 2\delta_2(-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega))^2) \\
 & - \frac{1}{16}(K_{31}b_1 - K_{32}a_1)(2\delta_3(-a_1 \cos(\omega\tau_s) - b_1 \sin(\omega\tau_s))^2 \\
 & \quad + 2\delta_4 \sin(\omega(-2\tau + 1))^2) \\
 & + \frac{1}{4}K_{41}(-2\delta_1 \sin(\omega\tau_s) \cos(\omega\tau_s) + 2\delta_2(-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega)) \\
 & \quad (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))) \\
 & + \frac{1}{4}(K_{41}b_1 - K_{42}a_1)(2\delta_3(-a_1 \cos(\omega\tau_s) - b_1 \sin(\omega\tau_s)) \\
 & \quad (-a_1 \sin(\omega\tau_s) + b_1 \cos(\omega\tau_s)) \\
 & \quad + 2\delta_4 \sin(\omega(-2\tau + 1)) \cos(\omega(-2\tau + 1)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 = & \frac{1}{16}K_{41}(2\delta_1 \cos(\omega\tau_s)^2 + 2\delta_2(-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))^2) \\
 & + \frac{1}{16}(K_{41}b_1 - K_{42}a_1)(2\delta_3(-a_1 \sin(\omega\tau_s) + b_1 \cos(\omega\tau_s))^2 \\
 & \quad + 2\delta_4 \cos(\omega(-2\tau + 1))^2) \\
 & - \frac{1}{16}K_{41}(2\delta_1 \sin(\omega\tau_s)^2 + 2\delta_2(-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega))^2) \\
 & - \frac{1}{16}(K_{41}b_1 - K_{42}a_1)(2\delta_3(-a_1 \cos(\omega\tau_s) - b_1 \sin(\omega\tau_s))^2 \\
 & \quad + 2\delta_4 \sin(\omega(-2\tau + 1))^2) \\
 & - \frac{1}{4}K_{31}(-2\delta_1 \sin(\omega\tau_s) \cos(\omega\tau_s) + 2\delta_2(-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega)) \\
 & \quad (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))) \\
 & - \frac{1}{4}(K_{31}b_1 - K_{32}a_1)(2\delta_3(-a_1 \cos(\omega\tau_s) - b_1 \sin(\omega\tau_s)) \\
 & \quad (-a_1 \sin(\omega\tau_s) + b_1 \cos(\omega\tau_s)) \\
 & \quad + 2\delta_4 \sin(\omega(-2\tau + 1)) \cos(\omega(-2\tau + 1)))
 \end{aligned}$$

et où les diverses constantes ont été données dans les sections précédentes.

# Chapitre 5

## Conclusion

Nous avons obtenu dans cette thèse la famille des valeurs critiques des paramètres pour lesquelles le système (18) subit une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. Cette famille de valeurs critiques est donnée au théorème 1 que nous avons établi au cours du chapitre 2. Nous avons continué notre étude du système (18) en établissant au chapitre 3 que l'origine pour ce système était toujours instable près des valeurs critiques des paramètres pour lesquels il y a une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. Nous avons donné et appuyé à ce propos deux conjectures, dont l'une propose que l'instabilité de l'origine soit causé par la présence, dans un cas, d'une et une seule paire de valeurs propres avec partie réelle positive, et dans un deuxième cas, par en plus une valeur propre avec partie réelle positive. Nous avons par ailleurs démontré ce dernier fait au théorème 2 qui, ajouté aux graphiques de la section 3.1, nous ont permis d'établir la conjecture 1. De plus ces mêmes graphiques nous ont permis d'observer qu'il était possible de choisir des valeurs critiques des paramètres telles que pour ces valeurs, l'instabilité de l'origine était causé par une seule paire de valeurs propres dont la partie réelle était très près de zéro. À partir de cette observation, nous avons pu choisir des valeurs critiques des paramètres tels que pour ces valeurs le système est dans un état transitoire pour un certain intervalle de temps de sorte qu'il fut possible de faire des simulations numériques près de la résonance 1 : 2. Ces simulations numériques nous ont dévoilé la présence d'un phénomène : la cascade de dédoublements de période, jamais observé à notre connaissance pour des

systèmes à délais de même nature que le système (18). De plus, ces mêmes simulations numériques ont aussi montré que ce phénomène n'était pas local à la bifurcation. Pour mieux comprendre ce phénomène que nous croyons dû en partie à la non-linéarité du système (18) et à la résonance 1 : 2, nous devrions faire une étude approfondie en se servant des équations du système (18) sous la forme normale pour une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. Pour obtenir les équations du système (18) plusieurs calculs sont nécessaires et il faut en particulier effectuer la restriction du système à sa variété du centre. Nous avons fait ces calculs au chapitre 4 desquels nous avons obtenu la forme normale pour le système (18) à la section 4.7.

Pour terminer, mentionnons qu'il reste plusieurs résultats à obtenir. D'abord, des résultats assurément intéressants devraient être obtenus en procédant à une étude détaillée et approfondie de la forme normale obtenue à la section 4.7 pour le système (18). Puis, en considérant que l'instabilité de l'origine est peut-être due au fait que les neurones ont été modélisés identiques, l'hypothèse suivante que nous émettons révélera sûrement d'autres résultats d'intérêts.

**Hypothèse.** *Soit un système de deux neurones différents couplés avec multiples délais*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\kappa_1 x_1(t) + f_1(x_1(t - \tau_{s_1})) + g(x_2(t - \tau_2)) \\ \dot{x}_2(t) &= -\kappa_2 x_2(t) + f_2(x_2(t - \tau_{s_2})) + h(x_1(t - \tau_1)),\end{aligned}$$

où les différents délais sont positifs et les fonctions non-linéaires, monotones, croissantes ou décroissantes  $f_1, f_2, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont telles que

$$\begin{aligned}f_1(0) &= f_2 = g(0) = h(0) = 0, \\ \beta_1 &= f'_1(0) \neq 0, \beta_2 = f'_2(0) \neq 0, a_{12} = g'(0) \neq 0, a_{21} = h'(0) \neq 0.\end{aligned}$$

*Il existe alors des valeurs critiques des paramètres telles que pour ces valeurs il y a une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 et tel que l'origine est stable près de ces valeurs critiques des paramètres.*

Toutefois, l'équation caractéristique pour ce système est

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \lambda^2 + \left( \kappa_2 + \kappa_1 - \beta_1 e^{\lambda \tau_{s_1}} - \beta_2 e^{-\lambda \tau_{s_2}} \right) \lambda \\ &\quad + \left( \kappa_1 \kappa_2 - \kappa_1 \beta_2 e^{-\lambda \tau_{s_2}} - \kappa_2 \beta_1 e^{-\lambda \tau_{s_1}} + \beta_1 \beta_2 e^{-\lambda(\tau_{s_1} + \tau_{s_2})} - a_{12} a_{21} e^{-\lambda(\tau_2 + \tau_1)} \right),\end{aligned}$$

que nous ne pouvons factoriser comme nous l'avons fait pour l'équation caractéristique du système (18) dès que nous avons  $\kappa_1 \neq \kappa_2$  et/ou  $\beta_1 \neq \beta_2$  et/ou  $\tau_{s,1} \neq \tau_{s,2}$ . Finalement, cette équation n'est à n'en pas douter d'une complexité supérieure à celle que nous avons obtenue pour le système (18) et tenter maintenant de la résoudre afin de démontrer cette dernière hypothèse est un travail qui va certainement au delà des objectifs de cette thèse.

# Annexe A

## Calculs Maple

L'annexe A.1 fournit les calculs faits avec Maple pour obtenir la famille des valeurs critiques des paramètres pour le cas où l'équation caractéristique (25) du système (18) est une différence de carrés et est égale à zéro parce qu'en particulier pour cette factorisation le terme

$$(\lambda + \kappa - \beta e^{\lambda\tau_s} - \gamma e^{-\lambda\tau}) = 0.$$

L'annexe A.2 donne les détails pour les calculs des coefficients  $k_{ij}, i, j = 1, \dots, 4$  présents dans les expressions pour les éléments de la base du problème adjoint  $\Psi$ . Parmi tous les coefficients calculés,  $k_{11}, k_{24}$  et  $k_{43}$  ont été donnés comme exemple à la section 4.5, pour illustrer la complexité du calcul des éléments de la base  $\Psi$ .

L'annexe A.3 montre comment les équations (90), (91), (92) et (93) du système (18) restreint à sa variété du centre ont été obtenues. Cette annexe donne en fait les détails des calculs pour le système d'équations différentielles ordinaires

$$\dot{z} = By + bg(\Phi z + h(\Phi z)),$$

donnant le comportement du système (18) restreint à sa variété du centre.

Finalement, l'annexe A.4 donne les calculs qui ont permis d'obtenir les équations (96) et en particulier les coefficients  $B_1, B_2, D_1$  et  $D_2$  pour la forme normale du système (18).

