

**La résolution de problèmes arithmétiques verbaux au primaire :
Microanalyse de la dialectique sujet/matériel**

Élysée Robert Cadet

Thèse présentée à la

Faculté des études supérieures et postdoctorales

dans le cadre du programme de doctorat en éducation

en vue de l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D)

Faculté d'éducation

Université d'Ottawa

© Élysée Robert Cadet, Ottawa, Canada, 2014

Résumé

La résolution de problèmes arithmétiques verbaux demeure très problématique pour l'élève du primaire. Les recherches dans ce domaine privilégient la compréhension de l'énoncé des problèmes. Une recension critique des écrits a confirmé une meilleure réussite avec un matériel disponible par rapport à une condition sans matériel sans pour autant expliciter avec finesse la genèse de cette différence. Dans cette recherche doctorale, six élèves d'une classe régulière de troisième année du primaire ont réalisé trois activités de résolution de problèmes arithmétiques verbaux de type additif dans un environnement familier avec des jetons disponibles comme matériel de manipulation. Une analyse de la réalisation de ces activités selon le prisme de la dialectique sujet/matériel a indiqué un rapport pictural ou symbolique de ces élèves avec un matériel autre que les jetons. Une microanalyse de ces activités a mis en relief l'évolution d'un matériel d'une forme plutôt personnelle à une forme plutôt conventionnelle dans la représentation de ces élèves. Cette évolution, souvent non consciente, présente un comportement de ces élèves dans cette activité qualifié d'être en mathématiques. Pourtant, la conscience de cette évolution peut mener à la réussite de la résolution de ces problèmes.

Mots-clés: résolution de problèmes arithmétiques verbaux, rapport au matériel, être en mathématiques, microanalyse

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Abstract

Solving arithmetic word problems remains highly problematic for primary school students. Research in this field focuses on students' understanding of the word problem text. A critical review of the literature reveals greater student success when concrete materials are available, than when they are not, without ever clarifying in sufficient detail the reasons for this difference. In this doctoral research, six third grade primary school students completed three activities that involved solving addition word problems in a familiar environment in which tokens were available as a concrete material. An analysis of the students' activity focused on the dialectic between subject and material showed that students developed either a pictorial relation or a symbolic relation with a material other than the tokens. A microanalysis of the students' activity highlighted the evolution of this material in the students' representations from a more personal form to a more conventional form. This evolution, often unconscious, represents a form of behaviour in these activities that can be characterised as being in mathematics. Moreover, awareness of this evolution can lead to the successful solution of the problems.

Key-words: Arithmetic word problem solving, concrete materials, being in mathematics, microanalysis

Remerciements

Les études doctorales ont été pour moi non seulement une occasion d'apprentissage académique, mais aussi une expérience de vie enrichissante. Concevoir, formuler et rédiger une thèse a nécessité une profonde introspection. La réflexion sur mes idées, mes valeurs, mon identité et mes croyances en tant que chercheur et en tant qu'être humain a été longue, profonde et ardue. Pourtant, cette réflexion m'a été très précieuse puisqu'elle a provoqué de nombreux changements dans ma personne et dans ma vie.

Au-delà de mon nom qui figure comme auteur de cette thèse, de nombreuses personnes ont contribué à la réalisation de ce projet. Au premier plan, figure mon superviseur Richard Barwell, sans qui ce projet n'aurait probablement pas vu le jour. La très grande générosité de Richard, sa confiance, son ouverture, son honnêteté, sa patience, sa compréhension et son expertise m'ont motivé à mener ce projet à terme. Je remercie beaucoup les autres membres du comité, Raymond Leblanc, Christine Suurtamm et Barbara Graves, d'avoir accepté de partager leur expertise et d'avoir pris le temps de m'accompagner dans le projet. Un remerciement spécial à Phyllis Dalley qui m'a beaucoup soutenu au début du projet. Un remerciement spécial à Raymond Leblanc et à Lucie Deblois qui m'ont beaucoup aidé à la fin du travail.

Comment remercier ma famille, mes parents, mon église qui m'ont soutenu tout au long de cette étape de ma vie, particulièrement durant les moments difficiles. Je n'aurais pas pu surmonter les obstacles sans leur appui, leurs soins, leur écoute, leur compréhension et leur amour. Un merci spécial à ma mère Souvenise Agnès Appoléus et

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

mon père Roger Robert Cadet qui ont toujours été d'un grand secours pour ma famille, de près ou de loin. Je tiens à honorer la mémoire de mes beaux-parents décédés, Gertha Orival et Roger Chrisphonte, pour leur soutien indéfectible à mon épouse et à mes enfants durant leur vie.

Un grand merci va aussi à mon frère Hébert Daniel, mes sœurs Myrlande, Lydie, Lunie, Lina, ma tante Joudaine, mon cousin Brunel, toute ma belle-famille et des amis fidèles qui ont été souvent présents au moment opportun pour voler à mon secours ou à celui de ma famille.

Je remercie mes amis et collègues à l'université d'Ottawa qui ont été d'un grand appui pour moi et qui n'ont pas cessé de m'encourager. J'ai été choyé de rencontrer plusieurs personnes qui ont joué un rôle important durant ce moment de ma vie. La première personne sur cette courte liste est certainement monsieur Saint-Germain à qui je dois un grand tribut de reconnaissance pour avoir frayé devant moi la route vers l'université d'Ottawa où j'enseigne actuellement à temps partiel. Je pourrais prendre plusieurs pages encore à mentionner toutes les autres personnes qui ont été sur mon chemin au cours des dernières années et qui m'ont grandement inspiré pour faire face à certains défis et apprécier la vie. Un éternel remerciement à la source de vie : mon Seigneur et mon Dieu.

Un remerciement spécial à madame Nathalie Rochette, madame Marie Lebourdais et madame Danielle Roberts qui ont frayé la voie d'accès au site de réalisation de cette étude. Un grand merci aux élèves et aux parents qui ont volontiers donné leur accord pour participer directement ou indirectement à cette recherche. C'est

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

grâce à vous que ce projet a vu le jour. Tout le personnel de l'école qui m'ont accueilli à bras ouvert, un grand merci à vous tous.

Enfin, je ne peux terminer sans remercier ma fille Élise Emmanuella, mon fils Émmanuel Jacob pour leur support dans la souffrance alors que leur père était au Canada et eux en Haïti à des milliers de kilomètres de la maison familiale. Un merci exceptionnel à Marie-Jacques, mon épouse et l'amour de ma vie. Les mots ne suffisent pas pour la remercier de sa compréhension, de son soutien et de son écoute, d'avoir joué le rôle de père et de mère durant 10 ans, de m'avoir encouragé jusqu'au bout de ce projet et de n'avoir jamais cessé de m'aimer même dans les moments les plus difficiles. Je dédie cette thèse à vous tous, car sans vous, ce document n'existerait pas.

Table des matières

Résumé	I
Remerciements	III
Table des matières	VI
Liste des figures/tableaux	IX
Introduction	1
Chapitre 1. Recension des écrits	5
1.1. Contexte d'émergence de la recherche	5
1.2. Recension des écrits sur la résolution de problèmes mathématiques	13
1.2.1. Thème 1 : Perspectives théoriques en la résolution de problèmes arithmétiques verbaux dans une classe de niveau primaire	14
1.2.2. Thème 2. Typologie des problèmes arithmétiques verbaux	23
1.2.2.1. Typologie des problèmes arithmétiques de type additif du point de vue sémantique.	24
1.2.2.2. Typologie de problèmes arithmétiques de type additif par rapport au calcul relationnel	26
1.2.3. Thème 3. Comportement de l'élève en situation de résolution de problèmes arithmétiques	29

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

1.2.4. Thème 4. Entrée dans les problèmes arithmétiques verbaux	33
1.2.4.1. Entrée mentale	36
1.2.4.2. Entrée sensorielle	41
1.2.5. Analyse critique des thèmes	47
1.3. Question de recherche	51
Chapitre 2. Cadre conceptuel : Dialectique sujet/matériel	52
2.1. Dialectique sujet/matériel	52
2.2. Matériel/outil	59
2.2.1. Matériel	59
2.2.2. Outil	60
2.3. Sommaire du cadre conceptuel	61
Chapitre 3. Méthodologie	63
3.1. Recherches qualitatives en éducation	64
3.2. Sélection des participants	69
3.3. Instruments de cueillette de données	73
3.4. Procédure de cueillette de données	78
3.5. Première analyse insuffisante des données : rapport au matériel	84
3.6. Microanalyse des données selon la dialectique sujet/matériel	94

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Chapitre 4. Résultats : Dialectique sujet/matériel	101
4.1. Nouvelle recension des écrits	105
4.2. Le dessin	110
4.3. Les doigts comme mode de vérification	131
4.4. Discussion	147
Conclusion	154
Référence	159
Annexes A	180
Annexe B	188
Annexe C	190

Liste des figures/tableaux

Figures

Figure3.1	Modèle de copie d'élève : les traces comme données d'analyse	75
Figure3.2	Organisation spatiale de l'activité	79
Figure3.3	Copie de Ruth, activité 1	87
Figure3.4	Copie de Ruth, activité 2	88
Figure3.5	Copie de Ruth, activité 3	89
Figure4.1	Copie de Jeanne, formes figuratives, activité 1	112
Figure4.2	Copie d'Esther, formes figuratives, activité 1	113
Figure4.3	Copie de Jeanne, formes figuratives, activité 2	115
Figure4.4	Copie d'Esther, formes figuratives, activité 2	116
Figure4.5	Copie de Jeanne, Formes figuratives, activité 3	118
Figure4.6	Copie d'Esther, formes figuratives, activité 3	119
Figure4.7	Copie de Jeanne, formes idiosyncratiques, activité 3	122
Figure4.8	Copie de Jeanne, formes pictographiques, activité 3	123
Figure4.9	Copie de Jeanne, formes iconiques et symboliques, activité 3	124
Figure4.10	Copie de Jeanne, formes symboliques conventionnelles	125
Figure4.11	Copie d'Esther, formes idiosyncrasiques, activité 3	126
Figure4.12	Copie d'Esther, formes idiosyncrasique, activité 2	128
Figure4.13	Copie d'Esther, formes iconiques, activité 2	128

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Figure4.14	Copie d'Esther, formes pictographiques, activité 1	129
Figure4.15	Copie d'Esther, proposition mathématique, activité 1	130
Figure4.16	Copie de Josué, formes iconiques, activité 1	140
Figure4.17	Copie de Josué, proposition mathématique, activité 1	140
Figure C1	Copie de Jeanne, activité 1	191
Figure C2	Copie de Jeanne, activité 2	193
Figure C3	Copie de Jeanne, activité 3	195
Figure C4	Copie de Joëlle, activité 1	198
Figure C5	Copie de Joëlle, activité 2	199
Figure C6	Copie de Joëlle, activité 3	200
Figure C7	Copie de Ruth, activité 1	203
Figure C8	Copie de Ruth, activité 2	204
Figure C9	Copie de Ruth, activité 3	206
FigureC10	Copie de Josué, activité 1	208
FigureC11	Copie de Josué, activité 2	209
FigureC12	Copie de Josué, activité 3	210
FigureC13	Copie de Rosette, activité 1	213
FigureC14	Copie de Rosette, activité 2	214
FigureC15	Copie de Rosette, activité 3	215
FigureC16	Copie d'Esther, activité 1	220

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

FigureC17	Copie d'Esther, activité 2	222
FigureC18	Copie d'Esther, activité 3	223

Tableau

Tableau3.1	Récapitulation des rapports au matériel	93
Tableau4.1	Traces et gestes de Jeanne et d'Esther	111
Tableau4.2	Traces et gestes de Joëlle, de Ruth, de Josué et de Rosette	132

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Introduction.

La question de la compréhension en mathématiques, et plus précisément en résolution de problèmes arithmétiques, reste actuelle. Les recherches conduites depuis deux décennies dans le domaine de la résolution des problèmes arithmétiques verbaux ont confirmé que la difficulté essentielle de ces activités d'apprentissage résidait non pas dans le traitement des opérations (Fayol, Camos et Roussel, 2001; Thévenot, Coquin et Verschaffel, 2006), mais dans la compréhension de l'énoncé des problèmes (Fayol, 2007). Déjà Julo (1995), en tentant de comprendre la problématique de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux chez l'élève du primaire, a identifié la représentation mentale que se fait l'élève du problème à la lecture de l'énoncé comme la principale source d'échec. C'est également l'avis de Bacquet (1996) qui souligne l'importance de la lecture de l'énoncé. Contrairement à Julo, Bacquet estime que la capacité à se faire une image mentale est primordiale pour aider l'élève à décoder et à ordonner les différentes données de l'énoncé.

Pour construire un sens d'une situation donnée des chercheurs suggèrent que l'élève imagine la situation réelle afférente (Bautista et collab., 2009; Berends et Van Lieshout, 2009; Biddlecomb et Carr, 2011; Nunes, Schliemann et Carraher, 1993). Selon, Devidal, Fayol et Barouillet (1997) pour aider cet élève à visualiser cette situation, on peut lui proposer une simulation avec un matériel de substitution qui peut être considéré comme une aide à la représentation de la situation décrite dans l'énoncé du problème. Ce matériel de substitution peut, par exemple, prendre la forme de jetons. La démarche de résolution implique alors l'idée d'agir sur un matériel à l'aide de ses mains. Rabardel (2005) précise qu'il s'agit dans ce cas d'analyser l'activité de l'élève en tant qu'activité

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

proposée par l'enseignant. Poisard (2005) propose alors d'utiliser l'expression activité de résolution de problèmes avec des objets de manipulation. Les mots objet et manipulation utilisés par Poisard se réfèrent à un matériel maniable présenté par un enseignant à ses élèves au cours d'une activité. De façon générale, dans cette étude je parlerai d'activité de résolution de problèmes arithmétiques verbaux ou de résolution de problèmes arithmétiques verbaux avec un matériel disponible, puisqu'un matériel implique entre autre, un objet physique donc maniable chirotalement.

Dans l'analyse des étapes d'une activité de résolution de problèmes, Lauer (2003) et Perkins (1993) ont d'ailleurs démontré qu'aucune étape n'est libre d'outils. Ces chercheurs ont précisé que les représentations externes, les caractéristiques de l'environnement et les objets fabriqués jouent un rôle crucial aussi bien dans la planification et dans l'exécution du plan que dans la vérification de la solution. Dans ces conditions, Mc Donald et collab. (2005) précisent que l'élève réussit mieux la résolution des problèmes avec un matériel disponible que sans un matériel.

En effet, dans la résolution de problèmes arithmétiques verbaux, la lecture silencieuse ou orale de l'énoncé semble offrir un ancrage et l'usage d'un matériel paraît jouer un rôle important. Ainsi, la question de savoir comment comprendre plus finement le rôle du matériel chez l'élève du primaire qui résout des problèmes arithmétiques verbaux avec un matériel disponible constitue le problème de recherche de cette thèse. La présente recherche abordera cette problématique en quatre chapitres.

Le premier chapitre recensera les écrits relatifs à la problématique de la compréhension de problèmes arithmétiques et la résolution subséquente. Le contexte d'émergence de la recherche sera exposé, un état de la littérature relative à la

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

problématique de la résolution de problèmes arithmétiques au primaire sera dressé, et ses apports et ses lacunes seront discutés. Une présentation sur les entrées au problème sera privilégiée. Deux entrées seront mises en relief : une entrée mentale et une entrée sensorielle. L'entrée mentale est caractérisée par la priorisation d'un processus, des concepts ou d'une représentation pour entreprendre une démarche de résolution. Il s'agit dans tous les cas d'une stratégie mentalisée et inaccessible à l'observation externe. L'entrée sensorielle est caractérisée par une stratégie ostensible, donc un geste, l'usage d'un matériel, ou toute autre stratégie observable dans une telle démarche. Une discussion sur l'enjeu de ces entrées dans la formulation de la réponse produite suivra cette présentation. Une section relative aux questions de recherche terminera ce chapitre.

En se référant à la perspective vygotstkienne, le deuxième chapitre sur le cadre conceptuel abordera la dialectique sujet/matériel et présentera une définition du matériel/outil au centre de la dialectique sujet/matériel.

Après une mise au point de la recherche qualitative en éducation et la présentation de la méthodologie microanalytique, le troisième chapitre sur la méthodologie décrira les six élèves participants, le contexte de réalisation de l'activité individuelle de résolution de trois problèmes arithmétiques verbaux, les trois instruments de cueillette de données (observation, entretien semi-structuré et tâche), la procédure de cueillette de données, une analyse des données basée sur mes observations de la réalisation de ces activités par ces participants selon le prisme du rapport au matériel, un exemple de rapport et un sommaire des rapports au matériel. Les descriptions des six rapports relatifs aux six participants seront présentées en annexe. Cependant, en raison de la centration sur l'idée de jeton comme matériel de manipulation et d'un accent particulier mis sur mes observations

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

directes des élèves/participants pendant la réalisation des activités, ces rapports se révéleront insuffisants pour comprendre le fonctionnement de l'idée d'un matériel dans la pensée de ces élèves pendant ces activités. Cette insuffisance sera mise en relief. Pour la combler, je prendrai appui sur la méthodologie microanalytique de la dialectique selon la catégorisation des symboles de Hughes (1986). Cette méthodologie permettra de mettre en exergue l'évolution de l'idée d'un matériel dans la pensée de l'élève passant d'une forme plutôt personnelle à une forme plutôt conventionnelle.

Le quatrième chapitre, en continuité avec le chapitre précédent, analysera les mouvements de la pensée de l'élève selon le prisme de la dialectique sujet/matériel. Par contre, en rupture avec les chapitres précédents, une nouvelle recension due à l'émergence de deux nouveaux thèmes à l'issue de la microanalyse des données sera présentée : la construction de dessins et le comptage des doigts comme mode de vérification. À la lumière de cette nouvelle recension, en comparant et en contrastant, les gestes caractéristiques du comportement des participants au cours de la résolution des problèmes et les traces laissées par ceux-ci seront analysées par problème ou activité. Pour l'ensemble des activités d'une part et pour chaque activité d'autre part, un tableau des indicateurs de compréhension des problèmes arithmétiques verbaux relatifs à la centration du sens de ces problèmes autour d'un matériel sera dressé. Le contexte de l'étude et certaines faiblesses seront présentés.

En conclusion, j'énumérerai les points saillants et les contributions de cette étude. Je proposerai des pistes pour des recherches futures.

Chapitre 1

Recension des écrits

1.1. Contexte d'émergence de la recherche

Les problèmes arithmétiques qui me préoccupent dans cette étude ont été diversement interprétés dans la littérature. Fayol (2007) définit un problème arithmétique comme l'établissement d'une différence entre une situation actuelle et une situation désirée en vue d'éliminer cette différence et de transformer la première situation en la seconde. Le mot situation renvoie aux caractéristiques des événements en lien au geste posé. J'illustre ce sens du problème arithmétique à l'aide du problème suivant : Jean (acteur) a 15 jetons (situation de départ), il en donne 10 à Marie (geste posé). Combien reste-t-il de jetons à Jean (situation finale)? Autrement dit, De Cortes et Verschaffel (1987) suggèrent que cette différence se situe entre des états. Le mot état se réfère alors à la nature des événements en question. Je prends l'exemple du même problème pour illustrer ce deuxième sens : Jean (acteur) a 15 jetons (état initial), il en donne 10 à Marie (transformation). Combien reste-t-il de jetons à Jean (état final)? Dans les deux cas, il s'agit de problèmes à énoncé sous forme de propositions verbales qui présentent une situation de départ et un geste posé pour transformer cette situation de départ en situation finale. Plusieurs chercheurs qualifient ces situations de problèmes arithmétiques verbaux ou à énoncé verbal (par exemples : Bautista, Mitchelmore et Mulligan, 2009; Berends et Van Lieshout, 2009; Biddlecomb et Carr, 2011; Fagnant, Hindryckx et Demonty, 2008; Farrington-Flint, Canobi, Wood et Faulkner, 2010; Fayol, 2007; Garino, Sander et Richard, 2004 et Jordan, Glutting et Ramineni, 2010).

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Dans ma thèse de maîtrise (Cadet, 2002), je me suis référé au modèle de compréhension des concepts de Bergeron et collab. (1990) pour examiner le processus suivi par un élève de troisième année du primaire pour résoudre ces types de problèmes. Baruk (1992) et Legendre (2005) définissent le mot processus comme un enchaînement d'actions. Toutefois, pour Baruk, cet enchaînement est ordonné, répond à un certain schéma et aboutit à quelque chose de spécifique. Pour Legendre, cet enchaînement s'inscrit dans le temps, répond à une certaine évolution et aboutit à un résultat. De ces deux définitions, il en ressort qu'un processus est une suite d'actions évoluant vers un résultat. Cette définition correspond à la situation de la résolution de problèmes arithmétiques de niveau primaire puisqu'un processus implique toujours un développement d'un point de départ à un point d'arrivée.

En effet, dans cette thèse de maîtrise, l'analyse des résultats ne m'a pas permis de conclure à un processus commun mais à une diversité de processus suivi par l'élève du primaire qui résout des problèmes arithmétiques verbaux. À un niveau pratique, en observant des activités de résolution de problèmes dans les classes de mathématiques, j'ai pu identifier deux processus : lecture de l'énoncé, écriture d'un calcul puis vérification du calcul à l'aide d'un matériel ou lecture de l'énoncé, écriture d'un calcul sans vérification observable.

Généralement, en suivant l'un ou l'autre de ces processus, des élèves du primaire résolvent des problèmes arithmétiques dans des classes meublées de matériel de manipulation. Or, j'ai toujours été intrigué par l'impact de ce matériel sur la situation finale. Le concept de matériel de manipulation se réfère ici à une présence d'objets maniables chirotalement comme, par exemple, des jetons, des blocs multibase, des

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

cubes ou tout autre matériel semblable. Aussi, il peut s'agir par extension de représentations imagées telles que dessins ou symboles. Dans les deux cas, il s'agit de matériel physique indépendant des problèmes arithmétiques proposés et susceptibles d'aider l'élève à se faire une juste représentation des problèmes.

Pour Seeger (1998), le mot représentation revêt un double sens : un sens externe, principalement pictural, de diagramme ou de notation, et un sens interne, de cognition. Les concepts de sens externe et de sens interne se réfèrent, par exemple, à l'idée ou à l'image que l'élève se fait du problème. Si cette idée ou image est extériorisée par un dessin, un symbole ou des mots, il s'agit du sens externe. Si cette idée ou image reste au niveau de la cognition sans une mise en forme expressive, il s'agit du sens interne. Il convient, en parlant de cognition, de spécifier de quel type de représentation il s'agit. Dans le cadre de cette recherche, on conviendra que le mot représentation sera considéré dans son sens externe. Par exemple, l'élève peut passer du mot billes dans l'énoncé du problème à un dessin de billes ou au toucher de ses doigts. Dans ce contexte, les balayages visuels de l'élève en écrivant, son comportement avant et au cours de la résolution des problèmes arithmétiques et ses marmonnements ne semblent pas être des gestes désintéressés ou de simples exutoires d'ennui. Ils offrent des pistes intéressantes pour la recherche sur la résolution de problèmes mathématiques. Ces pistes ont fait l'objet de mes réflexions durant plus d'une année. Le présent projet émerge de cette réflexion. Alors, cette recherche qui en émane implique une description fine de l'activité de résolution de problèmes arithmétiques chez l'élève du primaire et la détermination d'un rapport possible entre l'élève qui résout ces problèmes et un matériel. Le cas

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

échéant, un établissement clair du lien entre un tel rapport et la solution aux problèmes devient d'un très grand intérêt pour l'apprentissage de l'élève.

Les côtés concret et familier du matériel physique tels jetons et blocs multibase qui peuplent l'environnement de l'élève semblent contribuer à l'apprentissage de l'élève. Tous azimuts au Canada, les ministères de l'éducation, notamment au Québec et en Ontario, misent sur un apprentissage centré sur l'élève, acteur de son apprentissage (Ministère de l'éducation de l'Ontario [MEO], 2007; Ministère de l'éducation, du loisir et du sport du Québec [MELS], 2009). En Ontario, en particulier, il ne s'agit plus pour l'enseignant de se contenter de situer un élève à l'échelle des niveaux de rubriques de l'Office de la Qualité et de la Responsabilisation en Éducation (OQRE); il est surtout question de la signification de ces rubriques pour l'élève du primaire qui résout des problèmes arithmétiques.

Il incombe à l'enseignante ou à l'enseignant de faire constamment des liens entre la théorie et la pratique et de concevoir des activités qui se fondent sur un apprentissage actif. En misant sur le connu et le concret, il ou elle amènera l'élève à découvrir et à intégrer les concepts à l'étude par l'entremise du questionnement, de la recherche, de l'observation et de la réflexion. L'enseignante ou l'enseignant l'encouragera à situer ces concepts dans un contexte qui lui permettra d'en voir clairement la pertinence et l'application dans le monde qui l'entoure. (MEO, 2005, p.5)

Le Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2005) explique que l'élève apprend par les sens, en particulier par la vision et par l'audition. Dans ce cas, des activités signifiantes et authentiques semblent offrir un cadre intéressant pour comprendre la manière dont il utilise ses sens pour apprendre. Le questionnement, la recherche, l'observation et la réflexion sont des moyens que le Ministère de l'Éducation de l'Ontario privilégie pour comprendre l'apprentissage chez l'élève. La mise en branle de ces

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

moyens suppose, d'une part, l'identification d'activités significantes et d'autre part, l'utilisation d'outils appropriés qui vont aider l'élève à résoudre des problèmes arithmétiques. Au-delà de la réalisation d'activités et de l'utilisation d'outils, le regard porté par l'enseignant sur la production de l'élève n'est pas neutre. Il est teinté de la conception de l'enseignant sur l'apprentissage. Je qualifie cette teinte de charge culturelle.

En général, les salles de classes des écoles occidentales mettent du matériel à la disposition des élèves (OECD, 1999). À l'ère du socioconstructivisme dominant notamment au Canada, les élèves travaillent habituellement en petit groupe (MEO, 2007; MELS, 2009; Radford, 2011). Dans ce cadre, quand ils doivent résoudre des problèmes arithmétiques ou effectuer des calculs, ces élèves peuvent utiliser du matériel. Celui-ci peut être considéré par l'enseignant comme une aide pour les élèves puisque le Ministère de l'Éducation de l'Ontario encourage l'usage du concret dans les classes (MÉO, 2007). Cependant, la résolution de problèmes arithmétiques verbaux demeure problématique au primaire. Le rôle de ce matériel dans les activités de résolution de problèmes arithmétiques peut être d'un grand intérêt. Ce rôle mérite donc d'être finement circonscrit.

Cette préoccupation de cerner avec finesse le rôle du matériel chez l'élève du primaire dans la résolution de problèmes arithmétiques verbaux vient surtout de mes observations de matériel meublant les salles de classes du primaire, notamment au Québec. J'ai pu constater que l'élève du primaire qui résout des problèmes arithmétiques avec usage d'un matériel réussit mieux par rapport à une situation sans matériel. Cette réussite semble être le fruit d'une meilleure représentation et par extension une meilleure

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

compréhension du problème et pour les problèmes arithmétiques verbaux en particulier, un matériel peut être au centre de cette compréhension. Avant de cerner le rôle qu'un matériel jouerait dans une meilleure compréhension de ces problèmes, il est important d'explicitier le terme plus large de compréhension de l'énoncé du problème.

De nombreuses études tant qualitatives que quantitatives sur les sources potentielles de réussite ou d'échec en résolution de problèmes arithmétiques chez les élèves de 8 à 12 ans soutiennent que la compréhension de l'énoncé des problèmes arithmétiques est le meilleur prédicteur de réussite en résolution de ces problèmes (Anderson, 2010; Bautista et collab., 2009; Brissiaud et Sander, 2010; Jordan et collab., 2010; Mercier et Sensevy, 2007; Richard, 1990; Robinson et Dubé, 2009; Thévenot, Castel, Fanget et Fayol, 2010; Van Galen et Reitsma, 2010; Verschaffel et De Cortes, 1997). La compréhension de l'énoncé de problèmes arithmétiques semble influencer la formulation de la réponse sans laquelle cette activité serait réduite à appliquer mécaniquement des règles, des symboles et des manipulations dénués de sens. Pour Bergeron et al. (1990), les diverses activités mathématiques travaillant la formation de concepts, l'application des procédures, la résolution de problèmes, ou la preuve de théorèmes exploitent des aspects souvent différents de l'acte de comprendre. Sans définir l'expression compréhension mathématique, plusieurs chercheurs (Bruner, 1960; Byers et Herscovics, 1977; Skemp, 1976) ont élaboré des modèles pour tenter d'identifier des critères de définition. Un choix judicieux de critères devrait permettre l'analyse cognitive des diverses notions enseignées et, ainsi, rendre explicite ce que l'on entend par compréhension au-delà d'une réponse correcte.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Bruner (1960) présente deux modes complémentaires de pensée pour décrire une compréhension, soit la pensée intuitive (perception globale et implicite d'un problème mais inconscience des processus utilisés pour l'obtention d'une réponse correcte) et la pensée analytique (étapes explicites, pleine conscience des opérations et des informations pertinentes). Skemp (1976) propose une distinction entre compréhension instrumentale (l'application des règles sans raisonnement) et compréhension relationnelle (savoir quoi faire et pourquoi). Byers et Herscovics (1977) ont synthétisé les distinctions de Bruner (1960) et de Skemp (1976) dans un modèle. Ils ont qualifié cette synthèse de contenu modèle. Elle est constituée d'un contenu (les idées mathématiques) et de formes mathématiques (leurs représentations). Ainsi, quatre modes de compréhension sont proposés :

- la compréhension instrumentale se manifestant par la capacité à appliquer à la solution d'un problème une règle appropriée, apprise par cœur, sans savoir pourquoi la règle fonctionne;
- la compréhension relationnelle qui se manifeste par la capacité à déduire des règles ou des processus spécifiques à partir de relations mathématiques plus générales;
- la compréhension intuitive qui se manifeste par la capacité à résoudre un problème sans analyse préalable de celui-ci;
- la compréhension formelle qui se manifeste selon le cas, par la capacité à relier les symboles et la notation mathématique aux idées mathématiques pertinentes ou par la capacité à combiner ces idées dans un enchaînement de raisonnements logiques.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Comme on peut le constater, ces descriptions se limitent essentiellement aux règles et à la résolution de problèmes mathématiques. Cependant, dans le contexte scolaire, les règles et la résolution de problèmes mathématiques s'inscrivent dans des champs d'activités tels que la géométrie, l'algèbre et l'arithmétique, et s'exercent sur des contenus mathématiques bien précis tels des algorithmes d'opérations (addition et soustraction). À ce modèle de Byers et d'Herscovics (1977) sur la compréhension de problèmes, Bergeron et Herscovics (1981) ont ajouté des critères tels que la perception globale, la perception et l'estimation visuelle, la mémorisation, la procédure initiale menant à une première construction d'un concept, à la justification, aux liens et aux relations entre les concepts.

Plus récemment, Bertiot (2010) a posé la problématique de la compréhension des problèmes mathématiques en termes de but à atteindre sans pour autant définir le terme de compréhension. Un problème mathématique vise à vérifier les acquisitions, à introduire des notions nouvelles ou à approfondir des notions déjà connues pour identifier une opération à effectuer. Résoudre un problème mathématique nécessite des connaissances en relation avec le domaine du problème ainsi que la connaissance de stratégies efficaces. Il en ressort de ces études que la résolution de problèmes mathématiques est une activité en trois étapes : la lecture, les liens à établir et la relation mathématique à utiliser.

De façon sommaire, au-delà des formes de pensée (Bruner, 1960), de l'application des règles (Skemp, 1979), des formes d'idées mathématiques (Byers et Herscovics, 1977), de la perception et de la mémorisation (Bergeron et al., 1990) et de la détermination d'un résultat à atteindre (Bertiot, 2010), comprendre un problème semble

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

être la construction d'un modèle de ce problème. De plus, au-delà des niveaux de difficulté, des liens à établir et de la relation mathématique à utiliser, résoudre un problème paraît être une démarche entreprise pour construire un sens du problème et formuler une réponse conforme au sens construit.

Très souvent, l'enseignant du primaire propose à l'élève du primaire des problèmes arithmétiques verbaux à résoudre dans un environnement de classe peuplé de matériaux divers, comme, par exemple, des jetons et des blocs multibase (MELS, 2009). Dans de telles situations, de nombreuses recherches confirment une meilleure réussite avec un matériel par rapport à une situation sans matériel (McDonald, Le, Higgins et Podmore, 2005; Olkun, Sinan et Toluk, 2005; Pearn, 2007; Schmitz et Winskel, 2008; Varela et collab., 2008). Ces chercheurs suggèrent que le matériel permet aux jeunes élèves de simuler concrètement la situation décrite par les problèmes arithmétiques verbaux. Cette simulation peut faciliter la résolution de ces problèmes (Barrouillet et Camos, 2002; Jenkins, 2005; Lauer, 2003; Mercier et Sensevy, 2007). Toutefois, la résolution de problèmes arithmétiques reste problématique pour l'élève du primaire.

1.2. Recension des écrits sur la résolution de problèmes mathématiques

Cette problématique m'interpelle et mène à la question suivante : comment un élève du primaire aborde-t-il un problème arithmétique verbal et formule-t-il une réponse? Pour répondre à cette question, il me faut d'abord situer la résolution de problèmes arithmétiques dans les perspectives théoriques en didactique des mathématiques. Ensuite, il me faut préciser le concept de problèmes arithmétiques verbaux. Il me faut aussi revisiter la littérature sur la résolution de problèmes

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

arithmétiques verbaux chez l'élève du primaire. En général, dans cette recension, quatre thèmes ont émergé qui constituent quatre sous-sections :

- les perspectives théoriques qui sous-tendent la littérature sur la résolution de problèmes arithmétiques en didactique des mathématiques;
- les typologies des problèmes arithmétiques verbaux;
- le comportement de l'élève du primaire abordant des problèmes arithmétiques verbaux;
- les entrées dans les problèmes arithmétiques verbaux;

Le quatrième thème sera abondamment développé car il constitue un fondement de cette étude. À ces quatre thèmes s'ajouteront deux sections. La première section présentera une analyse critique des thèmes. La deuxième section sera une formulation de la question ainsi que des sous-questions de recherche.

- Analyse critique des thèmes;
- Question et sous-questions de recherche

Ce chapitre comprendra dans l'ensemble trois sections soit : contexte d'émergence de la recherche, recension des écrits sur la résolution de problèmes arithmétiques et question et sous-questions de recherche.

1.2.1. Thème 1: Perspectives théoriques en résolution de problèmes arithmétiques verbaux dans une classe de niveau primaire

Les littératures francophone et anglo-saxonne sur la résolution de problèmes arithmétiques verbaux que j'ai recensées m'ont permis de mettre en exergue quatre courants théoriques dominants en didactique des mathématiques. Ce sont : la

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

transposition didactique, les situations didactiques, les champs conceptuels et l'objectivation. Dans les paragraphes suivants, je présenterai successivement ces quatre courants, tout en les situant dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux.

Chevallard (1985) présente la théorie de la transposition didactique comme une théorie de l'enseignement et définit l'enseignant comme un adulte, représentant de l'institution scolaire et détenteur d'un savoir. Il propose le concept d'« adulisme » pour signifier l'état de savoir de l'adulte, celui qui sait. Alors, il explique la transposition comme une altération du savoir au cours de son transfert du savoir savant au savoir enseigné. C'est-à-dire, le transfert de l'adulte enseignant qui sait à l'élève enseigné qui apprend. Dans ce cadre, la théorie de la transposition didactique peut être comprise comme une explication des conditions d'enseignement d'un savoir par un représentant de l'institution scolaire. L'intérêt de la théorie chevallardienne pour mon étude est son explication de l'expression « conditions d'enseignement ». Chevallard (1985) explique l'expression « conditions d'apprentissage » comme une manière d'appropriation du savoir et les outils utilisés pour la réalisation de cette appropriation. Chevallard (1985) appelle l'ensemble de ces conditions une tâche technologique pour se référer à la composante médiative (voir Roditi, 2005) de l'apprentissage. L'idée force de la théorie de la transposition didactique est que l'enseignement est fortement teinté du savoir et du savoir-faire de l'enseignant puis que c'est lui qui organise son enseignement. Chevallard (1985) précise d'ailleurs l'arrière-plan anthropologique de sa théorie. En résumé, selon cette théorie, l'enseignant est un passeur culturel, détenteur du sens :

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

La transposition didactique est, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'enseignement sans transposition, elle n'est pas un effet pervers, une dénaturation, mais une transformation normale, à laquelle nul n'échappe lorsqu'il veut transmettre un savoir. (Chevallard, 1985, p. 70)

En suivant le raisonnement de Chevallard (1985), toute transmission doit être explicitement effectuée par l'enseignant. Si l'élève produit une réponse autre que celle prévue par cet enseignant, c'est alors un glissement de sens. Chevallard (1985) explique le concept de glissement de sens comme un écart entre ce que l'enseignant propose de communiquer à l'élève et ce que cet élève apprend. C'est aussi l'idée d'un savoir savant que l'enseignant détient et qu'il doit rendre «digestible» à l'élève sous forme de savoir à enseigner puis de savoir enseigné. L'enseignement est au cœur de cette théorie.

L'apprentissage de l'élève est une conséquence d'un travail de transposition. Alors, dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux par un élève du primaire, si cet élève ne peut pas résoudre ces problèmes et que l'enseignant lui a dispensé un enseignement à ce sujet, c'est qu'il y a un glissement de sens de la part de l'élève. Les situations dans lesquelles l'enseignement a été présenté et celles dans lesquelles les problèmes ont été résolus semblent être laissées au rencart dans cette théorie. Cependant, Brousseau (1998, 2004b) semble prendre en compte ces situations dans la théorie des situations didactiques.

En effet, Brousseau (1998) fait remonter la didactique à Cornélius, penseur tchèque qui privilégie l'idée de la grande didactique selon laquelle, il est possible d'enseigner avec plaisir à tout le monde, de façon infaillible sans fatigue, ni ennui. Son idée centrale est que tout vient de la nature immuable des choses. En réaction à cette conception générale et purement spéculative de la didactique classique, Brousseau (1990, 1998) propose une conception de la

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

didactique qui dépend de la connaissance qui est l'objet de cet enseignement. Brousseau explique que l'enseignement produit chez les élèves des formes de connaissances qui varient selon les conditions didactiques et qui diffèrent des savoirs de référence. Sur cette base, Brousseau (2004a, 2004b) a échafaudé une théorie des situations didactiques et l'a ainsi défini :

La théorie des situations didactiques en mathématiques (TSDM) est déterminée par la conception d'un ensemble de conditions qui fasse qu'un sujet doive nécessairement utiliser un objet donné comme moyen pour obtenir un certain résultat. Ces conditions ne sont pas *a priori* indépendantes les unes des autres ni indépendantes de l'objet ainsi défini. Elles seront modélisées par un ou des systèmes mathématiques appelés « situations » et formellement structurées comme des « jeux » mathématiques. Un objet mathématique sera donc défini par sa fonction dans au moins un tel jeu. (Brousseau, 2004b, p. 245)

Dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux, comprendre un problème mathématique c'est reproduire les conditions d'acquisition du savoir mathématique en jeu dans le problème. Brousseau (1990) appelle cet ensemble de conditions, la « situation fondamentale » qu'il définit pour l'essentiel comme la tâche proposée par l'enseignant à l'élève. Il s'agit ici d'une première explication de la théorie des situations didactiques. En effet, dans cette explication, Brousseau fait table rase de l'aspect environnemental du phénomène didactique (Kuzniak, 2004). Par exemple, la résolution de problème arithmétique verbal se résumerait au traitement de la situation mathématique présentée dans ce problème. Comprendre cette situation mathématique serait d'être capable de reproduire les conditions d'acquisition du savoir mathématique en jeu dans cette situation. Les conditions d'acquisitions font référence au savoir fondamental, élément-clé de la première explication de la théorie des situations didactiques de Brousseau.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Brousseau (2004b) a ensuite élargi sa théorie en incluant les concepts de contrat didactique et celui de dévolution. Il s'agit ici d'une deuxième explication. En effet, Brousseau (1998) définit le contrat didactique comme l'ensemble des comportements de l'enseignant attendus de l'élève et l'ensemble des habiletés de l'élève attendues de l'enseignant. Il présente la dévolution comme l'appropriation d'une tâche par l'élève. L'ensemble définit le milieu de l'apprentissage. Kuzniak (2004) commente cette deuxième explication en précisant un niveau de finesse intéressant dans la considération de l'aspect environnemental du phénomène didactique. Par exemple, le problème arithmétique verbal proposé par l'enseignant à l'élève ne se réduit plus à la situation mathématique présentée dans l'énoncé du problème mais aux conditions générales de résolution telles que, la posture de dévolution de cet enseignant et le contrat didactique tacite ou express qui est privilégié.

Au-delà d'une centration sur l'enseignant (Chevallard) ou sur la situation (Brousseau), dans le cadre des problèmes arithmétiques verbaux, les concepts utilisés pour présenter le problème semblent être aussi déterminant dans la compréhension du sens du problème. Vergnaud (1991, 2008) en a tenu compte dans la théorie des champs conceptuels.

Dans cette théorie Vergnaud (1991, 2008) suggère que les concepts sont porteurs du sens des problèmes arithmétiques. Vergnaud (1991) a échafaudé sa théorie sur le concept de « théorème en acte » et l'explique comme l'influence des différents usages d'un mot qui contribuent à la construction de sens. Par exemple, dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes arithmétiques verbaux, si je comprends le sens des concepts en question, cette activité me permet de mieux comprendre ce concept tout en élargissant le champ d'application du concept et la compréhension de l'activité. En effet Vergnaud (1991) propose cette définition du champ conceptuel :

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

...est à la fois un ensemble de situations et un ensemble de concepts;
ensemble de situations dont la maîtrise progressive appelle une variété de
concepts, de schèmes et de représentations symboliques en étroite connexion;
ensemble de concepts qui contribuent à la maîtrise de ces situations.

(Vergnaud, 1991, p. 140)

Alors, dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes arithmétiques verbaux par un élève du primaire, si l'élève qui résout les problèmes n'a pas repéré puis compris les concepts qui sont présentés, il ne peut pas les résoudre. Comprendre un problème, c'est identifier puis définir les concepts qui contribuent à la maîtrise de la situation décrite dans ce problème. Vergnaud (1991, 2008) précise que les concepts sont dépositaires du sens des situations. D'un point de vue différent, Bergeron et collab. (1990) a présenté un modèle de compréhension des concepts mathématiques qui s'articule sur les idées de compréhension logico-physique (exemple : appréhension visuelle globale ou correspondance bi-univoque entre les objets) et celle de compréhension logico-mathématique (exemple : invariance de la position et de la mesure de la position d'un objet). Il s'agit toutefois d'une explication qui s'inscrit dans le courant cognitiviste piagétien et qui se limite à la compréhension des concepts arithmétiques. En effet, de façon générale, selon une conception socio-constructiviste de la compréhension des concepts dans laquelle s'inscrit cette étude, les concepts font partie de l'histoire des individus porteurs d'une culture. Saisir le sens d'un concept suppose la compréhension de son usage et de son évolution culturelle. Cependant, la compréhension des concepts d'un énoncé de problème n'est pas gage de la compréhension de la situation décrite dans ce problème. Le cas échéant, cette compréhension semble dépendre des connaissances antérieures de l'élève en lien avec ce problème. Toutefois, je dois à Vergnaud le choix des concepts utilisés dans l'élaboration des énoncés d'activité de résolution de problèmes

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

arithmétiques qui soient compréhensibles à l'élève auquel ces problèmes sont destinés.

En même temps, pour Vergnaud, les concepts sont considérés sans cerner l'élève qui doit résoudre ces problèmes ni comment il se fait une idée du savoir à apprendre dans ces problèmes ni non plus la manière dont l'élève formule ses idées pour produire une réponse. Dans les faits, il s'agit de savoir comment l'élève objectivise ces problèmes.

Radford (2011) a, à cet effet, proposé une solution avec sa théorie de l'objectivation (voir aussi: Radford, 2003, 2006, 2013).

L'objectivation est une conception d'après laquelle la pensée est *sensible* et *historique*. Elle est *sensible* dans le sens où la pensée invoque de manière fondamentale nos sens dans la saisie de ses objets. De ce point de vue, les gestes, la perception, le corps, les signes et les artefacts sont considérés comme des parties constitutives de la pensée. (Radford, 2011, p. 2)

Pour illustrer cette conception de la théorie de l'objectivation, je peux prendre l'exemple d'un savoir mathématique dans un problème arithmétique. L'élève, culturellement situé qui doit résoudre ce problème, se le représente dans l'environnement dans lequel il se trouve en utilisant les objets qui peuplent cet environnement. Radford (2011) précise d'ailleurs que sa théorie s'inscrit dans le courant socio-culturel (voir : Vygotsky, 1934/1078) et la philosophie matérialiste dialectique (voir Hegel, 2001; Marx, 1979). En effet, l'esprit humain est complexe. Radford (2006) constate que le modèle behavioriste de stimulus-réponse est décidément insuffisant pour comprendre les multiples aspects de l'apprentissage et veut combler cette insuffisance. La théorie de l'objectivation propose alors un point de vue constructiviste de l'apprentissage (Radford, 2002, 2003, 2006, 2011, 2013). L'idée centrale de la théorie de l'objectivation élaborée essentiellement dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques est que l'apprentissage est à la fois une

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

connaissance et un changement (Radford, 2003, 2011). Radford (2013) explique que la connaissance est d'abord conçue comme une forme de fabrication de biens, un mouvement, une séquence culturelle et historiquement codifiée en actions qui sont constamment instanciées et actualisées dans la pratique sociale. Radford (2013) explique ce changement par l'instanciation, l'actualisation de la connaissance et qualifie aussi d'apprentissage les conditions de sa réalisation. Les termes connaissance, savoir et apprentissage semblent alors être imbriqués. Il propose la consubstantialité du savoir et des conditions de sa réalisation dans la construction du savoir. Dans le cadre de la résolution des problèmes arithmétiques verbaux par un élève du primaire, en utilisant le prisme de l'objectivation, si l'élève qui résout ces problèmes arithmétiques verbaux n'a pas pu produire de réponses correctes aux problèmes qui lui ont été proposés et qui ont été considérés à sa portée c'est parce qu'il n'était pas parvenu à objectiver le savoir dans ces problèmes. C'est-à-dire, l'élève n'a pas pu réfléchir sur le savoir mathématique dans le problème les objets de l'environnement dans lequel il résout ces problèmes. Ainsi, apprendre les mathématiques n'est plus apprendre à savoir les mathématiques mais apprendre à être en mathématiques. Radford (2006) affirme que son inspiration de l'être en mathématiques est issue des travaux de l'anthropologue Geertz (1979) qui a décrit les limites d'une conception selon laquelle la pensée est un processus exclusivement intra-cérébral :

L'idée communément acceptée selon laquelle le fonctionnement de la pensée est un processus intracérébral qui peut seulement être assisté ou amplifié en second lieu par les divers dispositifs artificiels que le dit processus a permis à l'homme de créer, s'avère complètement erronée. À l'opposé d'une définition adaptative impossible et complètement spécifique des processus neuronaux en terme de paramètres intrinsèques, le cerveau humain est entièrement dépendant de ressources culturelles pour sa propre activité; et ces ressources

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

ne sont pas, par conséquent (des ressources) complémentaires de l'activité mentale mais constitutives de celle-ci. (Geertz, 1979, p. 76)

Le caractère médiatisé de la pensée renvoie au rôle qu'exercent les sens, le corps et les artefacts (objets, instruments, matériel manipulable, systèmes de signes, etc.) dans les interactions sociales et en conséquence dans les actions individuelles. Les artefacts ne sont plus considérés comme des aides à la pensée comme les psychologues cognitivistes le soutiennent, ni de simples amplifications, mais des parties constitutives de celle-ci. Alors, les gestes d'un élève du primaire qui résout un problème arithmétique verbal sont considérés selon la théorie de l'objectivation non comme l'expression d'une pensée invisible et inaccessible à l'observation externe, mais constitutive d'une pensée sensible, historique et accessible à l'observation externe.