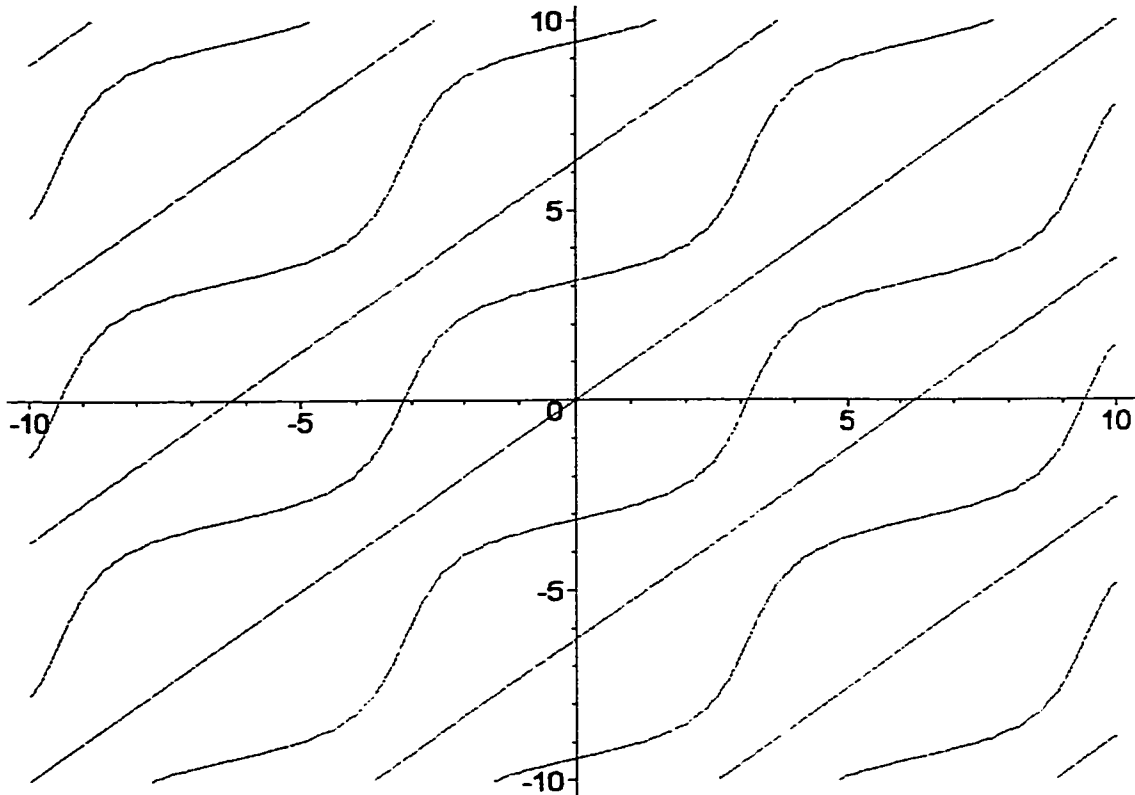
## A.1 Famille des valeurs critiques des paramètres

```

[ STUDENT > restart;
[ STUDENT > with(linalg): with(plots):
[ STUDENT > eq1 := omega + beta*sin(theta[1]) + g*sin(theta[2]);
      eq1 := ω + β sin(θ1) + g sin(θ2)
[ STUDENT > eq2 := kappa - beta*cos(theta[1]) - g*cos(theta[2]);
      eq2 := κ - β cos(θ1) - g cos(θ2)
[ STUDENT > eq3 := 2*omega + beta*sin(2*theta[1]) +
      g*sin(2*theta[2]);
      eq3 := 2 ω + β sin(2 θ1) + g sin(2 θ2)
[ STUDENT > eq4 := kappa - beta*cos(2*theta[1]) -
      g*cos(2*theta[2]);
      eq4 := κ - β cos(2 θ1) - g cos(2 θ2)
[ STUDENT > J := jacobian([eq1, eq2, eq3, eq4], [omega, kappa,
      beta, g]);
      J := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin(\theta_1) & \sin(\theta_2) \\ 0 & 1 & -\cos(\theta_1) & -\cos(\theta_2) \\ 2 & 0 & \sin(2\theta_1) & \sin(2\theta_2) \\ 0 & 1 & -\cos(2\theta_1) & -\cos(2\theta_2) \end{bmatrix}$$

[ STUDENT > dJ := det(J);
dJ := -sin(2 θ1) cos(2 θ2) + sin(2 θ2) cos(2 θ1) - cos(θ1) sin(2 θ2) + cos(θ2) sin(2 θ1)
      + 2 sin(θ1) cos(2 θ2) - 2 sin(θ2) cos(2 θ1) - 2 sin(θ1) cos(θ2) + 2 sin(θ2) cos(θ1)
[ STUDENT > dJ := factor(expand(dJ, trig));
dJ :=
      2 (-1 + cos(θ2)) (-1 + cos(θ1)) (2 sin(θ2) cos(θ1) - 2 sin(θ1) cos(θ2) + sin(θ2) - sin(θ1))
[ STUDENT > implicitplot(-2*sin(theta[1]-theta[2])+sin(theta[2])-si
      n(theta[1])=0, theta[1]=-10..10, theta[2]=-10..10, grid=[5
      0, 50]);

```



```
STUDENT > sols :=
  solve(2*sin(theta[2])*cos(theta[1])-2*sin(theta[1])*cos
    (theta[2])+sin(theta[2])-sin(theta[1]), theta[2]);
```

$$sols := \theta_1, \arctan\left(3 \frac{\sin(\theta_1)(4 \cos(\theta_1) - 5)}{16 \sin(\theta_1)^2 + 9}, -\frac{20 \sin(\theta_1)^2 + 9 \cos(\theta_1)}{16 \sin(\theta_1)^2 + 9}\right)$$

```
STUDENT > theta[2] := simplify(sols[2]);
```

$$\theta_2 := \arctan\left(-3 \frac{\sin(\theta_1)}{4 \cos(\theta_1) + 5}, -\frac{5 \cos(\theta_1) + 4}{4 \cos(\theta_1) + 5}\right)$$

```
STUDENT > eq1 := expand(simplify(eq1), trig);
```

$$eq1 := 4 \frac{\omega \cos(\theta_1)}{4 \cos(\theta_1) + 5} + 5 \frac{\omega}{4 \cos(\theta_1) + 5} + 4 \frac{\beta \sin(\theta_1) \cos(\theta_1)}{4 \cos(\theta_1) + 5} + 5 \frac{\beta \sin(\theta_1)}{4 \cos(\theta_1) + 5} - 3 \frac{g \sin(\theta_1)}{4 \cos(\theta_1) + 5}$$

```
STUDENT > eq2 := expand(simplify(eq2), trig);
```

$$eq2 := 4 \frac{\kappa \cos(\theta_1)}{4 \cos(\theta_1) + 5} + 5 \frac{\kappa}{4 \cos(\theta_1) + 5} - 4 \frac{\beta \cos(\theta_1)^2}{4 \cos(\theta_1) + 5} - 5 \frac{\beta \cos(\theta_1)}{4 \cos(\theta_1) + 5} + 5 \frac{g \cos(\theta_1)}{4 \cos(\theta_1) + 5} + 4 \frac{g}{4 \cos(\theta_1) + 5}$$

**STUDENT** > eq3 := expand(simplify(eq3), trig);

$$eq3 := 2 \omega + 2 \beta \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + 30 g \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) / \left( (4 \cos(\theta_1) + 5)^2 \right. \\ \left. \left( 9 \frac{\sin(\theta_1)^2}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 16 \frac{1}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 25 \frac{\cos(\theta_1)^2}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 40 \frac{\cos(\theta_1)}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} \right) \right) \\ + 24 g \sin(\theta_1) / \left( (4 \cos(\theta_1) + 5)^2 \right. \\ \left. \left( 9 \frac{\sin(\theta_1)^2}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 16 \frac{1}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 25 \frac{\cos(\theta_1)^2}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 40 \frac{\cos(\theta_1)}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} \right) \right)$$

**STUDENT** > eq4 := expand(simplify(eq4), trig);

$$eq4 := \kappa - 2 \beta \cos(\theta_1)^2 + \beta - 32 g / \left( (4 \cos(\theta_1) + 5)^2 \right. \\ \left. \left( 9 \frac{\sin(\theta_1)^2}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 16 \frac{1}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 25 \frac{\cos(\theta_1)^2}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 40 \frac{\cos(\theta_1)}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} \right) \right) \\ - 50 g \cos(\theta_1)^2 / \left( (4 \cos(\theta_1) + 5)^2 \right. \\ \left. \left( 9 \frac{\sin(\theta_1)^2}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 16 \frac{1}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 25 \frac{\cos(\theta_1)^2}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 40 \frac{\cos(\theta_1)}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} \right) \right) \\ - 80 g \cos(\theta_1) / \left( (4 \cos(\theta_1) + 5)^2 \right. \\ \left. \left( 9 \frac{\sin(\theta_1)^2}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 16 \frac{1}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 25 \frac{\cos(\theta_1)^2}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} + 40 \frac{\cos(\theta_1)}{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2} \right) \right) \\ + g$$

**STUDENT** > famille := factor(simplify(solve({eq1, eq2, eq3, eq4}, {omega, kappa, beta, g})));

$$famille := \left\{ \kappa = -\frac{1}{3} \frac{(10 \cos(\theta_1)^2 + 4 \cos(\theta_1) - 5) \omega}{(2 \cos(\theta_1) + 1) \sin(\theta_1)}, \right.$$

$$g = -\frac{1}{6} \frac{(4 \cos(\theta_1) + 5)^2 \omega \sin(\theta_1)}{(2 \cos(\theta_1) + 1)(\cos(\theta_1) + 2)(\cos(\theta_1) + 1)}, \omega = \omega,$$

$$\beta = \frac{9}{2} \frac{\omega \sin(\theta_1)}{(-1 + \cos(\theta_1))(2 \cos(\theta_1) + 1)(\cos(\theta_1) + 2)}$$

## A.2 Base pour le problème adjoint

```

[ STUDENT > restart;
[ STUDENT > phi[1] := (theta) -> [cos(omega*theta),
a[1]*sin(omega*theta) + b[1]*cos(omega*theta)];
phi_1 := theta -> [cos(omega*theta), a_1 sin(omega*theta) + b_1 cos(omega*theta)]
[ STUDENT > phi[2] := (theta) -> [sin(omega*theta),
b[1]*sin(omega*theta) - a[1]*cos(omega*theta)];
phi_2 := theta -> [sin(omega*theta), b_1 sin(omega*theta) - a_1 cos(omega*theta)]
[ STUDENT > phi[3] := (theta) -> [cos(2*omega*theta),
a[2]*sin(2*omega*theta) + b[2]*cos(2*omega*theta)];
phi_3 := theta -> [cos(2*omega*theta), a_2 sin(2*omega*theta) + b_2 cos(2*omega*theta)]
[ STUDENT > phi[4] := (theta) -> [sin(2*omega*theta),
b[2]*sin(2*omega*theta) - a[2]*cos(2*omega*theta)];
phi_4 := theta -> [sin(2*omega*theta), b_2 sin(2*omega*theta) - a_2 cos(2*omega*theta)]
[ STUDENT > ps := (psi, phi) -> (psi(0)[1]*phi(0)[1] +
psi(0)[2]*phi(0)[2] + beta*int(psi(xi +
tau[s])[1]*phi(xi)[1] + psi(xi + tau[s])[2]*phi(xi)[2],
xi = -tau[s]..0) - g^2*int(psi(xi + 1)[1]*phi(xi)[2],
xi = -1..0) + int(psi(xi + 2*tau - 1)[2]*phi(xi)[1], xi =
-2*tau+1..0));

```

$$ps := (\psi, \phi) \rightarrow \psi(0)_1 \phi(0)_1 + \psi(0)_2 \phi(0)_2 + \beta \int_{-\tau_s}^0 \psi(\xi + \tau_s)_1 \phi(\xi)_1 + \psi(\xi + \tau_s)_2 \phi(\xi)_2 d\xi$$

$$-g^2 \int_{-1}^0 \psi(\xi + 1)_1 \phi(\xi)_2 d\xi + \int_{-2\tau+1}^0 \psi(\xi + 2\tau - 1)_2 \phi(\xi)_1 d\xi$$

```

[ STUDENT > phi[1](0);

```

[1, b<sub>1</sub>]

```

[ STUDENT > phi[2](0);

```

[0, -a<sub>1</sub>]

```

[ STUDENT > psi[1] := (theta) -> [K1[1,1]*phi[1](theta)[1] +
K1[1,2]*phi[2](theta)[1], K1[1,1]*phi[1](theta)[2] +
K1[1,2]*phi[2](theta)[2]];

```

$$\psi_1 := \theta \rightarrow [KI_{1,1} \phi_1(\theta)_1 + KI_{1,2} \phi_2(\theta)_1, KI_{1,1} \phi_1(\theta)_2 + KI_{1,2} \phi_2(\theta)_2]$$

**STUDENT** > psi[2] := (theta) -> [K1[2,1]\*phi[1](theta)[1] + K1[2,2]\*phi[2](theta)[1], K1[2,1]\*phi[1](theta)[2] + K1[2,2]\*phi[2](theta)[2]];

$$\psi_2 := \theta \rightarrow [KI_{2,1} \phi_1(\theta)_1 + KI_{2,2} \phi_2(\theta)_1, KI_{2,1} \phi_1(\theta)_2 + KI_{2,2} \phi_2(\theta)_2]$$

**STUDENT** > psi[3] := (theta) -> [K1[3,1]\*phi[1](theta)[1] + K1[3,2]\*phi[2](theta)[1], K1[3,1]\*phi[1](theta)[2] + K1[3,2]\*phi[2](theta)[2] ];

$$\psi_3 := \theta \rightarrow [KI_{3,1} \phi_1(\theta)_1 + KI_{3,2} \phi_2(\theta)_1, KI_{3,1} \phi_1(\theta)_2 + KI_{3,2} \phi_2(\theta)_2]$$

**STUDENT** > psi[4] := (theta) -> [K1[4,1]\*phi[1](theta)[1] + K1[4,2]\*phi[2](theta)[1], K1[4,1]\*phi[1](theta)[2] + K1[4,2]\*phi[2](theta)[2]];

$$\psi_4 := \theta \rightarrow [KI_{4,1} \phi_1(\theta)_1 + KI_{4,2} \phi_2(\theta)_1, KI_{4,1} \phi_1(\theta)_2 + KI_{4,2} \phi_2(\theta)_2]$$

**STUDENT** > matrice\_b0 := matrix(4,2, [psi[1](0)[1], psi[1](0)[2], psi[2](0)[1], psi[2](0)[2], psi[3](0)[1], psi[3](0)[2], psi[4](0)[1], psi[4](0)[2]]);

$$matrice\_b0 := \begin{bmatrix} KI_{1,1} & KI_{1,1} b_1 - KI_{1,2} a_1 \\ KI_{2,1} & KI_{2,1} b_1 - KI_{2,2} a_1 \\ KI_{3,1} & KI_{3,1} b_1 - KI_{3,2} a_1 \\ KI_{4,1} & KI_{4,1} b_1 - KI_{4,2} a_1 \end{bmatrix}$$

**STUDENT** > K := matrix(4, 4, (i, j) -> k[i, j]); detK := det(K);

$$K := \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$detK := det(K)$$

dont les entrées sont les suivantes:

**STUDENT** > for i from 1 to 4 do

**STUDENT** > for j from 1 to 4 do

**STUDENT** > k[i, j] := ps(phi[i], phi[j]); print(''k''[i, j] = k[i, j]);

**STUDENT** > od;

**STUDENT** > od;

$$k_{1,1} = 1 + b_1^2 - \frac{1}{2} \beta (-\sin(\omega \tau_s) - \sin(\omega \tau_s) b_1^2 + \sin(\omega \tau_s) a_1^2 - \cos(\omega \tau_s) \tau_s \omega - \cos(\omega \tau_s) \tau_s \omega b_1^2 - \cos(\omega \tau_s) \tau_s \omega a_1^2) / \omega$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{g^2 (-b_1 \sin(\omega) + a_1 \sin(\omega) \omega - b_1 \cos(\omega) \omega)}{\omega} + \frac{1}{2} (b_1 \sin(2\omega\tau - \omega)) \\
& + 2 a_1 \sin(2\omega\tau - \omega) \omega \tau - a_1 \sin(2\omega\tau - \omega) \omega + 2 b_1 \cos(2\omega\tau - \omega) \omega \tau \\
& - b_1 \cos(2\omega\tau - \omega) \omega) / \omega
\end{aligned}$$