Les théories de la transposition didactique de Chevallard, des situations didactiques de Brousseau et des champs conceptuels de Vergnaud ont contribué à expliciter l'apprentissage de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux en précisant respectivement le rôle de l'enseignant (Chevallard), celui de la situation au sens large c'est-à-dire une situation qui inclut le milieu (Brousseau) et celui des concepts présentés dans le problème. Cependant, dans le cadre de la résolution d'un problème arithmétique verbal par exemple, ces théories ne proposent pas d'explication sur la manière dont l'élève se construit un sens du problème et produit une réponse. Radford (2002, 2003, 2006, 2011) propose à cet effet, une théorie de l'objectivation pour expliquer la réponse d'un élève à un problème mathématique. Plus est, cette objectivation est le fruit d'une réflexion du savoir dans le problème qui inclut des objets de l'environnement. Dans cette étude, en poursuivant dans cette voie tracée par Radford, j'analyserai finement le rôle

d'un matériel dans la résolution d'un problème arithmétique verbal par un élève du primaire. Une meilleure compréhension des problèmes arithmétiques verbaux s'impose alors. Pour ce faire, je préciserai dans la section suivante les typologies de problèmes arithmétiques verbaux.

1.2.2. Thème 2: Typologie des problèmes arithmétiques verbaux

La typologie des problèmes arithmétiques verbaux se réfère à la mise en relief d'une composante des problèmes comme, par exemple, la situation décrite dans l'énoncé ou le calcul en jeu qui balise le sens de la situation présentée dans le problème. En utilisant le mot orientation pour se référer à une typologie des problèmes arithmétiques verbaux, Depaepe, De Corte et Verschaffel (2009) divisent les problèmes arithmétiques selon deux grandes orientations : le récit orienté qui renvoie à une centration sur le sens, les mots, donc le contexte **sémantique du problème** et le paradigme orienté qui fait référence aux calculs et aux **relations mathématiques sous-jacentes**. En effet, le mot orientation renvoie au geste à poser pour résoudre le problème, comme par exemple, un calcul à effectuer ou une situation à préciser. Cette répartition semble être solidement supportée par la littérature (Arkiguet-Bakong, 2008; Carpenter et Moser, 1982, 1983; Carpenter, Hiebert et Moser, 1981; Fayol, 1982, 1990; Riley et collab., 1983, Vergnaud, 1982).

1.2.2.1. Typologie des problèmes arithmétiques de type additif du point de vue sémantique

Riley et collab. (1983) considèrent la mise en relief de certains éléments caractéristiques des problèmes arithmétiques verbaux tels, les accroissements, diminutions, combinaisons et comparaisons comme le reflet de l'aspect sémantique de ces problèmes. Leur prise en compte a amené divers auteurs (Carpenter et Moser, 1982, 1983; Carpenter, Hiebert et Moser, 1981; Riley et collab., 1983) à élaborer progressivement une typologie de problèmes en fonction de ces éléments. Ces caractéristiques sont établies en fonction du type de situation, des opérations en jeu (addition et soustraction) et de l'identité de l'élément inconnu. Il y a plusieurs catégories dans cette typologie et il suffit de présenter les grands ensembles. Ce sont les problèmes de type changement, les problèmes de type combinaison et les problèmes de type comparaison (Fayol, 1990) :

- Les problèmes de type changement (réunion ou séparation) impliquent au moins une transformation temporelle appliquée à un état initial et aboutissant à un état final. Par exemple : Jean avait des billes (état initial). Il en donne 10 à Pierre (transformation). Maintenant Jean a 24 billes (état final). Combien Jean avait-il de billes?
- Les problèmes de type combinaison concernent des états et non des transformations. Par exemple : Jean et Pierre ont ensemble 24 billes (état initial). Jean a 10 billes (état initial). Combien Pierre-a-t-il de billes (état final)?
- Les problèmes de type comparaison ont un statut intermédiaire entre les problèmes de type combinaison de par les états des situations évoquées et ceux de type changement du fait de la transformation impliquée. Par exemple, dans un

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

problème de type égalisation : Jean a 14 billes (état initial). Pierre a 10 billes (état initial). Que doit faire Pierre pour avoir autant de billes que Jean (transformation et état final)?

Cette catégorisation met l'accent sur le sens des situations décrites dans les problèmes comme dans l'usage des mots accroissement, diminution, combinaison et comparaison qui traduisent tous un geste posé ou le résultat d'un geste posé. Akiguet-Bakong (2008) a de son côté proposé une catégorisation de problèmes arithmétiques verbaux semblable, sauf, qu'elle privilégie le terme réunion pour indiquer la combinaison et le terme catégorie de problème pour signifier le type de problème. Voici cette catégorisation :

- La catégorie « **réunion** » porte sur des situations statiques, c'est-à-dire sans impact sur une collection donnée. Joseph a 3 bonbons (état initial). Yves a 4 bonbons (état initial). Combien de bonbons Joseph et Yves ont-ils ensemble (réunion, état final)?
Les problèmes de cette catégorie consistent à trouver le total. Joseph et Yves disposent des mêmes quantités de bonbons même après la mise en commun. Car, il ne s'agit pas de don ni de perte.
- la catégorie « **changement** » décrit une transformation appliquée à un état initial et aboutit à un état final. Exemple : Albert avait des bonbons (état initial). Il en a gagné 4 (transformation). Albert a maintenant 7 bonbons (état final). Combien Albert avait-il de bonbons? L'inconnue concerne l'état initial;
- la catégorie « **comparaison** » se rapporte à des quantités à l'aide de formules du type « plus que / moins que ». Exemple : Julien a 3 bonbons (état initial). Steve a 7 bonbons (état initial). Combien de bonbons Steve a-t-il de plus que Julien

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

(comparaison)? Les problèmes consistent à trouver la grande partie, la petite partie, ou la différence.

En général, cette typologie met l'accent sur le sens des situations décrites dans les problèmes à partir des concepts qui sont utilisés. Il s'agit d'agir sur un état c'est-à-dire dans le cadre de cette étude, un élément de la situation que présente le problème comme, par exemple, avoir 20 billes et transformer cet état par un geste comme, par exemple, donner 7 billes à quelqu'un. Ce geste a pour effet de transformer la collection de 20 billes en une collection de 13 billes. Dans chacun de ces problèmes, il s'agit dans les faits d'effectuer un calcul. Puis qu'il s'agit de problèmes de type additif, il s'agit précisément d'effectuer une addition ou une soustraction. Arkiguet-Bakong, (2008) précise à ce propos une cohérence et même une imbrication entre le récit orienté et la procédure de calcul. Toutefois, la mise en relief du calcul définit une typologie de problèmes arithmétiques verbaux proprement dite, celui du calcul relationnel.

1.2.2.2. Typologie de problèmes arithmétiques de type additif par rapport au calcul relationnel

Le calcul relationnel se réfère aux opérations de pensée nécessaires pour élucider les relations qu'entretiennent les composantes des problèmes. Considérant alors le seul calcul relationnel, Vergnaud (1982) a isolé six types de relations en fonction de trois types principaux de concepts : la mesure, les transformations temporelles et les relations statiques. Il propose une définition pour chacune des relations. En effet, selon Vergnaud le mot mesure renvoie aux dimensions d'une grandeur ou à la cardinalité d'un ensemble, les transformations temporelles font référence à un changement circonscrit dans le temps,

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

par exemple, le fait de gagner ou perdre, les relations statiques définissent une relation entre des situations non marquée par un changement, comme par exemple, le fait d'avoir plus ou moins d'objets qu'un pair n'affecte pas sa collection. Les six types de relation sont ainsi :

- la composition de deux mesures (mise en commun de collections par exemple):

Ce type de situation renvoie à l'addition des nombre naturels $\mathbb{N}$. Ex : Jean a 18 billes dans sa poche droite et 24 billes dans sa poche gauche. Combien a-t-il de billes en tout?

Le mot composition est ici utilisé dans le sens d'effectuer des calculs, c'est-à-dire dans le cadre de ces types de problèmes, additionner ou soustraire.

- la transformation reliant deux mesures

Dans ce type de problème, une transformation relie deux mesures et aboutit au schéma état-transformation-état. Ex : Jean avait 24 billes avant de jouer (état initial). Il a perdu 10 billes (transformation). Combien a-t-il de billes maintenant (état final)?

- la relation statique entre deux mesures (relation non marquée par un changement de taille d'une collection). Il n'y a pas de transformation, il s'agit juste de comparer sa collection avec une autre.

Ces problèmes correspondent à ceux de type comparaison dans la classification de Riley et al. Exemple : Jean a 24 billes. Il a 10 billes de plus que Pierre. Combien Pierre a-t-il de billes?

- la composition de deux transformations

Ce type de problèmes correspond à une opération interne dans $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs) avec des états dynamiques. Exemple : Jean a gagné 24 billes ce matin. Il a perdu 10 billes cet après-midi. Combien-a-t-il de billes maintenant? La collection initiale est ici

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

affectée par la perte enregistrée. Le mot transformation est utilisé dans le sens de modification effectuée sur la collection initiale. C'est pourquoi, il s'agit d'état dynamique et non d'état statique.

■ la transformation entre deux relations statiques

Ce type de problèmes correspond encore à une opération interne dans Z mais avec des états statiques. Exemple : Jean devait 24 billes à Pierre. Il lui en donne 10. Combien de billes Jean doit-il encore à Pierre? Même si c'est Jean qui a à donner à Pierre mais c'est avant tout Pierre qui a à recevoir. Car la collection de Jean s'il en a une n'est pas mentionnée dans le problème.

■ la composition de deux relations statiques

Ce type de problèmes correspond à une relation de combinaison qu'entretiennent deux états statiques. Exemple : Jean doit 24 billes à Pierre. Pierre doit 18 billes à Jean. Combien de billes Jean doit-il donner à Pierre pour acquitter la dette? Il s'agit ici d'un double jeu de donner et de recevoir avec lequel chacun doit composer.

J'aurais pu m'inspirer de l'une ou de l'autre des deux typologies, mais celle de Riley qui met l'accent sur les caractéristiques sémantiques des problèmes est plus congruente avec mon étude. Elle présente une structure qui facilite la compréhension de l'enjeu du problème arithmétique, comme par exemple la comparaison, au-delà du calcul à effectuer. L'objectif de la présente étude n'est pas d'analyser finement les typologies des problèmes arithmétiques de type additif. Mon intérêt est le comportement de l'élève du primaire en lien avec la présence d'un matériel au cours de la réalisation de cette activité.

1.2.3. Thème 3: Comportement de l'élève en situation de résolution de problèmes arithmétiques

En effet, l'énoncé en tant que récit, suggèrent Adam (1992) et Fayol (1986) comporte un certain nombre d'événements orientés vers un même but. Le traitement de cet énoncé par l'élève semble exiger de sa part une aptitude à pouvoir se construire une représentation ou un modèle mental (Johnson-Laird, 1983) de chacun des événements décrit par le récit ainsi que leur cohérence interne par rapport au problème posé. Arkiguet-Bakong (2008) précise à cet effet que l'élève face à un problème arithmétique a donc à faire un premier effort mental de représentation de la cohérence interne du problème qui dépend de la représentation détaillée de chacun des événements présentés dans l'énoncé. Depaepe, De Corte et Verschaffel (2009) ajoutent que la résolution d'un problème arithmétique serait limitée par la difficulté à pouvoir repérer la cohérence interne de l'énoncé à travers la prise en compte des données qui y sont indiquées. Dans ces données, le calcul joue un rôle majeur puisque ce sont avant tout des problèmes arithmétiques. Alors, dans le cadre de cette étude, il s'agit précisément d'une addition ou d'une soustraction à effectuer. Après dix ans de recherche sur le comportement des élèves du primaire au cours de la résolution des problèmes arithmétiques de type additif, Carpenter (1985) et Carpenter et Moser (1983) notent à cet effet que l'élève du primaire se comporte différemment selon qu'il s'agit d'un problème d'addition ou de soustraction.

Trois groupes de procédures peuvent être utilisés concernant la résolution de problèmes nécessitant le recours à des additions.

- Une réunion physique de deux (ou plus) ensembles faisant l'objet de l'addition et tout compter en commençant par un, même en connaissant le cardinal de chaque composante. Une variante consiste en une réunion des doigts de la main qui

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

représenteraient les collections. Il s'agirait d'une simulation de la situation présentée dans l'énoncé du problème.

- La seconde procédure repose sur le comptage à partir d'une collection connue soit la première ou la plus grande et le comptage s'effectuerait jusqu'à atteindre la cardinalité de la réunion des collections. Dans ce cas, l'usage des doigts de la main diffère de la procédure précédente. En effet, les doigts sont utilisés non pour le comptage proprement dit mais pour contrôler le déroulement du comptage et pour éviter les dépassements ou les oublis, donc pour s'assurer de l'exactitude du résultat.
- La procédure la plus moins concrète est le rappel mental des faits numériques qui correspondent au calcul à effectuer, comme par exemple $(19 + 21 = 40)$ stockés en mémoire à long terme.

Ces trois procédures impliquent l'idée de recours à un matériel plus ou moins physique.

Le non usage d'un matériel physique semble marquer l'évolution d'une procédure qui se distancie peu à peu d'un matériel physique et/ou de sa représentation. Toutefois, toutes ces procédures renvoient à une addition à effectuer et non à une soustraction.

Plus est, Fayol (1990, p. 158) rapporte que l'élève du primaire qui résout des problèmes arithmétiques fait usage de procédures similaires quand ces problèmes se réfèrent à une soustraction et alors six processus différents peuvent être représentés:

- Séparer de (separating from) : L'élève fabrique l'ensemble le plus grand, enlève ensuite le plus petit et compte ce qui reste. Il aboutit ainsi à la réponse par comptage sans objet. Cette procédure consiste à compter à rebours à partir du plus

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

grand, un par un, jusqu'à avoir compté le plus petit des termes; dès lors, le dernier nombre fournit la réponse.

- Séparer jusqu'à (separating to) : Cette procédure est équivalente à la précédente, sauf que les éléments sont enlevés du plus grand ensemble jusqu'à ne laisser subsister que le nombre correspondant au plus petit des deux termes fournis. Comme comptage, cela revient à compter à rebours (counting down to) à partir du plus grand des deux termes fournis jusqu'à atteindre le plus petit et dénombrer les éléments de la séquence obtenue.
- Addition : Partir de la plus petite des quantités fournies et aller à la plus grande en augmentant de un à un, le nombre d'éléments ajoutés fournit la réponse. Cette procédure peut s'effectuer par des manipulations (adding on) ou par comptage mental (counting up from given).
- Mettre en correspondance (matching) les éléments de deux ensembles puis dénombrer ceux qui restent. Elle n'est applicable qu'à des objets ou à des représentations physiquement présentes. Elle se révèle impossible mentalement.
- Il s'agit d'une procédure mixte, consistant à utiliser tantôt le counting down to, tantôt le counting up from given en fonction des caractéristiques des données fournies.
- Récupérer directement en mémoire à long terme des faits numériques ($6-4=2$) ou leurs dérivés. Par exemple : $17-8 = (16-8) + 1 = 9$.

La procédure de Fayol (1990) se base foncièrement sur les opérations à effectuer puisqu'il est question de retrait et de séparation d'ensembles d'éléments. De façon sommaire, la réponse produite porte l'empreinte du calcul.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Fayol et Abdi (1986) puis Fayol, Abdi et Gombert (1987) ont soumis oralement des séries de problèmes de type changement différant quant à l'inconnue recherchée ainsi que par l'ordre de présentation des informations avec des élèves de première, de troisième et de cinquième année primaire en contrôlant leur niveau de maîtrise de résolution de ces problèmes.

Les données recueillies et analysées en ne considérant que les procédures utilisées peuvent être listées comme suit :

- Les problèmes à état final inconnu sont, à tout âge, facilement résolus, cela à l'aide de procédures pertinentes et homogènes. Il n'en va pas de même dans lesquels la recherche porte sur l'état initial.
- Le placement de la question en premier lieu dans l'énoncé entraîne une amélioration systématique des scores, cela à tout âge et pour tous les types de problèmes.
- Le placement des transformations avant la mention de l'état s'associe à de meilleures performances.
- La facilitation apportée par le placement en tête des questions se marque surtout avec les problèmes les plus difficiles (ceux portant sur la recherche d'état initial).
- L'absence d'interaction, l'impact, l'ordre des informations et la place de la question dans l'énoncé selon l'âge de l'élève, permettent de considérer que les effets inventoriés ci-dessus restent quelque soit le niveau de développement (dans les limites considérées ici).

L'état initial inconnu, la place de la question dans l'énoncé, l'âge des élèves, l'ordre de présentation des informations dans l'énoncé, l'absence ou non d'interaction semblent,

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

entre autre, influencer l'aisance des élèves en résolution de problèmes arithmétiques de type additif. De plus, Nesher et Katriel (1977) précisent au sujet du rendement des élèves dans la résolution de ces problèmes que l'organisation mathématique sous-jacente et la formulation de l'énoncé jouent un rôle considérable dans la résolution. De Cortes et Verschaffel, (1987) ajoutent d'autres facteurs non négligeables tels que la taille des données numériques et l'ordre d'introduction de celles-ci.

En résumé, l'activité de résolution de ces problèmes est explicitée à la lumière du sens que l'élève qui résout ces problèmes confère à l'énoncé. Par la lecture peut naître le sens. Du sens naît une démarche de résolution. Pourtant, la résolution de ces problèmes demeure problématique au primaire. Cette problématique se situe à un niveau plus profond que celui défini jusqu'à date par la littérature dans ce domaine. Dès l'emprise de l'énoncé du problème arithmétique de type additif, les élèves du primaire semblent privilégier une démarche pour résoudre ce problème. Dans cette étude, j'ai qualifié cette démarche d'entrées dans le problème. Et, au-delà des états, je privilégierai l'ensemble de la situation présentée dans le problème.

1.2.4. Thème 4: Entrées dans les problèmes arithmétiques verbaux

J'ai circonscrit la problématique de la compréhension de problèmes arithmétiques chez les élèves du primaire aux entrées possibles dans ces problèmes (Fayol, 2007; Fayol, Camos et Roussel, 2001; Kail et Hall, 1999; Mercier et Sensevy, 2007; Richard, 1990; Verschaffel et De Cortes, 1997). Pour les problèmes arithmétiques verbaux de type additif, l'entrée dans les problèmes se réfère à «l'idée privilégiée» par l'élève pour résoudre ces problèmes. Elle renvoie aussi aux gestes posés par l'élève dès la prise de

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

possession du texte présentant ces problèmes. Par exemple, l'élève se fait une image du problème, il fait choix des concepts-clés, d'un processus ou d'une simulation de la situation décrite dans l'énoncé.

En effet, Bardini, Sabena et Radford (2005) ont, en général, distingué trois grandes entrées ou sources de construction du sens mathématique : la source symbolique telle les nombres, les formules et les graphiques; la source kinesthésique, qui fait référence à la projection du corps sur le monde à travers l'action matérielle, les gestes et la dimension sensorielle en général; enfin, la source technologique, qui a trait au rôle de médiation que jouent les artefacts dans la réalisation d'une activité. Radford (2002) a suggéré qu'il existe entre ces sources une relation dialectique qui demeure toutefois mal connue. Le terme source rend mieux l'idée de la centration d'un regard porté sur la culture, les traditions et les pratiques de l'élève qui résout le problème. Il s'agit précisément d'un regard fixé en arrière. Par contre, le terme entrée se réfère à l'idée du problème à résoudre tout en tenant compte de la culture, des traditions et des pratiques de celui qui doit le résoudre. Il s'agit dans ce cas d'un regard porté en avant, sur le problème à résoudre. Cette distinction entre entrée et source marque un changement de posture. Je propose le terme entrée dans le reste du texte pour se référer à l'appropriation de l'énoncé du problème puisque l'idée d'un mouvement de la pensée au cours d'une activité de résolution de problèmes arithmétiques semble être mieux exprimée par l'usage du mot entrée. Ce mouvement que je qualifie de dialectique sera examiné au chapitre 4, section 6 à un niveau micro.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

En effet, dans le cadre de la réalisation des activités de résolution de problèmes arithmétiques de type additif, en privilégiant les entrées comme facteur déterminant de réponse, deux entrées ont émergé : une entrée mentale et une entrée sensorielle. L'entrée mentale est caractérisée par des stratégies de résolution non accessibles à une observation externe. Il s'agit, par exemple, de la priorisation de la situation décrite dans le problème arithmétique, des concepts qui y sont présentés ou d'une représentation imagée. Par contre, l'entrée sensorielle est caractérisée par un geste qui accompagne la résolution du problème arithmétique et qui reflète la pensée de l'élève qui résout ce problème. Dans cette étude, l'entrée mentale est caractérisée par la priorisation du processus, des représentations ou des concepts pour entamer la résolution du problème. Il s'agit dans tous les cas de stratégies dont la portée est saisissable uniquement par l'expression orale de celui qui résout ce problème et/ou par ses traces. Par contre, l'entrée sensorielle est caractérisée par une démarche kinesthésique visible comme un geste, une suite d'actions et l'utilisation de matériel. Dans tous les cas, ce sont des stratégies sensorielles accessibles à l'observation externe. À propos de ces stratégies, je souscris à l'idée de Radford (2002, 2003, 2006, 20011, 2013) que les gestes d'un élève qui réalise une activité de résolution de problèmes mathématiques sont constitutifs de sa pensée. Toutefois, dans le cadre de la résolution des problèmes arithmétiques verbaux, il me faut d'abord mieux comprendre l'élève qui utilise l'entrée mentale pour avoir une meilleure idée du comportement de cet élève durant cette activité. Pour ce faire, je développerai dans les sections suivantes l'entrée mentale qui englobe le processus, les représentations et les concepts.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

1.2.4.1. Entrée mentale

Dans une entrée mentale, au-delà de la modélisation de la situation présentée dans l'énoncé du problème à résoudre, selon que l'élève qui résout ce problème privilégie un processus donné, une représentation du problème ou des concepts évocateurs de sens pour comprendre le problème et entamer la résolution, les études semblent diviser respectivement les entrées en entrée par le processus, entrée par les représentations et entrée par les concepts.

a. Entrée par le processus.

L'entrée par le processus se réfère à une suite d'étapes privilégiée par l'élève pour saisir un sens du problème. Les travaux de Carpenter et Moser (1983), conduits dans la perspective des différences individuelles, ont mis en évidence une relation entre type de problèmes et processus. Voici un sommaire des explications de Carpenter et Moser (1983) au sujet de cette relation :

- Les situations de séparation avec résultat inconnu induisent très fréquemment une procédure de séparation de, alors que les situations de comparaison entraînent le plus souvent le recours à la mise en correspondance.
- Cette relation très forte en première année tend à s'affaiblir très rapidement et très sensiblement au cours des deux années suivantes. Par conséquent, les élèves de première année mettent en œuvre des procédures de résolution qui tendent à simuler les actions décrites dans les énoncés. Chez les élèves de deuxième année, la simulation persiste et est de plus en plus abstraite et les élèves utilisent de plus en plus le comptage mental. Ces procédures dépendent de moins en moins strictement des situations décrites dans les énoncés.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Chez les élèves de troisième année, dépendamment de la taille des nombres en jeu, les procédures de comptage cèdent peu à peu la place à la récupération directe des résultats en mémoire à long terme.

Ces différentes procédures mettent en relief des stratégies de résolution de problèmes arithmétiques de plus en plus mentalisées en fonction de l'âge et de la taille des nombres en jeu : de la correspondance à des objets physiques à la simulation de la situation décrite dans l'énoncé du problème, puis à la récupération directe en mémoire à long terme.

Plus récemment, une recherche quantitative de Piia, Kaisa et Jari-Erik (2008) a proposé l'idée que dégager le processus dans un problème à énoncé verbal, c'est identifier le fil conducteur. Les auteurs ont proposé des problèmes arithmétiques verbaux à 225 élèves de 9-10 ans pour vérifier l'impact du niveau de la compréhension en lecture sur l'habileté à résoudre ces problèmes. Par niveau de compréhension en lecture, il s'agit de la capacité de lire le texte et de s'en faire une juste idée selon un continuum de justesse qui va de plus ou moins juste à très juste. Ils ont conclu à une forte relation entre la réussite du problème et le niveau de compréhension en lecture. Aussi, ils ont noté une meilleure réussite chez les filles en compréhension de texte. Par contre, cette différence n'a aucune incidence sur l'exactitude des réponses aux problèmes qui, selon eux, dépend de la maîtrise des algorithmes de calcul. Par ailleurs, il semble établir une corrélation entre le niveau de lecture et le rendement en résolution de problèmes à l'écrit. La présence d'éléments extérieurs à l'énoncé lui-même (image, matériel) et les modalités de formulation du texte du problème paraissent influencer la réponse produite.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Pour l'essentiel, il ressort que pour des problèmes arithmétiques verbaux, l'efficacité de l'entrée par le processus est liée à la compréhension en lecture. Toutefois, cette compréhension ne se révèle pas être le seul indicateur de réussite puisque celle-ci semble aussi dépendre de la maîtrise des algorithmes de calcul. L'entrée par le processus offre l'avantage de la connaissance des étapes à suivre pour résoudre un problème. Elle présente, par contre, l'inconvénient de ne pas bien définir la nature du problème à résoudre. En considérant cet avantage et cet inconvénient, je me demande si l'entrée par la représentation n'est pas plus facilitant pour l'élève qui résout le problème. La section suivante abordera cette question.

b. Entrée par les représentations.

Denis (1989) précise qu'il y a activité de représentation lorsqu'un objet ou lorsque les éléments d'un ensemble d'objets se trouvent exprimés, traduits, figurés, sous la forme d'un nouvel ensemble d'éléments, et qu'une correspondance systématique se trouve réalisée entre l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Rosenthal et Resnick (1974) ont présenté à des élèves de troisième année de l'école primaire des problèmes arithmétiques additifs du type $a + b = c$ dans lesquels l'inconnue porte tantôt sur l'état initial, tantôt sur l'état final ($? + b = c$ vs $a + b = ?$). Les résultats ont révélé que les problèmes à état initial inconnu présentent plus de difficultés que les autres, ils donnent lieu à plus d'erreurs et à une durée de résolution significativement plus élevée. De plus, la construction d'une représentation initiale dépend de deux facteurs. D'une part, lors de la résolution de problèmes, l'élève tend à simuler en action déployée à l'extérieur ou intériorisée, les événements décrits. D'autre part, la relative facilité de certains problèmes avec lesquels les élèves sont plus ou moins tôt et vite familiarisés est la conséquence de la

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

plus ou moins grande facilité à « mimer » tel ou tel déroulement des actions décrites dans ce problème.

Aussi, à partir d'une étude de cas sur l'habileté à résoudre des problèmes arithmétiques chez un groupe de six élèves de huit ans Vincent (1997) a conclu que:

- Les jeunes enfants ne constituent pas des terrains vierges lorsqu'ils entreprennent l'exploration de notions nouvelles. Ils disposent de représentations, dont certaines peuvent être fort évoluées.
- Quelle que soit la discipline, les représentations des enfants ne sont ni spontanées ni fortuites mais sont le résultat de connaissances antérieures. Il y a un intérêt pour les chercheurs à mieux scruter le faire et le dire des élèves au-delà de la formulation de leurs réponses.

Plus récemment, Alibali, Phillips et Fischer (2009) ont proposé des problèmes d'équivalence à 81 élèves de troisième et de quatrième années. Les participants ont effectué une évaluation de leur représentation à partir d'une brève lecture de problèmes similaires. Puis, ils ont reconstruit chaque problème et identifié un ensemble de solutions de rechange. Les élèves ont été partagés de façon aléatoire en deux groupes : un groupe expérimental qui a reçu un enseignement sur les stratégies d'addition et de soustraction et un groupe témoin qui n'a pas bénéficié d'un enseignement. Les résultats ont révélé que l'apprentissage de nouvelles stratégies apporte des changements au niveau de la représentation du problème, le groupe expérimental obtient des résultats supérieurs par rapport au groupe témoin. Néanmoins, certaines stratégies se sont révélées plus efficaces que d'autres. Les chercheurs n'ont toutefois pas pu identifier avec finesse ces types de stratégies. En effet, re-présenter implique présenter à nouveau. Il serait donc intéressant

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

de comprendre comment l'élève s'est représenté le problème ou comment le problème est présenté à l'élève avant que ce dernier ne se fasse une idée claire sur une représentation pertinente. Dans une présentation du problème, les concepts qui composent l'énoncé semblent jouer un rôle déterminant puisque ce sont, entre autres, eux qui portent la situation présentée dans ce problème. La section suivante traitera de l'entrée par les concepts.

c. Entrée par les concepts.

Vergnaud (1990, 1991, 1994, 2008) offre une riche documentation sur les concepts en résolution de problèmes arithmétiques. Vergnaud (2008, p. 97) donne une définition concise du mot concept : « le concept est la signification des mots ». C'est-à-dire ce qui est signifié à l'aide des mots utilisés. Dans cette recherche, la notion de concept est prise dans le sens de ce que l'élève comprend des mots lus. Par exemple, dans un problème comme celui de type combinaison (Jean a 34 billes. Marie a 71 billes. Combien ont-ils de billes en tout?), les mots combien et en tout sont des concepts dans le sens de Vergnaud. Car, ils désignent une quantité à préciser à l'aide d'une combinaison (addition) à effectuer.

Dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques de type additif, Robinson et Dubé (2009) précisent que les enfants en début de scolarité comprennent les concepts d'inversion (changement d'opération en conservant les même collections) (addition et soustraction) : $(a+b)$ et $(a-b)$ et d'associativité $(a+b+c)$ ou $(b+c+a)$ (addition de plus de deux collections). De plus, lorsque ces concepts sont présents dans un énoncé de problème, si les élèves les maîtrisent, il n'est plus nécessaire de calculer pour résoudre ce problème. En effet, la recherche consistait au départ à enseigner aux élèves la façon

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

d'appliquer les deux concepts. Les chercheurs ont proposé à trois groupes de 26 élèves de deuxième, troisième et quatrième années à résoudre des problèmes d'inversion et d'associativité. Ils devaient choisir librement entre une approche conceptuelle (expliquer les opérations) et une approche algorithmique (poser les opérations). Les résultats ont démontré que certains participants des trois groupes avaient compris les deux concepts, d'autres avaient compris seulement la notion d'inversion. Une dernière catégorie avait une compréhension faible de ces deux concepts. Ces résultats de Robinson et Dubé (2008) mènent à la conclusion que la compréhension de ces deux concepts commence dès les premières années d'école. Alors, puisque l'environnement de réalisation d'une activité de résolution de problèmes arithmétiques semble influencer la réponse produite (Radford, 2002, 2003, 2006, 2011), que la compréhension de ces problèmes demeure problématique au primaire (Fayol, Camos et Roussel, 2001; Thévenot, Coquin et Verschaffel, 2006) et que de nombreuses recherches confirment une meilleure réussite avec un matériel par rapport à une situation sans matériel (McDonald, Le, Higgins et Podmore, 2005; Olkun, Sinan et Toluk, 2005; Pearn, 2007; Schmitz et Winskel, 2008; Varela et collab., 2008), l'usage d'un matériel donné peut favoriser la résolution de ces problèmes. La prochaine section présentera l'entrée sensorielle.

1.2.4.2. Entrée sensorielle

L'entrée sensorielle dans l'activité de résolution de problèmes arithmétiques est caractérisée par la manifestation de gestes pour s'approprier le savoir mathématique dans le problème, entreprendre une démarche de résolution et produire une réponse. C'est-à-dire une entrée par les gestes à travers les sens. Les chercheurs en question soutiennent

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

que le matériel sert de support, d'aide à l'élève en situation de résolution de problèmes arithmétiques (McDonald et collab., 2005; Olkun et collab., 2005; Pearn, 2007; Poisard, 2005; Schmitz et Winskel, 2008; Varela et collab., 2008). Toutefois, ce deuxième groupe diverge en deux sous-groupes : la centration sur le matériel (McDonald et collab., 2005; Pearn, 2007; Poisard, 2005) et l'interaction due à la présence de matériel (Olkun, Sinan, Toluk, 2005; Schmitz et Winskel, 2008; Varela et collab., 2008).

Dans un premier sous-groupe, c'est la réification du matériel, c'est-à-dire chosifier, rendre le matériel comme objet. C'est surtout l'aspect tactile qui est mis de l'avant. Mc Donald et al. (2005) observent que les études dans des salles de classe ont tendance à se concentrer sur le discours et la qualité de l'interaction sociale, même lorsqu'un matériel est utilisé alors qu'on devrait se concentrer sur l'utilisation du matériel.

Dans une étude ethnométhodologique sur l'apprentissage des fractions chez des élèves du primaire, Pearn (2007) a noté qu'une faible connaissance des nombres entiers peut nuire aux élèves dans leurs efforts pour apprendre les fractions. Les élèves qui ont réussi des tâches sur les nombres rationnels présentent une meilleure connaissance des nombres entiers et des stratégies de résolution plus souples. Par contre, ils avaient besoin d'être compétents dans les quatre opérations de nombres entiers et de faire preuve d'une compréhension de la mesure pour comprendre les nombres rationnels. L'approche mains sur (hands-on) développée par le chercheur se concentre sur l'utilisation du pliage de papier, des murs de manipulation de fraction et des bandes pour développer une compréhension des fractions. Cependant, la structure multiplicative des fractions diffère de celle additive des problèmes de mon étude. Le sens d'aire et de volume des fractions

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

renvoie à une pensée à un espace à deux et trois dimensions, donc plus complexe que la structure linéaire de l'addition (Poirier, 2001). Toutefois, l'approche « mains sur » (hands on) utilisée dans cette étude de Pearn (2007) peut être applicable à cette recherche puisque pour Roditi (2004) la désignation de l'objet physique joue un rôle majeur dans la compréhension des nombres en général. Pour résoudre un problème arithmétique de type additif, l'accent semble être moins sur les dimensions de l'objet physique que sur la désignation de cet objet. Le cas échéant, le toucher et la vue utilisés conjointement peuvent contribuer à une meilleure désignation des objets physiques d'une collection.

Dans l'autre sous-groupe, c'est l'idée de focus sur l'interaction sociale en présence d'un matériel qui semble faciliter l'apprentissage des élèves. Varela et al. (2007) ont ainsi exploré comment les jeunes élèves, dans les écoles urbaines, forment spontanément des concepts à partir de leurs expériences au quotidien. Ces concepts sont ensuite repris par des chercheurs, puis soumis à une analyse systématique. Ils peuvent ainsi se transformer en concepts scientifiques. Le qualificatif scientifique qui s'adjoint au mot concept se réfère aux mots utilisés ayant une base empirique ou théorique. Il s'agit en général de concepts présentés par la littérature savante comme, par exemple, le concept d'artefact qui désigne du matériel fabriqué et le concept d'outil qui est considéré comme un facilitateur d'accès à un savoir. Il s'agit toutefois d'une définition pratique. L'étude ethnographique de Varela et al. (2007), montre comment les artefacts matériels utilisés dans une activité de tri sont devenus des outils mentalisés qui favorisent la participation des élèves à la science et façonnent le discours en classe, la réflexion et les transactions.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

En outre, Schmitz et Winskel (2008) ont procédé à une étude tout à fait semblable mais avec des nombres entiers et ont conclu que la construction du sens pour l'élève est inextricablement liée à divers facteurs socio-organisationnels : la façon dont l'élève négocie son rôle au sein de son groupe, comment les élèves du groupe ont travaillé les uns avec les autres et comment leurs idées ont été entendues par les autres. Leur rendement est positivement corrélé à ces différents facteurs. Il s'agit toutefois d'une faible corrélation. Les chercheurs ont constaté que les élèves qui discutent du choix ou de l'usage du matériel soit avec l'enseignant ou avec un pair réussissent mieux par rapport à ceux qui ont utilisé le matériel sans interactions.

Dans chacun de ces sous-groupes de cette école de pensée, que ce soit la centration sur le matériel ou l'interaction sociale en présence d'un matériel, les recherches restent muettes sur l'apport des tiers dans la production de la réponse. Même si les résultats sont meilleurs avec un matériel par rapport à une situation sans matériel, la circonscription de l'apport de ce matériel dans la solution produite n'est pas claire. Même lorsque le matériel est présent, c'est le discours sur ce matériel qui retient l'attention de l'observateur, chercheur ou enseignant. Le geste qui accompagne la réalisation de l'activité est négligé au profit du discours et de la cognition.

Sommairement, de l'ensemble des études recensées, il semble se dégager trois points essentiels :

- La résolution de problèmes arithmétiques à énoncé verbal passe par la compréhension en utilisant deux entrées principales : une entrée mentale et une entrée sensorielle.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Au-delà du débat conceptuel sur la compréhension apparaît un autre débat de fond : pourquoi la résolution de problèmes arithmétiques demeure encore problématique au primaire comme le révèlent de nombreuses études (Bautista et collab., 2009; Berends et Van Lieshout, 2009; Biddlecomb et Carr, 2011; Fagnant et collab., 2008; Farrington-Flint et collab., 2010; Fayol, 2007; Garo et collab., 2010; Jordan et collab., 2010; MELS, 2009)? Les précédentes recherches sur le matériel et la résolution de problèmes arithmétiques m'interpellent puisque les principaux résultats ont confirmé une meilleure réussite pour l'élève qui résout le problème avec un matériel disponible par rapport à une condition sans matériel (McDonald et al., 2005; Olkun et al., 2005; Pearn, 2007; Poisard, 2005; Schmitz et Winskel, 2008; Varela et al., 2008).
- Quelle que soit la méthodologie utilisée (ethnographie, ethnométhodologie et test d'hypothèse), le sens du problème tel qu'il est saisi par l'élève peut échapper aux chercheurs. Pourtant, l'élève est acteur de son apprentissage. Même lorsque la parole est donnée à l'élève comme auteur d'une production, par exemple les traces d'une solution à un problème, certaines formes expressives souvent révélatrices de la compréhension échappent à nouveau aux chercheurs. Il s'agit d'un fin niveau d'observation du comportement de l'élève qui résout des problèmes arithmétiques qui semble jusque-là peu appréhendé par la recherche en didactique des mathématiques. Radford (2002, 2003, 2006, 2010) propose toutefois la théorie de l'objectivation qui semble inspirante pour comprendre ce comportement. Je m'en suis d'ailleurs grandement inspiré dans cette recherche.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Cette théorie soutient une conception sensible et historique de l'apprentissage où le savoir n'est plus assimilation ou construction mais réflexion sur un savoir culturellement constitué, sur le monde visible en accord avec le mode d'activités subjectives de l'individu. L'objectivation tranche avec la conception mentaliste de l'apprentissage dominante en éducation en général et en didactique des mathématiques en particulier. La théorie de l'objectivation présente, par contre, certaines limites. Tel que défini par Radford (2006, p. 70), l'apprentissage est comme «une réflexion du monde visible d'un objet de savoir culturellement constitué en accord avec le mode d'activités subjectives de l'individu. Même si Radford explique le mode d'activités subjectives par une imbrication de la subjectivité et de l'objectivité, l'action en cours de réalisation n'est pas explicitée par cette théorie. Deux individus éduqués dans un même environnement ne réagissent pas de façon semblable. Aux confins des recherches recensées, l'omniprésence du matériel dans les classes mathématiques au primaire, comme par exemple des jetons, (Fayol, 1990; MELS, 2009) mène à circonscrire la problématique d'un rapport possible au matériel chez l'élève du primaire qui résout des problèmes arithmétiques verbaux de type additif puisque cet élève qui réalise cette activité ne semble pas utiliser tout le matériel à sa disposition. Pour Rosenthal (2004, p. 232) : «La forme des objets (matériel manipulable) n'en est pas le contour géométrique : elle a un certain rapport avec leur nature propre et parle à tous nos sens en même temps que la vue ».

La fréquence des activités de résolution de problèmes arithmétiques verbaux de type additif et la disponibilité du matériel dans les classes du primaire présentent des pistes d'investigation pour la compréhension de cette activité chez l'élève et méritent une étude approfondie. Le rapport au matériel paraît dépasser sa dimension géométrique.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

L'élève semble utiliser plusieurs sens dans un tel rapport. Par contre, les résultats sont, d'une part, non concluants et d'autre part, les méthodes utilisées jusque-là n'offrent pas le niveau de granularité me permettant de comprendre ce rapport chez l'élève du primaire. La présente étude vise à contribuer à expliciter le comportement de l'élève dans cette activité en lien avec l'usage d'un matériel. Par conséquent, il me faut avoir une meilleure idée du comportement de l'élève en général. La section suivante analysera les thèmes de l'étude élaborés à partir de la littérature en résolution de problèmes arithmétiques.

1.2.5. Analyse critique des thèmes

Je dois à Brousseau d'avoir précisé l'enjeu de la situation didactique dans les problèmes arithmétiques, objet de la présente étude. Plus précisément, cette recherche vise à comprendre le comportement de l'élève du primaire qui résout des problèmes arithmétiques verbaux en lien avec l'usage d'un matériel. La finesse de la typologie des problèmes arithmétiques de type additif et le rôle de la culture dans l'élaboration des concepts utilisés sont une contribution importante de Vergnaud (champs conceptuels). Chevallard (transposition didactique) de sa part a mis en relief le rôle de l'enseignant comme passeur culturel au centre de l'activité de l'élève puisque la position d'élève suppose la médiation d'un enseignant. Par contre, les situations didactiques, les champs conceptuels et la transposition didactique proposent un objet mathématique traité mentalement par l'élève selon une pensée invisible et une logique interne directement inaccessible à l'observation externe. Cet objet mathématique que l'élève s'approprie pour entreprendre une démarche de résolution de problèmes peut toutefois être accessible par expression orale ou par production de traces. Par contre, l'objectivation s'éloigne de

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

l'idée de l'esprit qui opère replié sur lui-même et où l'objet suit les lois de la logique interne, comme l'ont proposé les rationalistes tels Descartes et Leibniz, qui servent de fondement aux théories des situations didactiques de Brousseau, des champs conceptuels de Vergnaud et de la transposition didactique de Chevallard. Mon étude est en rupture avec la pensée rationaliste qui sous-tend ces trois théories. Inspiré de la théorie de l'objectivation de Radford, je propose une explication du geste de l'élève en activité non comme une expression de sa pensée mais comme constitutif de celle-ci. C'est une pensée accessible à l'observation externe.

L'objectivation ressemble toutefois à la théorie des transpositions didactiques par sa portée anthropologique. Elles sont toutes deux inscrites dans l'histoire. Elles diffèrent, par contre, par le statut accordé au savoir. Selon la théorie de la transposition didactique, le savoir est construit dans une pensée inaccessible même s'il est intégré dans une culture commune. Il est construit dans une pensée dont l'esprit est replié sur soi et invisible. Par contre, pour Radford (2002, 2003, 2006), ce savoir historique et sensible est accessible à l'observation externe. De façon plus précise, les objets mathématiques sont des savoirs dont le sens a été expliqué auparavant et incrustés dans le monde en constant changement de pratique sociale médiatisée par des artefacts (objets matériels fabriqués). Tout objet de savoir est inscrit dans une chaîne sémantique alimentée en continu d'interactions passées et présentes. Le geste qui accompagne l'apprentissage n'est plus une expression de la pensée mais une pensée sensible et inscrite dans une culture, donc historique. Toutefois, une question de fond se pose : comment l'objectivation du savoir mathématique en résolution de problèmes arithmétiques verbaux de type additif s'opérationnalise-t-elle dans une pensée agissante et visible de celui qui résout ces problèmes?

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Pour Radford (2002, 2003, 2006, 2010), saisir un objet de savoir dans un problème mathématique c'est l'objectiver. L'objectivation d'un objet mathématique est un savoir être en mathématiques. Apprendre n'est plus assimiler comme les empiristes le soutiennent, ni construire comme les constructivistes le défendent mais réfléchir un objet de savoir sur un monde visible où les sens par des gestes rendent visible l'acte de réflexion comme la théorie de l'objectivation le propose.

En amont à la compréhension des gestes de cet être en mathématiques que suggère la théorie de l'objectivation, il y a lieu de saisir un rapport au matériel chez l'élève qui résout des problèmes puisque les manifestations des gestes supposent l'usage d'un matériel et/ou la projection du corps sur les objets de l'environnement d'une classe meublée d'une diversité de matériaux. Le problème de la compréhension de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux en lien avec l'usage d'un matériel est complexe. Il se pose en termes de processus de compréhension de problèmes à un fin niveau de granularité selon le rapport de l'élève au matériel. Ce rapport est nourri de référents culturels.

L'édifice théorique en didactique des mathématiques construit depuis les années 70 m'a permis de comprendre le comportement général de l'élève qui résout des problèmes arithmétiques en utilisant deux entrées : une entrée mentale et une entrée sensorielle. Comme j'ai mentionné précédemment, dans ces études, le dire a été cerné, le faire l'a moins été. Certaines dimensions de la compréhension du problème par l'élève sont verbalement inarticulables (Rosenthal, 2004). La théorie de l'objectivation de Radford (2002, 2003, 2006) m'a permis de comprendre les aspects sensoriel et historique de l'apprentissage en termes de produit du savoir et non en termes de processus de

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

formation de ce savoir chez l'élève en réflexion sur les objets du monde visible. Pourtant, tout ce qui est exprimé et réalisé fait partie de cette réflexion constitutive de la pensée sur l'objet de savoir. Une méthodologie fine semble s'imposer pour comprendre l'activité de résolution de problèmes arithmétiques verbaux de type additif chez l'élève du primaire.

Dans l'ensemble des études recensées dans ce chapitre, les chercheurs ont utilisé les prismes rationaliste, empiriste et constructiviste pour comprendre l'appropriation d'un sens saisi par les élèves dans les différentes activités de résolution de problèmes mathématiques. Selon ces théories, le savoir s'approprie selon une logique interne dans une pensée invisible, accessible par le discours (parole, mot) et inaccessible à l'observation externe. Par contre, la théorie de l'objectivation échafaudée par Radford (2002, 2003, 2006, 2011, 2013) sur les assises du courant socio-culturel (Vygotsky, 1934) et de la philosophie matérialiste dialectique (Marx, 1973 et Hegel, 2001) tranche avec les présupposés rationalistes de l'apprentissage. Radford propose une objectivité et une subjectivité imbriquées dans la réflexion de l'objet de savoir sur le monde visible. La pensée devient accessible à l'observation externe par le geste, les actions, les signes, les symboles, la médiation des artefacts dont le matériel. La pensée devient agissante et l'objet d'apprentissage devient un savoir-être plutôt qu'un savoir. Par exemple, apprendre les mathématiques devient apprendre à être en mathématiques. L'objet de savoir étant culturellement constitué, le je devient un je communautaire fondamental et social toujours en interaction avec les pairs. La théorie de l'objectivation soutient en même temps un cadre d'activités subjectives sans définir avec finesse la manière dont ce sujet construit le savoir en question dans ces activités. Une attention plus approfondie à l'activité individualisée de l'élève devient d'un grand intérêt. De plus, comme je l'ai

mentionné dans la section précédente, deux individus éduqués dans un même environnement ne réagissent pas de façon semblable. Il devient intéressant de procéder à une microanalyse de cette activité de l'individu. Plus précisément, dans le cadre de cette étude, il s'agit de décrire et d'interpréter le comportement de l'élève en activité de résolution de problèmes arithmétiques verbaux, donc de mener une recherche qualitative.

1.4. Question et sous-questions de recherche

Alors, dans un environnement habituel de matériel disponible au cours de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux de type additif au primaire, il convient de comprendre en amont l'utilisation du matériel chez l'élève : le rapport au matériel chez l'élève selon la dialectique sujet/matériel. La finesse de la granularité d'une telle étude mène à une analyse de niveau micro. D'où ma question de recherche : Quel est le rôle du matériel dans la résolution de problèmes arithmétiques verbaux chez l'élève du primaire selon une micro-analyse de la dialectique sujet/matériel? De cette question, je déduis trois sous-questions :

1. Quel matériel l'élève utilise-t-il?
2. Selon la dialectique sujet/matériel, quel rapport l'élève établit-il avec ce matériel?
3. Comment la dialectique sujet/matériel se manifeste-t-elle?

Chapitre 2

Cadre conceptuel : Dialectique sujet/matériel

L'idée d'un rapport au matériel chez l'élève, le sujet qui résout des problèmes arithmétiques verbaux paraît pertinente. Si le matériel est considéré dans un rapport dialectique avec l'élève, c'est alors une dialectique sujet/matériel. Elle constitue l'objet du présent chapitre qui sera divisé en trois sections. La première section définira le concept de dialectique sujet/matériel. Ensuite, la deuxième section présentera le matériel/outil. Un sommaire du cadre conceptuel marquera la fin du chapitre.

2.1. Dialectique sujet/matériel

Ricard (1999) définit la dialectique comme une structuration du savoir dans la pensée, c'est-à-dire, un mode de construction des idées. Dans cette lignée, Hegel (2001) suggère que la dialectique est une construction du savoir dans la pensée basée sur la contradiction et surtout sur le dépassement de la contradiction (voir aussi : Hegel, 1977, 2009; Marx, 1973). Hegel (2001), un philosophe, propose une compréhension de la dialectique qu'il qualifie de matérialisme dialectique. Pour lui, la contradiction est sociale et se précise dans la lutte à l'appropriation des biens, génératrice des classes sociales. Une sorte de dynamisme interne attribué au matériel est central dans cette conception de la dialectique (Hegel, 2001, 2009). Les travaux de Marx s'inscrivent précisément dans ce courant de pensée. Douady (1986), une didacticienne des mathématiques, conçoit aussi la dialectique en termes de relation entre la pensée et le savoir. Par contre pour elle, au lieu d'une contradiction, la dialectique renvoie à un changement en lien aux outils utilisés. Le

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

changement est central dans la dialectique. Selon elle, chaque domaine du savoir se réfère à l'usage d'outils propres à l'intérieur d'un cadre. L'usage approprié d'outils d'un domaine dans un autre domaine indique un changement de cadre et la construction d'un nouveau savoir. Il s'agit d'un phénomène qu'elle désigne par jeu de cadres.

On peut construire effectivement des connaissances mathématiques en faisant jouer **la dialectique outil-objet** au sein de **jeu de cadres** appropriés, grâce à des problèmes répondant à certaines conditions. (Douady, p. 9, 1986)

Parmi ces conditions, Douady suggère la disponibilité des outils mathématiques, comme par exemple, les connaissances mathématiques nécessaires à la résolution d'un problème mathématique donné. Pour Douady, les changements de direction de pensée sont au cœur de l'activité mathématique. En somme, l'idée centrale de la dialectique outil/objet est d'amener l'élève à penser comme un mathématicien/une mathématicienne au cours de la réalisation d'une activité de mathématique. Je suis en accord avec Douady. Cependant, il est important de comprendre comment l'élève construit son savoir pour être capable de l'amener efficacement à penser comme un mathématicien/une mathématicienne.

Alors, au-delà des idées de contradiction et de changement, le concept de dialectique évoque deux idées maîtresses. D'une part, elle est une démarche dynamique de construction de sens. D'autre part, le savoir et la pensée sont au centre de la construction de sens. En suivant ces deux idées, mon étude vise à comprendre le sens du savoir mathématique construit par l'élève en lien avec un matériel utilisé. Car, la relation avec un matériel utilisé est centrale dans le savoir construit par un individu au-delà de son usage. De plus, je conçois cette relation avec un matériel non en termes de dynamisme interne attribué au matériel mais en termes de rapport au matériel. Pour ce faire,

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

j'emprunterai l'épistémologie de la dialectique et je proposerai la dialectique sujet/matériel dans le cadre de la réalisation d'une activité de résolution de problèmes arithmétiques verbaux.

Dans ce cadre, en considérant la pensée comme un ensemble d'idées et le savoir comme des idées institutionnellement admises, la dialectique implique une imbrication de la pensée et du savoir (voir aussi : Charlmers, 1987; Lecourt, 2010; Morin, 1986; Ricard, 1999). De façon plus approfondie, la pensée et le savoir semblent se compléter puisque savoir implique la pensée de celui qui sait. Par contre, cette conception n'éclaire ni la construction du savoir ni celle de la pensée pourtant centrales dans la dialectique (Ricard, 1999). Je vais brièvement discuter d'une théorie du savoir et d'une théorie de la pensée en m'inspirant respectivement de Radford (2002, 2003, 2006, 2011, 2013) et de Vygotsky (1934/1978, 1934/1985, 1930/1985). Je présenterai ensuite brièvement une théorie de l'activité. Car, mon étude est réalisée à partir de l'expérience d'une activité mathématique.

Radford (2002, 2003, 2006, 2011, 2013), un didacticien des mathématiques, propose la théorie de l'objectivation selon laquelle le savoir est une réflexion, c'est-à-dire, une projection sur les objets de l'environnement et l'apprentissage, une ouverture, une solidarité à l'autre, donc, apprendre c'est un acte social que l'enfant pose même avant l'entrée à l'école. Cette conception du savoir s'inscrit dans le courant socio-culturel (Vygotsky, 1934/1978) et la philosophie matérialiste (Marx, 1973; Hegel, 2001). Pour Radford (2002, 2013), le savoir se manifeste par des gestes en situation. Étant donné que Radford élabore essentiellement sa théorie en mathématique, savoir les mathématiques

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

signifie manifester un ensemble de gestes dans une situation mathématique, donc un savoir être en mathématiques.

Pour le psychologue Vygotsky (1934/1978) la pensée c'est le psychisme, c'est-à-dire l'esprit. Il est alimenté essentiellement par les interactions sociales. Alors, en suivant l'idée de pensée de Vygotsky, la pensée d'un individu s'inscrit dans la culture dans laquelle il se trouve et s'explique par les interactions sociales de son environnement. Il s'agit plus précisément d'une conception socio-culturelle de la pensée dans laquelle s'inscrivent les travaux de Radford (2002, 2003, 2006, 2011, 2013).

En somme, en suivant la conception du savoir de Radford et la conception de la pensée de Vygotsky, le phénomène enseignement-apprentissage devient mieux observable puisque le comportement de l'élève en situation est le reflet de son être dans cette situation.

En effet, même si le courant socio-culturel véhicule l'idée que la pensée individuelle est nourrie de la culture et des interactions sociales, il est quand même important de questionner le mode d'appropriation du savoir chez l'individu. Le socio-constructivisme (Vygotsky, 1934/1978) propose alors que l'individu construit un sens de ce savoir. Radford (2011) suggère dans ce cas que les activités mathématiques offrent un cadre de construction de sens intéressant et considère d'ailleurs que les gestes d'un individu au cours d'une activité mathématique sont constitutifs de sa pensée. Ces gestes présentent son être en mathématiques (voir aussi : Radford, 2002, 2003, 2006, 2013). La réalisation d'une activité semble être un cadre intéressant à la construction du savoir dans la pensée. Alors, la compréhension de l'activité devient d'un grand intérêt pour mon

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

étude. En effet, Vygotsky (1934/1985) a abondamment développé une théorie de l'activité et a offert deux cadres progressifs de compréhension.

Dans le premier cadre, il a défini l'activité comme un ensemble de gestes mécaniques, instrumentaux et individuels. Les signes, les symboles et la portée symboliques de l'activité ont été ignorés. Dans le deuxième cadre, Vygotsky a mis en exergue des éléments ignorés dans le premier cadre et aussi les interactions sociales. Leontiev (1979), disciple de Vygotsky a abondamment alimenté la théorie de l'activité selon le deuxième cadre. Dans ce cadre, chez l'élève qui résout des problèmes arithmétiques verbaux, cette activité prend forme à partir d'un geste comme par exemple l'usage d'un matériel et le symbolisme inhérent à ce geste. Selon la théorie de l'objectivation, ce geste de l'activité médiatisée par un matériel n'est pas seulement une aide à la pensée mais aussi une composante de celle-ci. Radford (2013) explique à cet effet que la connaissance est d'abord conçue comme une forme de fabrication de biens, un mouvement, une séquence culturelle et historiquement codifiée en actions qui sont constamment instanciées et actualisées dans la pratique sociale comme, par exemple, l'usage d'un instrument de comptage par des élèves dans des classes mathématiques.

En effet, les termes connaissance, savoir et apprentissage semblent alors être imbriqués. C'est pourquoi Radford (2011) propose non seulement que le savoir est constitutif de la pensée mais aussi il suggère une consubstantialité du savoir et des conditions de sa réalisation. Radford (2013) précise dans ce cas, une prise en compte des conditions de réalisation de l'enseignement dans l'apprentissage et présente le matériel utilisé comme une médiation entre l'intention de réalisation de l'activité et la réalisation proprement dite. Par exemple, l'ensemble des matériaux dont l'élève se sert pour

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

produire sa réponse et le geste ou l'ensemble des gestes de cet élève durant la réalisation de cette activité constituent un savoir appris (voir aussi Radford, 2002, 2003, 2011). De plus, Radford (2002, 2006, 2011) présente cet élève comme un être en mouvement. Alors, il semble se dégager un dynamisme centré sur un matériel au cours de la réalisation d'une activité. Je qualifie ce dynamisme de dialectique sujet/matériel.

La compréhension du geste qui accompagne l'activité en elle-même a été étudiée de façon approfondie par Leontiev (1979). Ce dernier a décrit ce geste qui accompagne la réalisation de cette activité et les conditions dans lesquelles cette activité se réalise. Les termes d'activité, de motivation, de but et d'opération peuvent être reformulés comme suit : L'activité est motivée par un but, et des conditions environne mentales offrent des pistes de compréhension du déroulement de l'activité. Pour Léontiev (1979) l'activité en situation est génératrice de sens.

Par contre, Vygotsky (1934/1978) explique les gestes de l'élève en activité comme une reproduction des gestes culturels qui sont intégrés graduellement en contexte pour construire du sens. Le concept de geste renvoie ici à des formes expressives de la pensée non vocalisées telles la mimique, le regard ou toute autre expression de l'élève. Cet élève, en situation de résolution de problèmes arithmétiques verbaux semble être en monologue dans cette situation. Ce monologue semble être articulé entre autres par un geste évocateur.

Le sens paraît alors comme une construction à la fois sociale et individuelle. Même un monologue porte l'empreinte de la culture du milieu de vie du locuteur. Vygotsky (1934/1978) suggère que la culture du milieu fait partie de l'identité

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

individuelle. Elle en est le fondement. Une comparaison entre Piaget et Vygotsky devient alors d'un très grand intérêt. Il s'agit d'un conflit épistémologique important puisque le sens que l'élève confère au matériel disponible en dépend. Ce sens se réfère à l'appropriation du savoir mathématique dans le problème arithmétique. À cet effet, Wertsch (1985) a comparé la position des deux auteurs sur le discours égocentrique en ces termes :

When one compares Vygotsky's and Piaget's accounts of egocentric speech, one finds even more important differences. While recognizing "the indisputable and enormous credit" that was due to Piaget for outlining the phenomenon of egocentric speech, Vygotsky disputed his interpretation of its function and fate. Piaget's assumption is that egocentric speech "fulfills" no objectively useful or necessary function in the child's behaviour. (Wertsch, 1985, p. 115)

Les deux reconnaissent le discours égocentrique chez l'enfant. Par contre, l'interprétation de ce discours diffère. Le discours égocentrique pour Piaget s'étiole avec le processus de socialisation. Chez Vygotsky, ce discours joue un rôle important dans le processus de socialisation. Je souscris à la perspective de Vygotsky. Je considère le développement non en fonction d'un développement psychique intrinsèque à l'enfant (élève) mais dans un rapport dynamique sujet/matériel qui facilite l'issue de l'activité de résolution de problème : la production d'une réponse au problème par l'attribution d'un sens à ce problème. Dans le cadre de cette recherche, cette activité est considérée non par rapport à elle-même mais par rapport à l'enjeu d'un matériel disponible dans la production de cette réponse. Il émerge donc du concept de matériel une idée de moyen, d'outil, dans la production de cette réponse.

De façon sommaire, au-delà de l'idée de monologue, apprendre semble n'être plus apprendre à savoir mais apprendre à faire ou, pour paraphraser Radford (2002, 2003,

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

2006, 2010), apprendre à être et quand il s'agit de savoir mathématique, apprendre devient apprendre à être en mathématiques c'est-à-dire, l'exécution d'un ensemble de gestes. Dans ces conditions, les éléments de l'environnement de l'élève sont alors un matériel/outil constitutif de la pensée de cet élève dans cette activité. Dans cette pensée, il semble qu'une dialectique sujet/matériel mobilise un rapport au matériel à la fois dynamique et récurrent chez cet élève.

2.2. Matériel/outil

2.2.1. Matériel.

En général, tout ce qui est produit et qui a en soi une existence physique en dehors de l'individu agissant peut s'appeler matériel. On entend souvent dans les corridors des écoles et des bureaux administratifs : « j'ai produit du bon matériel » ou « vous pouvez trouver du bon matériel pour animer tel atelier d'apprentissage ou pour enseigner une leçon donnée ». Il s'agit dans tous les cas d'un matériel physique. Ce matériel peut être physique et naturel (ex : les doigts), physique et fabriqué (ex : les jetons), pictural (ex : les dessins) ou purement symbolique ou abstrait (ex : les chiffres, les mots). À propos de l'usage des doigts pour dénombrer, Fayol (1990) et Fuson (1991) proposent une explication basée sur les membres du corps. D'autres comme Ifrah (1994) et Levy (1993) ont vu historiquement le comptage des brebis à l'aide des entailles, des cailloux et des membres du corps.

En situation de résolution de problèmes, quand le matériel est physiquement présent et maniable chiro-tactilement, il est appelé matériel ou matériel de manipulation. Pour Lederman et Klatzky (1990), le toucher d'un matériel active la mémoire de préhension, qui s'est révélée être la plus importante pour identifier un matériel par le seul

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

toucher. Le Ministère de l'éducation de l'Ontario avance que la manipulation du matériel doit caractériser les interventions avec des adolescents et adolescentes en salle de classe. Il faut une manipulation fréquente de matériel dans les activités d'apprentissage (MÉO, 2007). Pour le MÉO, le matériel de manipulation en mathématiques se réfère au matériel physique tels les cubes multicolores. Il en est de même des jetons. J'utilise alors les concepts de matériel de manipulation ou simplement de matériel pour qualifier l'usage d'un objet physique dans la saisie d'un savoir mathématique en jeu dans les problèmes arithmétiques proposés par l'enseignant à l'élève. Il s'agit alors d'un matériel jouant le rôle d'outil.

2.2.2. Outil.

Le concept d'outil (tool) semble être utilisé pour désigner l'utilisation d'un matériel comme facilitateur d'accès à une connaissance. Alors, dans un contexte d'interaction sociale, les outils paraissent non seulement servir à la construction d'une connaissance sociale, ils semblent aussi influencer la nature des comportements externes et le fonctionnement mental des individus. Vygotsky (1934/1985) utilise le concept d'outil pour situer le rôle de médiation à tout objet physique et/ou de production : jetons, blocs base 10, dessins, symboles et tout autre artefact semblable. La compréhension s'opérationnalise alors à l'aide d'outils qui peuvent être de natures différentes : physique (jetons, blocs multibase, les doigts de la main), picturale (dessin) ou même symbolique (nombres, textes ou autre symboles).

En somme, peu importe la nature du matériel, dès qu'il s'agit d'usage à des fins pédagogiques, c'est un outil cognitif. Les caractéristiques du matériel susceptible de

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

meubler l'environnement durant la résolution de problèmes arithmétiques verbaux dans une classe d'élèves du primaire présentent un niveau de complexité qui mérite une étude d'une granularité fine. L'omniprésence du matériel physique comme les jetons dans la classe observée pour les fins de cette recherche mène à une meilleure précision du concept de matériel. Dans le cadre de cette recherche, j'utilise le concept de matériel de manipulation ou plus simplement le concept de matériel pour désigner les doigts, les jetons, les billes, les dessins et même les nombres et autres symboles utilisés habituellement comme outils cognitifs dans une activité de résolution de problèmes arithmétiques verbaux. Durant cette activité, une relation dialectique sujet/matériel peut s'établir entre l'élève qui résout ces problèmes arithmétiques et un matériel physique au-delà du toucher. Le cas échéant, cette dialectique sujet/matériel présente un mouvement de la pensée de l'élève au cours de la résolution du problème.

De façon plus approfondie, je considère dans ce contexte que l'outil et le matériel se différencient en raison de l'utilisation qu'on en fait. L'outil peut avoir une existence matérielle comme, par exemple, les jetons ou les doigts. Par extension, il est également possible que cet outil n'ait pas une existence matérielle comme par exemple les idées qui peuvent être considérées comme de puissants outils de persuasion. Toutefois, cette recherche qui concerne un matériel accessible à l'humain par les sens et palpable chirotailement ne s'inscrit pas dans un tel registre d'extension.

2.3. Sommaire du cadre conceptuel

Dans la pensée de l'élève qui résout un problème arithmétique, un mouvement dynamique et récurrent prend forme entre le matériel peuplant l'environnement physique

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

de la réalisation de cette activité et l'objet mathématique. Ce mouvement paraît se manifester par un geste. Le cas échéant, Radford (2011) suggère que ce geste est constitutif de la pensée de cet élève. Je qualifie ce mouvement autour de l'usage d'un matériel de dialectique sujet/matériel. Par contre, une question émerge : pourquoi l'élève utilise-t-il tel matériel de son environnement plutôt que tel autre? Il devient important de situer cet élève non seulement en fonction de l'usage ou du non usage d'un matériel quelconque mais aussi en fonction de son rapport avec ce matériel. Le rapport au matériel selon la dialectique sujet/matériel prend alors tout son sens. Je propose à cet effet la microanalyse de la dialectique sujet/matériel selon le rapport au matériel, comme une méthodologie pertinente à une telle étude.

Chapitre 3

Méthodologie

J'ai voulu comprendre le rôle du matériel manipulable dans la résolution de problèmes arithmétique verbaux chez l'élève du primaire. Pour ce faire, j'ai réalisé une recherche qualitative : la microanalyse de la dialectique sujet/matériel. En général, l'opérationnalisation du processus d'appréhension d'un phénomène implique la description d'un contexte de recherche, l'utilisation d'instruments appropriés et une procédure d'exécution. Alors, ce chapitre comprendra dans l'ensemble six sections : recherches qualitatives en éducation, sélection des participants, portrait de la classe et contexte de l'expérience, instruments de cueillette de données, première tentative d'analyse des données centrée sur mes observations des élèves/participants en lien avec leur rapport au matériel et selon un regard teinté de l'idée de jeton comme matériel et enfin deuxième analyse des données de niveau micro (microanalyse) selon le prisme de la dialectique sujet/matériel et la catégorisation des symboles de Hughes (1986), et axée sur les tâches proposées aux élèves/participants.

Ainsi, après un survol des recherches qualitatives en éducation, la première section situera la méthodologie microanalytique dans l'ensemble de ces recherches. La deuxième section définira mes motivations relatives aux choix du site de la recherche et du processus de sélection des participants. La troisième section brossera un portrait de la classe et situera le contexte de réalisation de l'expérience. La quatrième section définira les instruments de cueillette de données. La cinquième section décrira la collecte des données ainsi qu'une première analyse de l'expérience basée sur le rapport au matériel qui s'est avérée insuffisante pour comprendre en profondeur le rôle d'un matériel dans la

résolution de problèmes arithmétiques verbaux. Cette section présentera aussi l'exemple de Ruth, une participante à l'étude pour illustrer cette insuffisance. Le rapport au matériel chez les autres participants sera présenté en annexe (Annexe C). En raison de cette insuffisance, une deuxième analyse de niveau micro (microanalyse) selon la dialectique sujet/matériel sera enfin décrite dans la sixième section.

3.1. Recherches qualitatives en éducation

Krathwohl (1998) décrit sommairement la recherche qualitative comme une approche qui permet de recueillir des données décrivant des situations d'intérêt et dont les explications émergent de ces descriptions. La recherche qualitative a évolué, plusieurs orientations et approches ont émergé (Anadon, 2004, 2006; Karsenti et Savoie-Zajc, 2000). Anadon (2006) définit l'orientation de la recherche qualitative comme la philosophie sous-jacente qui permet d'interpréter ces recherches et présente l'approche comme l'ensemble des techniques de cueillette et d'analyse des données qualitatives. Elle a mis en relief trois orientations et six approches. Je les présenterai dans les paragraphes suivants.

D'une part, Anadon (2006) présente ces trois grandes orientations d'interprétation de la recherche qualitative: la recherche qualitative/interprétative, l'approche critique et les courants postmoderne et poststructurel. Elle définit la recherche qualitative/interprétative comme une recherche de signification des expériences individuelles par les individus eux-mêmes. À son avis, les individus sont considérés comme des acteurs compétents. La chercheuse met en valeur, la subjectivité, la compréhension et l'interprétation des conduites humaines et sociales. Anadon (2006) explique que les tenants de l'approche critique privilégient les intérêts sociaux et les politiques et orientent les interprétations des acteurs. Des chercheurs comme Adorno (1976) et

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Habermas (1987, 1990, 1992) détaillent cette orientation et soutiennent l'idée d'une critique radicale des aspects politiques, sociaux et culturels de la société dans son ensemble afin de provoquer un changement social. Anadon (2006) propose une explication des courants poststructurel et postmoderne basée sur le regard porté sur la réalité. Elle suggère à cet effet que la réalité est incertaine, diversifiée et subjective, ce qui demande une pluralité de lecture. Certains auteurs comme Baudrillard (1987), Lyotard (1985) et Mafessoli (1985, 1990) qui soutiennent ces courants qualifient les sociétés occidentales de postmodernistes parce qu'elles promeuvent le pluralisme, la diversité croissante, l'économie postindustrielle, les technosciences et les mass media. Ces auteurs parlent aussi de culture postmoderne pour décrire les valeurs qui traversent ces nouvelles sociétés telles par exemple la promotion des droits et libertés individuelles, le libre-arbitre et l'expérience personnelle.

Ces principales orientations de la recherche qualitative présentent, en général, une tendance de recentration sur l'individu. Un individu d'abord considéré dans sa singularité (recherche qualitative interprétative), critique de sa société (approche critique) et enfin considéré dans sa pluralité (courants poststructurel/postmoderne). Cet individu, le sujet d'une recherche, devient central dans l'approche qualitative au fil du temps.

D'autre part, Anadon (2006) a dressé un tableau de six différentes approches qualitatives : la phénoménologie, l'ethnographie, l'ethnométhodologie, la théorisation ancrée, l'analyse narrative et l'étude de cas. Je présenterai dans les paragraphes suivants un bref résumé des techniques de ces approches.

Inspirée de Van Manen (1984), Anadon (2006) explique la recherche phénoménologique comme une approche qui met l'accent sur l'étude du quotidien et de l'expérience de vie. Selon

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

elle, la phénoménologie vise la rationalité du sujet et questionne l'essence des phénomènes avec l'objectif de révéler ses structures significatives internes. L'entrevue et le récit de vie sont les instruments les plus utilisés parce qu'ils permettent au sujet de révéler sa propre singularité. Giorgi (1985) et Bogdan et Taylor (1975) détaillent cette méthodologie et Arsac, Balacheff et Mante (1992) l'utilisent en didactique des mathématiques pour expliquer le rôle des enseignants dans la reproduction des phénomènes didactiques.

Anadon (2006) présente l'ethnographie comme une approche requérant une immersion directe du chercheur dans le milieu étudié afin de comprendre le « style de vie » d'un groupe à partir de la description et de la reconstruction analytique et interprétative de sa culture, de ses formes de vie et de sa structure sociale. Je peux prendre comme exemple de groupe en éducation, un établissement scolaire et une classe d'école. Les stratégies de collecte de données privilégiées dans cette approche sont notamment l'observation participante, l'entretien et les notes de terrain (Anadon, 2006). Des chercheurs comme Atkinson(1990), Lutz (1981) et Goetz et LeCompte (1984) expliquent les détails de cette approche. Baudrit (1994) l'adopte en didactique des mathématiques pour décrire le rôle des interactions sociales dans l'apprentissage scolaire.

Anadon (2006) définit l'ethnométhodologie comme l'étude des phénomènes sociaux intériorisés dans les discours et dans les actions à travers l'analyse des activités humaines. À son avis, les principales caractéristiques de cette approche sont les méthodes et les savoirs de sens commun utilisés par les gens pour gérer leurs pratiques sociales quotidiennes. Elle soutient que les ethnométhodologues renforcent l'idée d'un monde social composé de significations et de visions partagées du monde. Coulon (1995) et Garfinkel (1967) expliquent les principes de cette approche. Knijnik (2007) s'en sert en didactique des mathématiques pour mettre en relief la

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

justice sociale dans l'apprentissage des mathématiques. Ses études sont réalisées avec des élèves issus des quartiers défavorisés du Brésil.

Anadon (2006) propose la théorisation ancrée comme une approche qui privilégie les gestes, les discours et les échanges symboliques que des individus et des groupes utilisent pour construire de manière inductive des concepts, des hypothèses et des propositions et pour développer une « théorie » par le processus constant de collecte et d'interprétation des données. Elle suggère des analyses comparatives et constantes des données ou des concepts jusqu'à l'atteinte de la saturation. C'est-à-dire, aucun autre élément ne vient apporter quelque chose de neuf ou modifier ce qui est déjà trouvé. Comme instruments, Anadon (2006) privilégie les entrevues, les observations de terrain ainsi que les documents de tout type. Paillé (1994) suggère que cette approche peut être utilisée pour analyser des données. Perrenoud (1998) l'utilise en didactique des mathématiques pour expliquer le rôle de l'évaluation dans la fabrication de l'excellence.

Anadon (2006) explique l'analyse narrative comme une approche importante en recherche qualitative qui inclut la biographie, l'autobiographie et les récits de vie par exemple. Elle soutient que plusieurs stratégies peuvent être utilisées dans l'analyse narrative dont les plus importantes sont l'analyse psychologique, l'analyse biographique et l'analyse du discours. Les instruments de collecte de données qu'elle privilégie sont entre autres l'entrevue libre et semi-dirigée, les documents personnels, les journaux intimes et la correspondance épistolaire. Duvernay (2006) utilise cette approche en didactique des mathématiques pour retracer l'histoire personnelle de détenteurs de baccalauréat en sciences.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Inspirée de Merriam (1988), Anadon (2006) explique l'étude de cas comme une démarche interprétative sensible au phénomène humain et à sa complexité. La chercheuse définit cette démarche par quatre traits : particulariste, descriptive, heuristique et inductive et propose une explication pour chacun d'eux. L'étude de cas est particulariste car elle est intéressée au cas particulier. Elle est descriptive parce qu'elle détaille minutieusement le cas étudié. Elle est heuristique car elle permet une compréhension approfondie du cas étudié. Finalement, l'étude de cas est inductive, elle part de l'observation de terrain et par raisonnement inductif, le chercheur peut élaborer des liens entre les propriétés du cas, des catégories et des hypothèses interprétatives. Anadon (2006) privilégie entre autres les entrevues qualitatives, l'observation directe et participante, les questionnaires et les documents comme instruments de collecte de données. Morin (2008) utilise cette approche en didactique des mathématiques pour expliquer en détail la construction de la connaissance mathématique chez les enseignants.

En général, les recherches qualitatives ont en commun une attention aux détails, le nombre limité de sujets, les instruments qualitatifs (observations ethnographiques, entretiens en profondeur, analyse documentaire) et l'analyse inductive. En effet, le but que je vise dans cette étude est de comprendre le rôle joué par un matériel disponible dans la construction du savoir mathématique au cours de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux. Il s'agit de porter un regard fin, de mettre la loupe sur une activité en particulier chez des élèves du primaire. Bien que ces approches soient inspirantes et ont donné forme à mon regard de chercheur qualitatif, elles ne me permettent pas d'atteindre ce but. Ces approches permettent de comprendre les phénomènes relatifs aux sujets étudiés sans pour autant être capable de saisir le sens d'un savoir en construction chez ces sujets. Radford (2002, 2003, 2006, 2011, 2013) propose à cet effet, la

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

microétude comme une méthodologie d'analyse pertinente en didactique des mathématiques. Cette méthodologie permet d'analyser les gestes d'un élève pendant une activité mathématique. Radford (2002, 2003, 2011, 2013) explique que ces gestes décrivent l'être en mathématique et explique le fonctionnement de l'être en mathématique comme la réflexion d'un savoir mathématique sur les objets de l'environnement. Radford (2002, 2003, 2011) présente l'entretien semi-dirigé et l'observation directe de l'activité comme instruments de collection de données. Ces instruments servent à l'analyse des gestes. Tout ce qui est dit à l'entretien est compris selon l'existence ou l'inexistence d'un lien avec un geste posé. Dans ce geste, le savoir est considéré en fonction de la réflexion d'objet de savoir c'est-à-dire l'apprentissage réalisé mais non en fonction du processus de construction du savoir. En continuité avec Radford, pour comprendre le processus d'un savoir en construction pendant une activité mathématique et dans cette étude, de résolution de problèmes arithmétiques verbaux, mon étude est du même type.

3.2. Sélection des participants

J'ai choisi une école de la ville de Gatineau comme site de mon étude. C'est le lieu de ma résidence. Cette proximité présente des avantages financiers et de convenance. La ville de Gatineau compte une trentaine d'écoles primaires. Les premiers contacts avec l'école, site de réalisation de mon étude, ont été établis par l'entremise d'un professionnel de cette école. Car, nos enfants participent aux mêmes activités parascolaires. Ce rôle de facilitateur de ce professionnel n'a eu aucune incidence sur le déroulement de la recherche. Dans cette école dont l'effectif avoisine 250 élèves, aux 200 élèves du

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

primaire s'ajoutent une cinquantaine d'autres enfants au préscolaire. De la première année à la sixième année, on compte deux classes par année scolaire dont la répartition se fait sur la base des résultats scolaires de la classe antérieure. Étant une école située dans un quartier où les familles sont à faible revenu, elle bénéficie du soutien de professionnels dont une orthopédagogue et des psychoéducateurs. Périodiquement, le personnel de l'école organise des activités parascolaires avec les élèves.

Cette école ne comprend que des classes régulières. Le concept de classe régulière se réfère à un groupe d'élèves qui, en général sous la direction d'un enseignant, suivent un cheminement scolaire sans difficulté majeure. Souvent, on y compte un faible pourcentage d'élèves en difficulté d'apprentissage et/ou d'élèves présentant un trouble de comportement. C'est en particulier le cas de la classe où ont été recrutés les participants à cette recherche.

Avant de débiter mon processus de recrutement de participants, j'ai demandé et obtenu un certificat de déontologie du Comité d'Éthique de l'université d'Ottawa. Puis j'ai contacté la direction de l'école qui m'a donné une lettre de permission pour avoir accès aux enseignants de troisième année de l'école. Muni de cette lettre, j'ai rencontré les enseignantes concernées dont une s'est montrée intéressée à participer au projet. Après avoir demandé et obtenu la permission de la directrice de l'école puis l'assentiment de l'enseignante, j'ai fait parvenir une lettre d'assentiment à chacun des élèves et une lettre de consentement à leurs parents. Deux semaines plus tard, un bilan des réponses m'a été acheminé pour m'informer que 6 élèves réguliers parmi les 20 de la classe ont consenti, avec l'accord de leurs parents, à participer à la recherche.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Une description sommaire de chacun de ces six participants s'impose. Cette description provient des informations de l'enseignante titulaire de la classe. Dans le but de respecter le principe de confidentialité inhérente au processus de recherche avec les sujets humains, j'ai attribué un pseudonyme à chacun des participants : Jeanne, Joëlle, Ruth, Josué, Rosette et Esther.

- ✧ Jeanne est âgée de 9 ans et 3 mois. Elle vit avec l'un de ses parents et un frère cadet. Ses résultats scolaires sont supérieurs à la moyenne de sa classe. Elle affirme aimer beaucoup les mathématiques. Elle fréquente cette école depuis la maternelle.
- ✧ Joëlle est âgée de 9 ans et 4 mois. Elle obtient des résultats scolaires qui se situent dans la moyenne de la classe. Elle vit avec ses parents (père et mère) et une sœur aînée. Elle affirme aimer les mathématiques.
- ✧ Ruth est âgée de 9 ans et 6 mois. Elle est une élève régulière. Elle vit avec ses deux parents et ses deux sœurs dont l'une est sa cadette et l'autre son aînée. Ses résultats scolaires sont dans la moyenne supérieure. Elle affirme aimer toutes les matières scolaires.
- ✧ Josué est âgé de 9 ans et 4 mois. Il vit chez ses deux parents. Il est fils unique. Ses résultats scolaires sont dans la moyenne inférieure. Il affirme aimer les mathématiques plus que le français.
- ✧ Rosette est âgée de 8 ans et 11 mois. Elle est fille unique et vit avec sa mère et son père. Son rendement se démarque largement de ses camarades par des notes nettement supérieures à la moyenne de sa classe. Arrivée au Canada depuis moins

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

de deux ans, elle dit conserver les stratégies d'apprentissage notamment celles relatives aux calculs auxquelles elle était habituée dans son pays d'origine.

- ✧ Esther est âgée de 9 ans. Elle vit avec son père et son frère cadet. Ses résultats scolaires se situent dans la moyenne supérieure. Elle affirme aimer toutes les matières scolaires notamment les mathématiques.

Des six participants, cinq sont nés au Québec et une est née à l'extérieure du Canada (Rosette). Selon les informations de l'enseignante, Rosette est la seule du groupe-classe à fréquenter cette école à partir de la deuxième année. Les cinq autres participants fréquentent cette école depuis la maternelle. Par l'effet du hasard, parmi ces six participants, j'ai compté cinq filles (Jeanne, Joëlle, Ruth, Rosette et Esther) et un garçon (Josué). Des études révèlent que filles et garçons réagissent différemment au contenu mathématique (Plante, Théorêt et Favreau, 2010) et aux objets (matériel) (Gallagher et Kaufman, 2005). Toutefois, dans cette étude la mise en exergue de cette différence n'est pas pertinente. Car, que le participant soit une fille ou un garçon, il ne s'agit pas pour le chercheur de classer les difficultés en résolution de problèmes arithmétiques verbaux en fonction du genre de l'élève mais de comprendre son comportement au cours de la résolution de ces problèmes en lien avec l'usage d'un matériel. Il s'agira donc d'élèves de troisième année du primaire qui, en général, ont eu un parcours régulier de la première à la troisième année sans égard au statut socioéconomique des parents et du genre du participant. La section suivante présentera les instruments de saisie des données produites par ces participants.

3.3. Instruments de cueillette de données

J'ai utilisé trois instruments de collection de données : les tâches (Cadet, 2002), l'entretien semi-structuré (Boutin, 1997; Poupart, 1997; Savoie-Zajc, 2000) et l'observation directe et vidéoscopique (Karch et Kray, 2007). En effet, ces instruments servent à saisir des données à partir des tâches proposées aux élèves/participants. Je présenterai et je discuterai ces tâches à la lumière de la littérature afin de mettre en relief la pertinence des instruments privilégiés dans cette méthodologie.

Voici les tâches (problèmes) qui ont été proposées à ces élèves/participants :

- Problème de type combinaison

Jean a 34 billes. Marie a 71 billes. Combien ont-ils de billes en tout?

- Problème de type comparaison

Jean a 37 billes. Il a 15 billes de plus que Marie. Combien Marie a-t-elle de billes?

- Problème de type changement

Louise joue deux parties de billes. Elle joue une partie. À la seconde partie, elle perd 13 billes. Après les deux parties, elle a gagné 28 billes. Que s'est-il passé à la première partie?

En effet, ce sont trois problèmes arithmétiques verbaux de type additif (Arkiguet-Bakong, 2008; Carpenter et Moser, 1982, 1983; Carpenter, Hiebert et Moser, 1981; Riley et collab., 1983, Depaepe, De Cortes, et Verschaffel, 2009) qui impliquent des nombres inférieurs à 100 (Fayol et Abdi, 1986; Gombert, 1987; MÉO, 2007; MELS, 2009; Verschaffel, 1987), des mots usuels et une situation familière (Depaepe, DeCortes, et Verschaffel, 2009; Nesher et Katriel, 1977) à la portée des élèves de ce niveau (Arkiguet-Bakong, 2008; Carpenter et Moser, 1982, 1983; Carpenter, Hiebert et Moser,

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

1981; Riley et collab., 1983; Depaepe, DeCortes, et Verschaffel, 2009; Nesher et Katriel, 1977). Toutefois, le renvoi de la question du troisième problème au début de l'énoncé (Fayol et Abdi, 1986; Gombert, 1987) implique un niveau de difficulté plus élevé par rapport aux deux premiers. En général, sauf pour le troisième problème, ce sont des problèmes faciles pour des élèves réguliers de troisième année.

Les réponses aux problèmes, c'est-à-dire les traces, présentent les écrits de l'élève en lien aux stratégies développées pour résoudre le problème (Cadet, 2002). Dans la présente étude, les traces comprennent les dessins, les mots, les images et les notations symboliques des nombres. Dans ce cadre, je note par exemple, les dessins de billes de Jeanne insérés dans deux opérations posées (voir Figure 3.1). Dans les faits, les traces présentent la production des élèves, reflet de l'activité réalisée. Dans celles-ci, pour respecter le principe de confidentialité, j'ai effacé et/ou remplacé par un pseudonyme tout ce qui aurait permis d'identifier un participant. Par exemple, dans la Figure 3.1, les écritures hachurées au liquide correcteur blanc le sont par respect de ce principe. En lien avec ces traces, les dessins de billes encadrés définissent un processus de comptage. Les billes barrées représentent exactement le résultat du comptage de l'opération posée.

Figure 3.1. Modèle de copie d'élève : les traces comme données d'analyse

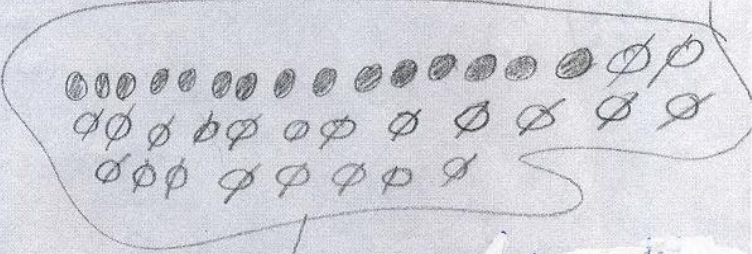
JEANNE

Jean a 37 billes. Il a 15 billes de plus que Marie. Combien Marie a-t-elle de billes?

Solution

$$\begin{array}{r} 37 \\ - 15 \\ \hline \end{array}$$

Marie a 22 billes



37

$$\begin{array}{r} 37 \\ - 15 \\ \hline 22 \end{array}$$

3

52

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

L'entretien semi-structuré comprenait des questions ouvertes (Poupart, 1997; Savoie-Zajc, 2000; Van der Maren, 2010) que j'ai préalablement pilotées avec un élève de troisième année régulière. J'ai élaboré ces questions en m'inspirant de la disponibilité d'un matériel comme des jetons au cours d'une activité de résolution de problèmes arithmétiques verbaux. J'ai choisi l'entretien semi-structuré comme principal instrument de cueillette de données. Ce choix semble être juste. Car, même si les gestes posés par un participant sont importants pour les fins de mon étude, mais c'est surtout le sens que ce participant attribue à ce geste qui importe le plus pour moi. J'ai transcrit mes propos et ceux des participants tels que je les ai entendus. J'ai procédé de façon presque semblable pour les silences. J'ai transcrit ces derniers à l'aide de trois points de suspension entre deux parenthèses (...). Il en a été ainsi pour les silences de trois à six secondes. Quand le silence est au début d'une réponse, je le note à l'aide de points de suspension sans parenthèses. J'ai procédé ainsi à propos des silences parce qu'au cours d'un entretien, des silences peuvent être évocateurs. Ils peuvent indiquer un moment de réflexion. Ils peuvent aussi démontrer un signe d'indifférence ou d'attention. Dans tous les cas, il paraît utile d'en tenir compte dans le discours des interlocuteurs. L'ensemble des paroles et des silences forment le verbatim. Puisque les jetons étaient disponibles et les participants avaient la possibilité de les manipuler à leur gré, les séances d'entretien ont été enregistrées par une vidéo caméra de proximité de haute définition. Les questions du protocole d'entretien ont été inspirées du visionnement du film de l'enregistrement vidéo (observation) et des traces (copies) des participants (voir Description des rapports : Annexe C).

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

L'observation consiste à suivre attentivement le comportement des participants au cours d'une activité en notant et/ou en enregistrant le mouvement de leur image et/ou les paroles prononcées (Karbach et Kray, 2007). Le chercheur peut adopter deux postures différentes. Il peut s'impliquer dans la situation : il s'agit d'observation participative (Baribeau, 2009; Bourassa, Bélair et Chevalier, 2007; Deschenaux et Laflamme, 2007). Il peut aussi observer directement les sujets en gardant une attitude neutre : il s'agit alors d'observation directe (Desgagné, 2005; Tardif, 1988). C'est le cas de la présente étude. Au cours de la résolution des trois problèmes arithmétiques verbaux, les participants pouvaient à leur gré réfléchir à haute voix, manipuler le matériel, écrire, faire des dessins ou utiliser toute autre stratégie de calcul.

Bref, ils pouvaient agir ou réagir à leur gré. Je me tenais en arrière dans la salle pour noter avec discrétion, dans mon carnet de notes de terrain, tous les gestes en lien avec le matériel disponible et une caméra de proximité a permis d'obtenir des arrêts sur image (Balslev et Saada-Robert, 2006; Pudielko, 2006). J'ai utilisé une caméra numérique de haute définition de marque Samsung installée sur un trépied en avant et à gauche des participants pour enregistrer leurs images en activité (résolution de problèmes arithmétiques verbaux et entretien semi-dirigé).

À la suite de conversations informelles avec les élèves de la classe, j'ai été informé qu'ils étaient tous habitués à l'usage d'une caméra dans les fêtes familiales. Par contre, ils ne sont pas habitués à la présence d'une caméra dans leur salle de classe. Aussi, je pouvais utiliser deux caméras pour avoir deux angles de visions des images en même temps mais l'usage de deux caméras pouvait rendre le site de réalisation de la recherche inhabituel et produire un effet de surveillance. Mon but n'a pas été de

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

surveiller l'élève mais d'observer son comportement au cours de l'activité de résolution de problèmes arithmétiques verbaux. À cette fin, la caméra de haute définition présente de nombreux avantages. D'abord, elle permet une observation fine de l'action. Ensuite, elle offre la possibilité de retourner aux données brutes à tout instant de l'analyse. Enfin, elle permet à tout instant de situer l'élève dans l'environnement de la recherche. En général, la caméra de haute définition offre une très bonne qualité d'image. La clarté de l'image facilite une observation fine des résultats. Cette finesse de l'observation répond bien à l'objet de mon étude : une microanalyse du comportement des élèves/participants en lien avec l'usage d'un matériel. Pour Mayer, Ouellet, St-Jacques et Turcotte (2000), le fait de recourir à plusieurs instruments comme sources de données permet une triangulation de l'ensemble des données recueillies.

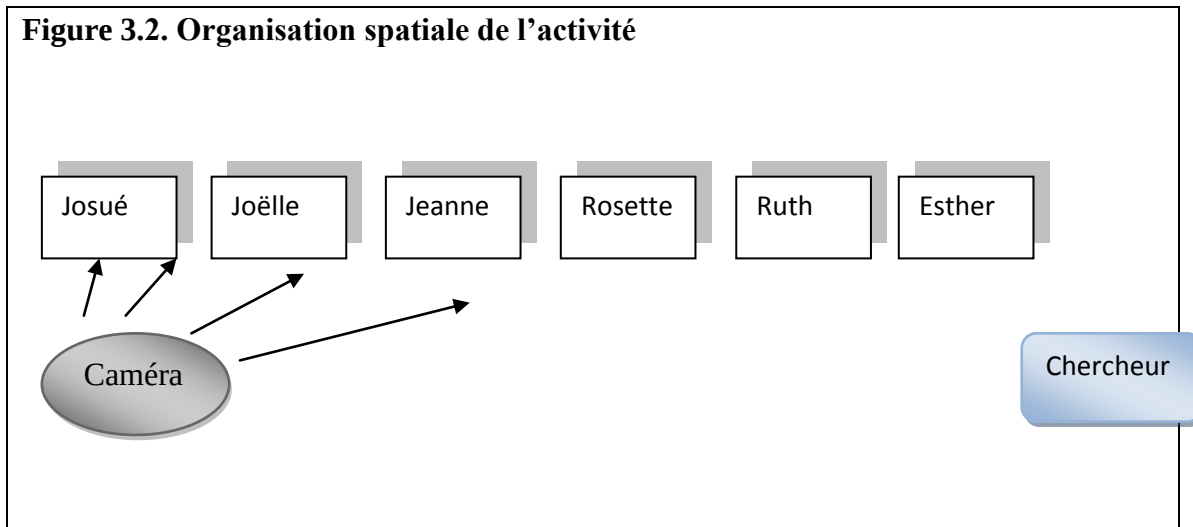
3.4. Procédure de cueillette de données

Durant la journée où s'est réalisée l'expérience, l'enseignante titulaire de la classe, le psychoéducateur qui jouait aussi le rôle d'enseignant de soutien et moi préparions la salle de classe à cet effet. Le talent du psychoéducateur dans la manipulation d'appareils électroniques (caméra) justifiait sa présence durant cette journée. La présence du psychoéducateur est une courtoisie à mon endroit. Ce dernier avait la latitude de ne pas se présenter durant une journée pédagogique des enseignants. Durant cette journée, les enseignants s'occupaient des dossiers d'élèves, chacun vaquait à ses activités. L'enseignante titulaire de la classe occupait un coin au fond de la salle, en arrière des armoires de rangement et à l'abri des regards. Elle libérait l'enseignant de soutien pour m'aider à installer la caméra et de façon plus précise pour contrôler l'angle

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

de vision de l'image. Ce dernier m'a aussi aidé à installer les sièges et pupitres des élèves selon la disposition habituelle en rangée. Les pupitres étaient juxtaposés et les élèves assis pouvaient aisément voir, s'il y avait lieu, les voisins des deux côtés et même toute la rangée d'élèves. Un plan du site est proposé dans la Figure 3. 2.

Figure 3.2. Organisation spatiale de l'activité



Il est important de préciser à nouveau que la journée de réalisation des activités était une journée pédagogique. Cette journée présentait de nombreux avantages par rapport à une journée de classe habituelle :

- L'enregistrement des activités à l'aide d'une caméra aurait pu déranger le déroulement de la classe habituelle en dépit de l'effet d'habitation créé par la présence dans la classe d'une caméra non fonctionnelle pendant trois semaines précédant la réalisation des activités par les participants dans le cadre de cette étude.
- Permettre aux élèves d'être dans leur environnement de classe habituel avec certains camarades de classe et leur enseignante pouvait être confortable pour eux.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Elle présentait, par contre, l'inconvénient de priver les élèves d'une journée de congé. Ces avantages et cet inconvénient peuvent définir des aspects contextuels de mon étude. Néanmoins, j'ai fait de mon mieux pour minimiser de tels effets en optimisant l'aspect convivial de la rencontre. Le fait de minimiser ces effets définit un autre aspect du contexte de cette recherche car la classe de mathématiques habituelle visée est en général plus contraignante.

En somme, c'est dans le décor de la classe habituelle des participants, selon le contexte imposé par une journée pédagogique, avec l'utilisation de ces trois instruments de cueillette de données et avec l'aide d'une caméra de haute définition que j'ai procédé à la conduite de cette étude.