$$k'_{1,2} = -a_1 b_1 - \frac{1}{2} \frac{\beta \sin(\omega \tau_s) (2 a_1 b_1 + \omega \tau_s + \tau_s \omega b_1^2 + \tau_s \omega a_1^2)}{\omega}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{g^2 (a_1 \sin(\omega) + b_1 \sin(\omega) \omega + a_1 \cos(\omega) \omega)}{\omega} - \frac{1}{2} (a_1 \sin(2\omega\tau - \omega)) \\
& - 2 a_1 \cos(2\omega\tau - \omega) \omega \tau + a_1 \cos(2\omega\tau - \omega) \omega + 2 b_1 \sin(2\omega\tau - \omega) \omega \tau \\
& - b_1 \sin(2\omega\tau - \omega) \omega) / \omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k'_{1,3} = & 1 + b_1 b_2 + \frac{1}{3} \beta (-\sin(\omega \tau_s) + \cos(\omega \tau_s) a_1 b_2 - 2 \cos(\omega \tau_s) b_1 a_2 - 2 \sin(\omega \tau_s) a_1 a_2 \\
& - \sin(\omega \tau_s) b_1 b_2 + 2 \sin(2\omega \tau_s) - \cos(2\omega \tau_s) a_1 b_2 + 2 \cos(2\omega \tau_s) b_1 a_2 + \sin(2\omega \tau_s) a_1 a_2 \\
& + 2 \sin(2\omega \tau_s) b_1 b_2) / \omega + \frac{1}{3} \frac{g^2 (2 a_2 \cos(\omega) + b_2 \sin(\omega) - 2 a_2 \cos(2\omega) - 2 b_2 \sin(2\omega))}{\omega} \\
& - \frac{1}{3} \frac{-a_1 \cos(2\omega\tau - \omega) + b_1 \sin(2\omega\tau - \omega) + a_1 \cos(4\omega\tau - 2\omega) - 2 b_1 \sin(4\omega\tau - 2\omega)}{\omega}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k'_{1,4} = & -b_1 a_2 - \frac{1}{3} \beta (2 \cos(\omega \tau_s) + \cos(\omega \tau_s) a_1 a_2 + 2 \cos(\omega \tau_s) b_1 b_2 + 2 \sin(\omega \tau_s) a_1 b_2 \\
& - \sin(\omega \tau_s) b_1 a_2 - 2 \cos(2\omega \tau_s) - \cos(2\omega \tau_s) a_1 a_2 - 2 \cos(2\omega \tau_s) b_1 b_2 - \sin(2\omega \tau_s) a_1 b_2 \\
& + 2 \sin(2\omega \tau_s) b_1 a_2) / \omega - \frac{1}{3} \frac{g^2 (-2 b_2 \cos(\omega) + a_2 \sin(\omega) + 2 b_2 \cos(2\omega) - 2 a_2 \sin(2\omega))}{\omega} \\
& - \frac{1}{3} \frac{2 a_1 \sin(2\omega\tau - \omega) + 2 b_1 \cos(2\omega\tau - \omega) - a_1 \sin(4\omega\tau - 2\omega) - 2 b_1 \cos(4\omega\tau - 2\omega)}{\omega}
\end{aligned}$$

$$k'_{2,1} = -a_1 b_1 + \frac{1}{2} \frac{\beta \sin(\omega \tau_s) (-2 a_1 b_1 + \omega \tau_s + \tau_s \omega b_1^2 + \tau_s \omega a_1^2)}{\omega}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \frac{g^2 (-a_1 \sin(\omega) + a_1 \cos(\omega) \omega + b_1 \sin(\omega) \omega)}{\omega} - \frac{1}{2} (a_1 \sin(2\omega\tau - \omega)) \\
& - 2 b_1 \sin(2\omega\tau - \omega) \omega \tau + b_1 \sin(2\omega\tau - \omega) \omega + 2 a_1 \cos(2\omega\tau - \omega) \omega \tau \\
& - a_1 \cos(2\omega\tau - \omega) \omega) / \omega
\end{aligned}$$

$$k'_{2,2} = a_1^2 + \frac{1}{2} \beta (-\sin(\omega \tau_s) - \sin(\omega \tau_s) b_1^2 + \sin(\omega \tau_s) a_1^2 + \cos(\omega \tau_s) \tau_s \omega)$$

$$+ \cos(\omega \tau_s) \tau_s \omega b_1^2 + \cos(\omega \tau_s) \tau_s \omega a_1^2) / \omega + \frac{1}{2} \frac{g^2 (b_1 \sin(\omega) - b_1 \cos(\omega) \omega + a_1 \sin(\omega) \omega)}{\omega}$$

$$+ \frac{1}{2} (-b_1 \sin(2\omega \tau - \omega) + 2 b_1 \cos(2\omega \tau - \omega) \omega \tau - b_1 \cos(2\omega \tau - \omega) \omega$$

$$+ 2 a_1 \sin(2\omega \tau - \omega) \omega \tau - a_1 \sin(2\omega \tau - \omega) \omega) / \omega$$

$$K_{2,3} = -a_1 b_2 + \frac{1}{3} \beta (\cos(\omega \tau_s) + 2 \cos(\omega \tau_s) a_1 a_2 + \cos(\omega \tau_s) b_1 b_2 + \sin(\omega \tau_s) a_1 b_2$$

$$- 2 \sin(\omega \tau_s) b_1 a_2 - \cos(2\omega \tau_s) - 2 \cos(2\omega \tau_s) a_1 a_2 - \cos(2\omega \tau_s) b_1 b_2$$

$$- 2 \sin(2\omega \tau_s) a_1 b_2 + \sin(2\omega \tau_s) b_1 a_2) / \omega$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{g^2 (2 a_2 \sin(\omega) - b_2 \cos(\omega) - a_2 \sin(2\omega) + b_2 \cos(2\omega))}{\omega}$$

$$- \frac{1}{3} \frac{-b_1 \cos(2\omega \tau - \omega) - a_1 \sin(2\omega \tau - \omega) + b_1 \cos(4\omega \tau - 2\omega) + 2 a_1 \sin(4\omega \tau - 2\omega)}{\omega}$$

$$K_{2,4} = a_1 a_2 - \frac{1}{3} \beta (2 \sin(\omega \tau_s) + \cos(\omega \tau_s) b_1 a_2 - 2 \cos(\omega \tau_s) a_1 b_2 + 2 \sin(\omega \tau_s) b_1 b_2$$

$$+ \sin(\omega \tau_s) a_1 a_2 - \sin(2\omega \tau_s) - \cos(2\omega \tau_s) b_1 a_2 + 2 \cos(2\omega \tau_s) a_1 b_2 - \sin(2\omega \tau_s) b_1 b_2$$

$$- 2 \sin(2\omega \tau_s) a_1 a_2) / \omega + \frac{1}{3} \frac{g^2 (2 b_2 \sin(\omega) + a_2 \cos(\omega) - b_2 \sin(2\omega) - a_2 \cos(2\omega))}{\omega}$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{-2 b_1 \sin(2\omega \tau - \omega) + 2 a_1 \cos(2\omega \tau - \omega) + b_1 \sin(4\omega \tau - 2\omega) - 2 a_1 \cos(4\omega \tau - 2\omega)}{\omega}$$

$$K_{3,1} = 1 + b_1 b_2 - \frac{1}{3} \beta (-2 \sin(2\omega \tau_s) - 2 \sin(2\omega \tau_s) b_1 b_2 - \sin(2\omega \tau_s) a_1 a_2$$

$$+ 2 \cos(2\omega \tau_s) b_1 a_2 - \cos(2\omega \tau_s) a_1 b_2 + \sin(\omega \tau_s) + \sin(\omega \tau_s) b_1 b_2 + 2 \sin(\omega \tau_s) a_1 a_2$$

$$- 2 \cos(\omega \tau_s) b_1 a_2 + \cos(\omega \tau_s) a_1 b_2) / \omega$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{g^2 (-a_1 \cos(2\omega) - 2 b_1 \sin(2\omega) + a_1 \cos(\omega) + b_1 \sin(\omega))}{\omega}$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{-2 a_2 \cos(4\omega \tau - 2\omega) + 2 b_2 \sin(4\omega \tau - 2\omega) + 2 a_2 \cos(2\omega \tau - \omega) - b_2 \sin(2\omega \tau - \omega)}{\omega}$$

$$K_{3,2} = -a_1 b_2 + \frac{1}{3} \beta (\cos(2\omega \tau_s) - 2 \sin(2\omega \tau_s) a_1 b_2 + \sin(2\omega \tau_s) b_1 a_2 + 2 \cos(2\omega \tau_s) a_1 a_2$$

$$+ \cos(2\omega \tau_s) b_1 b_2 - \cos(\omega \tau_s) + \sin(\omega \tau_s) a_1 b_2 - 2 \sin(\omega \tau_s) b_1 a_2 - 2 \cos(\omega \tau_s) a_1 a_2$$

$$- \cos(\omega \tau_s) b_1 b_2) / \omega + \frac{1}{3} \frac{g^2 (-b_1 \cos(2\omega) + 2 a_1 \sin(2\omega) + b_1 \cos(\omega) - a_1 \sin(\omega))}{\omega}$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{a_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega) + b_2 \cos(4\omega\tau - 2\omega) - 2a_2 \sin(2\omega\tau - \omega) - b_2 \cos(2\omega\tau - \omega)}{\omega}$$

$$\begin{aligned} 'k_{3,3} &= 1 + b_2^2 + \frac{1}{4} \beta (\sin(2\omega\tau_s) - \sin(2\omega\tau_s) a_2^2 + \sin(2\omega\tau_s) b_2^2 + 2\cos(2\omega\tau_s) \tau_s \omega \\ &+ 2\cos(2\omega\tau_s) \tau_s \omega a_2^2 + 2\cos(2\omega\tau_s) \tau_s \omega b_2^2) / \omega \\ &- \frac{1}{4} \frac{g^2 (b_2 \sin(2\omega) - 2a_2 \sin(2\omega) \omega + 2b_2 \cos(2\omega) \omega)}{\omega} + \frac{1}{4} (b_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega) \\ &+ 4a_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega) \omega \tau - 2a_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega) \omega + 4b_2 \cos(4\omega\tau - 2\omega) \omega \tau \\ &- 2b_2 \cos(4\omega\tau - 2\omega) \omega) / \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 'k_{3,4} &= -a_2 b_2 - \frac{1}{2} \frac{\beta \sin(2\omega\tau_s) (a_2 b_2 + \omega\tau_s + \tau_s \omega a_2^2 + \tau_s \omega b_2^2)}{\omega} \\ &+ \frac{1}{4} \frac{g^2 (a_2 \sin(2\omega) + 2b_2 \sin(2\omega) \omega + 2a_2 \cos(2\omega) \omega)}{\omega} + \frac{1}{4} (-a_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega) \\ &+ 4a_2 \cos(4\omega\tau - 2\omega) \omega \tau - 2a_2 \cos(4\omega\tau - 2\omega) \omega - 4b_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega) \omega \tau \\ &+ 2b_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega) \omega) / \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 'k_{4,1} &= -b_1 a_2 - \frac{1}{3} \beta (2\cos(2\omega\tau_s) + \cos(2\omega\tau_s) a_1 a_2 + 2\cos(2\omega\tau_s) b_1 b_2 \\ &- \sin(2\omega\tau_s) a_1 b_2 + 2\sin(2\omega\tau_s) b_1 a_2 - 2\cos(\omega\tau_s) - \cos(\omega\tau_s) a_1 a_2 - 2\cos(\omega\tau_s) b_1 b_2 \\ &+ 2\sin(\omega\tau_s) a_1 b_2 - \sin(\omega\tau_s) b_1 a_2) / \omega \\ &- \frac{1}{3} \frac{g^2 (a_1 \sin(2\omega) - 2b_1 \cos(2\omega) - 2a_1 \sin(\omega) + 2b_1 \cos(\omega))}{\omega} \\ &- \frac{1}{3} \frac{2b_2 \cos(4\omega\tau - 2\omega) + 2a_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega) - 2b_2 \cos(2\omega\tau - \omega) - a_2 \sin(2\omega\tau - \omega)}{\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 'k_{4,2} &= a_1 a_2 + \frac{1}{3} \beta (\sin(2\omega\tau_s) - \cos(2\omega\tau_s) b_1 a_2 + 2\cos(2\omega\tau_s) a_1 b_2 + 2\sin(2\omega\tau_s) a_1 a_2 \\ &+ \sin(2\omega\tau_s) b_1 b_2 - 2\sin(\omega\tau_s) + \cos(\omega\tau_s) b_1 a_2 - 2\cos(\omega\tau_s) a_1 b_2 - \sin(\omega\tau_s) a_1 a_2 \\ &- 2\sin(\omega\tau_s) b_1 b_2) / \omega - \frac{1}{3} \frac{g^2 (b_1 \sin(2\omega) + 2a_1 \cos(2\omega) - 2b_1 \sin(\omega) - 2a_1 \cos(\omega))}{\omega} \\ &- \frac{1}{3} \frac{-b_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega) + a_2 \cos(4\omega\tau - 2\omega) + 2b_2 \sin(2\omega\tau - \omega) - a_2 \cos(2\omega\tau - \omega)}{\omega} \end{aligned}$$

$$'k_{4,3} = -a_2 b_2 + \frac{1}{2} \frac{\beta \sin(2\omega\tau_s) (-a_2 b_2 + \omega\tau_s + \tau_s \omega a_2^2 + \tau_s \omega b_2^2)}{\omega}$$

$$\frac{1}{4} \frac{g^2 (-a_2 \sin(2\omega) + 2a_2 \cos(2\omega)\omega + 2b_2 \sin(2\omega)\omega)}{\omega} - \frac{1}{4} (a_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega) - 4b_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega)\omega\tau + 2b_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega)\omega + 4a_2 \cos(4\omega\tau - 2\omega)\omega\tau - 2a_2 \cos(4\omega\tau - 2\omega)\omega) / \omega$$

$$K_{4,4} = a_2^2 + \frac{1}{4} \beta (-\sin(2\omega\tau_s) - \sin(2\omega\tau_s) b_2^2 + \sin(2\omega\tau_s) a_2^2 + 2 \cos(2\omega\tau_s) \tau_s \omega + 2 \cos(2\omega\tau_s) \tau_s \omega a_2^2 + 2 \cos(2\omega\tau_s) \tau_s \omega b_2^2) / \omega$$

$$\frac{1}{4} \frac{g^2 (-b_2 \sin(2\omega) + 2b_2 \cos(2\omega)\omega - 2a_2 \sin(2\omega)\omega)}{\omega} + \frac{1}{4} (-b_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega) + 4b_2 \cos(4\omega\tau - 2\omega)\omega\tau - 2b_2 \cos(4\omega\tau - 2\omega)\omega + 4a_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega)\omega\tau - 2a_2 \sin(4\omega\tau - 2\omega)\omega) / \omega$$

### A.3 Le système d'équations (17) sur sa variété du centre

[ STUDENT > restart;

[ STUDENT > B := matrix(4, 4, [0, -omega, 0, 0, omega, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2\*omega, 0, 0, 2\*omega, 0]);

$$B := \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \end{bmatrix}$$

[ STUDENT > z := matrix(4, 1, [x, y, u, v]);

$$z := \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

[ STUDENT > matrice\_b0 := matrix([[K1[1,1], K1[1,1]\*b[1]-K1[1,2]\*a[1]], [K1[2,1], K1[2,1]\*b[1]-K1[2,2]\*a[1]], [K1[3,1], K1[3,1]\*b[1]-K1[3,2]\*a[1]], [K1[4,1], K1[4,1]\*b[1]-K1[4,2]\*a[1]]]);

$$\text{matrice\_b0} := \begin{bmatrix} K1_{1,1} & K1_{1,1} b_1 - K1_{1,2} a_1 \\ K1_{2,1} & K1_{2,1} b_1 - K1_{2,2} a_1 \\ K1_{3,1} & K1_{3,1} b_1 - K1_{3,2} a_1 \\ K1_{4,1} & K1_{4,1} b_1 - K1_{4,2} a_1 \end{bmatrix}$$

[ STUDENT > g := (eta) -> [d[1]\*(eta[1](-tau[s]))^2 + d[2]\*(eta[2](-1))^2, d[3]\*(eta[2](-tau[s]))^2 + d[4]\*(eta[1](-2\*tau + 1))^2];

$$g := \eta \rightarrow [d_1 \eta_1(-\tau_s)^2 + d_2 \eta_2(-1)^2, d_3 \eta_2(-\tau_s)^2 + d_4 \eta_1(-2\tau_s + 1)^2]$$

```

STUDENT > phi[1] := (theta) -> [cos(omega*theta),
a[1]*sin(omega*theta) + b[1]*cos(omega*theta)];
      phi_1 := theta -> [cos(omega*theta), a_1 sin(omega*theta) + b_1 cos(omega*theta)]
STUDENT > phi[2] := (theta) -> [sin(omega*theta),
-a[1]*cos(omega*theta) + b[1]*sin(omega*theta)];
      phi_2 := theta -> [sin(omega*theta), -a_1 cos(omega*theta) + b_1 sin(omega*theta)]
STUDENT > phi[3] := (theta) -> [cos(2*omega*theta),
a[2]*sin(2*omega*theta) + b[2]*cos(2*omega*theta)];
      phi_3 := theta -> [cos(2*omega*theta), a_2 sin(2*omega*theta) + b_2 cos(2*omega*theta)]
STUDENT > phi[4] := (theta) -> [sin(2*omega*theta),
-a[2]*cos(2*omega*theta) + b[2]*sin(2*omega*theta)];
      phi_4 := theta -> [sin(2*omega*theta), -a_2 cos(2*omega*theta) + b_2 sin(2*omega*theta)]
STUDENT > a[1] =
(-cos(omega)*omega-cos(omega)*beta*sin(omega*tau[s])-sin
n(omega)*kappa+sin(omega)*beta*cos(omega*tau[s]))/(g^2)
; b[1] =
(cos(omega)*kappa-cos(omega)*beta*cos(omega*tau[s])-sin
(omega)*omega-sin(omega)*beta*sin(omega*tau[s]))/(g^2);
a[2] =
(-2*cos(2*omega)*omega-cos(2*omega)*beta*sin(2*omega*ta
u[s])-sin(2*omega)*kappa+sin(2*omega)*beta*cos(2*omega*
tau[s]))/(g^2); b[2] =
(cos(2*omega)*kappa-cos(2*omega)*beta*cos(2*omega*tau[s
])-2*sin(2*omega)*omega-sin(2*omega)*beta*sin(2*omega*t
au[s]))/(g^2);
      a_1 =
      
$$a_1 = \frac{-\cos(\omega)\omega - \cos(\omega)\beta \sin(\omega\tau_s) - \sin(\omega)\kappa + \sin(\omega)\beta \cos(\omega\tau_s)}{g^2}$$

      b_1 =
      
$$b_1 = \frac{\cos(\omega)\kappa - \cos(\omega)\beta \cos(\omega\tau_s) - \sin(\omega)\omega - \sin(\omega)\beta \sin(\omega\tau_s)}{g^2}$$

      a_2 =
      
$$a_2 = \frac{-2\cos(2\omega)\omega - \cos(2\omega)\beta \sin(2\omega\tau_s) - \sin(2\omega)\kappa + \sin(2\omega)\beta \cos(2\omega\tau_s)}{g^2}$$

      b_2 =
      
$$b_2 = \frac{\cos(2\omega)\kappa - \cos(2\omega)\beta \cos(2\omega\tau_s) - 2\sin(2\omega)\omega - \sin(2\omega)\beta \sin(2\omega\tau_s)}{g^2}$$

STUDENT > Phi := matrix(2, 4, [phi[1](theta)[1],
phi[2](theta)[1], phi[3](theta)[1], phi[4](theta)[1],
phi[1](theta)[2], phi[2](theta)[2], phi[3](theta)[2],
phi[4](theta)[2]]);
Phi :=
[cos(omega*theta), sin(omega*theta), cos(2*omega*theta), sin(2*omega*theta)]