Tous les acteurs impliqués dans la réalisation de la recherche connaissaient la date, l'heure, la durée et les grandes lignes du déroulement de la journée. Le jour venu, dès 8 h 00 du matin j'étais dans l'établissement et je vérifiais mes copies. À 8 h 15, les élèves concernés et les enseignants circulaient dans les corridors de l'école. Quinze minutes plus tard, soit à 8 h 30, comme convenu avec l'enseignante titulaire, le psychoéducateur m'aidait à installer ma caméra avec un angle de vision maximum et faisait des essais qui s'avéraient concluants au niveau de la qualité de l'image. Tout était sous contrôle, quand, à 8 h 55, nous (le psychoéducateur et moi) invitions les élèves à entrer dans la classe.

En entrant, nous leur avons dit qu'ils pouvaient s'installer à leur gré, qu'il n'y avait pas de place assignée dans cette classe dont les pupitres sont disposés en rangées de six. Nous leur avons toutefois suggéré d'occuper la première rangée puisqu'ils n'étaient

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

que six. La caméra une fois installée, avant de distribuer les copies, j'ai lu les consignes suivantes :

- Je vais te donner trois problèmes à résoudre. Tu peux les résoudre comme tu veux; ce n'est pas un examen. Tout ce que tu vas écrire ne va pas être considéré comme bon ou pas bon.
- Le matériel que tu vois sur le pupitre, tu peux l'utiliser si tu veux. Il n'y a aucun problème à l'utiliser ou à ne pas l'utiliser.
- Tu peux résoudre tous les problèmes si tu veux, tu peux arrêter à n'importe quel moment sans problème.
- Après que tu auras fini, je vais visionner avec toi l'enregistrement de l'activité, soit vers 10 heures. Tu pourras me demander d'arrêter ou d'avancer l'enregistrement comme tu veux sans aucun problème.
- Tout le monde va dîner aux environs de 12h. Je vais avoir un entretien avec chaque élève individuellement pendant environ 30 minutes à partir de 13h. Tu peux arrêter l'entretien à tout moment sans aucun problème.
- Pendant que je m'entretiens avec un élève, les autres peuvent jouer dehors (le psychoéducateur assurait la surveillance des élèves dans la cour de l'école).

Après avoir lu ces consignes, j'ai distribué les copies aux élèves/participants. Il s'agissait d'une copie par problème et trois copies par participant.

Comme je l'ai mentionné au début du chapitre, je réaliserai une microanalyse du comportement de l'élève au cours de cette activité. Cette méthodologie mettra l'emphasis sur le sens que l'élève se construit du problème arithmétique verbal en lien avec l'usage

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

d'un matériel. Ce sens peut être mis en relief dans les gestes, les réponses et les traces de l'élève. Cette méthodologie peut se résumer en trois étapes :

1. exécution de la tâche, enregistrement à l'aide d'une caméra de proximité et prise de notes d'observation (carnet de notes d'observation);
2. visionnement de l'enregistrement par le chercheur et les élèves;
3. entretien semi-dirigé avec chacun des élèves.

Les données concernant chaque participant comprennent :

- les questions et réponses telles qu'elles ont été formulées à l'issue de l'entretien semi-structuré (verbatim qui comprend les silences et les réponses verbales de l'élève/participant) ;
- l'observation directe de l'élève pendant les activités;
- le geste manifeste du comportement de l'élève au cours de l'entretien et celui durant la résolution des problèmes arithmétiques verbaux, dont les mimiques, regards, sourires, hochements de tête ou tout autre geste semblable;
- les réponses écrites aux problèmes sur les copies du participant, composées de mots, de symboles et de dessins. L'ensemble constitue les traces de l'élève.

En somme, chacun des instruments (Mayer, Ouellet, St-Jacques et Turcotte, 2000) saisit un aspect du comportement des participants au cours de la réalisation de ces activités de résolution de problèmes arithmétiques verbaux qui seront décrites dans le paragraphe suivant.

Au départ, une durée de 45 à 90 minutes était prévue pour les activités. Dans le cadre d'activités pilotes informelles que j'ai réalisées en mars 2010 avec deux enfants de niveau primaire, une fréquence moyenne de 15 minutes par problème a été observée. La

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

durée totale pour les trois activités incluant une pause entre les activités était réduite à 60 minutes. Aussi, dans le cadre de ma thèse de maîtrise (Cadet, 2002), la durée de résolution des problèmes arithmétiques de même niveau était tout à fait semblable. En effet, voici un portrait du déroulement temporel de la présente étude :

1. D'abord, de 9h00 à 10h00, j'observais et j'enregistrais la réalisation des activités. Celle-ci consistait à résoudre trois problèmes pendant 10 à 15 minutes chacun pour un maximum de 45 minutes. Avec une marge de manœuvre de 15 minutes pour des imprévus d'ordre technique ou autre, cette étape a duré 60 minutes.
2. Ensuite en collectif de 10h00 à 11h00, le chercheur et les participants ont visionné le film de la réalisation des activités. Cette étape collective comprenait l'enregistrement proprement dit et les arrêts sur image demandés par les participants. Une pause lunch a été observée de 11h00 à 13h00 pendant laquelle les élèves sont restés sur place sous la supervision de l'enseignante titulaire de la classe et de l'enseignant de soutien. Les élèves prenaient leur lunch, jouaient et dessinaient à leur gré dans une grande salle qui jouxte le site de réalisation de la recherche.
3. Enfin, de 13 h à 16 h, j'ai eu un entretien semi-structuré d'une trentaine de minutes avec chacun des élèves. Pendant l'entretien avec un élève, les autres pouvaient jouer ou se reposer comme il leur semblait bon dans l'attente de leur tour. L'entretien une fois terminé, l'élève restait à l'école sous la supervision de son enseignante. Il pouvait jouer ou se reposer à son gré. Il pouvait aussi partir accompagné d'un parent ou d'un adulte mandaté par ce dernier. Les parents

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

étaient informés dans la lettre de consentement qu'à 16 heures toutes les activités seraient terminées.

En général, tout s'est déroulé sans inconvénient et la présence rassurante de l'enseignante titulaire de la classe a grandement facilité le succès de la cueillette des données et ainsi contribué à donner une saveur habituelle de classe à cette journée pédagogique.

3.5. Première analyse descriptive des données : rapport au matériel

Sommairement, le rapport au matériel est une description des élèves/participants à l'utilisation d'un matériel donné au cours d'une activité mathématique. Pour réaliser cette analyse des données de cette étude, j'ai d'abord décrit le rapport au matériel relatif aux six participants. Cette description se trouve en annexe C.

De façon pratique, pour chaque élève, j'ai réalisé une analyse des données produites soit les réponses aux questions de l'entretien semi-structuré, les gestes manifestés et les traces laissées au cours de la réalisation de l'activité de résolution des trois problèmes arithmétiques verbaux. Des notes de terrains ont complété, au besoin, les informations recueillies. En général, cette analyse s'est déroulée en trois étapes récurrentes selon la procédure suivante:

1. Visionnement au ralenti de l'enregistrement des activités (traces); pour noter les mimiques, regards, paroles de chaque participant en lien aux traces laissées relatives à chaque problème. Je recommence le visionnement pour chaque participant, donc six fois et deux fois de plus pour le visionnement simultané des

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

six participants soit au début et à la fin des visionnements. Il s'agit d'un total de huit visionnements.

2. Analyse des traces en lien avec les gestes posés au cours de la réalisation des activités; pour distinguer la suite des symboles dans les traces laissées selon la chronologie du déroulement de l'activité de résolution des problèmes.
3. Visionnement au ralenti de la section des entretiens semi-structurés et analyse des gestes et paroles du participant. J'ai visionné et auditionné avec attention les entretiens réalisés avec chacun des participants.

L'ensemble de ces opérations m'ont permis de décrire la réalisation de ces activités par chaque participant selon une relation particulière avec un matériel donné. Je présenterai dans l'ordre une description de mes observations par problème, le verbatim de l'entretien semi-structuré et les traces. L'analyse se fera par établissement de lien entre geste, verbatim et trace. De ces liens émergeront des rapports selon la centration de la réalisation de cette activité par le participant sur un matériel pictural (dessin), un matériel symbolique (un mot, un nombre) ou sur le symbolisme de l'usage d'un matériel physique (le comptage sur les doigts). Ces liens présentent respectivement, un rapport pictural ou un rapport symbolique au matériel. La section suivante illustre une analyse de rapport symbolique au matériel : Ruth. Les autres analyses sont en annexes.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

✧ **Ruth**

Au cours de la résolution des trois problèmes, Ruth a semblé établir un rapport symbolique avec un matériel. Elle a résolu les trois problèmes sans pause en 9 minutes.

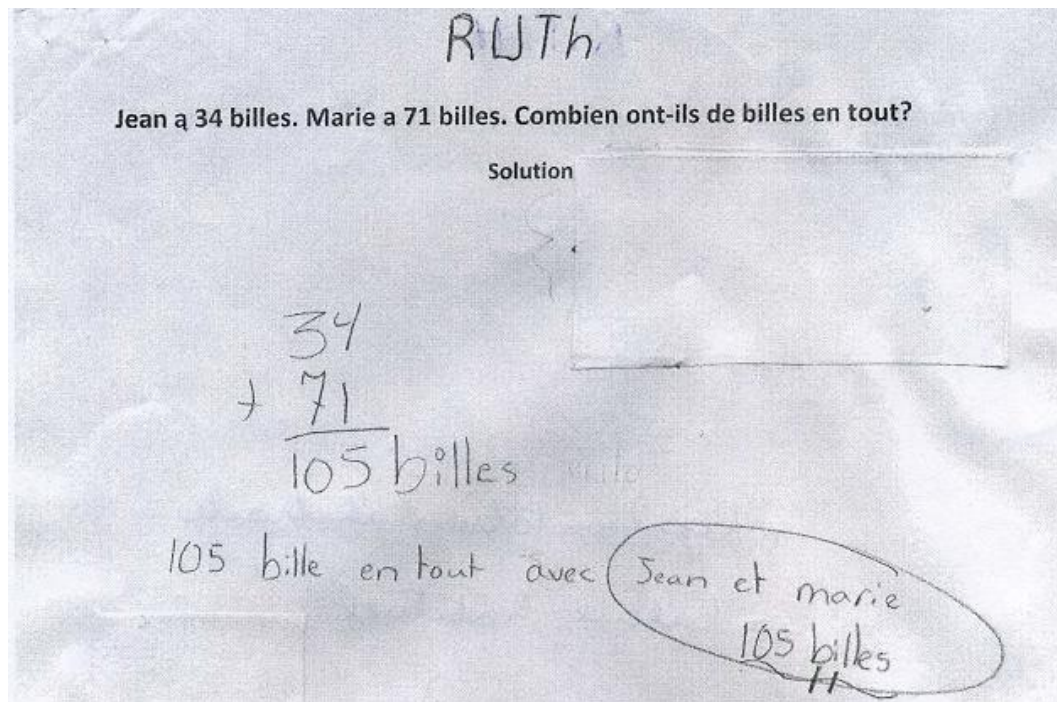
Observation de l'activité¹ de Ruth

Aussitôt que Ruth a pris la copie des mains du chercheur, elle l'a lue pendant 60 secondes puis a observé un temps de silence immobile (60 secondes) comme si elle rêvait. Elle a ensuite tourné les yeux en direction des jetons et a commencé à écrire. Elle a résolu les trois problèmes sans arrêt. Au cours de la résolution du premier problème, Ruth a d'abord relu silencieusement l'énoncé de ce problème. Puis, elle a posé son opération à l'aide des nombres en symbole (voir Figure 3.3). Elle a eu recours au comptage des doigts pour vérifier le résultat du comptage préalablement effectué mentalement. Elle a compté sur les cinq doigts de sa main droite en les écartant. Elle a tenu en même temps un crayon dans la main gauche. Elle a ensuite déposé le crayon sur son pupitre et a continué le comptage en touchant 5 doigts à l'aide du pouce de la main droite. Puis, elle a poursuivi en écartant ses doigts au fur et à mesure à partir du pouce. Elle a recommencé le processus avec les mêmes doigts de la même main en décrivant un angle aigu formé par la paume de la main et la surface du pupitre. Elle a abaissé les 5 doigts à partir du pouce au fur et à mesure pour toucher cette surface. Enfin, elle a gardé la même position avec les doigts de la main droite et a procédé au comptage comme pour les problèmes précédents. De façon générale, Ruth a utilisé 5 « mains » donc 25 doigts pour compter ou mieux recompter les résultats de son opération. Ruth a utilisé des symboles (opération posée) pour résoudre le problème et elle a compté sur les doigts pour vérifier la réponse produite. Elle a effacé des écrits sur sa copie après cette suite de

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

comptage sur les doigts puis elle a réécrit l'opération (voir Figure 3.3) et les propositions : « Jean et Marie 105 billes en tout » et « 105 billes en tout ». Ruth a semblé établir un rapport symbolique au matériel parce que la production de la réponse passe d'abord par des symboles de nombres (opérations posées) en dépit du recours au comptage sur les doigts pour vérifier la réponse. Car, cette réponse produite a dépassé en nombre les doigts comptés (25 doigts/105 billes).

Figure 3.3. Copie de Ruth, activité 1



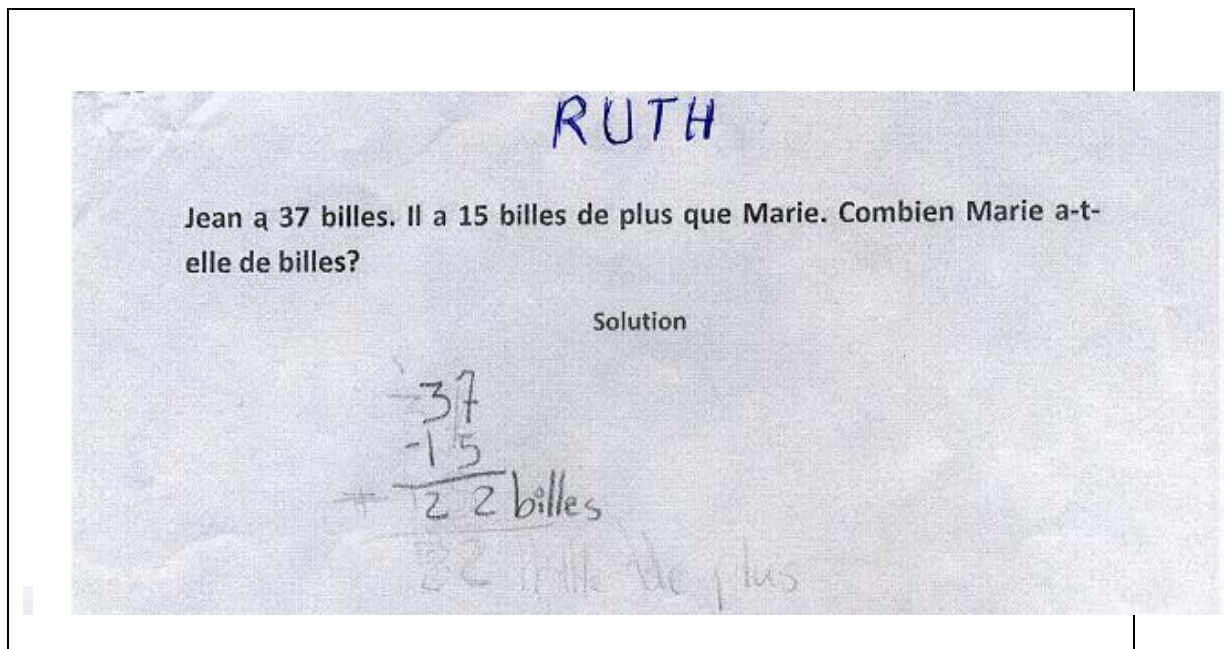
Observation de l'activité2 de Ruth

Au cours de la résolution du second problème, Ruth a posé son opération (voir Figure 3.4) puis, elle a utilisé ses doigts pour compter et pour vérifier le résultat du comptage préalablement effectué mentalement. Elle a écarté les cinq doigts de sa main gauche à partir du pouce et les a touchés successivement à l'aide du pouce de la main droite. Puis, elle a écarté les cinq doigts de la main droite et les a touchés successivement

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

à l'aide du pouce de la main gauche. Ensuite, elle a posé la main gauche sur la surface du pupitre en les abaissant successivement à partir du pouce. Sa voisine Esther a pris la boîte de jetons et l'a replacé sur le pupitre de Ruth près de son visage. Celle-ci a ignoré cette boîte et a poursuivi ses calculs en écrivant des opérations. Esther a remis aussitôt la boîte à sa place. Après le comptage sur les doigts, Ruth a hoché la tête, a effacé des symboles et les a réécrits aussitôt après avoir posé les opérations (voir Figure 3.4). Le comportement de Ruth semble indiquer un rapport symbolique au matériel parce que la production de la réponse passe d'abord par des symboles (opération posée). Elle a utilisé ses doigts pour recompter et vérifier les résultats de l'opération posée.

Figure 3.4. Copie de Ruth, activité 2



Observation de l'activité 3 de Ruth

Comme il a été mentionné dans la section précédente, Ruth a résolu les trois problèmes sans pause. Au cours de la résolution du troisième problème, elle a posé plusieurs opérations sur la copie. Elle a divisé l'espace de réponse en deux parties comme

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

c'est indiqué dans l'énoncé du problème. Dans chaque partie, elle a posé une opération. Puis, elle a utilisé les cinq doigts de la main gauche à partir du pouce en écartant successivement les doigts. Puis, elle a compté les cinq doigts de la main droite à partir du pouce en touchant chaque doigt à l'aide du pouce de la main gauche. Elle a compté les cinq doigts de la main gauche en faisant un angle aigu entre l'extrémité de la paume de la main et la surface du pupitre. Elle a abaissé successivement les doigts à partir de cette surface. En général, elle a utilisé trois « mains » donc 15 doigts pour compter. Préalablement, ces calculs ont été effectués mentalement. Elle n'a pas utilisé les jetons disponibles pour recompter et vérifier la réponse mais ses doigts. Elle a d'abord utilisé des nombres en symbole pour construire un sens du problème et produire une réponse. Elle a écrit les mots : « 1^e partie » et une proposition « 2^e partie perd billes » qui peuvent exprimer un processus de résolution dans le temps. Ruth semble établir un rapport symbolique au matériel parce que la production de la réponse passe d'abord par des symboles de l'opération posée (les nombres) (voir Figure 3.4).

Figure 3.5. Copie de Ruth, activité 3

RUTH

Louise joue deux parties de billes. Elle joue une partie. À la seconde partie, elle perd 13 billes. Après les deux parties, elle a gagné 28 billes. Que s'est-il passé à la première partie?

Solution

2^e partie
perd 13
bille

$$\begin{array}{r} 28 \\ + 28 \\ \hline 56 \text{ billes} \end{array}$$

1^{re} partie
perd 13
bille

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 28 \\ \hline 41 \text{ bille} \end{array}$$

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Entretien

La section suivante de l'entretien présente un comportement de Ruth qui semble traduire un rapport symbolique au matériel au cours de la résolution des trois problèmes avec l'usage des doigts pour vérifier le résultat du comptage.

Chercheur : Nous avons visionné l'enregistrement ensemble (...). J'ai constaté que tu t'es arrêtée un temps, c'est comme si tu réfléchissais (...); à quoi pensais-tu? (...)

Ruth : Moi, je pensais aux nombres.

Chercheur : Pourquoi pensais-tu aux nombres?

Ruth : Je pensais aux nombres parce que si on n'utilise pas les deux chiffres ou si on fait un autre chiffre, Madame LeTouneau (pseudonyme de l'enseignante) dit toujours qu'on prend les chiffres qu'on a.

Chercheur : Tu avais du matériel à ta disposition. (...) Pourquoi ne l'as-tu pas utilisé?

Ruth : Non! (...) Moi, je compte vraiment avec des chiffres dans ma tête.

Chercheur : Est-ce que les jetons t'ont aidée à penser aux billes dans ta tête? (...)

Ruth : Non! (...) Moi, j'étais correcte à faire des mathématiques (...) juste comme ça.

Chercheur : Explique-moi comment tu comptes avec des chiffres dans ta tête.

Ruth : Mais, parfois les plus difficiles (...) il faut que j'essaie de me concentrer (...) il faut que je visionne (...) je visionne les chiffres qui sont sur la feuille et ça m'indique ce que je dois faire un plus (une addition) ou un moins (une soustraction) et là quand j'ai la réponse à ma solution je le

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

marque sur ma feuille (...) si, admettons qu'il y ait trop de résolutions dessus, j'utilise du matériel qui montre sur la feuille les instructions à suivre par exemple qu'ils relèvent qu'on a 15 cornets, on a 230 autres exemples, etc.

Au cours de la résolution des trois problèmes, Ruth n'a semblé penser qu'aux nombres : « Non! (...) Moi, je compte vraiment avec des chiffres dans ma tête » puis « Non! (...) Moi, j'étais correcte à faire des mathématiques (...) juste comme ça ». Même si le chercheur a fait explicitement mention du matériel (« Tu avais du matériel à ta disposition (...) Pourquoi ne l'as-tu pas utilisé? »), elle a quand même exprimé le caractère symbolique de l'activité : « Non! Moi, je compte vraiment avec des chiffres dans ma tête ». Ruth a utilisé des symboles de nombre pour construire un sens du problème et produire une réponse. Toutefois, l'utilisation du matériel est envisageable pour des opérations de plus grand ordre : « ... si, admettons qu'il y ait trop de résolutions dessus, j'utilise du matériel qui montre sur la feuille les instructions à suivre par exemple qu'ils relèvent qu'on a 15 cornets, on a 230 autres exemples, etc. ».

L'entrée dans le problème est mentale :

Ruth : Mais, parfois les plus difficile (...) il faut que j'essaie de me concentrer (...) il faut que je visionne (...) je visionne les chiffres qui sont sur la feuille et ça m'indique ce que je dois faire un plus (une addition) ou un moins (une soustraction) et là quand j'ai la réponse à ma solution, je l'écris sur ma feuille.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Ce visionnement est centré sur les symboles de nombres (symboles) et non sur l'objet matériel (physique) qu'ils indiquent. Par contre, quand l'ordre de grandeur de ces nombres est plus important, l'usage du matériel semble être envisageable. Même avec des nombres moins importants comme dans le cadre de ces problèmes, les doigts sont utilisés pour la vérification du comptage. Ruth (« ... je vérifie avec mes doigts ») rejoint Joëlle (« ... je vérifie avec mes doigts ») et Jeanne (« quand je dessine c'est comme si c'est vrai pour moi »). Pour Ruth et Joëlle, le concept vrai est utilisé dans le sens d'exactitude : « ... je vérifie avec mes doigts ». Ruth a utilisé des nombres en symboles (opération posée) dans l'entrée du problème et a produit une réponse. Ce sont les opérations posées qui semblent fixer le rapport de Ruth (sujet) au matériel. Ce rapport est symbolique. Elle a résolu les trois problèmes en 9 minutes.

Sommaire des rapports au matériel

De l'ensemble des rapports au matériel décrits (voir Annexe C), il ressort les réponses suivantes aux deux premières sous-questions :

1. Deux matériaux différents ont été utilisés par les élèves/participants dans l'entrée du problème: les nombres en symboles et les dessins.
2. Deux types de rapports au matériel ont émergé dans cette étude : un rapport symbolique quand l'entrée dans le problème et la réponse produite s'opérationnalisent à l'aide de nombres (Joëlle, Ruth, Josué et Rosette) et un rapport pictural (Jeanne et Esther) quand l'entrée dans le problème et la réponse produite s'opérationnalisent à l'aide de dessins.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Le tableau suivant présente un sommaire des rapports au matériel :

Tableau 3.1. Récapitulation des rapports au matériel

Élèves (participants)	Problèmes	Rapport au matériel
Jeanne	1-2-3	Rapport de représentation picturale
Joëlle	1-2-3	Rapport de représentation symbolique
Ruth	1-2-3	Rapport de représentation symbolique
Josué	1-2-3	Rapport de représentation symbolique
Rosette	1-2-3	Rapport de représentation symbolique
Esther	1-2-3	Rapport de représentation picturale

Sommaire des rapports au matériel

Trois points essentiels se dégagent de l'ensemble des résultats présentés ci-dessus et en annexe C relatifs au rapport au matériel chez les élèves/participants :

- L'élève qui résout des problèmes arithmétiques verbaux avec un matériel de manipulation disponible utilise deux types de matériaux : un matériel symbolique, tels symbole de nombre, mots et mots-nombres et un matériel pictural, tels dessin de billes et dessin de la situation décrite dans l'énoncé du problème. Il n'utilise pas le matériel disponible.
- À ces deux utilisations de matériaux correspondent deux types de rapport : un rapport symbolique quand l'entrée dans le problème s'effectue à l'aide de symboles et un rapport pictural quand l'entrée s'effectue à l'aide de dessins.

- La conscience de la construction d'un sens du problème à partir du matériel utilisé fixe le rapport au matériel. Ce rapport peut être symbolique (nombre, mot-nombre) ou pictural (image, dessin).

Cette étude vise à comprendre finement le rôle d'un matériel au cours de la résolution d'un problème arithmétique verbal. Malheureusement, la globalité de la description du rapport au matériel n'a pas permis d'approfondir le rôle d'un matériel dans la pensée des élèves/participants au cours de l'analyse. Les rapports symbolique ou pictural au matériel sont insuffisants pour décrire ce rôle avec finesse. Pour ce faire, je dois disposer d'une méthodologie fine. Je présenterai dans la section suivante la méthodologie de la dialectique sujet/matériel que je propose pour combler cette insuffisance.

3.6. Microanalyse de la dialectique sujet/matériel

J'ai visité et revisité la littérature pour m'informer sur le comportement des élèves du primaire qui résolvent des problèmes arithmétiques verbaux en lien avec l'usage d'un matériel. En effet, je vais rappeler dans cette section les principaux éléments relatifs au comportement de l'élève du primaire au cours de la résolution de ces problèmes qui ont émergé de ces visites et qui ont guidé l'échafaudage de cette méthodologie.

Johnson-Laird (1983) suggère que le traitement de l'énoncé par l'élève exige de sa part une aptitude à pouvoir se construire une représentation ou un modèle mental de chacun des événements décrits par le récit ainsi que leur cohérence interne par rapport au problème posé. Arkiguet-Bakong (2008) précise à cet effet que l'élève face à un problème arithmétique a donc à faire un premier effort mental de représentation de la cohérence interne du problème qui dépend de la représentation détaillée de chacun des événements présentés dans l'énoncé.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Je présente ce premier effort comme l'entrée dans le problème qui influence la réussite de ce problème. Depaepe, De Corte et Verschaffel (2009) ajoutent à cet effet que la résolution d'un problème arithmétique serait limitée par la difficulté à pouvoir repérer la cohérence interne de l'énoncé à travers la prise en compte des données qui y sont indiquées.

L'usage de matériel de manipulation est encouragé dans les classes (MELS, 2009; MÉO, 2007). Quand des élèves du primaire doivent résoudre des problèmes mathématiques, l'usage d'un matériel semble soutenir cet effort. Même si dans cette étude, les élèves/participants n'ont pas utilisé les jetons disponibles, ils ont par contre utilisé leurs doigts ou ont dessiné en résolvant les problèmes.

En effet, à propos de l'usage des doigts au cours de la résolution de problèmes arithmétiques de type additif comme ceux de la présente étude, après dix ans de recherche Carpenter (1985) et Carpenter et Moser (1983) notent entre autre que l'élève du primaire utilise ses doigts non pour le comptage proprement dit mais pour contrôler le déroulement du comptage et pour éviter les dépassements ou les oublis, donc pour s'assurer de l'exactitude du résultat. D'autre part, à propos des élèves qui dessinent pour résoudre un problème arithmétique, pour Richard (2004), le dessin est une sélection des éléments pertinents du problème. Pour le Secrétariat ontarien de la numératie et de la littératie (2008), ce dessin renforce le calcul mental par l'ajout du codage analogique au codage verbal. Enfin, pour Hughes (1986) dont les écrits s'inscrivent dans le courant socioculturel vygotkien, ce dessin met en relief une évolution d'une représentation du problème selon un ordre croissant de clarté et d'appropriation qui va de plus ou moins clair et personnel à très clair et conventionnel.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Dans le cadre de la construction du sens des premiers symboles de nombres par des enfants du préscolaire, Hughes (1986) a élaboré une catégorisation des symboles numériques pour expliquer l'évolution de la construction du sens du nombre. Dans ce cadre, Hughes (1986) propose d'abord que l'enfant produit un dessin que lui seul comprend. Hughes (1986) définit ce dessin comme une graphie qui ne permet pas à autrui de déduire une régularité.

Responses were classified as idiosyncratic if we were unable to discover in the children's representations any regularities which we could relate to the number of objects present. This did not preclude the possibility that such responses were meaningful to the children themselves: it simply meant that they were meaningless to us. (Hughes 1986, p.56)

En effet, la forme idiosyncrasique de Hughes (1986) présente une graphie de l'enfant expressive pour lui mais non pour autrui donc, une forme personnelle de compréhension du concept de nombre.

Ensuite, Hughes (1986) présente la forme pictographique comme une graphie qui exprime une certaine régularité et qui peut avoir un sens particulier dans d'autres cultures.

Pictographic is a term often used to describe certain writing systems used in other cultures. The criterion here is that the children should be trying to represent something of the appearance of what was in front of them, as well as is a numerosity. (Hughes 1986, p. 57)

La forme pictographique explique ainsi une compréhension du nombre chez l'enfant dont le sens est relativement accessible à autrui. Une certaine régularité comme par exemple la forme, la couleur ou l'orientation explique cet accès. Ces types de régularités peuvent autant représenter des objets physiques que des collections d'objets physiques.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Puis, Hughes (1986) présente la forme iconique comme une correspondance terme à terme entre un nombre et des objets physiques comptés.

Like pictographic responses, these (iconic responses) are based on one-to-one correspondence, but here the child uses a system whereby a discrete mark of their devising represents each brick. (Hughes 1986, p. 58)

Ainsi, la forme iconique présente une division de l'objet physique correspondant à un nombre. Cette correspondance met en exergue un début de symbolisation du nombre. Enfin, Hughes (1986) présente la forme ultime de l'évolution de la construction du nombre chez l'enfant : des symboles, distincts des objets comptés, et avec un sens particulier. Par exemple, il n'y a rien dans le symbole 7 qui indique la cardinalité d'une collection supérieure à 6.

Here the children were using conventional symbols to represent each quantity. (Hughes, 1986, p. 60)

La forme symbolique présente une expression des objets comptés purement symbolique et dont le sens est accessible à autrui par convention.

En somme, la suite de ces formes présente une démarche de symbolisation du nombre basée sur la connaissance d'un évènement et/ou des objets physiques d'un environnement perceptif à laquelle l'enfant se réfère pour se construire le concept symbolique de nombre.

En suivant l'idée de cette catégorisation des symboles de Hughes (1986), le sens des symboles que l'enfant apprendra plus tard à l'école se construira progressivement sur cette première construction du concept de nombre. Cette catégorisation des symboles présente la construction du sens d'un concept mathématique dans la pensée durant son évolution. Pour

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

cette raison, elle est pertinente à cette étude qui vise à décrire à un niveau micro le rôle d'un matériel dans la résolution des problèmes arithmétiques verbaux chez des élèves du primaire.

Dans l'ensemble, l'utilisation des doigts pour compter et la construction de dessins ont émergé comme des stratégies de groupement. Le lien entre ces stratégies et la formulation des réponses (traces) aux problèmes n'est pas suffisamment expliqué par les rapports au matériel. À la lumière de la catégorisation des symboles de Hughes (1986) et de la microétude issue de la théorie de l'objectivation de Radford (2002, 2003, 2006, 2011, 2013), 2013), en considérant l'élève du primaire comme sujet d'une recherche, je propose dans cette étude la microanalyse de la dialectique sujet/matériel pour combler cette insuffisance du rapport au matériel à décrire finement le rôle d'un matériel dans la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. Il s'agit d'une méthodologie qualitative qui permet d'expliquer un phénomène de courte durée à partir d'une description fine de celui-ci. Le principal avantage de cette méthodologie qualitative est la finesse de sa description. Son principal inconvénient est le nombre limité de sujets ou participants. Toutefois, la microanalyse de la dialectique sujet/matériel partage cet inconvénient avec l'ensemble des approches qualitatives.

De façon pratique, j'ai réalisé une microanalyse des données produites par chaque élève/participant en quatre étapes successives centrée sur les traces laissées par les élèves/participants en réponses aux tâches proposées. Puisque c'est le processus de construction de sens en lien avec l'usage d'un matériel qui m'intéresse dans cette étude, quand ces traces sont constituées uniquement de symboles (chiffres, mots et autres symboles), donc le produit, j'examinerai les gestes qui marquent les étapes vers l'atteinte du produit, comme par exemple dans le cas de Ruth. Quand les traces comprennent des dessins précédant des symboles, j'examinerai le processus qui conduit aux symboles. Dans les deux cas, je

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

partirai de la réponse et je remonterai au processus qui a conduit à cette réponse, quelle que soit la nature des données qui marquent le parcours de ce processus, comme par exemple, dessin ou geste. Je ferai le parcours inverse pour s'assurer de la justesse de mon analyse et je présenterai les résultats de l'analyse en suivant l'ordre du retour pour marquer la progression d'une forme plutôt personnelle à une forme plutôt conventionnelle le cas échéant.

Voici les trois étapes de la microanalyse :

1. Visionnement au ralenti de l'enregistrement des activités (traces); pour noter la suite des gestes en lien aux traces (mimiques, regards, paroles, dessins, symboles) de chaque participant relatif à chaque problème. Je visionne chaque participant deux fois et l'ensemble des participants deux fois, pour un total de 14 visionnements.
2. Analyse des traces en lien avec les gestes posés au cours de la réalisation des activités pour retracer la suite des symboles et/ou des dessins dans les traces laissées selon la chronologie du déroulement de l'activité de résolution des problèmes. Je dresse un tableau de catégorisation de symboles et de dessins et je les note tout en ayant soin d'arrêter momentanément le visionnement et de continuer aussitôt après.
3. visionnement et audition au ralenti de la section des entretiens semi-structurés en lien aux traces laissées afin d'établir des liens sur le sens que l'élève participant attribue à chacune de ces traces.

En effet, la microanalyse établit un lien entre les traces laissées, le sens de ces traces pour le participant et le geste posé en les produisant. L'ensemble présente une évolution de la pensée de l'élève au cours de la réalisation d'une activité mathématique. En cela, la

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

microanalyse de la dialectique sujet/matériel est une analyse fine de l'activité qui met en relief le sens en construction à partir de l'utilisation et/ou la production d'un matériel.

Essentiellement, si la microanalyse partage avec les autres approches qualitatives, l'attention aux détails, la description et les instruments qualitatifs (Anadon, 2006), elle se distingue par la finesse de sa description. Il s'agit d'un atout important pour expliquer l'apprentissage en construction à l'ère du socio-constructivisme dominant au Canada en particulier (MÉO, 2009; MELS, 2007). Le processus d'abstraction qui caractérise l'apprentissage mathématique ne peut être que bien servi par cette méthodologie.

Chapitre 4

Résultats : Dialectique sujet/matériel

En effet, le but de la présente étude était de comprendre le rôle d'un matériel chez l'élève du primaire qui résout des problèmes arithmétiques verbaux. J'ai conçu ce projet de recherche autour des jetons comme matériel dans une classe qui en dispose visiblement. Je n'ai pas atteint ce but puisqu'aucun des six participants n'a utilisé de jetons. Je me suis demandé quelles sont les raisons qui expliquent ce non usage de jetons? Pour expliquer ce revers et continuer la recherche, je suis retourné à la littérature pour avoir une meilleure compréhension du comportement de l'élève qui résout ces problèmes et aussi pour mieux circonscrire le contexte de réalisation de ces activités. Pour ce faire, une nouvelle recension critique relative à la récurrence de la production de dessin comme mode construction de sens et celle du comptage sur les doigts comme stratégie de comptage ou de recomptage issues des rapports au matériel fera l'objet de la première section du chapitre suivant. Je suis aussi retourné aux données en portant un nouveau regard sur le matériel utilisé. Il s'agit plus précisément d'un regard non teinté de l'idée de jeton comme matériel mais d'un nouveau regard qui embrasse l'ensemble des matériaux possiblement utilisables pendant ces activités. Un enjeu ou thème majeur ressort de cette révision : l'élève qui résout un problème arithmétique verbal peut utiliser le groupement pour construire un sens de ce problème. L'efficacité du moyen utilisé pour grouper dépend non seulement de la capacité de l'élève à calculer mais aussi du rapport de cet élève avec le matériel. Un sommaire du rapport au matériel est présenté au chapitre précédent. Le développement est présenté en annexe (voir Annexe C). Au centre de ces

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

rapports, le groupement semble émerger comme thème majeur qui structure l'ensemble des stratégies des participants pour résoudre ces problèmes arithmétiques verbaux. De ce thème majeur ressortent deux explications principales relatives au non usage manifeste des jetons des six participants.

Premièrement, la taille des nombres en jeu dans ces problèmes semble ne pas justifier l'usage des jetons pour compter un à un en faisant des groupements. Un tel usage des jetons semble impliquer une tâche de manipulation laborieuse. Josué et Rosette l'ont d'ailleurs confirmé de façon explicite au cours de leur entretien respectif:

Chercheur : Au lieu de faire cela (les calculs) dans ta tête, tu ne pouvais pas utiliser des jetons

Josué : Ce serait plus dur parce qu'il faut que tu fasses tous les chiffres ensembles; il faudrait que tu fasses 70 jetons, ce serait long parce qu'il faut que tu fasses 70 jetons (...) »

Chercheur: Il y avait des jetons disponibles (...) tu pouvais les utiliser mais tu ne les as pas utilisés (...) Pourquoi?

Rosette : Non (...) je trouve que c'est trop (...) sans jetons, je suis capable.

Quand le calcul est à la portée de l'élève, l'usage des jetons pour compter semble ne pas en valoir la peine. Par contre, l'idée de groupement semble être utilisée avec intérêt comme stratégie de comptage. C'est d'ailleurs le cas pour Jeanne (Figures C.1, C.2, C.3), pour Josué (Figures C.10, C.11) et pour Esther (Figures C.16, C.17). Cette idée semble même s'imposer à des élèves. Jeanne a trouvé trop long de compter des jetons disponibles et à proximité (voir entretien de Jeanne dans Annexe C). Pourtant, elle a dessiné autant de boules que de billes pour résoudre les trois problèmes (voir Figures C.1,

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

C.2, C.3). J'ai conclu que Jeanne a établi un rapport pictural au matériel. Je reconnais toutefois que la manière que ce rapport pictural s'articule chez Jeanne est encore inexpliquée. Je tenterai de comprendre ce sens construit en analysant plus finement les traces des participants qui présentent des dessins. Cette analyse de nature descriptive-explicative fera l'objet de la section 4.2.

Joëlle, Ruth, Josué et Rosette ont, en général, écrits des symboles, comme par exemple, des mots et des chiffres. Ils ont posé et effectué des opérations. Ils ont compté 3 à 25 doigts pour vérifier les résultats comme par exemple 105 billes pour le premier problème. Ils ont manifestement eu recours à une stratégie de groupement par comptage sur les doigts pour arriver à cette validation rassurante de la réponse puisqu'aucun d'eux n'a compté 105 doigts pour les 105 billes. Comment comprendre un tel mode de groupement pour ces participants? L'analyse du comptage sur les doigts comme mode de vérification sera l'objet de la section 4. 3.

Sommairement, le dessin ainsi que le recours aux doigts comme mode de vérification semblent faire ressortir le groupement comme stratégie de comptage chez des élèves réguliers comme ceux de la présente étude.

Deuxièmement, les élèves en difficulté en calcul semblent faire plus usage des jetons pour compter volontairement ou sur proposition de l'enseignant que leurs pairs sans difficulté. Une étude de cas de Deblois (1995) sur le recours aux jetons par un élève du primaire en difficulté d'apprentissage en arithmétique confirme d'ailleurs l'intérêt de cet élève à l'usage des jetons pour compter. Les élèves qui utilisent des jetons pourraient être perçus par les pairs comme étant en difficulté en calcul. Les participants de la présente étude étant identifiés élèves réguliers, l'explication du risque d'être perçu

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

comme élève en difficulté est moins pertinente à la présente recherche. Aussi, ce non usage manifeste de jetons peut s'expliquer par un alignement du comportement sur les pairs.

En somme, au-delà de l'usage ou du non usage des jetons, le souci d'utiliser une stratégie raccourcie de comptage et celui d'avoir une validation rassurante de la réponse du problème pourraient expliquer les moyens utilisés pour résoudre ces types de problèmes. L'élève en difficulté d'apprentissage en mathématiques paraît privilégier le recours aux jetons pour compter ou recompter. Le cas échéant, il passe plus de temps à effectuer ce calcul que ses pairs qui ne feraient pas usage de jetons pour effectuer ce même calcul. Le mode de vérification du résultat du comptage semble prévaloir sur la durée d'une stratégie de comptage.

La non-pertinence des jetons à mon étude m'a interpellé pour deux raisons. D'une part, j'ai eu une meilleure compréhension du contexte de l'usage des jetons pour compter chez des élèves du primaire. D'autre part, j'ai élargi le cadre de ma compréhension de matériel pour inclure d'autres matériaux. Dans cette étude, en dépit de la présence de jetons, deux constats relatifs à l'utilisation d'un matériel ont ressorti du visionnement du film de la résolution des trois problèmes de ces six élèves du primaire : le dessin et l'utilisation des doigts comme mode de vérification.

La construction de dessin et le comptage sur les doigts ont marqué cette étude. Le raisonnement des participants au cours des activités semble être plus complexe que ce à quoi se réfèrent les écrits recensés au premier chapitre. Pour se faire une idée plus complète de cette situation, la première section du prochain chapitre recensera d'abord des écrits relatifs à la culture de la classe mathématique au primaire, ceux relatifs à la

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

structure de l'énoncé des problèmes arithmétiques et ceux en lien aux comportements des élèves au cours de la résolution de ces problèmes. Ensuite, l'analyse de la construction de dessins et celle du comptage sur les doigts comme matériaux utilisés feront l'objet des sections 4.2 et 4.3 de ce chapitre. Des écrits pertinents seront intégrés à chaque section. Le prisme de la dialectique sujet/matériel semble autant pertinent malgré la nouvelle orientation de la présente étude. J'analyserai alors chacun de ces deux matériaux, en comparant et en contrastant les traces (réponses) et les gestes des participants. Enfin, la section 4.4 discutera de ces deux matériaux et terminera ce chapitre qui comprendra 4 sections.

4.1. Nouvelle recension des écrits

Durant l'année scolaire, l'élève passe beaucoup de temps à l'école. Une classe dans une école fonctionne comme un microcosme avec des règles implicites et explicites que Brousseau (1990) qualifie de clauses du contrat didactique. Selon cette idée, la théorie des contrats didactiques renvoie aux consignes exprimés et tacites au cours des activités d'enseignement/apprentissage. La présentation d'une réponse à un problème et le mode de vérification des calculs sont des exemples de ces règles. La règle de complexité maximale développée par Reusser et Stebler (1997) selon laquelle les données d'un problème doivent être utilisées pour trouver la réponse est éloquentes à ce sujet. Selon ces chercheurs, chez un élève du primaire qui résout des problèmes arithmétiques verbaux, tout problème a une solution et il faut utiliser toutes les données du problème pour arriver à une solution.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Toutefois, pour un élève donné, au cours de la réalisation d'activités de résolution de problèmes arithmétiques, la taille des nombres en jeu, le vocabulaire utilisé et la place de la question précise dans l'énoncé peuvent déterminer le niveau de difficulté de ces problèmes (Arkiguet-Bakong, 2008, De Cortes et Verschaffel, 1985, 1987, Depaepe, De Cortes, Verschaffel, 2009). Les trois problèmes arithmétiques verbaux (problème de type combinaison, problème de type comparaison et problème de type changement) proposés aux six élèves réguliers dans le cadre de cette étude présentent des mots fréquents, des nombres à deux chiffres et une question suite à l'énoncé du problème. La lecture du problème de type changement implique toutefois un retour à la formulation de la proposition initiale du problème et pose ainsi une certaine difficulté. Dans l'ensemble, ces trois problèmes arithmétiques verbaux seraient à la portée d'un élève régulier de troisième année. En fait, pour quatre participants de l'étude, les problèmes étaient plutôt faciles.

En effet, l'opération sur des nombres d'un certain ordre de grandeur et comprenant des mots non familiers, peuvent taxer la compréhension de ce type de problèmes. Aussi, la place de la question dans l'énoncé importe dans le processus de compréhension de ces problèmes. Pour Coquin-Viennot (2001), le placement de la question au début d'un problème augmente le niveau de difficulté. Cette difficulté semble s'expliquer par l'ajout d'erreurs d'anticipation par rapport aux erreurs « normales ». En établissant un ordre de difficulté selon la place de la question dans l'énoncé du problème, je peux obtenir deux niveaux de difficulté. Un premier niveau offre une lecture linéaire aboutissant à un calcul, comme par exemple, les deux premiers problèmes de type combinaison et de type comparaison de cette étude. Ce sont des problèmes d'application. Un deuxième niveau

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

propose une lecture discontinue soit par un renvoi au début du problème, soit par la place de la question posée, comme par exemple, le troisième problème de type changement. Il ne s'agit pas toutefois à ce troisième problème de la place physique des mots de la question dans l'énoncé mais du renvoi obligatoire de cette question au début du problème. Dans ce chapitre, je pars de l'hypothèse que la taille des nombres en jeu, le vocabulaire utilisé et la place de la question dans les énoncés de problèmes arithmétiques verbaux proposés aux six participants forment une structure de problèmes arithmétiques verbaux à la portée d'un élève moyen de troisième année. Aux trois problèmes arithmétiques verbaux proposés aux six participants, à raison de trois réponses par participants, les six participants ont produit 16 réponses correctes sur un total de 18 réponses.

Au-delà du contexte du déroulement de la classe, du contrat didactique de l'enseignant et de la structure du problème, des études en psychologie cognitive ont montré que lorsque les élèves sont engagés dans une tâche de résolution de problèmes, ils ne s'appuient pas seulement sur des représentations internes, comme, par exemple, le raisonnement et la capacité attentionnelle, mais aussi sur des représentations externes telles que les indices physiques présents dans l'environnement perceptif (De Viviés, 1999, Zhang et Normand, 1994). L'enjeu de la compréhension du calcul dans les problèmes arithmétiques verbaux renforce le rôle de cet appui sur la représentation externe de l'élève qui résout ces problèmes.

En bref, au cours de l'exécution des tâches de calcul et/ou cours de la réalisation d'activités de résolution de problèmes arithmétiques verbaux par des élèves du primaire, les stratégies personnelles de ces élèves m'interpellent. La nouvelle orientation de cette

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

étude vise à explorer l'utilisation de telles stratégies par ces élèves en lien à la présence ou à la production d'un matériel donné comme, par exemple, des dessins au cours de ces activités.

Toutefois, les écrits ci-dessus recensés portent à penser qu'il faut considérer l'environnement habituel des élèves/participants, pour comprendre la plupart de leurs comportements au cours de leur apprentissage en classe. Malheureusement, en dépit des deux visites de la classe de nos participants, je n'ai pas pu circonscrire avec la finesse d'une microanalyse le contexte socio-culturel de cette classe. Je n'ai pas non plus demandé le consentement de l'enseignante de cette classe à cette fin. Je suis pourtant conscient de l'impact du contexte de classe sur la réponse produite par les participants. Néanmoins, à mon avis, ces absences de considérations définissent le contexte général dans lequel j'ai collecté et analysé les données de cette étude.