```

$[a_1 \sin(\omega \theta) + b_1 \cos(\omega \theta), -a_1 \cos(\omega \theta) + b_1 \sin(\omega \theta), a_2 \sin(2 \omega \theta) + b_2 \cos(2 \omega \theta),$   
 $-a_2 \cos(2 \omega \theta) + b_2 \sin(2 \omega \theta)]$

**STUDENT** > Phiz := evalm(Phi &\* z);

Phiz :=

$[\cos(\omega \theta) x + \sin(\omega \theta) y + \cos(2 \omega \theta) u + \sin(2 \omega \theta) v]$

$[(a_1 \sin(\omega \theta) + b_1 \cos(\omega \theta)) x + (-a_1 \cos(\omega \theta) + b_1 \sin(\omega \theta)) y$

$+ (a_2 \sin(2 \omega \theta) + b_2 \cos(2 \omega \theta)) u + (-a_2 \cos(2 \omega \theta) + b_2 \sin(2 \omega \theta)) v]$

**STUDENT** > Phiz[1,1] := unapply(Phiz[1,1], theta);

$Phiz_{1,1} := \theta \rightarrow \cos(\omega \theta) x + \sin(\omega \theta) y + \cos(2 \omega \theta) u + \sin(2 \omega \theta) v$

**STUDENT** > Phiz[2,1] := unapply(Phiz[2,1], theta);

$Phiz_{2,1} := \theta \rightarrow (a_1 \sin(\omega \theta) + b_1 \cos(\omega \theta)) x + (-a_1 \cos(\omega \theta) + b_1 \sin(\omega \theta)) y$

$+ (a_2 \sin(2 \omega \theta) + b_2 \cos(2 \omega \theta)) u + (-a_2 \cos(2 \omega \theta) + b_2 \sin(2 \omega \theta)) v$

**STUDENT** > Phizv := convert(Phiz, vector);

$Phizv := [Phiz_{1,1}, Phiz_{2,1}]$

**STUDENT** > gPhiz := g(Phizv);

$gPhiz := [d_1 (\cos(\omega \tau_s) x - \sin(\omega \tau_s) y + \cos(2 \omega \tau_s) u - \sin(2 \omega \tau_s) v)^2 + d_2 ($   
 $(-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega)) x + (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega)) y + (-a_2 \sin(2 \omega) + b_2 \cos(2 \omega)) u$   
 $+ (-a_2 \cos(2 \omega) - b_2 \sin(2 \omega)) v)^2, d_3 ((-a_1 \sin(\omega \tau_s) + b_1 \cos(\omega \tau_s)) x$   
 $+ (-a_1 \cos(\omega \tau_s) - b_1 \sin(\omega \tau_s)) y + (-a_2 \sin(2 \omega \tau_s) + b_2 \cos(2 \omega \tau_s)) u$   
 $+ (-a_2 \cos(2 \omega \tau_s) - b_2 \sin(2 \omega \tau_s)) v)^2 + d_4$   
 $(\cos(\omega (-2 \tau + 1)) x + \sin(\omega (-2 \tau + 1)) y + \cos(2 \omega (-2 \tau + 1)) u + \sin(2 \omega (-2 \tau + 1)) v)^2]$

**STUDENT** > zdot := evalm((B &\* z) &+ (matrice\_b0 &\* gPhiz));

zdot :=

$[-\omega y + Kl_{1,1} (d_1 (\cos(\omega \tau_s) x - \sin(\omega \tau_s) y + \cos(2 \omega \tau_s) u - \sin(2 \omega \tau_s) v)^2 + d_2 ($   
 $(-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega)) x + (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega)) y + (-a_2 \sin(2 \omega) + b_2 \cos(2 \omega)) u$   
 $+ (-a_2 \cos(2 \omega) - b_2 \sin(2 \omega)) v)^2) + (Kl_{1,1} b_1 - Kl_{1,2} a_1) (d_3 ($   
 $(-a_1 \sin(\omega \tau_s) + b_1 \cos(\omega \tau_s)) x + (-a_1 \cos(\omega \tau_s) - b_1 \sin(\omega \tau_s)) y$   
 $+ (-a_2 \sin(2 \omega \tau_s) + b_2 \cos(2 \omega \tau_s)) u + (-a_2 \cos(2 \omega \tau_s) - b_2 \sin(2 \omega \tau_s)) v)^2 + d_4$   
 $(\cos(\omega (-2 \tau + 1)) x + \sin(\omega (-2 \tau + 1)) y + \cos(2 \omega (-2 \tau + 1)) u + \sin(2 \omega (-2 \tau + 1)) v)^2]$

$[\omega x + Kl_{2,1} (d_1 (\cos(\omega \tau_s) x - \sin(\omega \tau_s) y + \cos(2 \omega \tau_s) u - \sin(2 \omega \tau_s) v)^2 + d_2 ($

$(-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega)) x + (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega)) y + (-a_2 \sin(2 \omega) + b_2 \cos(2 \omega)) u$

$$\begin{aligned}
& + (-a_2 \cos(2\omega) - b_2 \sin(2\omega)) v^2) + (Kl_{2,1} b_1 - Kl_{2,2} a_1) (d_3 ( \\
& (-a_1 \sin(\omega \tau_s) + b_1 \cos(\omega \tau_s)) x + (-a_1 \cos(\omega \tau_s) - b_1 \sin(\omega \tau_s)) y \\
& + (-a_2 \sin(2\omega \tau_s) + b_2 \cos(2\omega \tau_s)) u + (-a_2 \cos(2\omega \tau_s) - b_2 \sin(2\omega \tau_s)) v)^2 + d_4 \\
& (\cos(\omega(-2\tau+1)) x + \sin(\omega(-2\tau+1)) y + \cos(2\omega(-2\tau+1)) u + \sin(2\omega(-2\tau+1)) v)^2 \\
& ^2) ] \\
& [-2\omega v + Kl_{3,1} (d_1 (\cos(\omega \tau_s) x - \sin(\omega \tau_s) y + \cos(2\omega \tau_s) u - \sin(2\omega \tau_s) v)^2 + d_2 ( \\
& (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega)) x + (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega)) y + (-a_2 \sin(2\omega) + b_2 \cos(2\omega)) u \\
& + (-a_2 \cos(2\omega) - b_2 \sin(2\omega)) v^2) + (Kl_{3,1} b_1 - Kl_{3,2} a_1) (d_3 ( \\
& (-a_1 \sin(\omega \tau_s) + b_1 \cos(\omega \tau_s)) x + (-a_1 \cos(\omega \tau_s) - b_1 \sin(\omega \tau_s)) y \\
& + (-a_2 \sin(2\omega \tau_s) + b_2 \cos(2\omega \tau_s)) u + (-a_2 \cos(2\omega \tau_s) - b_2 \sin(2\omega \tau_s)) v)^2 + d_4 \\
& (\cos(\omega(-2\tau+1)) x + \sin(\omega(-2\tau+1)) y + \cos(2\omega(-2\tau+1)) u + \sin(2\omega(-2\tau+1)) v)^2 \\
& ^2) ] \\
& [2\omega u + Kl_{4,1} (d_1 (\cos(\omega \tau_s) x - \sin(\omega \tau_s) y + \cos(2\omega \tau_s) u - \sin(2\omega \tau_s) v)^2 + d_2 ( \\
& (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega)) x + (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega)) y + (-a_2 \sin(2\omega) + b_2 \cos(2\omega)) u \\
& + (-a_2 \cos(2\omega) - b_2 \sin(2\omega)) v^2) + (Kl_{4,1} b_1 - Kl_{4,2} a_1) (d_3 ( \\
& (-a_1 \sin(\omega \tau_s) + b_1 \cos(\omega \tau_s)) x + (-a_1 \cos(\omega \tau_s) - b_1 \sin(\omega \tau_s)) y \\
& + (-a_2 \sin(2\omega \tau_s) + b_2 \cos(2\omega \tau_s)) u + (-a_2 \cos(2\omega \tau_s) - b_2 \sin(2\omega \tau_s)) v)^2 + d_4 \\
& (\cos(\omega(-2\tau+1)) x + \sin(\omega(-2\tau+1)) y + \cos(2\omega(-2\tau+1)) u + \sin(2\omega(-2\tau+1)) v)^2 \\
& ^2) ]
\end{aligned}$$