Chez les six participants qui ont résolu les trois problèmes arithmétiques verbaux de type additif, l'ancrage d'un matériel pictural (dessin) ou physique (les doigts) au cours de cette activité semble saillant. Car, au-delà des considérations précédentes relatives aux aspects didactique, sémantique et structurel des problèmes proposés, la mention du mot bille dans ces problèmes renvoie à l'idée d'un matériel maniable chirotalement et susceptible d'être diversement représenté par les participants. Les jetons étant disponible, leur usage pour compter ou recompter semble être tout indiqué. Pourtant, tous les participants ont utilisé d'autres matériaux. Chez un élève du primaire qui résout ces problèmes, l'usage d'un matériel, le symbolisme des traces, les règles expresses et tacites qui régissent son environnement d'apprentissage et la structure du problème

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

arithmétique, complexifient l'analyse du rôle d'un matériel dans la résolution de ce type de problème au primaire.

En effet, plusieurs arguments justifient le comportement des élèves qui dessinent pour compter et/ou pour résoudre un problème arithmétique verbal. D'abord, pour Richard (2004), l'élève qui dessine en résolvant un problème arithmétique, sélectionne des éléments pertinents du problème en construisant un dessin qui est sa représentation de ce problème. Ensuite, selon le Secrétariat ontarien de la numératie et de la littératie (2008), le dessin est un modèle qui renforce le calcul mental par l'ajout du codage analogique au codage verbal. Enfin, Hughes (1986) dont les écrits s'inscrivent dans le courant socioculturel vygotkien, soutient que les enfants représentent des nombres selon un ordre croissant de clarté et d'appropriation qui va de plus ou moins clair et personnel à très clair et conventionnel. Dans ce cadre, les enfants dessinent quatre formes figuratives numériques : formes idiosyncrasiques (par exemple une délimitation d'un espace ou d'une image), formes pictographiques (analogie image/unité), formes iconiques (représentation à la fois personnelle et symbolique) et formes symboliques conventionnelles (des nombres) et des mots. Quelle que soit la nature de l'écriture utilisée pour représenter un problème en lien aux nombres, Hughes (1986) la qualifie de symbole. Dans cette recherche, je proposerai comme symbole, l'écriture conventionnelle arabe (le nombre 34 par exemple), l'écriture conventionnelle mathématique $=$, $+$ et $-$, les groupements (formes iconiques) et les mots. En général, au-delà d'une représentation spatiale, les symboles iconiques semblent partager un aspect commun : le groupement. Par exemple, les formes idiosyncrasiques et pictographiques sont qualifiées de dessins en

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

raison d'une référence analogique aux objets comptés et/ou de la situation représentée.

Au terme de la résolution de problèmes, une proposition mathématique s'ensuit.

En outre, à propos de l'usage des doigts comme stratégie de comptage ou de recomptage, comme je l'ai mentionné précédemment, une genèse de l'usage des doigts de nature essentiellement historico-culturelle a été proposée (Ifrah, 1994; Fayol, 1990; Fuson, 1991; Levy, 1993). La perspective historico-culturelle (Fried, 2007; Jankvist, 2010) propose un cadre d'évolution des phénomènes sur de longues périodes. La microanalyse est une méthodologie qui contribue à expliciter les détails de l'évolution d'un phénomène en cours de réalisation. Comme je l'ai observé chez des participants à la présente étude (Joëlle, Ruth, Josué et Rosette), l'usage des doigts semble être une stratégie de groupement puisqu'au cours de la résolution du premier problème par exemple, aucun participant n'a compté 105 doigts donc 21 mains. Toutefois, même en ayant recours aux mêmes stratégies, chacun manifeste un geste évocateur qui semble offrir des pistes intéressantes pour comprendre le fonctionnement de son rapport au matériel.

À la lumière de ce sommaire des écrits, je présenterai dans la section suivante, les résultats d'une analyse fine des données recueillies selon l'utilisation d'un matériel pictural (construction de dessins) ou d'un matériel physique (comptage sur les doigts).

4.2. Le dessin

Dans cette section, au-delà de la recension, je discuterai des écrits relatifs à la production de dessins en résolution de problèmes arithmétiques. Ensuite, à la lumière de ces écrits, en comparant et en contrastant les réponses de Jeanne et d'Esther aux trois

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

problèmes arithmétiques verbaux, j'analyserai ces réponses. Enfin, en me référant à la catégorisation des symboles de Hughes (1986), j'approfondirai l'analyse de certaines réponses en fonction de leur richesse picturale.

Au cours de la résolution des problèmes arithmétiques verbaux, deux participants ont dessiné plus que d'autres: Jeanne et Esther. Selon une lecture linéaire de l'exécution des gestes, et en se référant à la catégorisation des formes figuratives et aux symboles, le tableau suivant présente la réalisation des trois activités par ces deux participants qui semblent partager un même rapport pictural au matériel (voir annexe C).

Tableau 4.1. Traces et gestes de Jeanne et d'Esther					
	Production de symboles et/ou de dessins				
Activités des élèves	Formes idiosyncrasiques	Formes pictographiques	Formes iconiques	Symboles conventionnels	Propositions mathématiques
Activité 1 de Jeanne	Non	Boules	Non	Chiffres +	Suite d'opérations
Activité 1 D'Esther	Non	Boules	Non	Chiffres Mots +	Jean=34 billes Marie=71 billes 105 billes en tout Jean et Marie
Activité 2 de Jeanne	Non	Boules	Groupements	Chiffres Mots	Marie a 22 billes
Activité 2 D'Esther	Délimitation des parts	Boules	Regroupements	Chiffres Mots + - X et :	Jean 37 billes Marie 22 billes
Activité 3 de Jeanne	Personnages et espaces délimités	Boules	Regroupements	Chiffres Mots +	Elle a gagné 41 billes
Activité 3 D'Esther	Délimitation des parties	Non	Non	Chiffres Mots + et -	-13 billes + 28 billes à gagné des billes parce qu'elle ne peut pas pourrais pas perdre des billes si elle en n'a pas.

En suivant l'ordre des problèmes, une analyse par problème ou activité, basée sur la production de ces formes figuratives et des écrits pertinents est proposée. Voici à ce propos les réponses de Jeanne et d'Esther au premier problème:

Figure 4.1. Copie de Jeanne, formes figuratives, activité 1

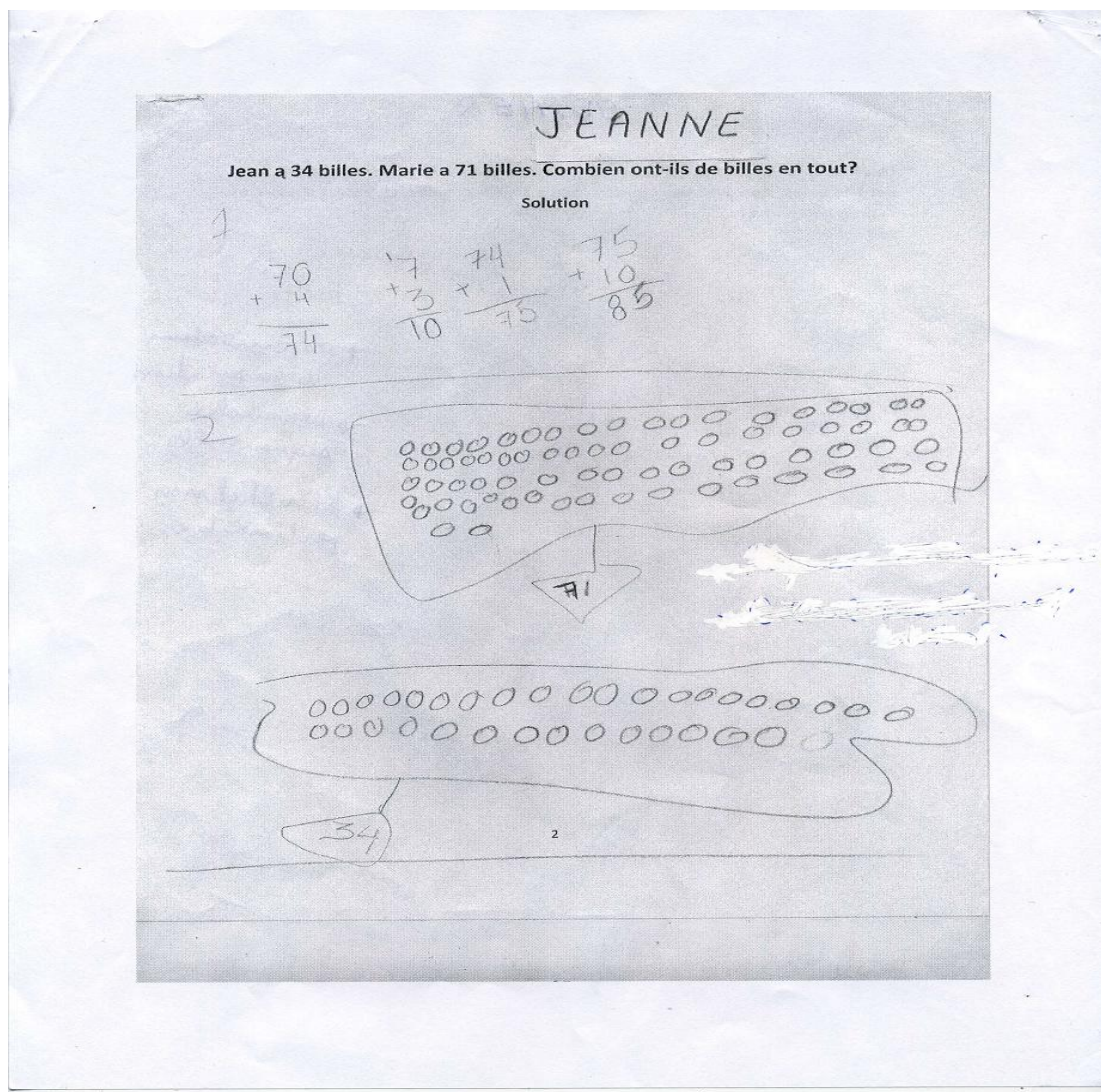
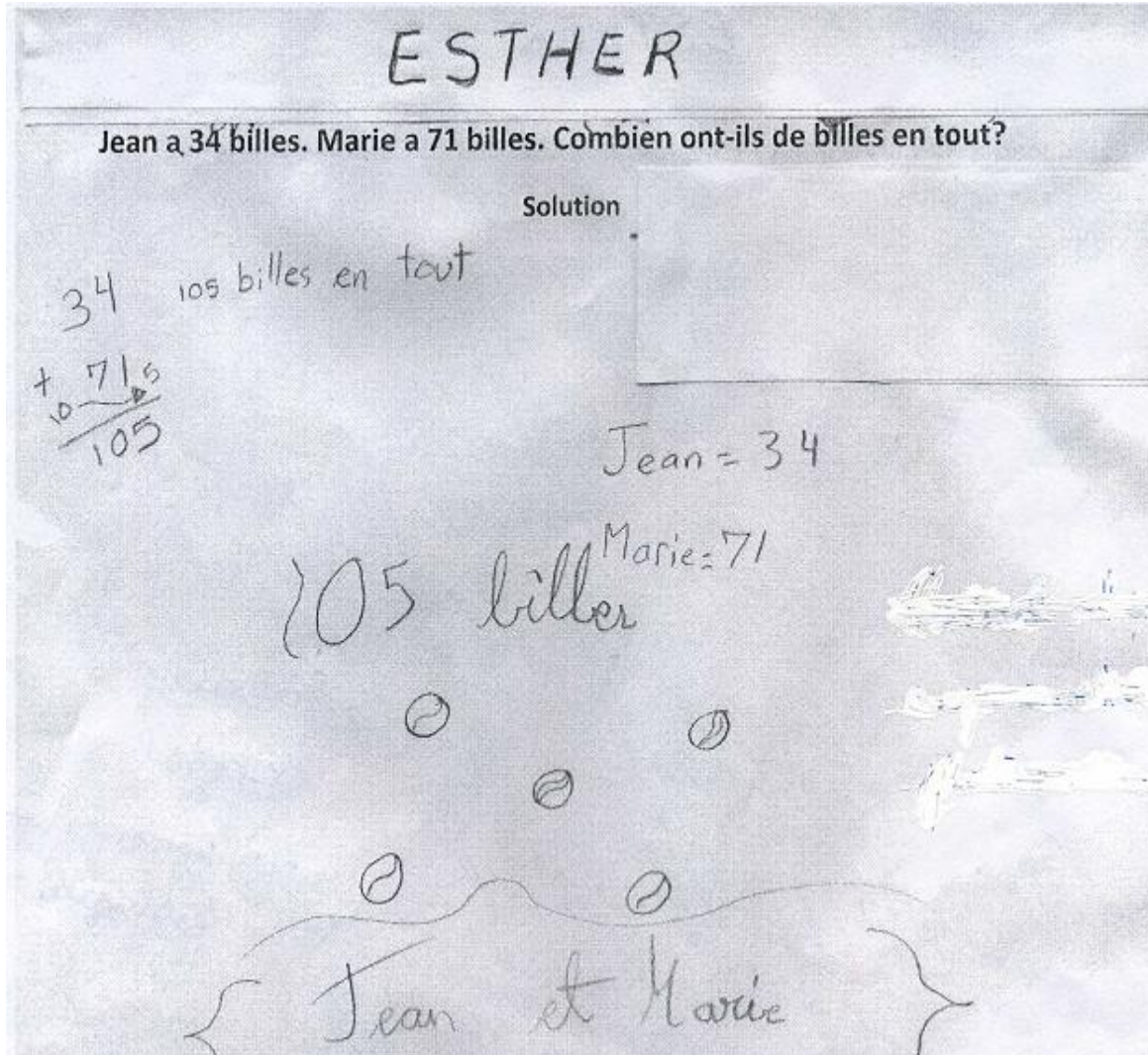


Figure 4.2. Copie d'Esther, formes figuratives, activité 1



Après avoir pris possession de la copie des énoncés de problèmes, Jeanne a pris 40 secondes pour lire la copie sans tenir son crayon. Puis, pendant 17 secondes, elle est restée immobile tout en portant des regards distraits sur la copie. Elle a ensuite pris le crayon et a dessiné deux ensembles de boules correspondant aux deux nombres mentionnés dans l'énoncé du problème soit respectivement 71 et 34. À la différence d'Esther qui a lue silencieusement la copie pendant deux à trois minutes avant de commencer la résolution, qui a ensuite dessiné 5 billes en résolvant le premier problème

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

et qui a résolu les trois problèmes en 10 minutes, Jeanne a réalisé une correspondance complète bille dessinée/unité de bille, les 105 billes sont représentés par 105 boules petites et rondes : d'une part un ensemble de 71 et d'autre part un ensemble de 34. De plus, chez Jeanne, la correspondance bille/unité est complète même s'il n'y a pas une proposition mathématique qui traduit le total des billes. Jeanne a semblé centrer son attention sur le dessin. La centration sur le dessin, ne semble pas mener forcément à une réponse juste à un problème arithmétique verbal. Par contre, le dessin produit, offre l'avantage de mener à une représentation du problème par l'élève qui le résout. Jeanne a résolu les trois problèmes en 6 minutes. Par contre, tant chez Jeanne que chez Esther, au cours de la résolution du premier problème, il en ressort un recours à une même graphie représentant l'unité. Cette graphie semble être le fruit d'une correspondance analogique de forme pictographique. Pour Richard (1984), l'élève qui dessine en résolvant un problème, présente une synthèse des éléments pertinents de ce problème à travers son dessin. Au-delà d'une correspondance analogique, Jeanne et Esther ont dessiné en résolvant ce problème parce qu'elles ont centré la construction du savoir mathématique du problème sur le mouvement d'un matériel pictural. Ce mouvement de structuration est une dialectique sujet/matériel articulée sur le rapport pictural de ces dernières avec le matériel.

Par contre, les comportements de Jeanne et d'Esther au cours de la résolution du deuxième problème présentent quelques différences par rapport au premier problème. Voici l'illustration des réponses de Jeanne et d'Esther au deuxième problème:

Figure 4.3. Copie de Jeanne, formes figuratives, activité 2

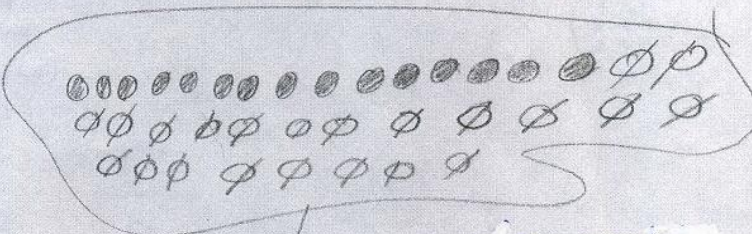
JEANNE

Jean a 37 billes. Il a 15 billes de plus que Marie. Combien Marie a-t-elle de billes?

Solution

$$\begin{array}{r} 37 \\ - 15 \\ \hline \end{array}$$

Marie a 22 billes

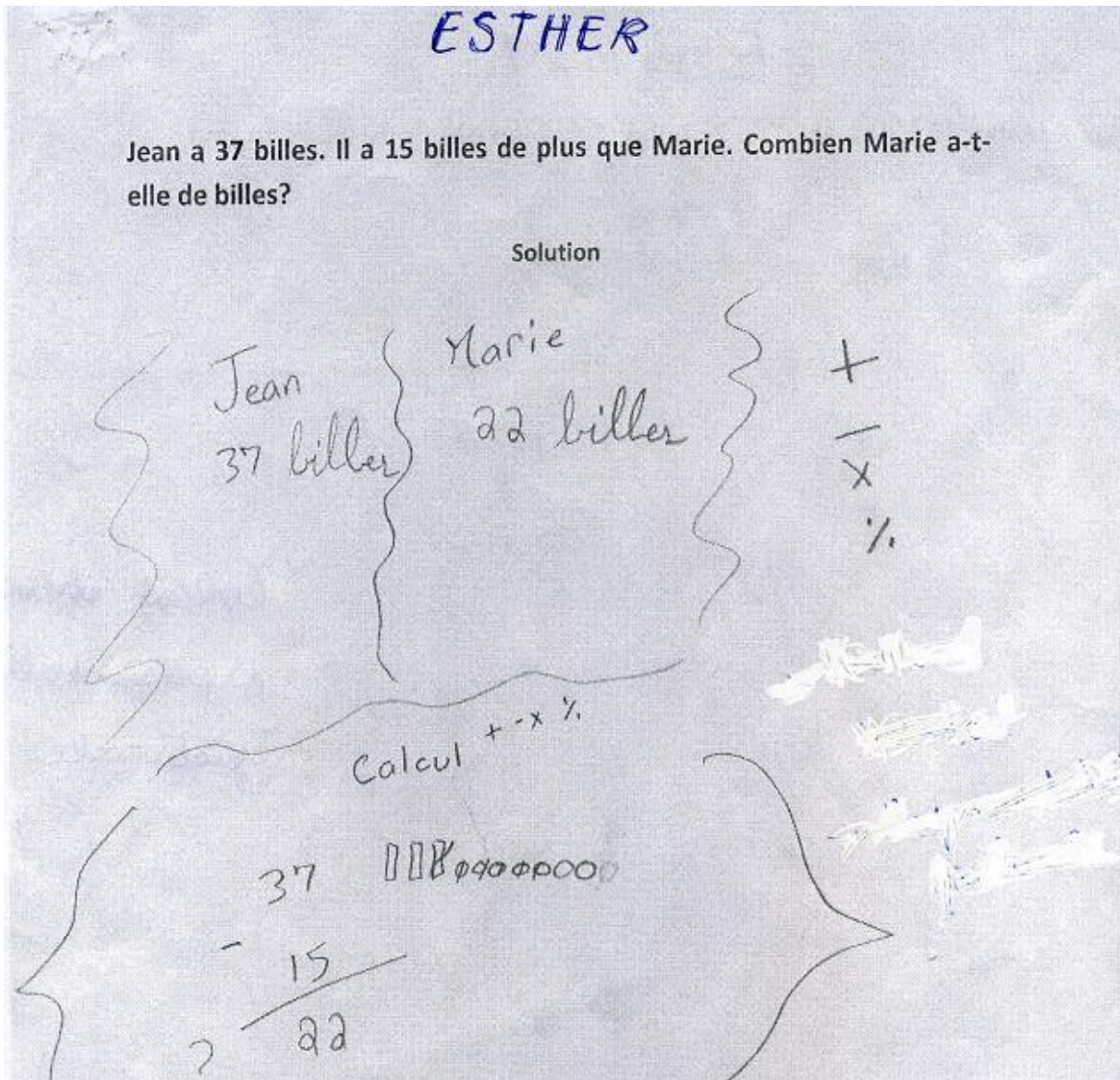


$$\begin{array}{r} 37 \\ - 15 \\ \hline 22 \end{array}$$

3

52

Figure 4.4. Copie d'Esther, formes figuratives, activité 2



La principale différence est que, dans ce problème, Jeanne a produit une réponse sous forme de proposition mathématique. Par contre, ces deux énoncés de problèmes présentent plusieurs similitudes. Ce sont deux problèmes arithmétiques d'application (combinaison et comparaison). Les nombres en jeu ne sont pas des nombres élevés. Ce sont des nombres inférieurs à 100. La similitude d'une représentation du problème chez un même élève est compréhensible. La linéarité de la lecture de l'énoncé sans données

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

manquantes ou superflues et le placement de la question à la fin du texte pourraient expliquer la similitude du raisonnement à la base de la résolution de ce problème (Coquin-Viennot, 2001; Reusser et Stebler, 1997). Au regard des gestes caractéristiques du comportement de ces deux élèves au cours de la résolution de ces deux problèmes, le mouvement que produit la structuration du savoir dans ces problèmes est encore centré sur un matériel dessiné (Jeanne et Esther). Au-delà de l'utilisation de ces deux matériaux, ce sont les gestes caractéristiques de la construction du savoir mathématique en dessinant qui importe. Même si Hughes (1986) englobe toute graphie décrivant un calcul dans le concept de symbole, je considère que seuls les symboles conventionnels des chiffres arabes, les formes iconiques et les mots sont des symboles.

L'analyse des deux premiers problèmes de type combinaison et de type comparaison, met en exergue un mouvement évolutif soit d'une forme idiosyncrasique soit d'une forme pictographique. Dans les deux cas, ce mouvement semble indiquer une démarche personnalisée de construction du sens du savoir mathématique soit par une délimitation temporelle ou situationnelle (formes idiosyncrasiques), soit par une correspondance directe image /unité (analogie). La réponse de Jeanne à ces problèmes arithmétiques verbaux est numérique et complète. Par contre, la réponse d'Esther est incomplète. Elle part d'une forme idiosyncrasique, puis évolue vers une forme symbolique pour aboutir à la proposition d'une réponse non numérique à ce problème arithmétique. Les propositions mathématiques suivantes de Jeanne : « *elle a gagné 41 billes*, et d'Esther : *+ billes du a gagné des billes parce qu'elle ne pourrais pas perdre des billes si elle en n'a pas* », sont alors un reflet de leur compréhension du problème.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Enfin, au cours de la résolution du troisième problème, aux formes iconiques et idiosyncrasiques des dessins des premier et deuxième problèmes, Jeanne continue à présenter des formes iconiques pour représenter le troisième problème. Voici les réponses de Jeanne et d'Esther à ce troisième problème.

Figure 4.5. Copie de Jeanne, formes figuratives, activité 3

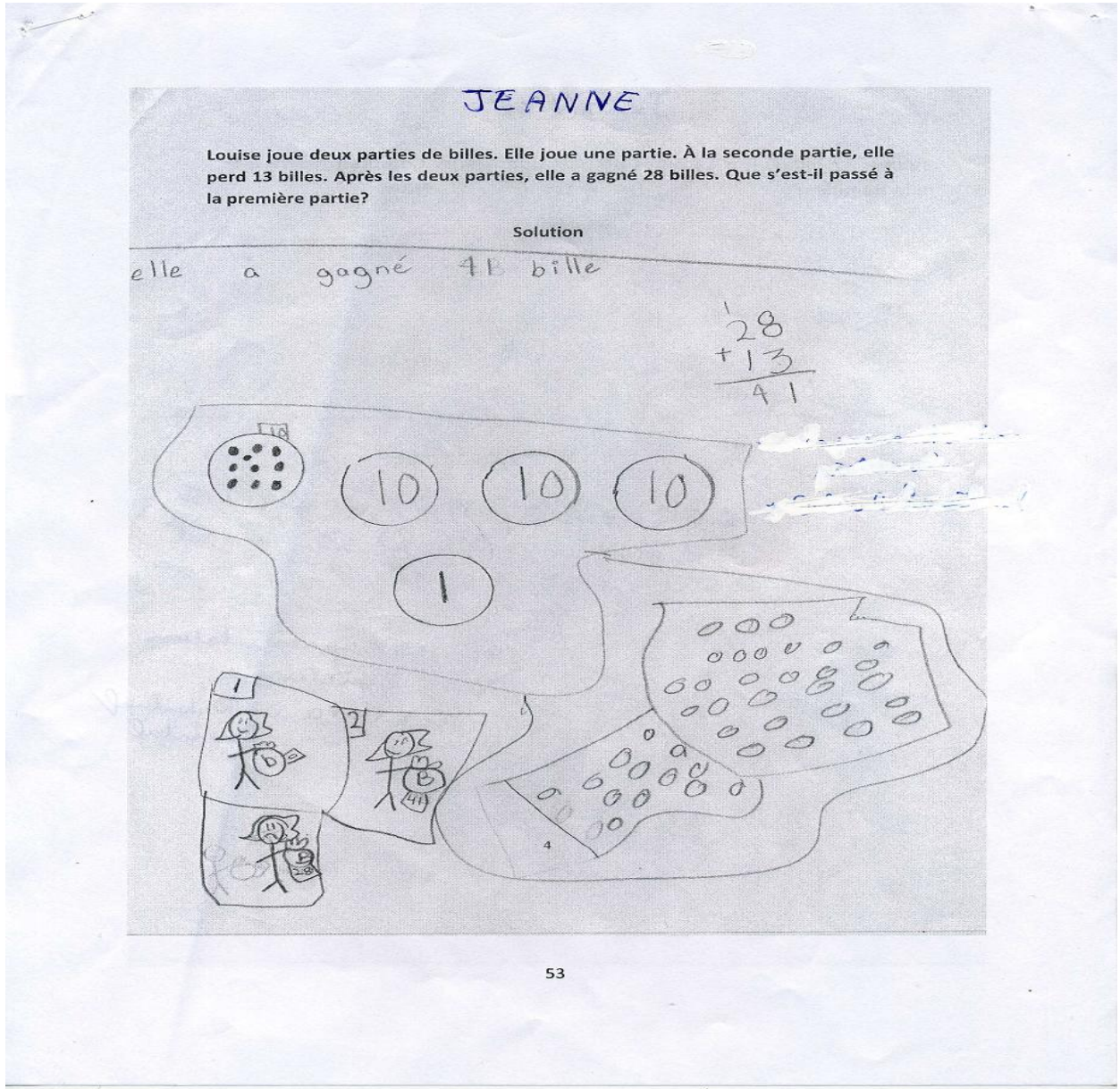
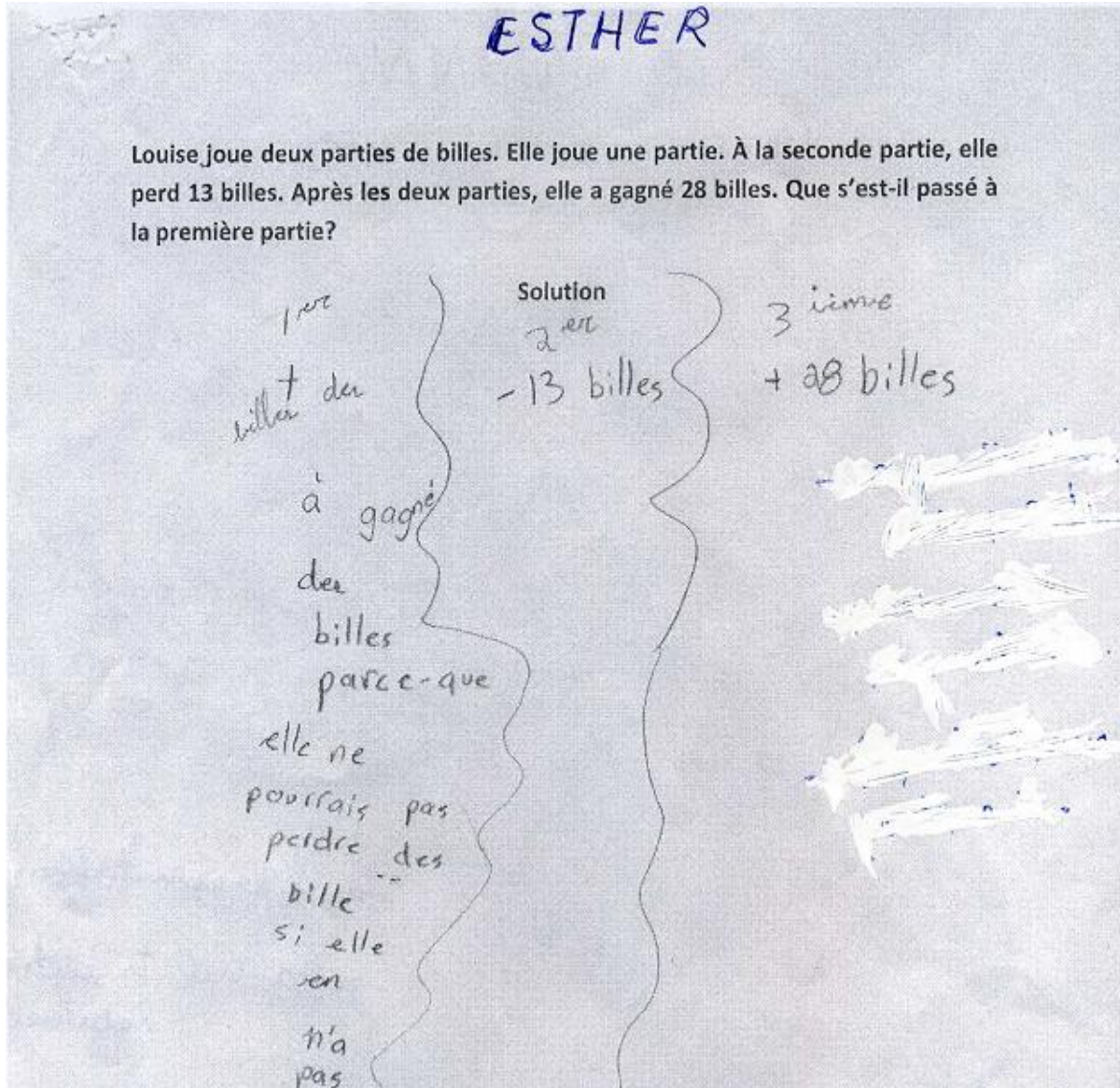


Figure 4.6. Copie d'Esther, formes figuratives, activité 3



Jeanne a écrit une proposition mathématique correcte au troisième problème. Le visionnement au ralenti du déroulement temporel de la troisième activité de résolution de problèmes a révélé que Jeanne a d'abord dessiné des personnages dans des espaces identifiés 1, 2 et 3 (Figure C.5 Copie de Jeanne, formes idiosyncrasiques, activité 3). Ces dessins reflètent une sélection des éléments pertinents du problème : sa représentation de l'énoncé du problème (Richard, 2004). Ensuite, Jeanne a dessiné les boules et les a

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

partagées en deux ensembles respectivement 28 et 13 boules. L'analogie image/bille est donc directe. Ce sont des symboles pictographiques selon la catégorisation des symboles de Hughes (1986). Jeanne a ensuite construit cinq cercles dans lesquels elle a dessiné en premier lieu des points puis elle a écrit 10 en symboles dans les trois cercles suivants et 1 dans le cinquième. Elle a posé son addition et a écrit le résultat 41. Enfin, elle a écrit sa proposition mathématique : « *elle a gagné 41 billes* ». La réalisation des traces de Jeanne dans le temps reflète un mouvement de pensée qui part d'une forme idiosyncrasique de la numérosité, puis vers une forme pictographique, puis vers une forme iconique et enfin vers une forme conventionnelle. Ces différentes formes figuratives sont pour moi un matériel pictural. La nature de ce matériel est un dessin. Jeanne et Esther ont manifesté des gestes semblables aux trois problèmes. Le mouvement autour de ce matériel semble être récurrent. Je propose dans ce cas que ce mouvement est une dialectique sujet/matériel qui s'articule selon un rapport propre au matériel chez l'élève qui résout le problème. Le choix exclusif d'un matériel dépend du rapport de cet élève à ce matériel. Le rôle du matériel dans la pensée de l'élève qui résout ces problèmes est de dynamiser ce rapport qui se manifeste par des gestes symboliques, caractéristiques de l'être en mathématique de cet élève au cours de cette activité.

Pour les deux participants (Jeanne et Esther), au cours de la résolution des trois problèmes arithmétiques verbaux, même si un matériel symbolique sert à la structuration du savoir mathématique dans le problème, la centration de cette structuration est un matériel pictural (Jeanne et Esther). La réponse d'Esther au troisième problème confirme une telle explication : « *elle a gagné des billes parce qu'elle ne pourrait pas perdre si elle n'a pas* ». Le rapport au matériel qui peut être une base de la réponse de l'élève du

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

primaire à un problème arithmétique verbal, semble être pictural (Jeanne et Esther). De plus, ces deux élèves ont exécuté des gestes semblables au cours de la résolution des trois problèmes. La dialectique sujet/matériel semble être dynamique et récurrente. Le dessin produit (matériel pictural) permet aussi de vérifier l'exactitude d'une réponse à un problème arithmétique verbal. De Vivié (1999, 2010) et Zhang et Normand (1994) attribuent un rôle important à la présence physique d'un matériel dans l'appropriation d'un sens. Je propose qu'un rapport pictural au matériel explique la vérification de l'exactitude de la réponse produite par l'élève qui résout des problèmes arithmétiques verbaux.

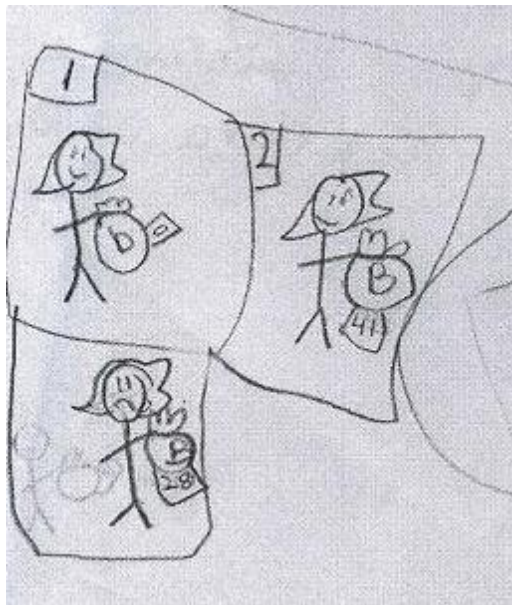
Les quatre formes figuratives traduisent une évolution dans la pensée d'une forme figurative personnelle jusqu'à une forme symbolique conventionnelle. Ces formes démontrent un dynamisme de construction de sens. Ce dessin est pour moi un matériel pictural. Jeanne et Esther ont établi un rapport pictural au matériel. La nature de cette présentation dépend de ce rapport. Dans le cadre de la résolution du troisième problème, le matériel de base est un dessin de forme idiosyncrasique. Au-delà d'une forme figurative donnée, des mots, des nombres et des propositions mathématiques reflètent une représentation de ces problèmes arithmétiques verbaux par ces deux élèves (Jeanne et Esther). En raison, de l'importance de cette catégorisation de Hughes (1986), je poursuis par une discussion des rapports picturaux au matériel chez Jeanne et Esther.

Premièrement, la forme idiosyncrasique est un dessin qui ne permet pas d'établir une correspondance avec une cardinalité due à l'absence d'une régularité. Pour Hughes qui a réalisé une étude avec des enfants de 3 à 7 ans, la forme idiosyncrasique est un gribouillis qui ne permet pas de déduire une régularité. Chez des enfants plus âgés

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

comme par exemple, Jeanne et Esther de cette étude, leur représentation individualisée de ces problèmes peuvent établir une certaine régularité comme par exemple, des maisons et/ou des bateaux et/ou des espaces et/ou des personnages qui peuplent leur imagination. Ces enfants plus âgées ne vont pas avoir tendance à produire des gribouillis dans cette situation mais des formes individualisées. Ces images de personnages dans la section suivante de l'activité 3 de Jeanne illustrent mes propos:

Figure 4.7. Copie de Jeanne, formes idiosyncrasiques, activité 3

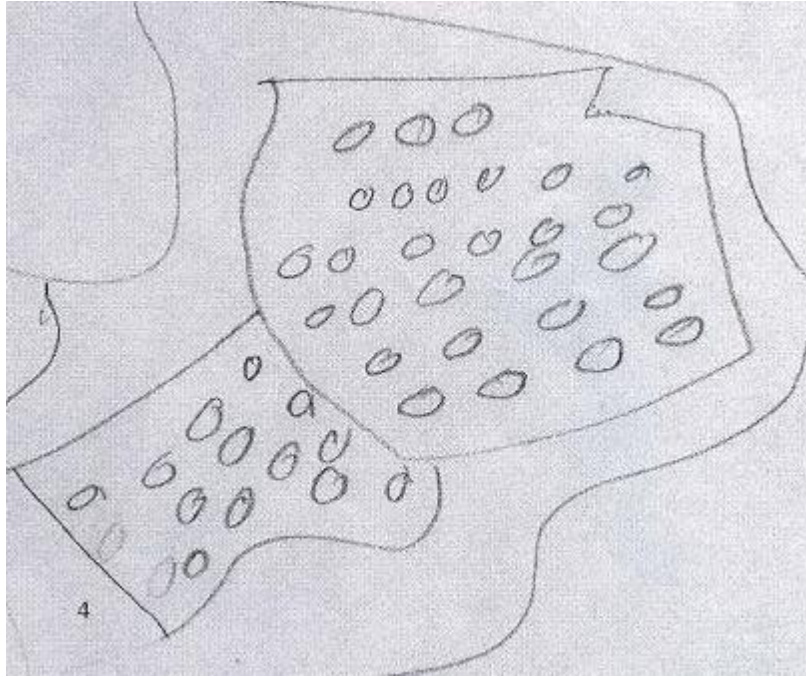


Cette forme présente, en espaces délimités, le déroulement temporel de la situation décrite dans l'énoncé. Au centre d'un espace, il y a un personnage. Chaque personnage présente une partie du jeu. Les espaces et les personnages décrivent l'ensemble du contexte de la situation décrite dans le problème. Les collections dans les espaces ne sont pas encore déterminées et/ou calculées.

Deuxièmement, la forme pictographique établit une correspondance analogique image/unité qui semble expliciter le contenu des espaces de la forme idiosyncratique. La

figure suivante, une autre section de l'activité 3 de Jeanne, présente un exemple de formes pictographiques :

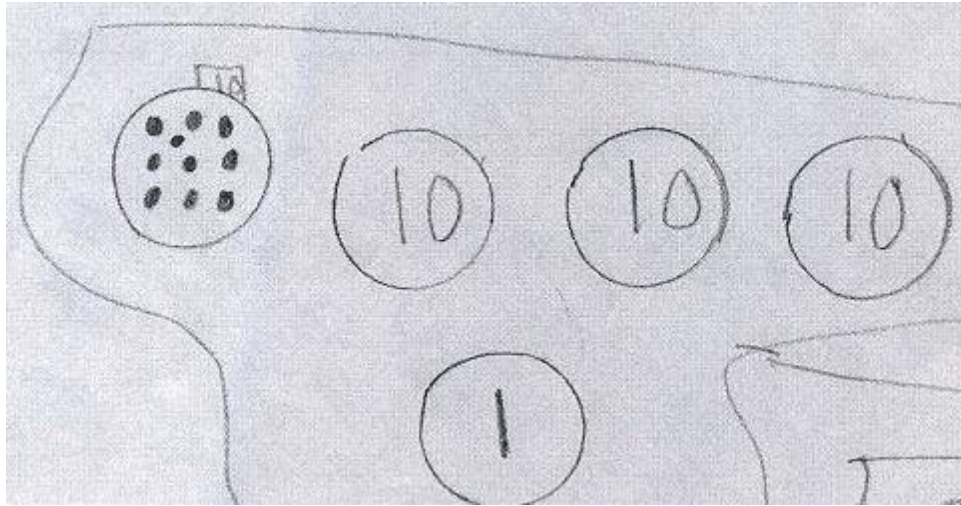
Figure 4.8. Copie de Jeanne, formes pictographiques, activité 3



Dans cette figure, chaque image ou boule représente donc une bille comme c'est indiqué dans le problème : un ensemble de 13 billes et un autre ensemble de 28 billes. Les deux ensembles totalisent les 41 billes qui ont été gagnées à la première partie.

La forme iconique utilisée dans certaines cultures pour représenter la cardinalité, présente une régularité basée sur la forme, la position ou la couleur (bloc base 10). Chaque collection est représentée par une correspondance directe forme/groupement d'unités. Cette forme semble représenter un début de symbolisation par le groupement des objets dessinés et constitue une économie de graphies et de temps. La section suivante examine les traces de Jeanne, une représentation tout à la fois de changement de formes iconiques à de formes symboliques :

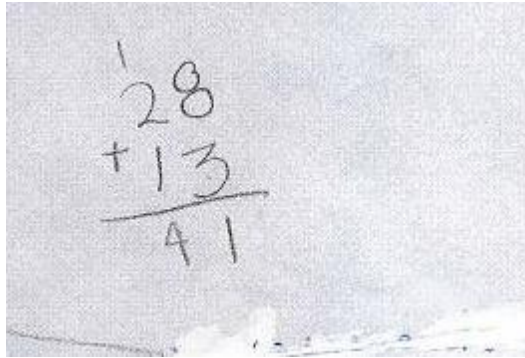
Figure 4.9. Copie de Jeanne, formes iconiques et symboliques, activité 3



Quatre cercles présentent dix billes et un dernier présente une bille. Les billes ne sont pas comptées un à un, sauf dans le premier cercle. Dans les trois cercles suivants, le symbole 10 semble présenter l'espace qu'occuperaient 10 billes dessinées. Le symbole 1 dans le dernier cercle paraît représenter l'unicité de correspondance symbole/dessin ouvrant la voie à un groupement, donc une économie d'espace et de graphies.

Troisièmement, la forme symbolique conventionnelle présente une suite ordonnée de graphies juxtaposées dont la valeur d'une graphie, représente d'une part, une collection donnée. D'autre part, selon le système décimal de numération, cette valeur peut être plus grande ou plus petite selon sa position dans cette suite ordonnée de graphies. À mon avis, cette forme achève le processus de symbolisation et d'économie de graphies. Elle présente en même temps l'avantage d'une collection plus universelle. En cela, elle est conventionnelle, comme dans la figure suivante tirée des traces de l'activité 3 de Jeanne :

Figure 4.10. Copie de Jeanne, formes symboliques conventionnelles, activité 3



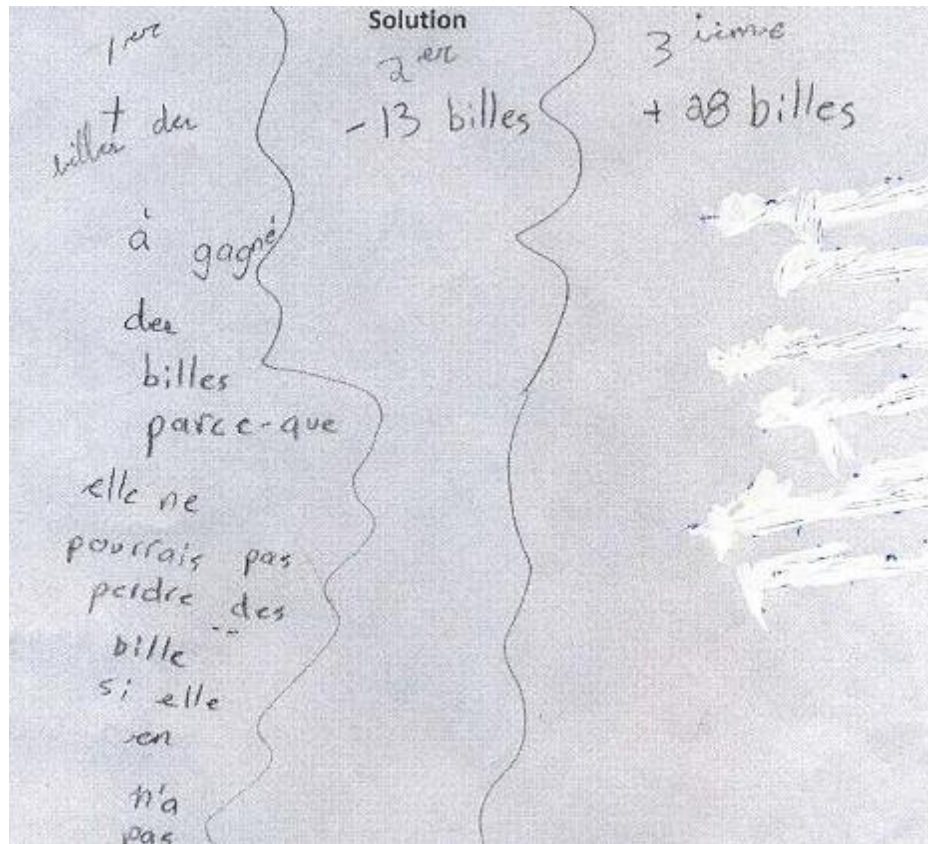
$$\begin{array}{r} 28 \\ + 13 \\ \hline 41 \end{array}$$

L'addition avec retenue de 28 et de 13 est posée à la verticale et totalise 41. Ce résultat correspond aux 41 billes de la deuxième partie. Aussi, au cours de la réalisation des deux premières activités de résolution de problèmes arithmétiques verbaux par Jeanne, des formes iconiques précèdent les propositions mathématiques et/ou les opérations arithmétiques (Figures C.1 et C.2).

De même, le déroulement temporel de la réalisation de la troisième activité par Esther présente un mouvement de construction du sens numérique qui suit un cours semblable à celui de Jeanne à la même activité. Jeanne emprunte différentes formes figuratives jusqu'à une proposition mathématique symbolique en réponse à ce troisième problème arithmétique verbal. Par contre, ce mouvement de construction de sens est complet et détaillé chez Jeanne mais non chez Esther.

Premièrement, Esther débute cette activité en dessinant des espaces qui limitent les parties, comme le montre la section suivante de l'activité 3 d'Esther :

Figure 4.11. Copie d'Esther, formes idiosyncrasique, activité 3



Ce dessin de formes idiosyncrasiques selon la catégorisation de Hughes présente trois espaces délimités qui semblent traduire les trois étapes du déroulement temporel de la résolution dans le même problème : une première partie, une deuxième partie et après les deux.

Deuxièmement, Esther ne présente pas de formes pictographiques ni de formes iconiques. Le contenu des espaces sont des symboles conventionnels. Elle a écrit successivement dans les deuxième et troisième compartiments : « -13 billes et 28 billes ». Ces écrits de formes symboliques conventionnelles indiquent la teneur des étapes du déroulement en jeu (voir figure C.18).