## A.4 Forme normale du système d'équations (17)

```

[ STUDENT > restart;
[ STUDENT > with(linalg, jacobian): readlib(coeftayl):
[ STUDENT > B := matrix(4, 4, [0, -omega, 0, 0, omega, 0, 0, 0, 0,
0, 0, -2*omega, 0, 0, 2*omega, 0]):
[ STUDENT > z := matrix(4, 1, [x, y, u, v]);
                                z :=
                                [ x ]
                                [ y ]
                                [ u ]
                                [ v ]
[ STUDENT > matrice_b0 := matrix([[K1[1,1],
K1[1,1]*b[1]-K1[1,2]*a[1]], [K1[2,1],
K1[2,1]*b[1]-K1[2,2]*a[1]], [K1[3,1],
K1[3,1]*b[1]-K1[3,2]*a[1]], [K1[4,1],

```

```

K1[4,1]*b[1]-K1[4,2]*a[1]]):
STUDENT > gPhiz :=
[d[1]*(cos(omega*tau[s])*x-sin(omega*tau[s])*y+cos(2*om
ega*tau[s])*u-sin(2*omega*tau[s])*v)^2+d[2]*((-a[1]*sin
(omega)+b[1]*cos(omega))*x+(-a[1]*cos(omega)-b[1]*sin(o
mega))*y+(-a[2]*sin(2*omega)+b[2]*cos(2*omega))*u+(-a[2
]*cos(2*omega)-b[2]*sin(2*omega))*v)^2,
d[3]*((-a[1]*sin(omega*tau[s])+b[1]*cos(omega*tau[s]))*
x+(-a[1]*cos(omega*tau[s])-b[1]*sin(omega*tau[s]))*y+(-
a[2]*sin(2*omega*tau[s])+b[2]*cos(2*omega*tau[s]))*u+(-
a[2]*cos(2*omega*tau[s])-b[2]*sin(2*omega*tau[s]))*v)^2
+d[4]*(cos(omega*(-2*tau+1))*x+sin(omega*(-2*tau+1))*y+
cos(2*omega*(-2*tau+1))*u+sin(2*omega*(-2*tau+1))*v)^2]
:
STUDENT > zdot := evalm((B &* z) &+ (matrice_b0 &* gPhiz)):
STUDENT > forme_normale := evalm((B &* z) &+ matrix(4, 1, [(B1*u
- B2*v)*x + (B1*v + B2*u)*y, (B2*u + B1*v)*x + (B2*v -
B1*u)*y, D1*(x^2 - y^2) - 2*D2*x*y, D2*(x^2 - y^2) +
2*D1*x*y]));

forme_normale := 
$$\begin{bmatrix} -\omega y + (B1 u - B2 v)x + (B1 v + B2 u)y \\ \omega x + (B1 v + B2 u)x + (B2 v - B1 u)y \\ -2 \omega v + D1 (x^2 - y^2) - 2 D2 x y \\ 2 \omega u + D2 (x^2 - y^2) + 2 D1 x y \end{bmatrix}$$

STUDENT > jacobian([forme_normale[1,1], forme_normale[2,1],
forme_normale[3,1], forme_normale[4,1]], [x,y,u,v]);


$$\begin{bmatrix} B1 u - B2 v & -\omega + B1 v + B2 u & B1 x + B2 y & -B2 x + B1 y \\ \omega + B1 v + B2 u & B2 v - B1 u & B2 x - B1 y & B1 x + B2 y \\ 2 D1 x - 2 D2 y & -2 D1 y - 2 D2 x & 0 & -2 \omega \\ 2 D2 x + 2 D1 y & 2 D1 x - 2 D2 y & 2 \omega & 0 \end{bmatrix}$$

STUDENT > B1 := 1/4*(coeftayl(zdot[1, 1],[x, y, u, v] = [0, 0, 0,
0], [1, 0, 1, 0]) + coeftayl(zdot[1, 1],[x, y, u, v] =
[0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 1]) + coeftayl(zdot[2, 1],[x,
y, u, v] = [0, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 1]) -
coeftayl(zdot[2, 1],[x, y, u, v] = [0, 0, 0, 0], [0, 1,
1, 0]));

```

$$B1 := \frac{1}{4} K1_{1,1}$$

$$(2 d_1 \cos(2 \omega \tau_s) \cos(\omega \tau_s) + 2 d_2 (-a_2 \sin(2 \omega) + b_2 \cos(2 \omega)) (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega)))$$

$$+ \frac{1}{4} (K1_{1,1} b_1 - K1_{1,2} a_1) ($$

$$2 d_3 (-a_2 \sin(2 \omega \tau_s) + b_2 \cos(2 \omega \tau_s)) (-a_1 \sin(\omega \tau_s) + b_1 \cos(\omega \tau_s))$$

$$\begin{aligned}
& + 2 d_4 \cos(2 \omega (-2 \tau + 1)) \cos(\omega (-2 \tau + 1)) + \frac{1}{4} K I_{1,1} \\
& (2 d_1 \sin(2 \omega \tau_s) \sin(\omega \tau_s) + 2 d_2 (-a_2 \cos(2 \omega) - b_2 \sin(2 \omega)) (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega))) + \\
& \frac{1}{4} (K I_{1,1} b_1 - K I_{1,2} a_1) ( \\
& 2 d_3 (-a_2 \cos(2 \omega \tau_s) - b_2 \sin(2 \omega \tau_s)) (-a_1 \cos(\omega \tau_s) - b_1 \sin(\omega \tau_s)) \\
& + 2 d_4 \sin(2 \omega (-2 \tau + 1)) \sin(\omega (-2 \tau + 1)) + \frac{1}{4} K I_{2,1} \\
& (-2 d_1 \sin(2 \omega \tau_s) \cos(\omega \tau_s) + 2 d_2 (-a_2 \cos(2 \omega) - b_2 \sin(2 \omega)) (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))) \\
& + \frac{1}{4} (K I_{2,1} b_1 - K I_{2,2} a_1) ( \\
& 2 d_3 (-a_2 \cos(2 \omega \tau_s) - b_2 \sin(2 \omega \tau_s)) (-a_1 \sin(\omega \tau_s) + b_1 \cos(\omega \tau_s)) \\
& + 2 d_4 \sin(2 \omega (-2 \tau + 1)) \cos(\omega (-2 \tau + 1)) - \frac{1}{4} K I_{2,1} \\
& (-2 d_1 \cos(2 \omega \tau_s) \sin(\omega \tau_s) + 2 d_2 (-a_2 \sin(2 \omega) + b_2 \cos(2 \omega)) (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega))) \\
& - \frac{1}{4} (K I_{2,1} b_1 - K I_{2,2} a_1) ( \\
& 2 d_3 (-a_2 \sin(2 \omega \tau_s) + b_2 \cos(2 \omega \tau_s)) (-a_1 \cos(\omega \tau_s) - b_1 \sin(\omega \tau_s)) \\
& + 2 d_4 \cos(2 \omega (-2 \tau + 1)) \sin(\omega (-2 \tau + 1))
\end{aligned}$$

STUDENT > B2 := 1/4\*(coeftayl(zdot[1, 1],[x, y, u, v] = [0, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 0]) - coeftayl(zdot[1, 1],[x, y, u, v] = [0, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 1]) + coeftayl(zdot[2, 1],[x, y, u, v] = [0, 0, 0, 0], [1, 0, 1, 0]) + coeftayl(zdot[2, 1],[x, y, u, v] = [0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 1]));

$$B2 := \frac{1}{4} K I_{1,1}$$

$$\begin{aligned}
& (-2 d_1 \cos(2 \omega \tau_s) \sin(\omega \tau_s) + 2 d_2 (-a_2 \sin(2 \omega) + b_2 \cos(2 \omega)) (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega))) \\
& + \frac{1}{4} (K I_{1,1} b_1 - K I_{1,2} a_1) ( \\
& 2 d_3 (-a_2 \sin(2 \omega \tau_s) + b_2 \cos(2 \omega \tau_s)) (-a_1 \cos(\omega \tau_s) - b_1 \sin(\omega \tau_s)) \\
& + 2 d_4 \cos(2 \omega (-2 \tau + 1)) \sin(\omega (-2 \tau + 1)) - \frac{1}{4} K I_{1,1} \\
& (-2 d_1 \sin(2 \omega \tau_s) \cos(\omega \tau_s) + 2 d_2 (-a_2 \cos(2 \omega) - b_2 \sin(2 \omega)) (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))) \\
& - \frac{1}{4} (K I_{1,1} b_1 - K I_{1,2} a_1) (
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 d_3 (-a_2 \cos(2 \omega \tau_s) - b_2 \sin(2 \omega \tau_s)) (-a_1 \sin(\omega \tau_s) + b_1 \cos(\omega \tau_s)) \\
& + 2 d_4 \sin(2 \omega (-2 \tau + 1)) \cos(\omega (-2 \tau + 1)) + \frac{1}{4} Kl_{2,1} \\
& (2 d_1 \cos(2 \omega \tau_s) \cos(\omega \tau_s) + 2 d_2 (-a_2 \sin(2 \omega) + b_2 \cos(2 \omega)) (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))) \\
& + \frac{1}{4} (Kl_{2,1} b_1 - Kl_{2,2} a_1) ( \\
& 2 d_3 (-a_2 \sin(2 \omega \tau_s) + b_2 \cos(2 \omega \tau_s)) (-a_1 \sin(\omega \tau_s) + b_1 \cos(\omega \tau_s)) \\
& + 2 d_4 \cos(2 \omega (-2 \tau + 1)) \cos(\omega (-2 \tau + 1)) + \frac{1}{4} Kl_{2,1} \\
& (2 d_1 \sin(2 \omega \tau_s) \sin(\omega \tau_s) + 2 d_2 (-a_2 \cos(2 \omega) - b_2 \sin(2 \omega)) (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega))) + \\
& \frac{1}{4} (Kl_{2,1} b_1 - Kl_{2,2} a_1) ( \\
& 2 d_3 (-a_2 \cos(2 \omega \tau_s) - b_2 \sin(2 \omega \tau_s)) (-a_1 \cos(\omega \tau_s) - b_1 \sin(\omega \tau_s)) \\
& + 2 d_4 \sin(2 \omega (-2 \tau + 1)) \sin(\omega (-2 \tau + 1))
\end{aligned}$$

**STUDENT** > D1 := 1/8\*(coeftayl(zdot[3, 1],[x, y, u, v] = [0, 0, 0, 0], [2, 0, 0, 0]) - coeftayl(zdot[3, 1],[x, y, u, v] = [0, 0, 0, 0], [0, 2, 0, 0]) + 2\*coeftayl(zdot[4, 1],[x, y, u, v] = [0, 0, 0, 0], [1, 1, 0, 0]));

$$\begin{aligned}
D1 := & \frac{1}{16} Kl_{3,1} (2 d_1 \cos(\omega \tau_s)^2 + 2 d_2 (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))^2) \\
& + \frac{1}{16} (Kl_{3,1} b_1 - Kl_{3,2} a_1) (2 d_3 (-a_1 \sin(\omega \tau_s) + b_1 \cos(\omega \tau_s))^2 + 2 d_4 \cos(\omega (-2 \tau + 1))^2) \\
& - \frac{1}{16} Kl_{3,1} (2 d_1 \sin(\omega \tau_s)^2 + 2 d_2 (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega))^2) \\
& - \frac{1}{16} (Kl_{3,1} b_1 - Kl_{3,2} a_1) (2 d_3 (-a_1 \cos(\omega \tau_s) - b_1 \sin(\omega \tau_s))^2 + 2 d_4 \sin(\omega (-2 \tau + 1))^2) \\
& + \frac{1}{4} \\
& Kl_{4,1} (-2 d_1 \sin(\omega \tau_s) \cos(\omega \tau_s) + 2 d_2 (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega)) (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))) \\
& + \frac{1}{4} (Kl_{4,1} b_1 - Kl_{4,2} a_1) (2 d_3 (-a_1 \cos(\omega \tau_s) - b_1 \sin(\omega \tau_s)) (-a_1 \sin(\omega \tau_s) + b_1 \cos(\omega \tau_s)) \\
& + 2 d_4 \sin(\omega (-2 \tau + 1)) \cos(\omega (-2 \tau + 1)))
\end{aligned}$$

**STUDENT** > D2 := 1/8\*(coeftayl(zdot[4, 1],[x, y, u, v] = [0, 0, 0, 0], [2, 0, 0, 0]) - coeftayl(zdot[4, 1],[x, y, u, v] = [0, 0, 0, 0], [0, 2, 0, 0]) - 2\*coeftayl(zdot[3, 1],[x, y, u, v] = [0, 0, 0, 0], [1, 1, 0, 0]));

$$\begin{aligned}
D2 := & \frac{1}{16} Kl_{4,1} (2 d_1 \cos(\omega \tau_s)^2 + 2 d_2 (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))^2) \\
& + \frac{1}{16} (Kl_{4,1} b_1 - Kl_{4,2} a_1) (2 d_3 (-a_1 \sin(\omega \tau_s) + b_1 \cos(\omega \tau_s))^2 + 2 d_4 \cos(\omega (-2 \tau + 1))^2) \\
& - \frac{1}{16} Kl_{4,1} (2 d_1 \sin(\omega \tau_s)^2 + 2 d_2 (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega))^2) \\
& - \frac{1}{16} (Kl_{4,1} b_1 - Kl_{4,2} a_1) (2 d_3 (-a_1 \cos(\omega \tau_s) - b_1 \sin(\omega \tau_s))^2 + 2 d_4 \sin(\omega (-2 \tau + 1))^2) \\
& - \frac{1}{4} \\
& Kl_{3,1} (-2 d_1 \sin(\omega \tau_s) \cos(\omega \tau_s) + 2 d_2 (-a_1 \cos(\omega) - b_1 \sin(\omega)) (-a_1 \sin(\omega) + b_1 \cos(\omega))) \\
& - \frac{1}{4} (Kl_{3,1} b_1 - Kl_{3,2} a_1) (2 d_3 (-a_1 \cos(\omega \tau_s) - b_1 \sin(\omega \tau_s)) (-a_1 \sin(\omega \tau_s) + b_1 \cos(\omega \tau_s)) \\
& + 2 d_4 \sin(\omega (-2 \tau + 1)) \cos(\omega (-2 \tau + 1)))
\end{aligned}$$

[ **STUDENT** > delta := sgn(B1\*D2 + B2\*D1) :

[ **STUDENT** > alpha := (D1\*B1 - D2\*B2)/abs(B1\*D2 + B2\*D1) :

[ Warning, computation interrupted

# Bibliographie

- [1] Uwe an der Heiden. Analysis of neural network. *Lecture Notes in Biomathematics*, 35 :1–15, 1980.
- [2] P. Baldi and A.F. Atiya. How delays affect neural dynamics and learning. *IEEE Trans. Neural Network*, 5 :612–621, 1994.
- [3] J. Bélair. Stability in a model of a delayed neural network. *J. Dynamics and Differential Equations*, 5 :607–623, 1993.
- [4] J. Bélair, S. Campbell, and P. van den Driessche. Frustration, stability and delay-induced oscillations in a neural network model. *SIAM J. Appl. Math.*, 56 :245–255, 1996.
- [5] J. Bélair and S.A. Campbell. Analytical and symbolically-assited investigation of hopf bifurcation in delay-differential eqautions. *Canadian Applied Math. Quarterly*, 3 :137–154, 1995.
- [6] J. Bélair and L. Olien. Bifurcation, stability and monotonicity properties of a delayed neural network model. *Physica D*, 102 :349–363, 1997.
- [7] S.A. Campbell. Stability abd bifurcation of a simple neural network with multiple time delays. *Fields Institute Communication*, 21 :65–79, 1998.
- [8] Sue Ann Campbell, Jacques Bélair, Toru Ohira, and John Milton. Limit cycles, tori, and complex dynamics in a second-order differential equation with delayed negative feedback. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 7(1) :213–236, 1995.
- [9] K. Gopalsamy and I. Leung. Delay induced periodicity in a neural network of excitation and inhibition. *Physica D*, 89 :395–426, 1996.

- [10] J.K. Hale. *Functional Differential Equations*, volume 3 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [11] J.K. Hale and S.M.V. Lunel. *Introduction to Functional Differential Equation*, chapter 10, pages 312–317. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [12] J.J. Hopfield. Neurons with graded response have collective computational properties like two-states neurons. *Proc. Acad. Sci.*, 81 :3088–3092, 1984.
- [13] F.C. Hoppensteadt and E.M. Izhikevich. *Weakly Connected Neural Networks*, volume 126 of *Applied Mathematical Sciences*, chapter 1, pages 1–25. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [14] E. Knobloch and M.R.E. Proctor. The double hopf bifurcation with 2 : 1 resonance. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 415 :61–90, 1988.
- [15] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, chapter 5, pages 148–151. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [16] Victor G. LeBlanc and William F. Langford. Classification and unfoldings of 1 :2 resonant hopf bifurcation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 136 :305–357, 1996.
- [17] S. Mader. *Biologie : évolution, diversité et environnement*, chapter 23, pages 502–510. Trécarré-Goulet, Ottawa, 1987.
- [18] C.M. Marcus and R.M. Westervelt. Stability of analog networks with delay. *Phys. Rev. A*, 39 :347–359, 1989.
- [19] J.H. Martin. *Neuroanatomy :text and atlas*, chapter 1, pages 1–32. Appelton and Lange, USA, 1996.
- [20] R.M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261 :459–467, 1976.
- [21] W.A. McCulloch and W. Pitts. A logical calculus of ideas immanent in nervous activity. *Bull. Math. Biophys.*, 5 :115–133, 1943.
- [22] Leslie P. Shayer and Sue Ann Campbell. Stability, bifurcation and multistability in a system of two coupled neurons with multiple time delays. preprint, 1999.