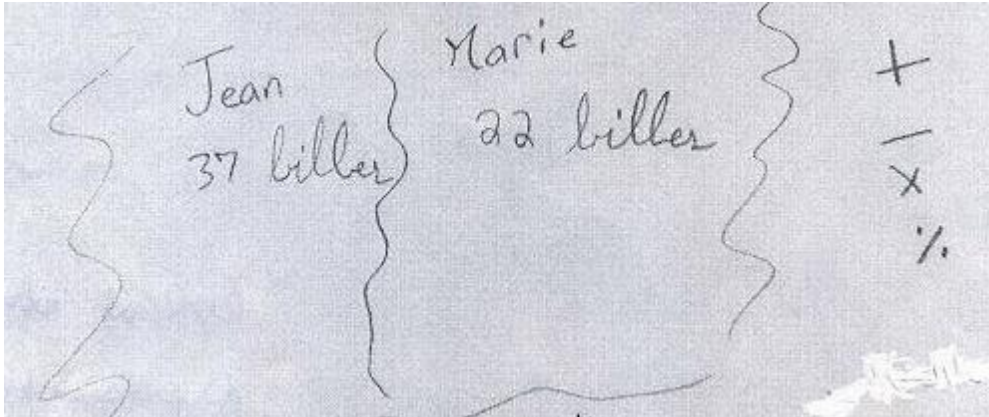
RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Troisièmement, Esther a écrit une proposition mathématique dans le premier espace pour signifier sa réponse au problème : « *elle a gagné des billes parce qu'elle ne pourrais pas perdre si elle en n'a pas* ». Cette proposition mathématique non numérique semble traduire une compréhension numérique de la situation présentée dans le problème : le jeu de gain et de perte. Cette réponse bien qu'imprévue pour le chercheur, démontre néanmoins une compréhension personnelle de ce problème arithmétique verbal. Par contre, des formes figuratives iconiques et pictographiques n'accompagnent pas cette proposition mathématique.

En plus de mon visionnement de la réalisation des activités 1, 2 et 3 de Jeanne qui démontre un début de résolution par le dessin, mon visionnement des mêmes activités chez Esther présente aussi cette même amorce pour construire un sens numérique au cours de cette résolution. Quand cette construction est complète, comme dans la réalisation de l'activité 3 de Jeanne et quand le rapport de l'élève au matériel est pictural, ce début de construction du sens numérique semble suivre un mouvement qui mène à une proposition mathématique juste et exacte. Le déroulement temporel de la réalisation de l'activité 2 d'Esther semble confirmer ma conclusion. La section suivante présente le déroulement temporel de l'activité 2 d'Esther.

D'abord, Esther présente des espaces délimités par des lignes verticales zigzagantes qui semblent traduire des formes idiosyncrasiques pour délimiter les parts de Jean et de Marie ainsi que l'espace de calcul d'une réponse. La section suivante de l'activité 2 d'Esther présente ces formes idiosyncrasiques.

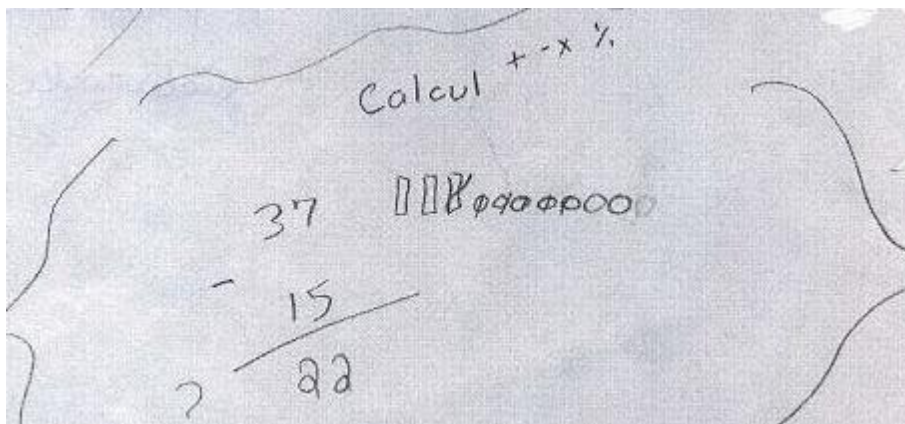
Figure 4.12. Copie d'Esther, formes idiosyncratiques, activité 2



Dans chaque espace, une part est mentionnée. Les contenus des deux premiers espaces semblent être directement sélectionnés dans l'énoncé du problème : « *Jean 37 billes* et *Marie 22 billes* ». Les symboles des opérations arithmétiques du troisième espace paraissent indiquer que cet espace est réservé aux calculs.

Ensuite, Esther a écrit des accolades, un point d'interrogation et les formes iconiques à l'intérieur des accolades. La section suivante de la réalisation de la même activité par Esther présente ces formes iconiques qui succèdent aux formes idiosyncrasiques précédentes.

Figure 4.13. Copie d'Esther, formes iconiques, activité 2

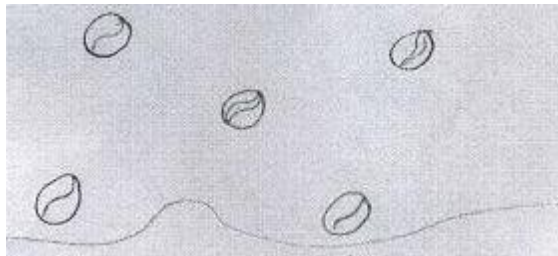


RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Esther a dessiné des bâtonnets et des boules. Elle a barré en premier lieu un bâtonnet et en second lieu cinq boules. Les boules et les bâtonnets non barrés représentent alors le résultat du calcul soit deux bâtonnets et deux boules. En considérant qu'un bâtonnet représente une dizaine de billes et une boule, une unité de bille, les deux bâtonnets et les deux boules représentent alors 22 billes.

Enfin, Esther a posé l'opération $37 - 15$ à la verticale et a écrit 22. Cette opération effectuée à l'aide de symboles conventionnels semble compléter la construction du sens du savoir mathématique dans le problème qui a débuté avec des formes idiosyncratiques. Le déroulement de la première activité de résolution de problème arithmétique verbal par Esther est semblable à celui du deuxième problème. Sauf que pour ce premier problème, Esther a produit des formes pictographiques incomplètes pour débiter sa résolution. Comme dans la figure suivante de l'activité 1 d'Esther.

Figure 4.14. Copie d'Esther, formes pictographiques, activité 1



Esther a commencé la résolution du premier problème en dessinant ces boules, qui semblent représentées des billes. Elle a ensuite posé son opération à la verticale avant de soumettre sa proposition à ce problème, comme dans la section suivante de l'activité 1 d'Esther :

Figure 4.15. Copie d'Esther, proposition mathématique, activité 1

$$\begin{array}{r} 34 \\ + 71 \\ \hline 105 \end{array}$$

105 billes en tout

Après qu'Esther ait posé son opération, elle a noté la proposition mathématique suivante : « 105 billes en tout ». Chez Esther, cette proposition sous formes de symboles conventionnels semble conclure la démarche de construction de sens du savoir mathématique au cours de la résolution de ce problème arithmétique verbal.

En résumé, ces deux élèves montrent une construction de sens par les traces déposées sur les papiers (réponses aux problèmes). L'analyse de la dialectique sujet/matériel du déroulement de ces activités rend cette construction perceptible. Le dessin que je qualifie de matériel pictural semble servir de base à cette construction du sens numérique. Je propose que ces deux élèves ont établi un rapport pictural au matériel au cours de la réalisation de leurs activités de résolution de problèmes. La structuration du savoir mathématique en jeu au cours de la résolution s'opérationnalise par cette construction de sens. Cette structuration peut être une dialectique sujet/matériel qui alimente le rapport de ces élèves au matériel.

Toute représentation d'un problème est située, plus est socialement située. L'environnement habituel explique la plupart des comportements au cours d'une activité de résolution de problèmes arithmétiques. Dans la section précédente, j'ai proposé que la conformité au contrat didactique de l'enseignant d'une classe pouvait expliquer le comportement d'un élève de cette classe. Cette explication se révèle insuffisante. Par

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

exemple, pas tous les six participants de cette étude ont dessiné. Une stratégie de comptage par la construction de dessins semble être propre à des élèves. J'ai suggéré que le rapport pictural au matériel selon la dialectique sujet/matériel oriente le comptage de ces deux élèves. Six élèves ont participé à mon étude, si Jeanne et Esther ont dessiné en résolvant les problèmes arithmétiques proposés, quatre autres élèves (Joëlle, Ruth, Josué et Rosette) ont, en général, produit des symboles et ont compté les doigts pour vérifier le résultat. La section suivante présentera le comptage sur les doigts comme mode de vérification.

4.3. Les doigts comme mode de vérification

Au-delà des formes figuratives symboliques et des propositions mathématiques que présentent les traces, le mode de vérification de la réponse à un problème est important. En général, il marque la fin de la résolution et rassure l'élève. Quatre des six participants (Joëlle, Ruth, Josué et Rosette) ont visiblement compté sur les doigts. Ce faisant, ils ont utilisé les procédures de comptage par ordre croissant à partir d'un nombre donné « counting up from given » et le comptage par ordre décroissant à partir d'un nombre donné « counting down from given ». Dans la présente étude, je vais utiliser l'expression plus courante « counting up from given » ou « counting down from given » pour décrire ces procédures de comptage. Selon une lecture linéaire du déroulement de ces activités, le tableau suivant présente un résumé des traces et des gestes de Joëlle, de Ruth, de Josué et de Rosette.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Tableau 4.2. Traces et gestes de Joëlle, de Ruth, de Josué et de Rosette					
Activités des élèves	Production de symboles			Comptage des doigts	
	Formes iconiques	Formes symboliques conventionnelles	Propositions Mathématiques	Counting up from given	Counting down from given
Activité 1 de Joëlle	Non	Chiffres Mots	Jean 34 billes Marie 71 billes	Comptage de 34 à partir de 71	Non
Activité 1 de Ruth	Non	Chiffres Mots +	105 billes en tout Avec Jean et marie 105 billes	Comptage de 34 à partir de 71	Non
Activité 1 de Josué	Groupement	Chiffres +	105 encerclé	Comptage de 34 à partir de 71	Non
Activité 1 de Rosette	Non	Chiffres = Implication	=105 =34	Comptage de 34 à partir de 71	Comptage de 71 à partir de 105
Activité 2 de Joëlle	Non	Chiffres Mots + et -	22 Marie 37 Jean	Comptage de 15 à partir de 22	Comptage de 15 à partir de 37
Activité 2 de Ruth	Non	Chiffres Mots +	22 billes	Non	Comptage de 15 à partir de 37
Activité 2 de Josué	Josué	Mots Chiffres -	22 billes encerclées	Non	Comptage de 15 à partir de 37
Activité 2 de Rosette	Non	Mots Chiffres + et -	Marie a 22 billes	Comptage de 15 à partir de 22	Comptage de 15 à partir de 37
Activité 3 de Joëlle	Non	Mot Chiffres +	411 ^{er} parti	Non	Comptage de 13 à partir de 28
Activité 3 de Ruth	Non	Mots Chiffres +	Première partie 2 ^{ième} partie perd 13 billes	Comptage de 13 à partir de 28 Comptage de 28 à partir de 28	Non
Activité 3 de Josué	Non	Mots Chiffres	elle a perdu 13 billes	Non	Non
Activité 3 de Rosette	Non	Mots Chiffres +, - et =	En une partie Louise a perdu. La deuxième partie elle a gagné 28 billes	Comptage de 13 à partir de 15	Comptage de 13 à partir de 28

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Joëlle, Ruth, Josué et Rosette ont d'abord lu l'énoncé des problèmes. Ensuite, ils ont écrit des symboles : chiffres et mots. Ils ont posé et effectué des opérations. Enfin, avant de terminer la résolution et écrire une proposition mathématique, ils ont compté à partir de leurs doigts. L'exécution du geste de compter les doigts semble se différencier d'un participant à l'autre. Les détails de l'exécution de ce geste par problème, le symbolisme qui le précède et la procédure qui l'articule feront l'objet du présent chapitre. Pour chaque problème, les participants seront présentés dans l'ordre suivant : Joëlle, Ruth, Josué et Rosette. Une discussion sur le thème du comptage sur les doigts comme mode de vérification terminera cette section.

Joëlle a lu les trois problèmes pendant 1 minute 30 secondes et les a résolus en 6 minutes. Elle a observé un temps de réflexion de 45 secondes. Puis, elle a entamé la résolution du premier problème en écrivant d'abord des nombres en symboles et des mots : « *Jean 34 billes Marie 71 billes* ». Elle a ensuite écrit la somme 105. Elle a enfin compté sur ses cinq doigts en commençant par le pouce de la main gauche. Tenant le crayon de la main droite, elle a compté en pointant chaque doigt à l'aide du crayon. L'usage des doigts d'une seule main semble signifier une tendance à un processus de comptage par dizaine selon lequel un doigt représenterait une dizaine de billes. Cet usage des doigts peut aussi signifier la fin d'une opération mentale pour vérifier l'exactitude des derniers mots/nombres répétés. Celui-ci paraît plausible, puis que ce ne sont pas 10 doigts qui ont été comptés. Toutefois, dans un cas comme dans l'autre, pour Joëlle, la stratégie du comptage à l'aide des doigts présente le matériel doigt comme un support rassurant à la vérification de la réponse du problème.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Ruth a lu les trois problèmes pendant 60 secondes. Ensuite, elle est restée immobile pendant 60 secondes avant d'entamer la résolution des trois problèmes qu'elle a complétés sans pause en 9 minutes. Au cours de la résolution du premier problème, Ruth a d'abord relu silencieusement l'énoncé de ce problème. Puis, elle a posé une addition à l'aide des nombres en symbole et a effectué mentalement la somme (voir Figure C.7). Elle a effectué à nouveau l'opération en comptant sur ses doigts. Elle a compté les cinq doigts de sa main droite en les écartant. Elle a tenu en même temps un crayon dans la main gauche. Elle a ensuite déposé le crayon sur son pupitre et a continué le comptage en touchant ses 5 doigts à l'aide du pouce de la main droite. Puis, elle a poursuivi en écartant ses doigts au fur et à mesure à partir du pouce. Elle a recommencé la stratégie du comptage sur les doigts en utilisant les mêmes doigts de la même main en décrivant un angle aigu formé par la paume de la main et la surface du pupitre. Elle a abaissé les 5 doigts à partir du pouce au fur et à mesure pour toucher cette surface. Enfin, elle a gardé la même position avec les doigts de la main droite et a procédé au comptage comme pour les problèmes précédents. De façon générale, Ruth a utilisé 5 « mains » donc 25 doigts pour compter ou mieux recompter les résultats de son opération. La réponse produite par Ruth : « Jean et Marie 105 billes en tout » et « 105 billes en tout » dépassait en nombre les doigts comptés (25 doigts/105 billes). Un hochement de tête a marqué la fin du comptage sur les doigts. Selon moi, ce hochement de tête indique chez Ruth un confort personnel dans la stratégie de vérification à l'aide des doigts.

Josué a lu attentivement les problèmes durant 2 à 3 minutes en pointant les mots à l'aide des doigts de la main droite. Puis, il a entamé la résolution des trois problèmes qu'il a complétés en partie en 15 minutes. Au cours de la résolution du premier

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

problème, Josué a posé et a effectué une addition ($34 + 71$). Puis, il a dessiné deux ensembles comprenant des boules et des bâtonnets. Il a écrit 105 dans le second ensemble et a encerclé la somme 105 de l'addition (voir Figure C.11). Il a ensuite compté trois doigts de sa main droite à partir de l'auriculaire en les écartant au fur et à mesure. Il a recommencé à compter en écartant trois doigts de la main droite à partir du pouce. Il a porté un regard distrait à sa droite et a tourné la feuille. Un problème est écrit sur chaque feuille, le fait de tourner la feuille peut signifier la fin de la résolution de ce problème.

Rosette a d'abord lu les trois problèmes durant 1 minute 30 secondes puis elle a commencé à écrire. Elle s'est appliquée à les résoudre sans pause en 12 minutes. Durant la résolution du premier problème, Rosette a d'abord posé deux opérations symétriques (voir Figure C.13) puis elle a compté sur ses doigts. Elle a compté trois doigts à partir du pouce en observant un angle aigu entre la paume de la main et la surface du pupitre. Elle a posé les doigts au fur et à mesure sur cette surface. Un hochement de tête a marqué la fin du comptage sur les doigts.

En général, ces quatre participants ont vérifié la solution du problème en comptant à partir d'un nombre donné « counting up from given ». La diversité de la démarche du comptage des doigts, le pointage des doigts à l'aide d'un crayon à partir du pouce chez Joëlle, le pointage des doigts à l'aide d'un doigt d'une autre main à partir du pouce chez Ruth, l'écartement des doigts à partir de l'auriculaire chez Josué et la configuration des doigts décrivant un angle aigu avec la paume de la main et la surface du pupitre par écartement progressif des doigts à partir du pouce chez Rosette, ont démontré une variété d'appropriation de la stratégie de recomptage à l'aide des doigts chez ces quatre participants. Au cours de la résolution de ce problème, un symbolisme est

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

manifeste dans le geste de recomptage à l'aide des doigts. Aucun participant n'a compté autant de doigts que billes. Ils n'ont pas non plus compté de façon distincte 34 doigts à partir de 71 pour arriver à 105, mais de 3 à 25 doigts par exemple. La procédure du comptage par ordre croissant à partir d'un nombre donné « counting up from given » semble avoir été utilisée en suivant un symbolisme de groupement doigts/billes.

Pour résoudre le deuxième problème, Joëlle a d'abord posé deux opérations opposées (voir Figure C.5). Elle a écrit respectivement « Marie » et « Jean » à côté des résultats 22 et 37 après avoir encerclé ces résultats. Comme pour le premier problème, elle a recompté en utilisant la stratégie du comptage sur 3 à 5 doigts. Par contre, à la différence du problème précédent, elle a utilisé la procédure du comptage par ordre décroissant de 37 à 15.

Pour résoudre ce deuxième problème, Ruth a d'abord posé et effectué mentalement une soustraction (voir Figure C.7). Puis, elle a recompté en utilisant les mêmes stratégies du comptage sur les doigts. Elle a écarté les cinq doigts de sa main gauche à partir du pouce et les a touchés successivement à l'aide du pouce de la main droite. Puis, elle a écarté les cinq doigts de la main droite et les a touchés successivement à l'aide du pouce de la main gauche. Ensuite, elle a posé la main gauche sur la surface du pupitre en les abaissant successivement à partir du pouce selon la procédure du « counting down from given ». Ruth a enfin hoché la tête, effacé des symboles (mots et nombre) et les a réécrits immédiatement après. Ces gestes ont marqué la fin de la résolution de ce problème.

Au cours de la résolution du deuxième problème, Josué a procédé de façon semblable au premier problème. Il a relu le problème, a dessiné un ensemble comprenant

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

des boules et des bâtonnets, a posé et a effectué mentalement une soustraction (Figure C.11). Comme pour le premier problème, il a eu recours au comptage de 3 à 5 doigts. Par contre, à la différence du problème précédent, il a compté par ordre décroissant de 37 à 22 « counting down from given ». À mon avis, il apparaît chez Josué un symbolisme accentué de comptage au-delà du comptage physique des doigts qu'il n'a pas caché d'ailleurs (voir Figure C.11). Ce sont des symboles de formes iconique et autre qui ont été en grande partie utilisés.

Le comportement de Rosette au cours de la résolution de ce problème a été en tout point semblable au premier problème. Toutefois, le comptage sur les doigts, selon la procédure du « counting up from given » a été substitué au « counting down from given ». Une proposition mathématique a été soumise après ce comptage des doigts: « Marie a 22 billes ».

Au cours de la résolution du deuxième problème, ces quatre participants ont écrit des symboles (mots, nombres et/ou des formes iconiques). Ils ont eu recours au comptage sur les doigts pour vérifier la réponse. Comme pour le problème précédent, aucun participant n'a compté autant de doigts que de billes soit 22 doigts. Toutefois, à la différence du problème précédent, le comptage est par ordre décroissant « counting down from given » a été substitué au comptage par ordre croissant « counting up from given ».

Au cours de la résolution du troisième problème, Joëlle a d'abord posé et effectué une addition (symboles) (voir Figure C.6). Comme pour les problèmes précédents, Joëlle a utilisé la stratégie du comptage sur les doigts pour vérifier le résultat. Toutefois, l'exécution de cette stratégie s'apparente mieux au premier problème « counting up from given » qu'au deuxième problème « counting down from given ».

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Pour résoudre le troisième problème, Ruth a posé et effectué deux opérations sur la copie. Elle a divisé l'espace de réponse en deux parties selon son degré de compréhension du problème. Dans chaque partie, elle a posé une opération. Puis, elle a eu recours au comptage sur les doigts pour vérifier le résultat. Elle a compté les cinq doigts de la main gauche à partir du pouce en écartant successivement les doigts. Elle a compté les cinq doigts de la main droite à partir du pouce en touchant chaque doigt à l'aide du pouce de la main gauche. Elle a compté les cinq doigts de la main gauche en faisant un angle aigu entre l'extrémité de la paume de la main et la surface du pupitre. Elle a abaissé successivement les doigts à partir de cette surface. En résumé, contrairement aux deux premiers problèmes où Ruth a utilisé 3 à 25 doigts pour recompter. Elle a utilisé trois « mains » soit 15 doigts suivant la procédure du « counting up from given ».

Contrairement à la résolution des deux premiers problèmes, pour résoudre le troisième problème, Josué a d'abord relu attentivement l'énoncé en pointant les mots du problème. Il a particulièrement souligné les mots « *deux parties de billes* » au début de l'énoncé du problème et a encerclé « *perd 13 billes* ». Il a essayé le comptage mental mais il a oublié un chiffre et a procédé au recomptage. Puis, il a vainement essayé de compter des jetons et s'est finalement servi de ses doigts pour compter. Il a compté trois doigts à partir de l'index en les écartant au fur et à mesure. Il a ensuite recommencé en comptant trois doigts à partir du pouce. D'un œil distrait et avec un gestuel inorganisé et non coordonné, il a manipulé des jetons dans la boîte. Il a écrit le nombre « 13 » en symboles et la proposition « *elle à perdu 13 bille* » (voir Figure C.12). Il a fait part de son

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

incompréhension du problème au chercheur qui lui a relu l'énoncé. Mais, il n'a pas pu le résoudre et a rendu la copie.

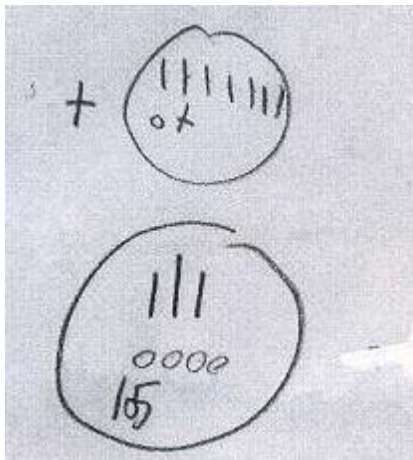
Comme pour les problèmes précédents, Rosette a écrit des symboles (nombres et mots), a posé et a effectué des opérations (voir Figure C.15). Par contre, à la différence des deux premiers problèmes, Rosette a produit une réponse incorrecte au troisième problème : « en une partie Louise a perdu – La deuxième partie, elle a gagné 28 billes en tout ». Rosette a utilisé la stratégie de comptage et de recomptage pour résoudre les premier et troisième problèmes et la même procédures de comptage « counting up from given » en dépit de l'échec à les appliquer pour résoudre le troisième problème.

En somme, ces quatre participants ont écrit des symboles (mots, nombres, propositions mathématiques) pour résoudre le troisième problème. Toutefois, le niveau de symbolisme de la stratégie de recomptage ou de vérification diffère d'un participant à l'autre. Joëlle, Ruth, Josué et Rosette ont eu recours au comptage sur les doigts selon la procédure du « counting up from given » pour recompter. Par contre, Ruth a été plus minutieuse que les autres dans l'exécution du geste de compter sur les doigts. Elle a compté distinctement 13 doigts de 28 à 41. Tel n'est pas le cas de Joëlle, de Josué et de Rosette qui ont compté 3 à 5 doigts comme s'ils utiliseraient leurs doigts pour finaliser une addition débutée mentalement ou un regroupement doigt/ensemble donné de billes. Aussi, Josué et Rosette ont à peine compté les doigts pour vérifier leur réponse. Chez Josué, il s'agit d'un recours habituel aux doigts sans issue favorable. Josué a partagé son incompréhension du troisième problème au chercheur et a rendu la copie. Chez Rosette, l'usage des doigts pour vérifier n'est pas explicitement ressorti. Par contre, à la différence de Josué qui n'a pas produit une réponse explicite à ce problème, Rosette a produit une

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

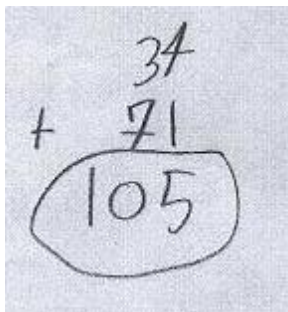
réponse incorrecte. Le geste de compter ou de recompter semble être chez Rosette un symbolisme mentalisé. Par contre, ce geste, chez Josué me paraît plus expressif. Josué a démontré un symbolisme de groupement explicite au cours de la résolution des deux premiers problèmes. Il a écrit des symboles iconiques et des symboles conventionnels. J'illustre mes propos à l'aide des traces du premier problème.

Figure 4.16. Copie de Josué, formes iconiques, activité 1



Josué a d'abord construit des bâtonnets (dizaines) et des boules (unités) qui sont des formes iconiques selon la catégorisation des formes figuratives de Hughes (1986), puis les a encerclées. Ensuite, elle a posé l'addition à la verticale, comme dans cette autre section de la même activité.

Figure 4.17. Copie de Josué, proposition mathématique, activité 1



RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Josué a compté sur ses doigts (counting up from given) de 71 à 105 en utilisant 3 à 5 doigts et a enfin encerclé le total qui semble confirmer sa solution à ce problème. Chez Josué, le sens du savoir mathématique dans ce problème semble se construire sur un symbolisme du comptage sur les doigts qui se base à son tour sur des symboles de formes iconiques. Chez lui, les stratégies de résolution et de recomptages sont à peu près semblables pour le deuxième problème (voir Figure C.11). Par contre, ces stratégies se sont différenciées pour le troisième. Josué a rendu la copie sans produire une réponse réussie à ce problème. À la suite de gestes désorganisés et non coordonnés, Josué a produit une proposition mathématique et a exprimé son incompréhension de ce problème. En général, le symbolisme du comptage sur les doigts est commun aux quatre participants. Pourtant, non pas tous l'ont utilisé avec succès. Que cache le symbolisme du recomptage sur les doigts, mode de vérification chez ces quatre participants?

Le geste du comptage sur les doigts semble traduire une démarche propre de l'élève pour vérifier l'exactitude d'une réponse à un problème selon une procédure de correspondance terme à terme (Siegler, 1988). Chez des élèves plus âgées, le geste de compter sur les doigts semble s'effectuer autrement. Le cas échéant, il peut se manifester sous la forme d'un symbolisme de groupement. Aucun élève n'a compté un à un, 21 mains ou 105 doigts pour vérifier la réponse 105 billes au premier problème. Une telle tâche semble être lourde voire encombrante (voir entretien de Josué à l'annexe C). Toutefois, un symbolisme est manifeste dans l'exécution du geste de compter sur les doigts. Ce symbolisme peut représenter une dialectique sujet/matériel parce qu'il aide à la structuration du savoir mathématique dans la pensée de l'élève qui résout ce problème. Il

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

faut néanmoins que cet élève soit conscient du symbole de ce matériel dans sa pensée.

Car, compter c'est compter quelque chose en tant qu'objet (Sherman et Bisanz, 2009).

Au cours de la résolution du deuxième problème, Joëlle, Ruth, Josué et Rosette ont utilisé leurs doigts pour compter par ordre décroissant un à un de 37 à 22 (voir annexe C).

Le comportement de ces élèves au cours de la résolution de ce problème se distingue de peu de celui du problème précédent. La principale différence est que le comptage des doigts selon la procédure du « *counting down from given* » qui s'est substituée au « *counting up from given* ». J'ai qualifié de symboles les formes iconiques produites par Josué au cours de la résolution des deux premiers problèmes (voir figures C.10 et C.11). Josué a exécuté des gestes semblables aux deux premiers problèmes. Ces formes iconiques s'apparentent aux groupements base 10 : un bâtonnet pour les dizaines et une boule pour les unités. La différence est que pour les groupements base 10, un petit cube représente l'unité. La boule de Josué s'apparente aux billes de l'énoncé. Qu'il soit un petit cube ou une boule, au-delà des doigts, chez Josué, cette écriture semble être une représentation de l'unité. L'ensemble de la production de Josué relative aux deux premiers problèmes est symbolique puisque les 10 billes ne sont pas visibles dans les bâtonnets.

En général, que la réponse produite soit présentée sous forme symbolique conventionnelle et/ou iconique, dans les deux cas, le recours aux doigts pour compter est un geste caractéristique qui symbolise un groupement. Au-delà du pointage des doigts, c'est le symbolisme du geste de pointer qui importe. Ce geste semble être alimenté par une dialectique sujet/matériel selon le rapport de l'élève au matériel.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Enfin, au cours de la résolution du troisième problème, le recours aux doigts pour compter par ordre croissant de 28 à 41, est semblable aux deux premiers problèmes. Par contre, les détails de l'exécution du geste divergent (voir annexe C). Joëlle a eu recours à ses doigts pour compter par ordre croissant de 28 à 41 avant d'écrire une réponse symbolique. C'est le symbolisme du geste de pointage des doigts qui importe (Brissiaud, 1991, 1994; Fayol, Camos et Roussel, 2001; Siegler, 1988). Il en est de même pour Ruth et pour Rosette. Toutefois, chez cette dernière, la réponse produite au troisième problème est incorrecte (voir Figure C.15). Le symbolisme semble dans son cas, se centrer faiblement sur un matériel physique qui ne résiste pas à cette structure de problème arithmétique verbal de type changement (Sarrazy, 1996). Il en est de même pour Josué, les formes iconiques et symboliques conventionnelles produites en réponse aux deux premiers problèmes semblent refléter un symbolisme évolué auquel il s'accroche sans en être conscient. L'usage inconscient d'un matériel physique semble fragiliser sa compréhension et semble expliquer son échec au troisième problème de type changement. Qu'ils réussissent ou qu'ils échouent, chacun de ces quatre élèves s'est comporté de façon semblable au cours de la résolution des trois problèmes. La culture de classe pourrait expliquer un tel comportement (Reusser et Stebler, 1997). Au-delà de la finesse dans l'exécution de la stratégie du comptage sur les doigts pour vérifier la réponse, les quatre élèves ont eu recours à cette stratégie selon la procédure du « counting up from given » ou du « counting down from given ».

En résumé, Joëlle, Ruth, Josué et Rosette ont compté ou recompté sur leurs doigts pour vérifier leur réponse. Cet usage des doigts semble être courant. Cependant, la finesse de l'exécution du geste semble se différencier d'une culture à l'autre. Pour des nord-

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

américains, comme dans l'étude de Seigler (1988), ce geste s'exécute sous la forme de pointage des doigts d'une main par ceux de l'autre main ou par abaissement successif des doigts sur une surface plane disponible. Des observations informelles du comptage sur les doigts par des asiatiques semblent conclure à une correspondance partie de doigt/unité ou même articulation de doigt/unité. Au-delà d'un geste caractéristique de l'usage des doigts pour compter qui s'inscrit dans une culture, le symbolisme à la base de l'utilisation d'un objet physique semble jouer un rôle de support concret dans l'appropriation du concept abstrait du nombre et démontrer un rapport particulier aux doigts qui sont pour moi, dans cette étude, un matériel physique.

En raison du pointage, le geste du comptage sur les doigts semble être une aide pour s'assurer de l'exactitude d'une réponse à un problème arithmétique verbal. Par exemple, dans cette étude, le visionnement au ralenti de l'enregistrement de la résolution des trois problèmes par Joëlle, Ruth et Rosette et celui de la résolution des deux premiers problèmes par Josué, révèlent un symbolisme dans l'exécution du geste du comptage sur les doigts qui reflète soit un rapport particulier au matériel (les doigts), soit une conformité au contrat didactique avec l'enseignant et soit les deux. Dans les trois cas, la finesse dans l'exécution de ce geste semble être propre à un élève donné. Il semble qu'un rapport au matériel selon la dialectique sujet/matériel peut expliquer la manifestation de ce geste chez ces quatre élèves du primaire. Pour un élève qui compte à l'aide des doigts, ce rapport semble être symbolique. Par contre, même si un matériel symbolique sert à la structuration du savoir mathématique dans le problème, la centration de cette structuration porte sur un matériel physique. Compter c'est compter quelque chose. Chez des élèves de cinq ans, ce geste semble indiquer une correspondance stricte doigt/unité

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

(Siegler, 1988). Chez des élèves plus âgés, ce geste se manifeste autrement. Il paraît indiquer un symbolisme de groupement au-delà d'un comptage analogique. Au cours de la résolution des trois problèmes arithmétiques verbaux, chacun des quatre élèves a adopté un même comportement. Ces quatre élèves ont eu recours au symbolisme du geste du comptage sur les doigts (matériel physique) pour vérifier l'exactitude de leur réponse. Cette vérification semble refléter un rapport symbolique qui alimente le mouvement d'une dialectique sujet/matériel. Par exemple, en lien à la réalisation de la troisième activité de résolution de problème arithmétique verbal de type changement, Josué a affirmé : « *je faisais juste du calcul mental* ». Josué n'a pas produit une réponse correcte à ce problème et a rendu la copie.

En général, à propos de l'usage des doigts pour dénombrer dans un contexte de classe mathématique, une étude microgénétique de Siegler (1988) sur la performance du comptage chez des enfants de 5 ans, attribue le choix des doigts ou de la récupération en mémoire des faits numériques, à la personnalité des enfants. À son avis, les « bons » en arithmétique tendent plutôt à retrouver en mémoire $4 + 3$ alors que les « perfectionnistes » recourent au comptage mental à l'aide des doigts. Brissiaud (1994) reconnaît d'emblée l'efficacité de la stratégie du comptage à l'aide des doigts par rapport à celle du recours en mémoire à long terme. Selon le chercheur, les jeunes enfants ont une meilleure performance lorsqu'ils utilisent leurs doigts pour compter. Les collections de doigts préservent la correspondance terme à terme et les traces des accroissements/diminutions. Par contre, les mots-nombres ne renvoient pas aussi facilement aux quantités, du fait du repérage de ces mots-nombres dans une suite de dénominations arbitraires. Par exemple, il n'y a rien dans le mot cinq qui indique qu'il représente une collection supérieure à

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

quatre. Fayol, Camos et Roussel (2001) attestent cette supériorité du geste sur le verbal. À leur avis, ce geste c'est le pointage. Selon ces chercheurs, les enfants de 2, 3 et 4 ans qui doivent dénombrer de petites collections (2, 4 et 6 blocs) pointent pratiquement tout et font mieux quand ils pointent que quand ils ne pointent pas. Chez les jeunes enfants, la performance gestuelle précède souvent la performance verbale de comptage (Fayol, Camos et Roussel, 2001). La position de Geary (2005) relative au comptage sur les doigts tranche avec les recherches précédentes. Chez une clientèle d'enfants en difficulté en arithmétique, les doigts servent de support au comptage. Cet argument n'est pas applicable à la présente étude. Par exemple, dans le cadre de cette recherche, aucun des six participants n'a été identifié par l'enseignante comme étant en difficulté d'apprentissage en arithmétique. Par contre, au-delà d'une question de difficulté d'apprentissage en arithmétique ou d'absence de difficulté, les gestes de pointer les doigts puis d'écrire des nombres semblent renforcer la vérification de l'exactitude du résultat.

Dans la lignée de la recherche de Siegler (1988) relative au comptage sur les doigts par les enfants de cinq ans et plus, le geste du comptage à l'aide des doigts ne s'estompe pas. Chez des élèves plus âgés, comme par exemple, ceux de 8 à 9 ans de cette étude, ce geste revêtirait une forme différente qui pourrait présenter une valeur symbolique de groupement base 10. Ainsi, dans le cadre de résolution du premier problème, aucun des quatre participants qui ont compté sur les doigts, n'a compté autant de doigts que la réponse 105 billes, donc 105 doigts ou 21 mains. Au centre du geste de comptage sur les doigts, un certain symbolisme semble être manifeste. Sur la base de ce symbolisme, la conscience de l'exécution des gestes semble renforcer l'exactitude de la

réponse à un problème arithmétique verbal chez l'élève qui résout ce problème. Par exemple, dans mon étude, Josué affirme qu'il fait juste du calcul mental. Il n'a pas réussi le troisième problème de type changement et a rendu la copie. Comprendre, c'est saisir le sens, il faut dans tous les cas, avoir conscience d'avoir saisi ce sens.

4.4. Discussion

Dans cette section du chapitre, je veux répondre à la troisième sous-question : comment la dialectique sujet/matériel se manifeste-elle à l'intérieur du rapport au matériel?

De plus, le cadre méthodologique de cette étude comporte certaines faiblesses. Leur émergence pendant l'analyse me sensibilise à la portée d'un regard affiné sur les phénomènes observables. Cette sensibilisation est pour moi très formatrice. Voici ce que j'ai appris :

- a. L'absence d'une prise en compte du contexte de classe, du style pédagogique de l'enseignante, de sa posture face à la dévolution et du climat de classe a limité la portée de l'analyse;
- b. Le manque d'analyse du matériel manipulable utilisé dans cette classe a eu pour effet de limiter ma compréhension de l'utilisation de l'ensemble des matériaux possiblement utilisables;
- c. L'absence d'une prise en compte de la culture du milieu de vie des participants m'a empêché d'établir des liens avec leur quotidien;
- d. Le fait de n'avoir pas posé des questions plus ouvertes (Explique-moi comment tu comptes avec tes doigts? Depuis quand comptes-

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

tu avec tes doigts? Que signifient pour vous ces dessins ?) a
possiblement appauvri les données relatives à l'usage d'un
matériel;

- e. Une activité collective et non individuelle aurait généré plus
d'interactions ce qui aurait pour effet d'améliorer ma
compréhension du raisonnement des participants pendant l'activité.

Le contexte de l'étude et les cinq faiblesses énumérées ci-dessus sont pour moi
des pistes intéressantes pour des recherches futures. Néanmoins, je peux affirmer que le
rapport conscient au matériel favorise une réponse juste et correcte à un problème
arithmétique verbal. Ce rapport reflète la réponse produite. Mon objectif était de
comprendre les manifestations de la construction du sens du savoir mathématique au
cours d'une activité de résolution de problèmes arithmétiques verbaux chez un élève du
primaire. Cette construction de sens semble se centrer sur un matériel.

En lien à la première recension, au-delà de la nature des entrées (processus,
concepts, représentation et matériel) dans les problèmes arithmétiques verbaux, la
résolution de ces problèmes paraît être une démarche sensorielle qui aboutit à la
vérification de l'exactitude d'une réponse numérique, reflet du rapport de l'élève au
matériel. Une entrée sensorielle consciente au problème (pointage des doigts par
exemple) favorise cette vérification. De façon plus approfondie, il s'agit d'une modeste
contribution à la compréhension de la construction de sens du savoir mathématique chez
l'élève du primaire qui résout des problèmes arithmétiques verbaux.

Trois ensembles de matériaux semblent structurer la pensée des six
élèves/participants durant la résolution des trois problèmes arithmétiques verbaux. Un

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

premier ensemble que je qualifie de matériel physique, comme par exemple, les doigts pour compter, un deuxième ensemble que j'identifie comme matériel pictural, comme par exemple, les symboles idiosyncrasiques et pictographiques et un troisième ensemble qui est défini comme des symboles, comme par exemple, les symboles iconiques et les symboles conventionnels. Au-delà de cette catégorisation, c'est le sens que ces élèves qui résolvent ces problèmes attribuent à un geste caractéristique au cours de la résolution qui importe. Chez certains élèves, le pointage des doigts assure une concrétude et traduit le comportement d'un perfectionniste. Chez d'autres, la construction de dessins de forme pictographique reflète une compréhension analogique personnelle de l'énoncé du problème. Cette construction se révèle encombrante, par exemple, pour des calculs sur des nombres de l'ordre des unités de mille. Que ce soit le pointage des doigts ou la construction de dessins, un geste présente un comportement de ces élèves au cours de la résolution de ces problèmes arithmétiques verbaux. La conscience du symbolisme de ce geste favorise une réponse correcte à ces problèmes.

De l'ensemble des considérations précédentes, trois points-clés ressortent :

- Quel que soit la nature du symbole ou de l'objet physique utilisé ou produit pour construire un sens du savoir mathématique au cours de la résolution, il constitue un matériel. Le mouvement produit par cette construction est une dialectique sujet/matériel.
- Le dessin est un matériel qui présente l'avantage d'être un reflet du niveau de compréhension du problème chez le participant en réponse à ce problème. Ce dessin présente en même temps l'inconvénient d'être un matériel personnel. Ce

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

participant se réfère à un matériel pictural. Dans ce cas, il établit un rapport pictural au matériel.

- L'élève de cette étude qui utilise ses doigts pour compter ou recompter semble se fier au symbolisme du geste du comptage sur les doigts. Dans ce cas, il établit un rapport symbolique au matériel. L'usage conscient des doigts pour compter ou recompter favorise, à mon avis, une réponse correcte et peut ne pas indiquer une difficulté de calcul.

De façon sommaire, que le rapport au matériel soit pictural ou symbolique, la centration sur la construction du sens semble être fondamentale. La conscience de cette centration favorise une réponse correcte à ces problèmes. Dix-huit (18) réponses ont été produites par les six élèves/participants aux trois problèmes arithmétiques verbaux. Parmi ces 18 réponses, deux réponses s'avèrent incorrectes (Figures C.12 et C.15).

Que ce soit sous forme de chiffres, de mots et de mots-nombres, les six participants ont en commun la production de traces. Jeanne et Esther ont eu recours aux dessins pour résoudre les problèmes et pour vérifier les réponses. Joëlle, Ruth, Josué et Rosette ont utilisé des symboles pour résoudre les problèmes et ont compté sur leurs doigts selon les procédures du « *counting up from given* » pour l'addition et du « *counting down from given* » pour la soustraction. Alors, deux matériaux distincts semblent renforcer la construction de sens: les dessins et les doigts. Par rapport à la stratégie du comptage sur les doigts, Siegler (1988) qualifie les jeunes enfants de 3 à 7 ans qui utilisent cette stratégie de « perfectionnistes ». Pour les enfants plus âgés, comme par exemple les participants de cette étude, ce geste semble persister mais sous une forme différente. Les doigts semblent jouer le rôle de groupement base 10 puisqu'aucun

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

participant qui a utilisé ses doigts pour compter ou recompter n'a établi une correspondance stricte doigt/bille. Brissiaud (1991) atteste une supériorité du geste de pointer en identifiant l'objet physique sur la répétition des mots-nombres qui ne renvoie pas aussi facilement aux quantités du fait du repérage de ces mots-nombres dans une suite de dénominations arbitraires. Fayol, Camos et Roussel (2001) soutiennent aussi la supériorité du gestuel sur le verbal. Toutefois, je n'ai pas pu identifier lequel de ces aspects explique cette supériorité. Il s'agit d'un niveau de finesse auquel je n'ai pas pu accéder. Ce sont à nouveau des pistes intéressantes pour des recherches futures.

Aussi, les dessins de Jeanne et d'Esther semblent être un reflet de leur représentation d'un aspect du problème. Jeanne et Esther ont établi une correspondance analogique directe boule dessinée/bille. Elles ont aussi produit une réponse correcte aux trois problèmes. Les traces d'Esther au cours du troisième problème sont décrites en une formulation écrite: « *il gagné des billes parce qu'il ne peut pas perdre si elle n'a pas gagné* ». Au cours de la résolution des trois problèmes arithmétiques verbaux, un geste propre paraît manifeste chez les participants de mon étude. Cette manifestation peut être le résultat de la conformité de ces élèves au contrat didactique de leur enseignante.

Aussi, cette manifestation peut être un rapport propre au matériel chez ces élèves. Deux arguments supportent ma proposition. D'une part, l'ensemble des six participants n'ont pas manifesté un geste similaire même s'ils ont tous la même enseignante et viennent tous d'une même classe. Par exemple, deux élèves ont dessiné (Jeanne et Esther) et quatre élèves ont compté ou recompté avec leurs doigts (Joëlle, Ruth, Josué et Esther) pour vérifier la réponse. D'autre part, des individus qui vivent dans un même environnement ne réagissent pas toujours de façon identique.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

En somme, une suite de gestes évocateurs précède une proposition mathématique qui finalise une réponse à un problème arithmétique. Il semble que le mouvement d'un matériel oriente l'exécution de ces gestes. Dans cette étude, j'ai ressorti deux matériaux distincts, la construction de dessins épousant diverses formes figuratives, comme par exemple, formes idiosyncrasiques et pictographiques (Jeanne et Esther) et le comptage sur les doigts selon les stratégies du « counting up from given » et/ou du « counting down from given » (Joëlle, Ruth, Josué et Rosette). Je propose dans cette étude, une perspective de la pensée qui renvoie à l'exécution d'un geste au cours d'une activité comme pensée qui traduit un rapport dialectique sujet/matériel. La conscience de l'usage d'un matériel en exécutant ce geste peut produire une réponse correcte à un problème arithmétique verbal. Josué et Rosette n'ont pas eu conscience de l'usage d'un matériel en résolvant le troisième problème. Ils n'ont pas produit une réponse correcte à ce problème. Rosette affirme ne jamais utiliser de matériel de sa vie et pour Josué, en résolvant ce troisième problème, il faisait juste du calcul mental. Au-delà de l'écrit et du discours qui caractérisent le comportement de l'élève qui résout un problème arithmétique, le geste peut être évocateur et un matériel joue un rôle central. Avoir conscience de l'usage de ce matériel dans l'exécution du geste peut renforcer la construction du sens du savoir mathématique. Les traces de l'activité 3 de Jeanne illustre cette compréhension de la pensée de façon complète et avec éloquence. Au cours de la réalisation de ces activités de résolution de problèmes arithmétiques verbaux par les six élèves du primaire, un matériel dynamise le mouvement de la dialectique sujet/matériel. Au-delà du comptage sur les doigts ou de la construction de dessins, la construction de sens par ces élèves du primaire qui ont résolu les trois problèmes arithmétiques verbaux

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

n'est pas purement abstraite ou conceptuelle. Elle est basée sur un matériel pictural et la symbolisation d'un matériel physique. Quel que soit le matériel utilisé, l'élève qui établit un rapport pictural avec ce matériel, pour résoudre un problème arithmétique verbal, semble procéder par ordre décroissant de concrétude et celui qui établit un rapport symbolique au matériel semble procéder par ordre croissant de concrétude. Néanmoins, les diverses manières dont les élèves du primaire s'y prennent pour résoudre des problèmes arithmétiques verbaux semblent ne pas être prédictible. Les recherches pour une meilleure compréhension du raisonnement de ces élèves s'imposent encore.

Conclusion

La résolution de problèmes arithmétiques semble être une démarche de construction de sens. Construire du sens est un acte d'appropriation d'une information, donc un acte de compréhension. Deux points de vue s'affrontent sur une définition du concept de compréhension en mathématiques :

- construire une réponse;
- expliquer une réponse et la généraliser.

Durant l'analyse des résultats de cette étude, j'ai démontré une construction de sens chez les six participants. À mon avis, un rapport au matériel oriente l'activité. J'ai conçu ce projet de recherche autour des jetons comme matériel. Malheureusement, je n'ai pas visé juste puisqu'aucun participant n'en a fait usage de façon explicite. Deux des raisons que les élèves ont exprimé sur l'inutilité des jetons sont qu'ils font le calcul dans leur tête et que les jetons servent aux élèves en difficulté en calcul. Au-delà de l'usage d'un matériel donné, je propose que chez les six participants, le rapport au matériel peut expliquer leur comportement au cours de la réalisation de ces activités. La réponse produite ne semble pas être le fruit d'une réflexion spontanée. Elle est structurée dans la pensée des participants au cours de l'usage d'un matériel. L'option de l'explication de la réponse et sa généralisation pour expliquer le concept comprendre subsume, selon moi, celle de la construction d'une réponse. Tous les participants ont recompté et vérifié leur réponse.

Ce recomptage ou cette vérification du calcul par un participant revêt une forme particulière. Un geste manifeste caractérise une stratégie de calcul jusqu'à sa vérification. Dans cette recherche, je propose qu'une dialectique sujet/matériel explique cette stratégie

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

et cette démarche de vérification. Chez ces élèves du primaire, le geste qui accompagne la réalisation de ces activités paraît être plus évocateur que le discours. En être conscient pourrait favoriser une réponse juste à ces problèmes. Les réponses de Josué et de Rosette au troisième problème peuvent confirmer cette conclusion (voir figures C.12 et C.15).

Selon moi, la dialectique sujet/matériel dynamise les représentations du matériel dans la pensée de ces élèves et explique leurs actions. Ce dynamisme s'explique par une structuration du savoir autour d'un matériel pictural ou symbolique. La compréhension de ce rapport chez ces élèves du primaire offre un nouvel éclairage sur la résolution de ces problèmes. J'ai analysé les réponses et les gestes des six participants au cours de la résolution des trois problèmes. La constance et la récurrence d'un dessin particulier (formes idiosyncrasiques et pictographiques), d'un geste donné (comptage sur les doigts selon une procédure (*counting up from given* ou *counting down from given*) m'ont amené à conclure à deux rapports distincts au matériel: un rapport pictural au matériel et un rapport symbolique au matériel. Par la construction de dessins ou le comptage sur les doigts, j'ai observé une manifestation sensorielle dans le comportement des six participants. Pour Brousseau (2004, p.190) : « *Faire les mathématiques est un moyen de fabriquer des connaissances, apprendre les mathématiques c'est apprendre à apprendre* ».

L'enjeu de l'apprentissage est considérable pour un élève et interpelle tous les acteurs du milieu de l'éducation. Une amélioration de l'enseignement passe entre autre par une meilleure compréhension de l'apprentissage. Le paradigme de l'enseignant transmetteur de savoir a été bousculé par celui de l'enseignant créateur de conditions et de situations favorables à l'apprentissage. Dans cette recherche, je propose qu'une

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

dialectique sujet/matériel explique la construction du sens d'un savoir mathématique. Cette démarche de construction de sens semble être visible par la manifestation d'un comportement qui présente l'être en mathématiques de ces élèves au cours de ces activités.

De l'ensemble des considérations précédentes, quatre points essentiels m'interpellent.

- L'élève qui résout un problème arithmétique verbal utilise un matériel pictural ou un matériel physique. La pensée de cet élève est explicable par la dialectique sujet/matériel.
- L'élève qui résout un problème arithmétique verbal, manifeste un geste caractéristique en lien à la construction d'un dessin ou au symbolisme de l'utilisation d'un matériel physique. Ce geste reflète deux rapports distincts au matériel : un rapport pictural et un rapport symbolique.
- Le dessin est un matériel qui présente l'avantage d'être un reflet du niveau de compréhension d'un problème chez l'élève. Il présente en même temps l'inconvénient d'être un matériel personnalisé. Il établit un rapport pictural au matériel.
- L'élève qui utilise ses doigts pour compter ou recompter procède selon un symbolisme habituel. Il semble établir un rapport symbolique au matériel.
L'usage conscient des doigts pour compter ou recompter favorise une réponse juste et compréhensible au problème arithmétique verbal.

Sur le plan théorique, j'ai mis en valeur une explicitation du rôle du matériel dans la résolution des problèmes arithmétiques verbaux : le rapport de l'élève au matériel ne

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

semble pas être forcément centré sur un matériel physique disponible mais sur un matériel habituel propre à cet élève. La microanalyse du rapport au matériel semble offrir un niveau de granularité intéressant pour cerner l'acte de résoudre des problèmes arithmétiques verbaux au-delà de la transposition didactique (Chevallard, 1985), des champs conceptuels (Vergnaud, 2008), de la situation didactique (Brousseau, 2004) et de l'objectivation (Radford, 2002, 2003, 2006, 2010, 2011, 2013). Cette dernière théorie m'a ouvert la voie vers une nouvelle compréhension du geste en situation comme reflet de pensée. S'il s'agit d'une situation mathématique, ce geste présente l'être en mathématiques en situation. Le comptage sur les doigts pour Joëlle, Ruth, Josué et Rosette, les dessins pour Jeanne et Esther sont des présentations de cette pensée. La microanalyse de la dialectique sujet/matériel peut éclairer l'acte de pensée au cours de la réalisation de ces activités.

Sur le plan pratique, je souhaite contribuer à répondre à une proposition du Ministère de l'éducation de l'Ontario relative à l'utilisation du matériel de manipulation mathématique dans les salles de classe (MÉO, 2007). Que l'élève soit conscient ou non, il établit un rapport avec un matériel physique ou pictural lorsqu'il résout un problème arithmétique verbal. L'enseignant du primaire peut tenir compte de ce rapport dans la conception des problèmes arithmétiques ou dans les choix des manuels ou l'achat du matériel didactique. Une classe bien garnie en matériel n'est pas nécessairement un gage de réussite. Les problèmes arithmétiques verbaux font référence à l'ensemble N qui est une somme d'unités. Il s'agit dans tous les cas d'unité de quelque chose. En avoir conscience favorise une réponse juste et compréhensible à ces problèmes.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Toutefois, certaines questions que j'ai soulevées dans cette étude restent ouvertes. En voici quelques-unes : Quelle est la genèse du rapport au matériel chez l'élève? Quelle est la genèse de la dialectique sujet/matériel au centre du rapport au matériel? D'où vient l'habitude d'utiliser un matériel plutôt qu'un autre pour vérifier l'exactitude d'une réponse? Comment comprendre la finesse des comptages analogiques : bille/nombre, bille/boule et bille/doigt? Quel rôle joue l'enseignement dans ce rapport de l'élève au matériel? Quel est le rôle des pairs dans ce rapport? Quelle est la part de la culture de la classe ainsi que celle du milieu familial? Ces questions et d'autres que j'ai soulevées dans les chapitres précédentes constituent des pistes pour des recherches ultérieures. Aussi, pour des chercheurs intéressés, le chantier est ouvert.

Dans l'ensemble, dans cette étude, j'ai démontré qu'au-delà de la compréhension et des entrées possibles dans le problème, le rapport au matériel et la dialectique sujet/matériel est central pour l'élève du primaire qui résout un problème arithmétique verbal. L'expérience d'un rapport au matériel se construit avant l'entrée à l'école. J'ai proposé dans cette étude que résoudre un problème arithmétique verbal, c'est construire un sens du savoir mathématique centré sur un matériel pictural ou physique et produire une réponse vérifiée. À mon avis, un geste caractérise cette construction de sens par l'élève et présente un comportement particulier de cet élève au cours de cette activité. Ce geste ne semble pas être une expression de la pensée mais une pensée rendue observable par l'utilisation d'un matériel.

Références

- Adorno, T. (1976). *The positivist dispute in German sociology*. London : W.Heinemann.
- Akiguet-Bakong, S. (2008). "Effet de la compréhension de l'énoncé sur la résolution des problèmes arithmétiques". *CORELA* 6 (2), 1-14.
- Alibali, M.W., Phillips, K. M.O. et Fischer, D. (2009). Learning new problem-solving strategies leads to change in problems representation. *Cognitive Development*, 24(2), 89-101.
- Anadón, M. (2004). Quelques repères sociaux et épistémologiques de la recherche en éducation au Québec. Dans T. Karsenti et L. Savoie-Zajc. (Éds). *La recherche en éducation : étapes et approches*. (pp. 19-36). Sherbrooke : Éditions du CRP.
- Anadón, M. (2006). La recherche dite « qualitative » : de la dynamique de son évolution aux acquis indéniables et aux questionnements présents. *Recherches Qualitative*, 26 (1), 5-31.
- Anderson, U. (2010). Skill development in different components of arithmetic and basic cognitive functions: Findings from a 3-year longitudinal study of children with different types of learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 102(1), 115-134.
- April, J. et Larouche, H. (2006). L'adaptation et la flexibilité d'une chercheure dans l'évolution de sa démarche méthodologique. *Recherches qualitatives*, 26(2), 145-168.
- Arsac, B, Balacheff, N., Mante, M.(1992). Teacher's role and reproductibility didactical education didactical situations. *Educational studies in Mathematics*, 25(5), 5-19.
- Atkinson, P. (1990). *The ethnographic imagination : textual construction of*

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- reality*. London : Routledge.
- Bacquet, M. (1996). *Les maths sans problèmes ou comment éviter d'en dégoûter son écolier*. Genève, Suisse : Calmann-Levy.
- Baffrey-Dumont, V. (1996). Résolution de problèmes arithmétiques par des enfants de huit ans. *Revue des sciences de l'éducation*. 22(2), 321-343.
- Balslev, K. et Saada-Robert, M. (2006). Les microgenèses situées. Unités et procédés d'analyse inductive-déductive. *Recherches qualitatives*, 26(2), 85-109.
- Bardini, C., Sabena, C. et Radford, L. (2005). Corps, symbole et artefact. Trois dimensions de l'objectivation du savoir. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 41(2), 255-272.
- Baribeau, C. (2009). Analyse des données des entretiens de groupe. *Recherches qualitatives*. 28(1), 133-148.
- Barrouillet, P. et Camos, V. (2002). *Savoirs et savoir-faire arithmétiques, et leurs déficiences*. Paris, France : Rapport pour le Ministère de la Recherche.
- Baruk, S. (1992). *Dictionnaire des mathématiques*. Paris, France : Seuil.
- Baudrit., A. (1994). Interactions sociales et apprentissages scolaires: étude ethnographique d'une activité mathématique. *Psychologie et Education* 17, 67-86
- Bautista, D; Mitchelmore, M. et Mulligan, J. (2009). Factors influencing Filipino children's solutions to addition and subtraction word problems. *Educational Psychology*, 29(6), 729-745.
- Baudrillard, J. (1987). *L'autre par lui-même*. Paris : Éditions Galilée.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Berends, I. E. et Van Lieshout, E. C. D. M. (2009). The effect of illustrations in arithmetic problem solving : Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction*, 19(4), 345-353.
- Bergeron, J.C. et Herscovics, N. (1981). Problems related to the application of a model of understanding to elementary school mathematics. Dans *Proceedings of the Third annual Meeting of the PME-NA* (p. 24- 29). Minneapolis. Minnesota : Psychology Mathematics Education - National.
- Bergeron, J.C.; Herscovics, N.; De Cortes, E.; Fuson, K, Moser, J.; Nesher, P. et Verschaffel, L. (1990). Psychological aspects of learning early arithmetic. *ICMI Study Series*. Cambridge University Press.
- Bernier, C. et Thouard, D.(1997). *La dialectique ou l'art de philosopher*. Paris, France : Éditions du Cerf.
- Bertiot, C. (2010). Stratégies de lecture. Énoncés mathématiques. Récupéré de <http://www3.ac-nancy-metz.fr/pasi/IMG/pdf/57WoippyECurieINNO2010-ann13a.pdf>.
- Biddelcomb, B. et Carr, M. (2011). A longitudinal study of development of mathematics strategies and underlying counting schemes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(1), 1-14.
- Bourassa, M., Bélair, L. et Chevalier, J. (2007). Les outils de recherche participative. *Éducation et Francophonie*, 35(1), 1-11.
- Bogdan, R., & Taylor, S.J. (1975). *Introduction to qualitative researchmethod : a phenomenological approach to the social sciences*. NewYork : Wiley.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Bourdieu, P. (1990). *Outline of a theory of practice*. Cambridge, MA et New-York, N.-Y. : Cambridge University Press.
- Boutin, G. (1997). *L'entretien de recherche qualitatif*. Ste-Foy, Québec : Presses de l'Université du Québec.
- Brissiaud, R. (1991). Un outil pour construire le nombre: les collections-témoins de doigts. Dans J. Bideaud, C. Meljac et J.P. Fischer (Dir.) : *Les chemins du nombre*, (pp. 59-90). Lille, France : Presses Universitaires.
- Brissiaud, R. (1994). Teaching and Development: Solving «Missing Addend» Problems Using Substraction. Dans Schneuwly et Brossard (Dir.) : Learning and development: contributions from Vygotsky. *European Journal of Psychology of Education*, 9 (4), 343-365.
- Brissiaud, R. et Sander, E. (2010). Arithmetic world problem solving: A situation strategy first framework. *Developmental Science*, 13(1), 92-107.
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu: Dévolution. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Brousseau, G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques*. France : La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (2004a). Les représentations. Étude en théorie des situations didactiques. *Revue des Sciences de l'Éducation*, 30(2), 241-277.
- Brousseau, G. (2004b). *Théorie des situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble, France: La pensée sauvage.
- Bruner, J. (1960). *The Process of Education*. Cambridge, MA: University Harvard Press.
- Byers, V. et Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics. *Mathematics Teaching*, 81, 24-27.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Cadet, É. R. (2002). *Processus suivi par un apprenant de la troisième année du primaire pour résoudre un problème de type additif*. Thèse de maîtrise inédite. Université d'Ottawa. Ottawa.
- Carey, S. (1985). *Conceptual change in childhood*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Carpenter, P.T.(1985). How children solve simple word problems. *Education and Urban Society*, 17(2), 417-425.
- Carpenter, P.T., Hiebert, J., et Moser, J.M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problem. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1), 27-39.
- Carpenter, P.T., Hiebert, J., et Moser, J.M. (1983). The effect of instruction on children's solution of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 15-72.
- Carpenter, P.T. et Moser, J.M.(1982).The development of addition and subtraction problem solving skills. Dans T.P. Carpenter, J.M. Moser et T.A. Romberg (Dir.) :*Addition and subtraction:A cognitive perspective*(p.9-24). Hillsdale, N- J: Erlbaum.
- Carpenter, P.T. et Moser, J.M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. Dans R. Lesh et M. Landeau (Dir.) : *Acquisition of mathematics concepts and process*(p.7-44). New-York, NY: Academic Press.
- Charlmers, A.(1987). *Qu'est-ce que la science ? Popper, Kuhn, Lakatos, Feyerabend*. Paris, France : La Découverte.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France : La pensée sauvage.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Coulon, A. (1995). *Ethnomethodology*. Newbury Park : Sage.
- Coquin-Viennot, D. (2001). Problèmes arithmétiques verbaux à l'école : pourquoi les élèves ne répondent-ils pas à la question posée? *Enfance*, 53 (2), 181-196.
- D'Ambrosio, U. (1985). Socio-cultural bases for mathematics education. Sao Paulo: UNICAMP, Campinas.
- Deblois, L. (1995). Le développement de l'écriture des nombres chez Christine. *Revue des sciences de l'éducation*, 21 (2), 331-351.
- De Cortes, E. et Verschaffel, L. (1985). Working with simple word problems in early mathematics instruction. Dans N. Streefland (Dir.) : *Proceeding of the ninth international conference for the psychology of mathematical education* (p.304-309). Utrecht, Pays-Bas : State University of Utrecht.
- De Cortes, E. et Verschaffel, L. (1986). Eye-movements data as access to solution processes of elementary addition and subtraction word problems. *Annual meeting of the AERA*. San Francisco : American Educational Research Association..
- De Cortes, E. et Verschaffel, L. (1987). *The effect of some non semantic factors on solving addition and subtraction word problems*. Washington D.C.: American Educational Research.
- Deleuze, G. (1973). *Empirisme et subjectivité*. Paris : Presses Universitaires e France.
- Denis, M. (1989). *Image et cognition*. Paris, France : Presses universitaire de France.
- Depaepe, F, De Corte, E et Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education*, 26, 152-160.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Derrida, J. (1987). *De l'esprit*. Paris : Galilée.
- Deschenaux, F. et Laflamme, C. (2007). Analyse du champ de la recherche en sciences de l'éducation au regard des méthodes employées : la bataille est-elle vraiment gagnée pour le qualitatif. *Recherches qualitatives*, 27(2), 5-37.
- Desgagné, S. (2005). Méditation entre recherche et pratique en éducation : faire de la recherche « avec » plutôt que sur les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation*, 31(2), 245-258.
- Devidal, M., Fayol, M. et Barouillet, P. (1997). Stratégies de lecture et résolution de problèmes arithmétiques. *L'Année psychologique*, 97, 9-31.
- De Viviés, X. (1999). Points de vue et type de représentation des règles. Deux niveaux de difficulté pour la résolution de problèmes. *L'année Psychologique*, 99, 271-293.
- De Viviés, X. (2010). Éclairage cognitif sur la complexité des différents systèmes de numération. *Expressions*, 35, 23-38.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-32.
- Duverney, D. (2006). Les spécialités au bac S, une approche historique, *La Gazette des Mathématiciens* 110, 65-78.
- Escarabal, M. C. (1988). Schéma d'interprétation et résolution de problèmes additifs. *Revue française de pédagogie*, 82, 15-22.
- Fagnant, A., Hindryckx, G. et Demonty, I. (2008). La résolution de problèmes au cycle 5-8. Présentation d'un outil méthodologique à l'usage des enseignants. *Bulletin d'informations pédagogiques*, 60.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Farrington-Flint, L., Canobi, K. H., Wood, C. et Faulkner, D. (2010). Children's patterns of reasoning about reading and addition concepts. *British Journal of Developmental Psychology*, 28(2), 427-448.
- Fayol, M. (1985). *Le récit et sa construction*. Neuchâtel, Suisse : Delachaux et Niestlé.
- Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre : le comptage et la résolution de problèmes*. Neuchâtel, Suisse : Delachaux et Niestlé.
- Fayol, M. (2007). *L'enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Acte du Séminaire national 13 et 14 novembre 2007 de l'ENPCB. Paris, France : École Nationale de Physique, Chimie et Biologie.
- Fayol, M., et Abdi, H. (1986). Sur la résolution de problèmes additifs chez l'enfant de 6 à 10 ans. *European Journal of Psychology of Education*, 1(1), 11-58.
- Fayol, M. et Abdi, H. et Gombert, J.E. (1987). Arithmetic problem formulation and work memory load. *Cognition and Instruction*, 4(3), 183-202.
- Fayol, M., Camos, V. et Roussel, J.-L. (2001). *Acquisition et mise en œuvre de la numération par les enfants de 2 à 9 ans*. Clermont-Ferrand, France : Presses de l'Université Blaise Pascal.
- Fenwick, T. et Edwards, R. (2010). *Actor-network theory in education*. Londres, Angleterre et New-York, New-York : Routledge Taylor and Francis Group.
- Fried, M. N. (2007). Didactics and history of mathematics: Knowledge and self-knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 203-223.
- Fuson, K. (1991). *Le chemin du nombre*. Lille, France : Presses Universitaires de Lille.
- Gadamer, H.G. (1982). *L'art de comprendre*. Paris : Aubier Montagne.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Gallagher, A. et Kaufman, J. (2005). *Gender differences in mathematic. An integrative psychological approach*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Garfinkel, H. (1967). *Studies in ethnomethodology*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Garno, S., Sander, E. et Richard, J.-F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recording in arithmetic problems solving. *Learning and Instruction*, 20(5), 400-410.
- Geary, D. C. (2005). Les troubles d'apprentissage en arithmétique: rôle de la mémoire de travail et des connaissances conceptuelles. In M.-P. (Dir.) : *La dyscalculie : trouble du développement numérique de l'enfant* (pp. 161-191). Marseille, France : Solal.
- Geertz, G. (1979). *The interpretation of culture*. New-York, NY: Basic Books.
- Geertz, C. (1988). *Works and lives*. Stanford, Ca : Stanford University Press.
- Giorgi, A. (1985). Editor's preface. Dans A. Giorgi (Ed.). *Phenomenology and psychological research* (pp. vii-x). Pittsburgh : Duquesne University Press.
- Glaser, B. G., & Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theory :Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine.
- Goetz, J.P., & LeCompte, M.D. (1984). *Ethnography and qualitative desing in educational research*. Boston : Academic Press, Inc.
- Habermas, J. (1987) *Théorie de l'agir communicationnel* (Tome 1). Paris: Fayard.
- Habermas, J. (1990). *La technique et la science comme idéologie*. Paris : Gallimard.
- Habermas, J. (1992). *L'éthique de la discussion*. Paris : Cerf.
- Hegel, G. W. F. (1977). *Phenomenology of spirit*. Oxford: Oxford University Press (First edition, 1807).

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Hegel, G. (2001). *The philosophy of history*. Kitchener, ON: Batoche Books. (Original work published 1837)
- Hegel, G. W. F. (2009). *Logic*. (W. Wallace, Trans.). Pacifica, CA: MIA. (Original work published 1830)
- Horkheimer, M. (1978). *Théorie critique*. Paris : Payot.
- Hughes, M. (1986). Children's invention of written arithmetic. (Dir.): *Children and Numbers Difficulties*. In *Learning Mathematics* (pp. 52-78). Cambridge, MA: Blackwell.
- Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres*. Paris, France : Robert Laffont.
- Jankvist, U.T. (2010). An empirical study of using history as a "goal". *Educational Studies in Mathematics*, 74(1), 53-74.
- Jenkins, H. (2005). Getting into the game. *Educational Leadership*, 62(7), 48-51.
- Johnson-Laird, P. (1983). *Mental Models*. Cambridge, MA : Harvard University Press.
- Jordan, N. C.; Glutting, J. et Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, 20(2), 82-88.
- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes, France : Presses Universitaires de Rennes.
- Kail, R., et Hall, L. K. (1999). Sources of developmental change in children's word problem performance. *Journal of Educational Psychology*, 91, 660-668
- Kamii, C. et Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. (Dir.) : L.J. Morrow, M.J. Kenney. *The teaching and learning of algorithms in school*

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- mathematics* (pp. 130-140). Reston, Virginia : Yearbook of National Council of Teachers of Mathematics.
- Karbach, J. et Kray, J. (2007). Developmental changes in switching between mental task sets. *Journal of Cognition and Development*, 8(2), 205-236.
- Karsenti, T., & Savoie-Zajc, L. (2000). *Introduction à la recherche en éducation*. Sherbrooke : Éditions du CRP.
- Knijnik, G. (2007). Mathematics education and the Brazilian Landless Movement: three different mathematics in the context of the struggle for social justice. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 21, 1-18.
- Kintsch, W. et Greeno, J.G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 85, 363-394.
- Krathwohl, D. R. (1998). *Methods of Educational & Social Science Research: An Integrated Approach*. New York: Longman.
- Kremer-Marietti, A. (2007). *Philosophie des sciences de la nature*. Paris, France : L'Harmattan.
- Kuzniak, A. (2004). La théorie des situations didactiques de Brousseau. *L'ouvert*, 110, 1-33.
- Lauer, T.E. (2003). Conceptualizing ecology: A learning cycle approach. *American Biology Teacher*, 5(7), 518-522.
- Lecourt, D. (2010). *La philosophie des sciences*(5^e éd.). Paris, France: Presses Universitaires de France.
- Lederman, S. J., Klatzky, R. L. (1990). Haptic object classification: Knowledge-driven exploration. *Cognitive Psychology*, 22, 421-459.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Legendre, R. (2005). *Dictionnaire actuel de l'éducation*. Montréal, Québec : Guérin.
- Leontiev, A. N. (1979). The problem of activity in psychology. Dans J.V. Werstch (Dir.)
: *The concept of activity in Soviet psychology* (p. 37-71). New-York, NY: Shrape.
- Levy, T. (1993, novembre). Au commencement le nombre. *Courrier de l'UNESCO*, 9-13.
- Lincoln, Y. S. (1995). Emerging criteria for quality in qualitative and interpretive
research. *Qualitative inquiry*, 1(3), 275-289. Beverly Hills, Ca : Sage.
- Lutz, F. W. (1981). Ethnography : the holistic approach to understanding schooling.
Dans J. L. Green; C. Wallat (Eds). *Ethnography and language in educational
setting* (pp.51-63). Norwood, NJ : Ablex
- Liotard, J.F. (1985). *La condition postmoderne*. Paris : Éditions de Minuit.
- Maffessoli. M. (1985). *La connaissance ordinaire*. Paris: Librairie Des Méridiens.
- Maffessoli. M. (1990). *Au creux des apparences*. Paris: Plon.
- Marx, K. (1973). Grundrisse: Introduction to the critique of political economy.
Baltimore: Penguin Books.
- Marx, K. (1998). The German ideology. New York: Prometheus Books.
- McDonald, G., Le, H., Higgins, J. et Podmore, V. (2005). Artifacts, tools, and
classrooms. *Mind, Culture, and Activity*, 12(2), 113-127.
- Mayer, R., Ouellet, F., St-Jacques, M.-C. et Turcotte, D. (2000). *Méthodes de recherche
en intervention sociale*. Montréal, Québec : Gaëtan Morin.
- Mead, J. H. (1965). *L'esprit, le soi et la société*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Mercier, A. et Sensevy, G. (2007). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du
professeur et des élèves*. Rennes, France : Presses universitaires.
- Merriam, S. B. (1988). *Case study in education : A qualitative approach*. San Francisco,
Ca : Jossey-Bass.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2005). *Le curriculum de l'Ontario de la 1^{ière} à la 8^{ième} année : Mathématiques – Révisé*. Toronto, Ontario : Imprimerie de la Reine pour l'Ontario.

Ministère de l'éducation de l'Ontario. (2007). *À l'écoute de chaque élève grâce à la différenciation pédagogique*. Toronto, Ontario : Imprimerie de la Reine pour l'Ontario.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec. (2009). *Plan stratégique 2009-2013*. Québec, Québec : Gouvernement du Québec.

Mikhailov, F. T. (1 980). *The riddle of the self*. Moscow: ProgressPublishers.

Mix, K. S.et Paik, J. H. (2008). Do Korean fraction name promote part-whole reasoning. *Journal of Cognition and Development*, 9(2), 145-170.

Morin, E.(1986). *La connaissance de la connaissance* (Tome 3), Nouvelle édition.Paris, France : Seuil.

Morin, M-P. (2008). Les connaissances mathématiques et didactiques chez les futurs maîtres du primaire: quatre cas à l'étude. *Canadian Journal of Education*, 31(3), 537-566.

Nesher, P. et Katriel, T. (1977). A semantic analysis of addition and subtraction word problems in arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 251-263.

Nunes, T., Schliemann, A. et Carraher, D. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

OECD. (1999). *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment*.Paris: OECD Publications Service.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Olkun, S., Sinan, L. et Toluk, Z. (2005). Teacher questioning with an appropriate manipulative may make a big difference. *Issues in the Mathematics Preparation of School Teachers*, 2, 1-11.
- Paillé, P. (1994). L'analyse par théorisation ancrée. *Cahiers de recherche sociologique*, 23, 147-181.
- Pearn, C.A. (2007). Using paper folding, fraction walls, and number line to develop understanding of fractions for students from years 5-8. *Australian Mathematical Teacher*, 63(4), 31-36.
- Perkins, D.N. (1993). Person-plus: A distributed view of thinking and learning. Dans G. Salomon (Dir.) : *Distributed Cognitions. Psychological and Educational Considerations* (p. 88-110). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Perrenoud, Ph. (1998). *De l'évaluation des élèves. De la fabrication de l'excellence à la régulation des apprentissages*. Bruxelles : De Boeck.
- Piia, V.T., Kaisa, A. et Jari-Erik, N. (2008). The association between mathematical wordproblems and reading comprehension. *Educational Psychology*, 28(4), 409-426.
- Pires, A. (1997). Échantillonnage et recherche qualitative : essai théorique et méthodologique. Dans J. Poupart, J.-P. Deslauriers, L.-H. Groulx, A. Laperrière et A. P. Pirès (Dir.) : *La recherche qualitative : Enjeux épistémologiques* (p. 113-169). Montréal, Québec : Gaëtan Morin.
- Plante, I., Théorêt, M. et Favreau, O. E. (2010). Les stéréotypes du genre en mathématiques et en langues : recension critique en regard de la réussite scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 36(2), 389-419.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Poisard, C. (2005). *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer*. Thèse de doctorat inédite. Université Aix-Marseille 1. Université Provence. Provence.
- Poisson, Y. (1991). *La recherche qualitative en éducation*. Québec, Québec : Presses de l'Université du Québec.
- Poupart, J. (1997). L'entretien de type qualitatif : considérations épistémologiques, théoriques et méthodologiques. Dans J. Poupart, J.-P. Deslauriers, L.-H. Groulx et al. (Dir.) : *La recherche qualitative : enjeux épistémologiques et méthodologiques* (p. 173-209). Montréal, Québec : Gaëtan Morin.
- Pudelko, B. (2006). *Étude microgénétique des médiations épistémiques d'un outil informatisé de représentation graphique des connaissances au cours d'une activité de compréhension de texte : proposition pour une approche instrumentale étendue des médiations des outils cognitifs dans l'apprentissage*. Thèse de doctorat inédite. Université Paris VIII. Saint-Denis.
- Rabardel, P. (2005). Instrument subjectif et développement du pouvoir d'agir. Dans P. Rabardel et P. Pastré (Dir.) : *Modèles du sujet pour la conception : dialectiques, activités, développement* (p. 11-29). Toulouse, France : Octarès.
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Radford, L. (2006). Communication, apprentissage et formation du je communautaire.
Dans B. D'Amore et S. Sbaragli (Dir.) :*20th Italian national conference incontri con la matematica* (p.65-72).Bologne, Italie.
- Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities.*For the Learning of Mathematics*, 30(2), 2-7.
- Radford, L. (2011). Vers une théorie socio-culturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Elements* 1(1), 1-27.
- Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (1), 7-44.
- Reusser, K et Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution – the social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, 7, 309-325.
- Ricard, M.-A. (1999). La dialectique de T.W. Adorno. *Laval Théologique et Philosophique*, 55(2), 267-283.
- Richard, J.F. (1984). La construction de la représentation du problème. *Psychologie française*, 29(3/4), 226-230.
- Richard, J.F. (1990). *Les activités mentales : Comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Paris, France : Armand Colin.
- Richard, J. F. (2004). *Les activités mentales*. Paris, France : Armand Colin.
- Ricoeur, P. (1990). *Soi-même comme un autre*. Paris : Seuil.
- Ricoeur, P. (1991). *Lectures I, Autour du politique*, Paris : Seuil

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Riley, M.S., Greeno, J.G. et Heller, J.I. (1983). Developement of children's problem-solving ability in arithmetic. Dans H.P. Ginsburg (Dir.) : *The development of mathematical thinking* (p. 153-196). New-York, NY: Academic Press.
- Robinson, K. M. et Dubé, A. K. (2009). Children's Understanding of Addition and Subtraction concepts. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103(4), 532-545.
- Roditi, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques – Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan.
- Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking*. Oxford: Oxford University Press.
- Rosenthal, D. et Resnick, L. B. (1974). Children's solution processes in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 66(6), 817-825.
- Rosenthal, V. (2004). Microgenesis, immediate experience and visual processes in reading. Dans A. Carsetti (Dir.) : *Seeing, Thinking and Knowing: Meaning and Self-Organization in Visual Cognition and Thought* (p.221-243). Amsterdam, Pays-Bas : Kluwe.
- Sarrazy, B. (1996). *La sensibilité au contrat didactique. Rôle des arrière-plans dans la résolution de problèmes au cycle trois*. Université de Bordeaux II. Bordeaux.
- Savoie-Zajc, L. (2000). La recherche qualitative/interprétative en éducation. Dans T. Karsenti et L. Savoie-Zajc (Dir.) : *Introduction à la recherche en éducation* (p. 171-198). Sherbrooke, Québec : Centre de Ressources Pédagogiques.
- Schmitz, M.J. et Winskel, H. (2008). Towards effective partnerships in a collaborative problem-solving task. *Journal of Educational Psychology*, 78(4), 581-596.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Sécrétariat de la Numératie et de la Littératie. (2008). Accroître la capacité. Série d'apprentissage professionnel. *Édition spéciale du secrétariat*, 16.
- Seeger, F. (1998). Representations in the Mathematics Classroom : Reflections and Constructions. Dans Falk. S., Jörg, V. et Ute, W. (Dir.) : *The Culture of the Mathematics Classroom* (p.118-134). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Sherman, J. et Bisanz, J. (2009). Equivalence in symbolic and nonsymbolic contexts: Benefits of solving problems with manipulative. *Journal of Educational Psychology*, 101(1), 88-100.
- Siegler, R. S. (1988). Individual differences in stratégies choice. Good students, no so good students, and perfectionist. *Child Developmental Psychology*, 12, 281-300.
- Skemp, R. R. (1976). Relational and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 17-23.
- Smith, L.F. et Montani, T.O. (2008). The effects of instructional consistency: Using manipulative and teaching strategies to support resources room mathematics instruction. *Learning Disabilities. A Multidisciplinary Journal*, 15(2), 71-76.
- Tardif, J. (1988). Le chercheur et ses contraintes doxologiques. *Revue des sciences de l'éducation*, 14(2), 149-163.
- Theureau, J. (2004). *L'analyse du cours d'action : méthode élémentaire* (2^e éd. remaniée). Toulouse, France : Octarès.
- Thévenot, C., Castel, C., Fanget, M., et Fayol, M. (2010). Mental subtraction and high and lower skilled arithmetic problem solvers : Verbal report versus operand -

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- recognition paradigms. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory and Cognition*, 36(5), 1242-1255.
- Thévenot, C., Coquin, D. et Verschaffel, L. (2006). La résolution de problèmes. Dans P. Barrouillet et V. Camos. *La cognition mathématique chez l'enfant*(p.45-70). Marseille, France : Éditions Solal.
- Van Manen, M. (1984). « *Doing » phenomenological research and writing : an introduction*. Edmonton : University of Alberta.
- Van der Maren, J.-M. (2010). Notes de chercheurs en méthodologies qualitatives. La maquette d'un entretien. Son importance dans la collecte de données de qualité. *Recherches qualitatives*, 29(1), 129-139.
- Van Galen, M. S. et Reitsma, P. (2010). Learning basic addition facts from choosing between alternative answers. *Learning Instruction*, 20(1), 47 - 60.
- Varela, M., Pappas, C.C., Kane, J.M., Arsenault, A., Hanks, J. et Cowan, B.M. (2008). Urban primary-grade children think and talk science: Curriculum and instructional practices that nurture participation and argumentation. *Science Education*, 92(1), 65-95.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. Dans T.P. Carpenter, J.M. Moser, et T.A. Romberg (Dir.) : *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (p. 39-59). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Vergnaud, G. (1990). Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives. Dans G. Netchine-

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Grynberg(Dir.) :*Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant* (p. 261-277). Paris, France : PUF.
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques*, 10(2-3), 133-170.
- Vergnaud, G. (1994). Quelle théorie pour comprendre les relations entre savoir-faire et savoir? Dans A. Bentolila (Dir.) :*Savoir et savoir-faire* (p. 5-20). Paris, France : Nathan Pédagogie.
- Vergnaud, G. (2008). Culture et conceptualisation : l'une ne va pas sans l'autre. *Carrefours de l'éducation*, 26(2), 83-98.
- Verschaffel, L. et De Cortes, E.(1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 251-263.
- Verschaffel, L., Greer, B. et De Cortes, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Pays-Bas: Swets et Zeitlinger.
- Vincent, S. (1997). Des conduites d'élèves en construction : le cas de figure des relations multiplicatives. *Education et francophonie*, 25(1), 25-37.
- Vygotsky, L.S. (1934/1978). *Mind and Society:the Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, MA : Harvard University Press.
- Vygotsky, L.S. (1930/1985). La méthode instrumentale en psychologie. Dans B. Schvnevly et J. B. Bronckart (Dir.) :*Vygotsky aujourd'hui* (p.39-47). Neuchâtel, Suisse : Délachaux et Niestlé.
- Vygotsky, L.S. (1934/1985). *Pensée et langage*. Paris, France : Messidor/éditions sociales.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Wells, G. (1992). The centrality of talk in education. Dans K. Norman (Dir.) :*Thinking voices: The work of the national oracy project* (p.148-155). Londres, Angleterre:

Hodder and Stoughton.

Wertsch, J. V.(1985). *Vygotsky and the social formation of Mind*. Cambridge, MA:

Harvard University Press.

Zhang, J et Normand, D. A. (1994). Representation In Distributed Cognitive Tasks.

Cognitive Science, 18, 87-122.

Annexe A

Lettre de consentement

4 Mars 2010

Cher(e) élève,

Projet de recherche : le rôle du matériel manipulable dans la résolution de problèmes arithmétiques chez les élèves du primaire selon la dialectique sujet-objet

Je m'appelle Élysée Robert Cadet et je suis le chercheur principal dans ce projet. Je suis étudiant à l'université d'Ottawa.

J'aimerais te filmer et 5 de tes camarades de classe qui seront pigés pour résoudre 3 problèmes arithmétiques que tu peux voir dans n'importe quel manuel de mathématique de 3^{ième} année. Je mettrai à ta disposition du matériel manipulable auquel tu es habitué comme des jetons ou bâtonnets que tu peux utiliser si tu veux. Je ne vais rien te demander de différent de ce que tu fais habituellement en mathématiques dans ta classe.

Deux caméras dans ta classe filmeront ce que tu fais ou ce que tu dis pendant que tu résous les trois problèmes arithmétiques. Les caméras ne vont pas filmer toi seulement mais chaque caméra va filmer 3 élèves proches. En matinée, tu auras 45 à 90 minutes pour résoudre les 3 problèmes. Ensuite toi, tes camarades et moi visionnerons ensemble sur mon ordinateur pendant 45 à 90 minutes les cassettes d'enregistrement. Après, tout le monde va prendre un lunch et se reposer un peu pendant 60 minutes entre 12 h à 13 h.

En après-midi, j'aurai une petite conversation avec toi sur ce que tu as fait avec le matériel pour résoudre les problèmes. La conversation sera filmée. Ce sera dans la salle où tu as été pour résoudre les problèmes. Je te poserai des questions sur certaines choses que tu as écrites ou que tu as dites. Je ne jugerai pas ce que tu as écrit comme bon ou pas bon. Tout sera accepté. Je vais juste essayer de comprendre est-ce que le matériel t'a aidé à écrire ce que tu as écrit. Tout ce que tu as fait sera resté secret.

Si tu as d'autres questions, tu peux parler à ton enseignant. Merci d'avoir pris le temps de lire tout cela. Si tu es d'accord pour participer à ce projet, alors tu peux signer les deux autres feuilles dont une pour toi et une pour moi.

Élysée Robert Cadet

Étudiant au doctorat

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Formulaire d'assentiment

S'il-te-plaît, si tu es d'accord tu peux signer au-bas de ces deux feuilles. Tu garderas une pour toi et tu donneras une à ton enseignante pour me donner.

Observations :

Je comprends qu'Élysée Robert Cadet sera là pendant que je résous des problèmes arithmétiques. Je comprends que je serai filmé. Je suis conscient qu'Élysée Robert Cadet ne va pas juger ce que je fais comme bon ou pas bon mais il va essayer de comprendre ce que je fais avec le matériel.

Copies du travail écrit :

Je comprends qu'Élysée Robert Cadet puisse avoir les feuilles sur lesquelles j'ai écrit. Ces feuilles seront dans un endroit secret. Il enlèvera mon nom et toute chose qui permettrait à une autre personne de voir que c'est moi.

Enregistrement vidéo des élèves en mathématiques :

Je comprends que les cassettes seront dans un endroit secret. Tout ce qui sera fait ou dit sera gardé secret. Tout ce qui sera écrit à partir de ces cassettes sera aussi gardé secret.

Je comprends ce que je viens de lire et je veux participer à ce projet. Élysée Robert Cadet m'a assuré que je pourrai décider à n'importe quel moment de ne plus participer à ce projet sans aucune conséquence négative.

Je suis conscient qu'à n'importe quel moment que j'ai des questions, je peux m'adresser à mon enseignant(e).

Signature d'Élysée Robert cadet :

_____ Date : _____

Signature de l'élève

_____ Date : _____

4 Mars 2010

Cher(e) enseignant(e),

Titre du projet : Le rôle du matériel manipulable dans l'habileté de résolution de problèmes arithmétiques chez les élèves du primaire selon la dialectique sujet-objet

Je m'appelle Élysée Robert Cadet. J'étudie à l'université d'Ottawa. Je fais des recherches sur la façon dont les élèves se servent du matériel manipulable en résolution de problèmes arithmétiques.

J'aimerais entreprendre un projet de recherche dans votre classe. Pour ce faire, j'ai besoin de votre consentement de façon libre et volontaire et celui des parents de vos élèves. Cela n'aura aucune incidence sur votre évaluation comme enseignant.

Qu'est-ce qui va se passer dans la recherche?

Le projet de recherche aura lieu hors de votre cours de mathématiques durant une journée pédagogique. Je rembourserai les parents des élèves sélectionnés des frais encourus pour le déplacement et le lunch. J'enverrai une lettre de consentement libre à tous les parents. Après avoir obtenu leur consentement, je choisirai 6 élèves (filles et/ou garçons) par tirage successif et sans remise à partir de votre liste de classe. Je donnerai à chacun(e) 3 problèmes arithmétiques à résoudre individuellement et en même temps. Ils auront 45 à 90 minutes pour résoudre ces problèmes à raison de 15 à 30 minutes par problème. Je les filmerai à l'aide de deux caméras. Chaque caméra filmera 3 élèves proches. Voici comment je vais procéder :

-Regarder ce qui se passe et en prendre note dans mon journal de bord.

-Filmer ce qui se passe. Les caméras filmeront toutes seules.

-J'aurai un entretien semi-structuré individuel avec chacun des participants pour m'expliquer comment le matériel l'a aidé ou ne l'a pas aidé à résoudre les problèmes arithmétiques.

-J'aimerais aussi garder les feuilles sur lesquelles les élèves/participants ont écrit pour poser certaines questions en lien avec l'utilisation ou la non utilisation du matériel manipulable dans les stratégies utilisées et/ou les réponses produites.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

-Qu'est-ce qui arrivera avec les renseignements et les notes?

Une fois que je finis de collecter les informations, je partirai avec tout vers l'université. Je transcrirai les enregistrements. Tout ce qui aurait permis d'identifier un participant sera remplacé par un code et/ou un pseudonyme et conservé dans un logiciel codé. Je suis le seul à savoir le code. Les informations en version papier seront conservées dans un coffre-fort au bureau du superviseur et fermé à l'aide d'un cadenas codé dont moi seul connaît le code. Personne ne pourra identifier qui a dit quoi. Je montrerai ces transcriptions à des gens lorsque je produirai des rapports à propos du projet de recherche. Personne ne saura qui est dans la transcription ni dans quelle école il est. Cela restera secret.

Merci d'avoir lu cette information. Si vous êtes d'accord pour prendre part à cette recherche, vous pouvez signer ces deux formulaires. Vous m'enverrez une et conserver une pour vous. Même si vous êtes d'accord à ce stade, vous pourrez changer d'avis à n'importe quel moment sans aucunes conséquences négatives.

Pour toutes information concernant une requête ou une plainte à propos du comportement éthique par rapport au projet, adressez-vous au :

Protocol Officer of the Social Sciences and Humanities Research Ethics Board

University of Ottawa /Tabaret Hall

550 Cumberland

Ottawa, Ontario, K1N 6N5

Téléphone : 613-562-5841

Email : ethics@uottawa.ca

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Formulaire de consentement : S'il-vous-plaît si vous êtes d'accord, vous pouvez signer ces deux formulaires. Vous conserverez une pour vous et vous me remettrez une.

Observations :

Je consens qu'Élysée Robert Cadet puisse observer certains de mes élèves qui résolvent des problèmes arithmétiques avec du matériel manipulable et prendre des notes. Ces notes seront montrées à d'autres personnes autorisées mais les noms seront gardés dans la confidentialité.

Enregistrement vidéo:

Je consens qu'Élysée Robert Cadet puisse filmer certains de mes élèves pendant qu'ils résolvent des problèmes arithmétiques. La bande vidéo sera visionnée seulement par Élysée Robert Cadet. Personne d'autres ne saura qui est dans la bande vidéo.

Entretien :

Je consens qu'Élysée Robert Cadet puisse avoir un entretien avec certains de mes élèves. Je consens aussi que cet entretien soit filmé. Les cassettes seront visionnées seulement par Élysée Robert Cadet. Personne d'autre n'y aura accès.

Rapports à propos de la recherche :

Je consens qu'Élysée Robert Cadet puisse écrire sa thèse à partir des retrouvailles de cette recherche. Il pourra parler des choses qui se sont passées au cours de son observation, des réponses aux problèmes et des paroles qui sont dites au cours de l'entretien. Personne ne saura si c'était mes élèves, ma classe ou mon école.

J'aimerais recevoir un rapport à propos des retrouvailles de la recherche à la fin du projet.

Je suis conscient de ce qui va se passer dans ce projet de recherche et je suis d'accord de participer.

Je suis conscient que ma participation est volontaire et que si je veux changer d'avis à n'importe quel moment, il n'y pas de conséquences négatives.

Je suis conscient qu'il y a deux copies de ce formulaire. Je peux en garder une. Je suis aussi conscient que j'ai en ma possession une copie de la lettre d'Élysée Robert Cadet concernant le projet.

Signature de l'enseignant(e):

_____ Date : _____

Signature d'Élysée Robert Cadet :

_____ Date : _____

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

4 Mars 2010

Cher(e) parent,

Titre du projet : Le rôle du matériel manipulable dans la résolution de problèmes arithmétiques chez les élèves du primaire selon la dialectique sujet-objet.

Je m'appelle Élysée Robert Cadet. J'étudie à l'université d'Ottawa. Je fais des recherches sur la façon dont les élèves qui résolvent des problèmes arithmétiques avec des jetons ou des bâtonnets considèrent ce matériel.

J'aimerais entreprendre ce projet de recherche dans la classe de votre enfant. Pour ce faire, j'ai besoin de votre consentement. Vous êtes libre de donner votre consentement ou non. Votre décision n'aura aucune conséquence sur les notes de votre enfant ou sur ses évaluations.

Que se passera-t-il dans ces recherches?

Je ne veux pas que votre enfant perde une journée de classe et en même temps c'est un projet qui vise à aider les enseignants à mieux comprendre les élèves en mathématiques. C'est pourquoi, je choisirai une journée pédagogique pour réaliser le projet. Si vous avez l'habitude d'amener votre enfant en voiture ou s'il vient en général à l'école en autobus scolaire, je vous rembourserai l'argent que vous dépenserez pour ce déplacement et pour la préparation de son lunch de midi. Il sera avec moi sous la supervision de son enseignant ou un responsable de l'école. Ce seront 6 élèves de sa classe qui seront pigés pour participer à ce projet. S'il (elle) est pigé(e), son enseignant(e) communiquera avec vous aussitôt pour vous le faire savoir. Lui (elle) et 5 autres camarades auront 45 à 90 minutes pour résoudre 3 problèmes à raison de 15 à 30 minutes par problème. Ces problèmes peuvent se trouver dans n'importe quel manuel de mathématiques de 3^{ième} année. Je filmerai à l'aide de deux caméras. Chaque caméra filmara 3 élèves proches. J'aurai une conversation avec chacun d'eux durant 30 minutes. Voici comment je vais procéder :

-Regarder ce qui se passe et en prendre note dans mon journal de bord.

-Filmer ce qui se passe. Les caméras filmeront toutes seules.

-J'aimerais aussi garder les feuilles sur lesquelles ils écriront pour poser certaines questions à propos de la façon qu'il (elle) utilise ou non le matériel pour résoudre le problème. Je ne jugerai pas ces réponses comme bonne ou pas bonne. Tout ce qu'il (elle) écrira sera accepté.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

-Que se passera-t-il avec les enregistrements et les transcriptions?

Je transcrirai ces enregistrements. Cela signifie que je dactylographierai tout ce que ton enfant fera au cours de l'observation ou tout ce qu'il dira ou fera au cours de l'entretien. Je garderai tout secret. Personne ne saura qui a fait quoi puisque tout ce qui aurait permis de savoir que c'est lui qui a dit telle chose ou fait telle chose sera enlevé et remplacé par un code ou un pseudonyme gardé dans un coffre-fort fermé à l'aide de cadenas codé.

Quoi d'autre après?

Si vous voulez en savoir plus à propos du projet, vous pouvez en parler à l'enseignant de votre enfant ou me contacter ou contacter l'université. Les informations pour nous contacter sont incluses dans une feuille séparée.

Merci d'avoir pris le temps de lire ces informations. Même si vous êtes d'accord à ce stade, vous pouvez changer d'avis à n'importe quel moment sans aucunes conséquences négatives pour vous et votre enfant.

Si vous voulez porter plainte ou parler à une personne n'étant pas impliquée dans le projet, vous pouvez utiliser ces informations :

Téléphone: 613-562-5841

Courrier: Protocol Officer of Social Sciences and Humanities Research Ethics Board : University of Ottawa/Tabaret Hall

550 Cumberland

Ottawa, Ontario, K1N 6N5

Courriel: ethics@uottawa.ca

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Formulaire de consentement : s'il-vous-plaît si vous êtes d'accord, vous pouvez signer au bas de ces deux formulaires dont une pour vous et une pour moi que vous remettrez à votre enfant.

Observations : Je consens qu'Élysée Robert Cadet puisse observer mon enfant qui résout des problèmes arithmétiques et prendre des notes. Je consens aussi qu'Élysée Robert Cadet puisse avoir une conversation avec mon enfant et prendre des notes. Ces notes seront montrées à d'autres personnes autorisées mais l'identité de mon enfant sera gardée secret.

Enregistrement vidéo des cours : Je consens qu'Élysée Robert Cadet puisse filmer mon enfant durant cette activité. La bande vidéo sera visualisée seulement par Élysée Robert Cadet. Personne d'autre n'y aura accès.

Entretien : Je consens qu'Élysée Robert Cadet ait un entretien avec mon enfant et que cet entretien soit filmé. La cassette sera visionnée seulement par Élysée Robert Cadet. Personne d'autre ne saura qui parle.

Trace : Je consens qu'Élysée Robert Cadet puisse garder les feuilles sur lesquelles mon enfant a écrit pendant qu'il résolvait les problèmes arithmétiques. Après avoir caché l'identité de mon enfant, ces feuilles seront montrées seulement à des chercheurs autorisés.

Rapport à propos des recherches : Je consens qu'Élysée Robert Cadet puisse écrire sa thèse à partir des retrouvailles de cette recherche. Il pourra y écrire des choses qui se sont passées durant son observation et des paroles que mon enfant a dites durant l'entretien. Personne ne saura que c'était mon enfant, son cours ou son école.

J'aimerais recevoir un rapport du projet de recherche à la fin du projet.

Je comprends ce qui va se passer dans le projet. Je sais qu'y prendre part est volontaire et que moi et mon enfant pouvons changer d'avis à n'importe quel moment et que si moi ou mon enfant change d'avis, il n'y pas de conséquences négatives. Je comprends que si j'ai des questions à propos du projet, je peux contacter Élysée Robert Cadet ou l'enseignant(e) de mon enfant dont les informations de contact sont données dans la lettre en ma possession. Je sais que si je ne suis pas content de n'importe quoi qui se passe dans ce projet de recherche, je pourrai contacter l'université à l'adresse indiquée sur la feuille d'informations de contact.

Le nom de votre enfant : _____ Date : _____

Parent ou tuteur(trice) : _____ Date : _____

Parent ou tuteur(trice) : _____ Date : _____

Élysée Robert Cadet : _____ Date : _____

AnnexeB

Protocole d'entretien

A- Questions inspirées de l'observation

- 1- J'ai constaté que tu te parlais et qu'ensuite tu manipulais le matériel (jetons/bâtonnets). Veux-tu me dire ce que tu te disais?
- 2- Pourquoi tu te disais cela?
- 3- Tu t'es arrêté un moment avant de toucher le matériel c'est comme si tu pensais à quelque chose? Peux-tu me dire à quoi tu pensais?
- 4- Pourquoi tu pensais à cela?
- 5- Je t'ai vu faire des lots avec le matériel (jetons/bâtonnets); peux-tu me dire pourquoi tu as fait ces lots?
- 6- Est-ce que c'est plus facile de résoudre des problèmes avec du matériel ou sans matériel?
- 7- Pourquoi c'est plus facile avec du matériel?

B- Questions inspirées des traces

- 1- Dis-moi comment tu es arrivé à ton résultat?
- 2- Aimes-tu travailler avec du matériel pour trouver le résultat?
- 3- Est-ce qu'on peut jouer avec ce matériel?

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- 4- Explique-moi comment?
- 5- Est-ce que ce jeu peut aider à trouver le résultat?

Annexe C

Description des rapports au matériel

Cette annexe décrira les rapports des participants dans le cadre de ces activités de résolution de problèmes arithmétiques verbaux. La description comprendra mes observations relatives au comportement des participants pendant la réalisation de ces activités suivies des traces et du verbatim. Elle suivra cet ordre : Jeanne, Joëlle, Ruth, Josué, Rosette et Esther.

✧ **Jeanne**

Jeanne a réalisé les trois activités de résolution de problèmes en 15 minutes.

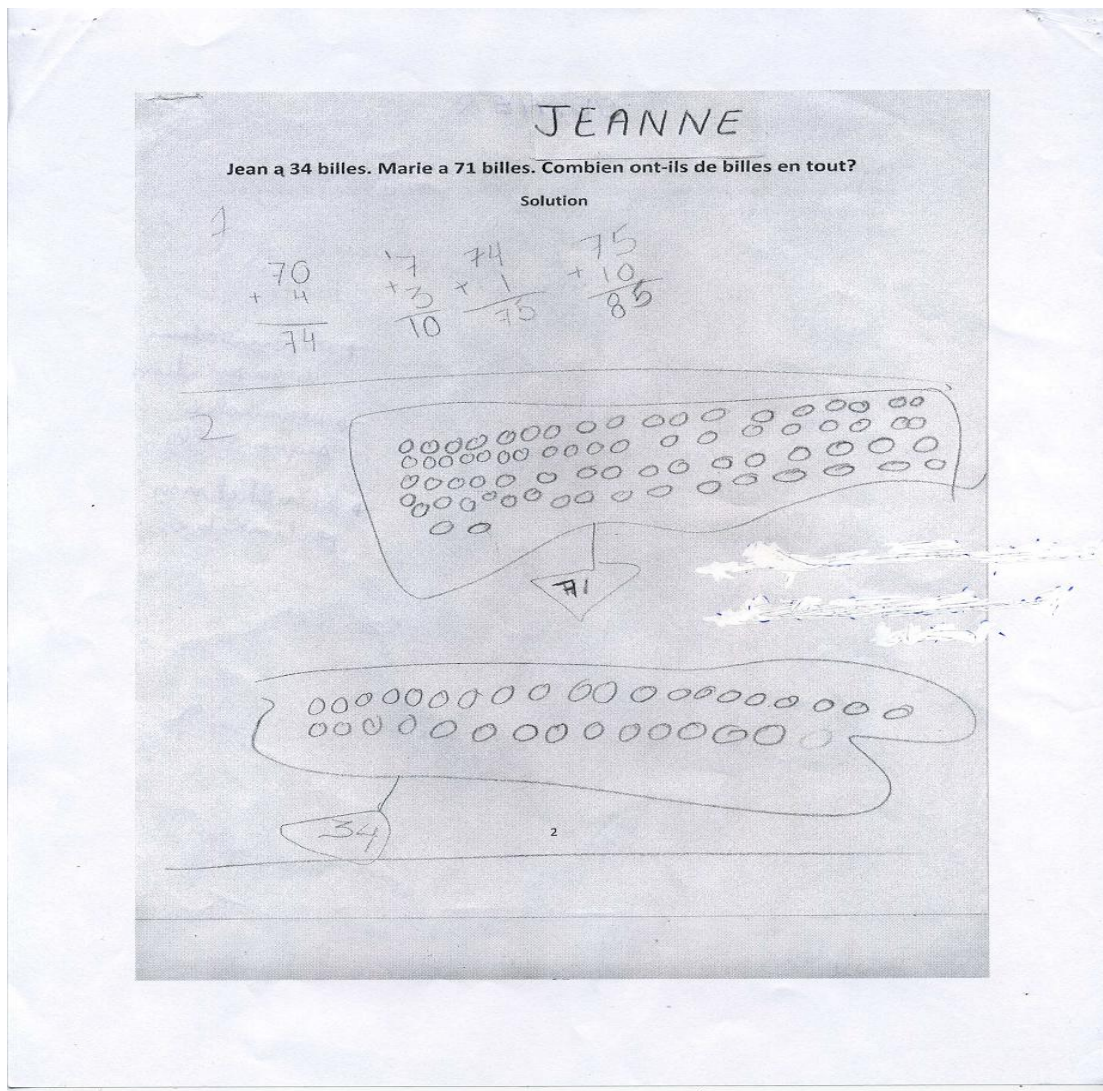
Observation de l'activité 1 : Jeanne

Jeanne a tenu son crayon quand le chercheur s'est approché pour lui remettre une copie des problèmes à résoudre. Elle a déposé le crayon. Puis, elle a pris possession de la copie des mains du chercheur. Elle a lu le problème pendant 40 secondes en laissant le crayon sur le pupitre. Puis, pendant 17 secondes elle a porté des regards distraits sur la copie tout en affichant une attitude de réflexion. Aussitôt après, elle a repris le crayon et a dessiné deux ensembles de boules correspondant aux deux nombres mentionnés dans l'énoncé du problème soit respectivement 71 et 34. Ces nombres indiquent tous deux des quantités de billes qui sont indiquées au-dessous de chaque ensemble (voir C.1). Elle n'a pas manipulé les jetons disponibles ni utilisé ses doigts pour compter ou recompter. Ensuite, elle a posé la suite d'opérations dans le sens vertical : $70 + 4 = 74$, $7 + 3 = 10$, $74 + 1 = 75$ et $75 + 10 = 85$. Elle a porté un regard sur la production réalisée puis elle a changé de feuille. Un problème est écrit sur chaque feuille; le fait de changer de feuille a

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

indiqué la fin provisoire ou définitive de la résolution du problème. J'ai observé qu'elle a fixé des yeux la copie en écrivant sa réponse. Simultanément, elle a porté des regards éparés sur les jetons et sur la copie. Jeanne a dessiné des boules sur la copie et au total, il y a autant de billes que de boules dans les deux ensembles. La suite d'opérations mentionnée plus haut ne décrit pas ce total. Je souligne toutefois une récurrence de dizaine dans cette suite soit 3 fois sur 4 : $\underline{70} + 4 = 74$, $7+3=\underline{10}$, $74+1=75$ et $75+\underline{10}=85$.

Figure C.1. Copie de Jeanne, activité 1



RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Observation de l'activité 2 : Jeanne

Jeanne a d'abord tourné la copie puis a entamé la résolution de ce problème. Au cours de la résolution, Jeanne n'a pas observé de pause. D'abord, elle a dessiné un ensemble de 37 boules représentant le total des billes mentionnées dans le problème. Elle a distingué les boules. Elle en a hachuré 15 et en a barré 22. Ensuite, elle a posé une soustraction dont les termes correspondaient respectivement au total des 37 boules, aux 15 boules hachurées et aux 22 boules barrées. Enfin, elle a reposé la soustraction et a écrit une réponse au problème : « Marie a 22 billes. » Puis, elle a tourné la feuille. Elle n'a pas manipulé le matériel ni utilisé ses doigts pour compter ou recompter. En dessinant les boules, elle a porté à l'occasion un regard distrait en direction des jetons.

Figure C.2. Copie de Jeanne, activité 2

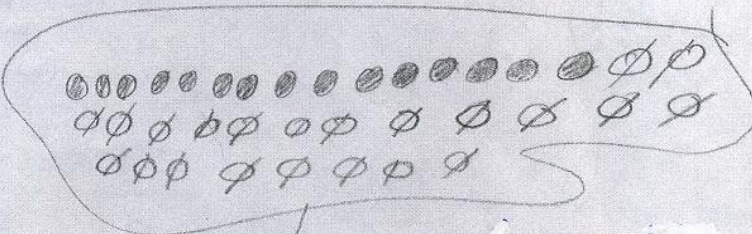
JEANNE

Jean a 37 billes. Il a 15 billes de plus que Marie. Combien Marie a-t-elle de billes?

Solution

$$\begin{array}{r} 37 \\ - 15 \\ \hline \end{array}$$

Marie a 22 billes



37

$$\begin{array}{r} - 15 \\ \hline 22 \end{array}$$

3

52

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Observation de l'activité 3 : Jeanne

Jeanne a tourné la deuxième feuille et a entamé la résolution de ce problème.

D'abord, elle a dessiné 15 boules et 28 boules dans deux sous-ensembles juxtaposés. Un sous-ensemble compte 15 boules (2 ont été effacées) et un autre compte 28 boules. Elle a englobé les deux sous-ensembles dans un même ensemble (voir Figure C.3). Ensuite, elle a dessiné trois images localisées dans trois sections juxtaposées. Chaque section porte un numéro. À chaque image est attachée la lettre b emboîtée. Ensuite, elle a encerclé 10 points puis 3 fois le nombre 10 et enfin le nombre 1. Elle a terminé la résolution en posant l'addition ($28+13=41$) et en écrivant une réponse : « elle a gagné 41 billes ».

Figure C.3. Copie de Jeanne, activité 3

JEANNE

Louise joue deux parties de billes. Elle joue une partie. À la seconde partie, elle perd 13 billes. Après les deux parties, elle a gagné 28 billes. Que s'est-il passé à la première partie?

Solution

elle a gagné 41 bille

$$\begin{array}{r} 28 \\ + 13 \\ \hline 41 \end{array}$$

The diagram shows a hand-drawn game board with several sections:

- A top section containing a circle with 6 dots, three circles each containing the number 10, and a circle containing the number 1.
- A bottom-left section containing three stick figures, each holding a card with a number (1, 2, and 4).
- A bottom-right section containing a large rectangle filled with many small circles (billes) and a smaller rectangle below it also filled with small circles.

53

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Entretien

- Chercheur :** Dans ces problèmes- là, j'ai vu que tu as fait des cercles.
Pourquoi as-tu fait ces cercles-là?
- Jeanne :** Je l'ai fait pour représenter les billes.
- Chercheur :** Explique-moi qu'est-ce que tu as fait.
- Jeanne :** Je les additionne ensemble.
- Chercheur :** Mais qu'est-ce que tu as lu qui t'a permis de les additionner ensemble?
- Jeanne :** Parce qu'ils disent combien il y a de billes en tout.
- Chercheur :** Explique-moi : pourquoi préfères-tu dessiner des billes que d'utiliser des jetons?
- Jeanne :** Eh non, c'est parce que des fois je fais des erreurs de calcul mais, quand je dessine je ne fais pas d'erreurs.
- Chercheur:** J'ai vu dans tes billes, il y a une partie que tu as hachurée et une partie sur laquelle tu as passé un trait. Explique-moi pourquoi.
- Jeanne :** Ce que j'ai dessiné dedans, ce sont les 15 billes de Marie et ce que j'ai barré c'était pour les compter comme il faut (...) ce qui reste.
- Chercheur :** Mais, est-ce que tu n'aurais pas pu prendre des jetons et les utiliser aussi?
- Jeanne :** Non !
- Chercheur :** Pourquoi?

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Jeanne : Oui (...) j'ai toujours trouvé ça long.

Chercheur : OK! Qu'est-ce que ça te fait de dessiner la chose?

Jeanne : C'est comme si c'est vrai pour moi.

Chercheur : Cela veut-il dire que, quand tu finis de résoudre le problème (...) tu finis comme ça et tu ne vérifies pas ton résultat?

Jeanne : Bien sûr, je le vérifie mais dans ma tête.

Chercheur: Qu'est-ce que tu te dis dans ta tête?

Jeanne : Je me dis comme pour prendre l'exemple d'ici comme 22 plus 15?

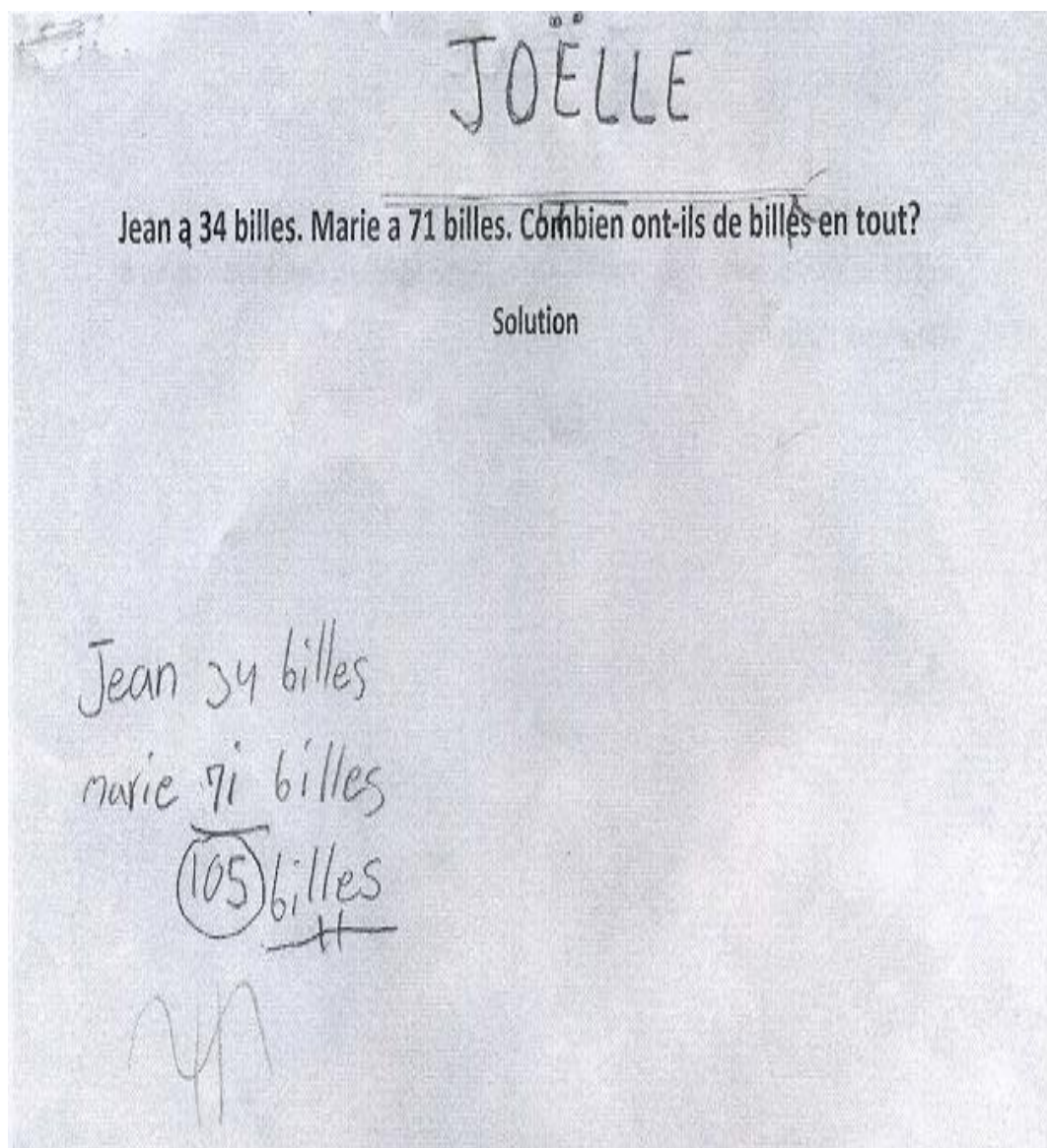
✧ **Joëlle**

Joëlle a résolu les trois problèmes en 6 minutes.

Observation de l'activité¹ de Joëlle

Aussitôt que Joëlle a pris possession de la copie des mains du chercheur, elle l'a lue pendant 1 minute 30 secondes. Puis, elle a observé un temps de réflexion (45 secondes) comme si elle pensait à quelque chose. Elle n'a pas regardé les jetons disponibles. Elle a commencé la résolution du problème en écrivant des symboles de nombres et des mots : « *Jean 34 billes Marie 71 billes* ». Elle a compté les cinq doigts en commençant par le pouce de la main gauche. Tenant le crayon de la main droite, elle a compté en pointant chaque doigt à l'aide du crayon. Elle a compté sur ses doigts après avoir posé l'opération.

FigureC.4. Copie de Joëlle, activité 1



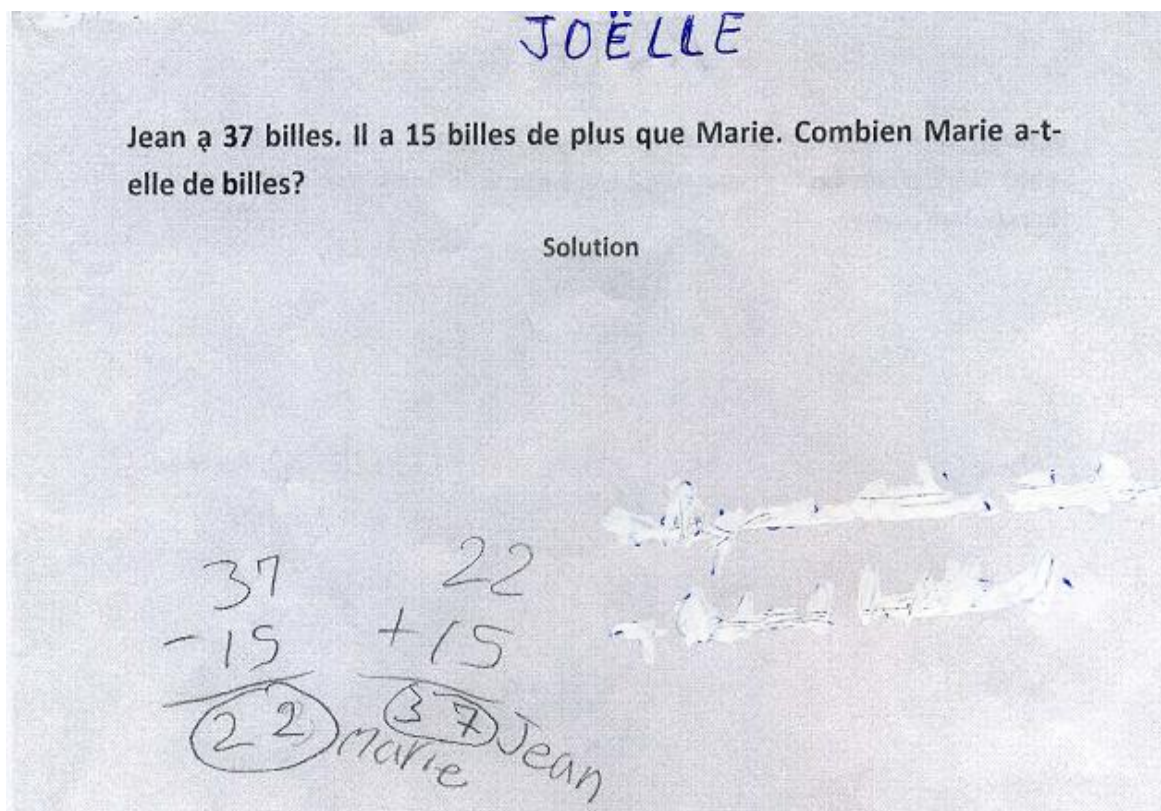
Observation de l'activité 2 de Joëlle

Au cours de la réalisation de la seconde activité, Joëlle a d'abord posé deux opérations symétriques (voir Figure C.5). Elle a commencé la résolution en utilisant des nombres en symbole (opération posée). Puis, elle a écrit respectivement « Marie » et « Jean » à côté des résultats 22 et 37 après avoir encerclé ces résultats. Comme pour la

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

résolution du problème précédent avec un gestuel évocateur, elle n'a pas eu recours aux jetons disponibles pour compter mais à ses doigts.

Figure C.5. Copie de Joëlle, activité 2



Observation de l'activité3 de Joëlle

Au cours de la réalisation de la troisième activité, Joëlle a d'abord posé une opération (symboles) (voir Figure C.6). Ensuite, elle a écrit « 1^{er} parti » à côté du résultat 41 après l'avoir encerclé.

Figure C.6. Copie de Joëlle, activité 3

JOËLLE

Louise joue deux parties de billes. Elle joue une partie. À la seconde partie, elle perd 13 billes. Après les deux parties, elle a gagné 28 billes. Que s'est-il passé à la première partie?

Solution

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 28 \\
 + 13 \\
 \hline
 41
 \end{array}$$

(41) 1^{er} Parti

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Entretien

Chercheur : Joëlle (...) nous avons visionné l'enregistrement ensemble et j'ai constaté aussitôt que tu as commencé à résoudre les problèmes. Tu t'es arrêtée un moment et aussitôt après tu as commencé à écrire (...) est-ce que tu peux me révéler ce à quoi tu pensais?

Joëlle : Je pensais à la manière de résoudre le problème (...) Je pensais au nombre (...) c'est ça (...) pour voir si c'est un plus ou un moins que je dois faire.

Chercheur : Mais, j'ai vu que tu as compté avec tes doigts.

Joëlle : Oui! (...) Je compte dans ma tête et puis (...) je vérifie avec mes doigts

Chercheur : Mm... ok! Bon ! J'ai vu que tu comptais avec tes doigts. Pourquoi comptais-tu avec tes doigts?

Joëlle : C'est pour voir si ma démarche est bonne.

Chercheur : Mais pourquoi utilises-tu tes doigts et non des jetons?

Joëlle : C'est parce que je ne compte pas avec les jetons (...)

Chercheur : Est-ce que dans la classe on n'utilise pas de jetons?

Joëlle : Oui! Mais moi (...) je compte avec ma tête et mes doigts et non avec des jetons.

Chercheur : Pourquoi?

Joëlle : Parce que c'est comme ça que je compte (fait des signes de comptage avec ses doigts).

Chercheur : Est-ce que les jetons t'ont aidée à trouver le résultat (...)?

Joëlle : Non (...) les jetons ne m'ont pas aidée. (...) J'ai trouvé les problèmes

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

faciles.

Joëlle : Oui si c'était des gros chiffres de grosses mathématiques ce serait plus difficile.

Chercheur : Qu'est-ce que tu appelles de grosses mathématiques.

Joëlle : Non (...) les jetons ne m'ont pas aidée. (...) J'ai trouvé les problèmes faciles.

Joëlle : Oui si c'était des gros chiffres de grosses mathématiques ce serait plus difficile.

Chercheur : Qu'est-ce que tu appelles de grosses mathématiques

Joëlle : Des chiffres comme 248(...), 335(...), 786 comme ça.

✧ **Ruth**

Ruth a résolu les trois problèmes sans pause en 9 minutes.

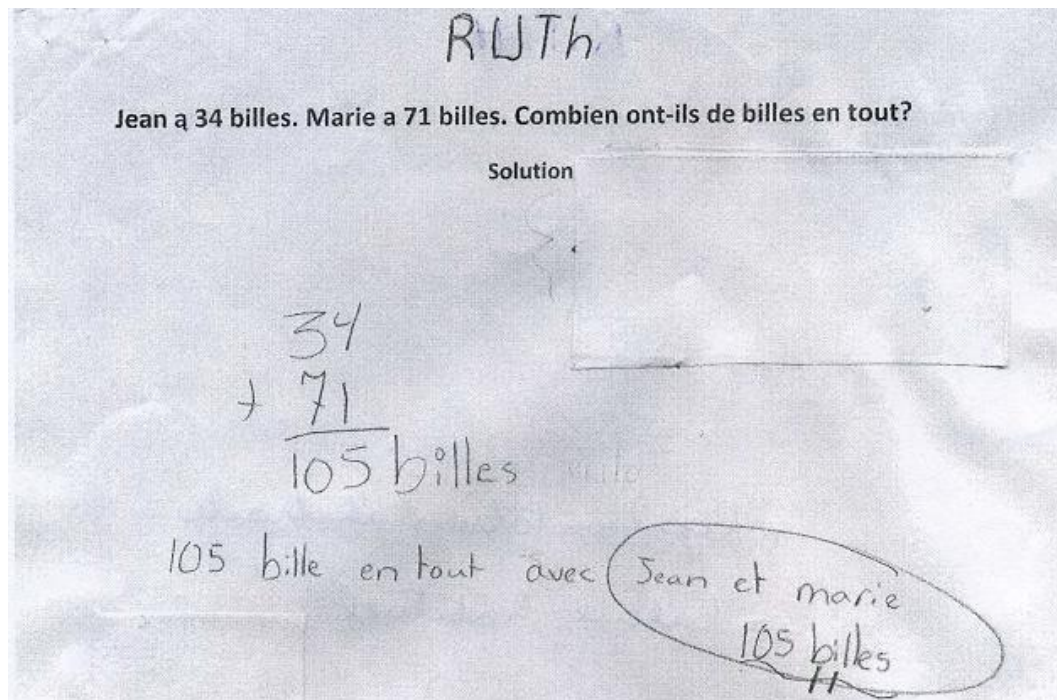
Observation de l'activité¹ de Ruth

Aussitôt que Ruth a pris la copie des mains du chercheur, elle l'a lue pendant 60 secondes puis a observé un temps de silence immobile (60 secondes) comme si elle rêvait. Elle a ensuite tourné les yeux en direction des jetons et a commencé à écrire. Elle a résolu les trois problèmes sans arrêt. Au cours de la résolution du premier problème, Ruth a d'abord relu silencieusement l'énoncé de ce problème. Puis, elle a posé son opération à l'aide des nombres en symbole (voir Figure C.7). Elle a eu recours au comptage sur les doigts pour vérifier le résultat du comptage préalablement effectué mentalement. Elle a compté sur les cinq doigts de sa main droite en les écartant. Elle a tenu en même temps un crayon dans la main gauche. Elle a ensuite déposé le crayon sur

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

son pupitre et a continué le comptage en touchant 5 doigts à l'aide du pouce de la main droite. Puis, elle a poursuivi en écartant ses doigts au fur et à mesure à partir du pouce. Elle a recommencé le processus avec les mêmes doigts de la même main en décrivant un angle aigu formé par la paume de la main et la surface du pupitre. Elle a abaissé les 5 doigts à partir du pouce au fur et à mesure pour toucher cette surface. Enfin, elle a gardé la même position avec les doigts de la main droite et a procédé au comptage comme pour les problèmes précédents. De façon générale, Ruth a utilisé 5 « mains » donc 25 doigts pour compter ou mieux recompter les résultats de son opération. Ruth a utilisé des symboles (opération posée) pour résoudre le problème et elle a compté sur les doigts pour vérifier la réponse produite. Elle a effacé des écrits sur sa copie après cette suite de comptage sur les doigts puis elle a réécrit l'opération (voir Figure C.7) et les propositions : « Jean et Marie 105 billes en tout » et « 105 billes en tout ».

Figure C.7. Copie de Ruth, activité 1

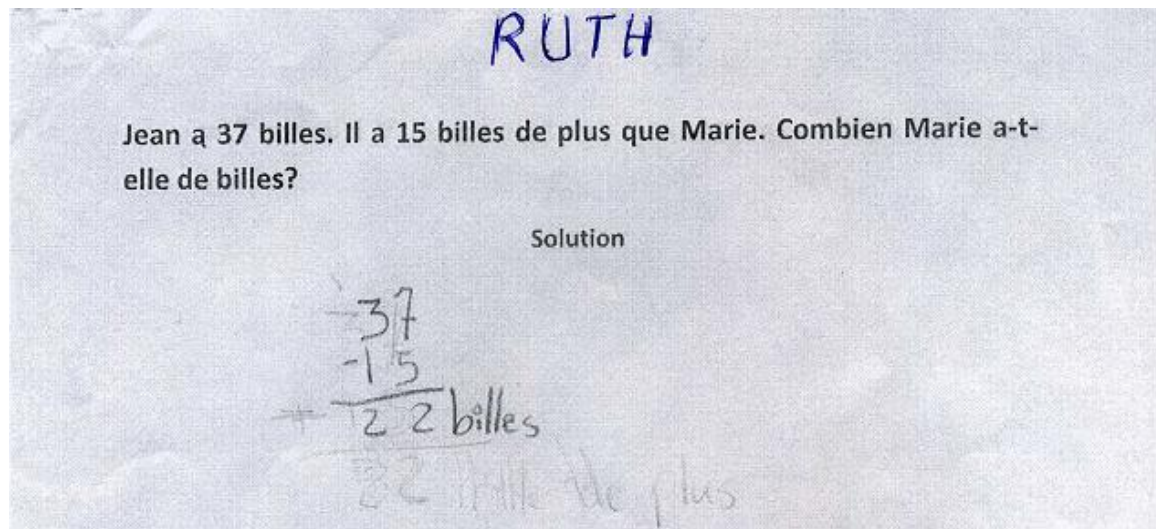


RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Observation de l'activité2 de Ruth

Au cours de la résolution du second problème, Ruth a posé son opération (voir Figure C.8) puis, elle a utilisé ses doigts pour compter et pour vérifier le résultat du comptage préalablement effectué mentalement. Elle a écarté les cinq doigts de sa main gauche à partir du pouce et les a touchés successivement à l'aide du pouce de la main droite. Puis, elle a écarté les cinq doigts de la main droite et les a touchés successivement à l'aide du pouce de la main gauche. Ensuite, elle a posé la main gauche sur la surface du pupitre en les abaissant successivement à partir du pouce. Sa voisine Esther a pris la boîte de jetons et l'a replacé sur le pupitre de Ruth près de son visage. Celle-ci a ignoré cette boîte et a poursuivi ses calculs en écrivant des opérations. Esther a remis aussitôt la boîte à sa place. Après le comptage sur les doigts, Ruth a hoché la tête, a effacé des symboles et les a réécrits aussitôt après avoir posé les opérations (voir Figure C.8).

Figure C.8. Copie de Ruth, activité 2



Observation de l'activité 3 de Ruth

Comme il a été mentionné dans la section précédente, Ruth a résolu les trois problèmes sans pause. À l'issue de la résolution du troisième problème, elle a posé plusieurs opérations sur la copie. Elle a divisé l'espace de réponse en deux parties comme c'est indiqué dans l'énoncé du problème. Dans chaque partie, elle a posé une opération. Puis, elle a utilisé les cinq doigts de la main gauche à partir du pouce en écartant successivement les doigts. Puis, elle a compté les cinq doigts de la main droite à partir du pouce en touchant chaque doigt à l'aide du pouce de la main gauche. Elle a compté les cinq doigts de la main gauche en faisant un angle aigu entre l'extrémité de la paume de la main et la surface du pupitre. Elle a abaissé successivement les doigts à partir de cette surface. En général, elle a utilisé trois « mains » donc 15 doigts pour compter. Préalablement, ces calculs ont été effectués mentalement. Elle n'a pas utilisé les jetons disponibles pour recompter et vérifier la réponse mais ses doigts.

Figure C.9. Copie de Ruth, activité 3

RUTH

Louise joue deux parties de billes. Elle joue une partie. À la seconde partie, elle perd 13 billes. Après les deux parties, elle a gagné 28 billes. Que s'est-il passé à la première partie?

Solution

2^e partie
perd 13 billes

$$\begin{array}{r} 56 \\ - 13 \\ \hline 43 \end{array}$$

1^{ère} partie
+ 28 billes

$$\begin{array}{r} 43 \\ + 28 \\ \hline 71 \end{array}$$

56 billes

Entretien

Chercheur : Nous avons visionné l'enregistrement ensemble (...). J'ai constaté que tu t'es arrêtée un temps, c'est comme si tu réfléchissais (...); à quoi pensais-tu? (...)

Ruth : Moi, je pensais aux nombres.

Chercheur : Pourquoi pensais-tu aux nombres?

Ruth : Je pensais aux nombres parce que si on n'utilise pas les deux chiffres ou si on fait un autre chiffre, Madame LeTouneau (pseudonyme de l'enseignante) dit toujours qu'on prend les chiffres qu'on a.

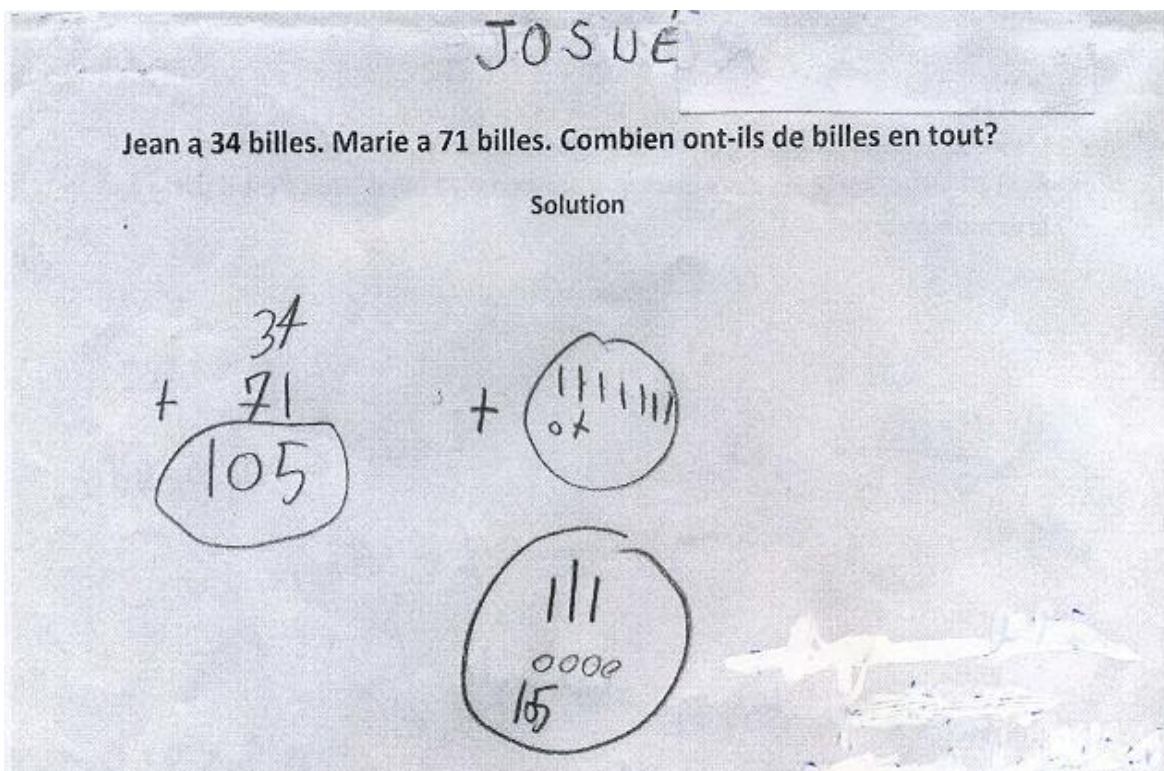
Chercheur : Tu avais du matériel à ta disposition. (...) Pourquoi ne l'as-tu pas utilisé?

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

- Ruth :** Non!(...) Moi, je compte vraiment avec des chiffres dans ma tête.
- Chercheur :** Est-ce que les jetons t'ont aidée à penser aux billes dans ta tête?(...)
- Ruth :** Non!(...) Moi, j'étais correcte à faire des mathématiques(...) juste comme ça.
- Chercheur :** Explique-moi comment tu comptes avec des chiffres dans ta tête.
- Ruth :** Mais, parfois les plus difficiles (...) il faut que j'essaie de me concentrer (...) il faut que je visionne (...) je visionne les chiffres qui sont sur la feuille et ça m'indique ce que je dois faire un plus (une addition) ou un moins (une soustraction) et là quand j'ai la réponse à ma solution je le marque sur ma feuille (...) si, admettons qu'il y ait trop de résolutions dessus, j'utilise du matériel qui montre sur la feuille les instructions à suivre par exemple qu'ils relèvent qu'on a 15 cornets, on a 230 autres exemples, etc.

✧ Josué

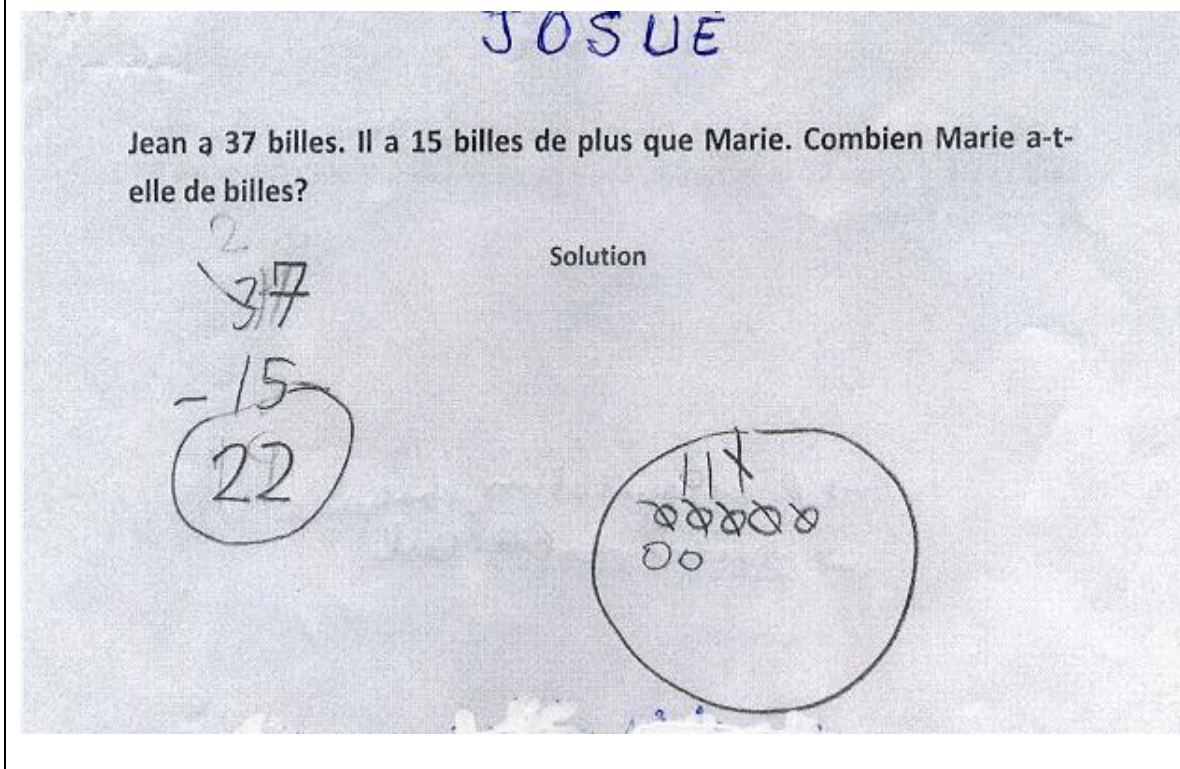
Figure C.10. Copie de Josué, activité 1



Observation de l'activité2 de Josué

Au cours de la résolution du deuxième problème, Josué a procédé de façon semblable au premier. Il a lu le problème, a effectué une opération de soustraction et a utilisé ses doigts pour recompter.

Figure C.11. Copie de Josué, activité 2



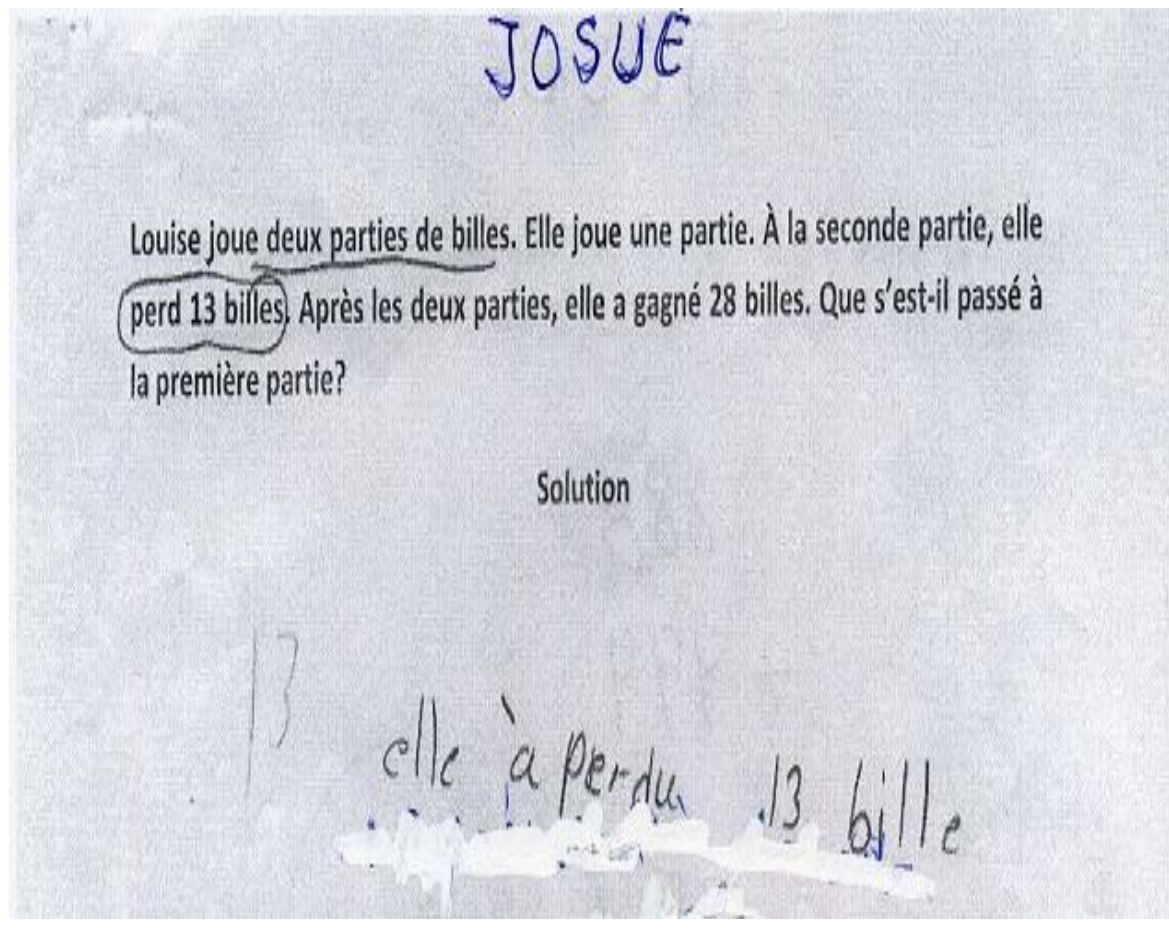
Observation de l'activité 3 de Josué

Contrairement à la résolution des deux premiers problèmes, à l'issue de la résolution du deuxième problème, de façon silencieuse, Josué a d'abord lu attentivement l'énoncé en pointant les mots du problème. Il a souligné les mots « *deux parties de billes* » au début de l'énoncé du problème et a encadré « *perd 13 billes* ». Il a essayé le comptage mental mais il a oublié un chiffre et a procédé au recomptage. Puis, il a essayé de compter à l'aide de jetons et répété « 64 ». Il s'est ravisé en disant « 16 » (il a semblé confondre 8×8 et 2×8). Il s'est finalement servi de ses doigts pour compter. Il a commencé à compter trois doigts à partir de l'index en les écartant au fur et à mesure. Puis, il a recommencé à compter trois doigts à partir du pouce en posant le même geste.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Ensuite, d'un œil distrait et avec un gestuel inorganisé et non coordonné, il a manipulé des jetons dans la boîte. Il a posé « 13 » en symboles et a écrit la proposition « elle à perdu 13 bille » (voir Figure C.12). Il a appelé le chercheur pour lui dire qu'il n'a pas compris le texte du problème. Celui-ci lui a fait la lecture de l'énoncé. Aussitôt après, il a remis la copie.

Figure C.12. Copie de Josué, activité 3



Entretien

Chercheur : Tu avais des jetons à ta disposition.(...)Pourquoi tu ne les a pas utilisés?(...)

Josué : Oui!(...) Je faisais juste du calcul mental (...) mais, je prends les informations qu'on me donne.

Chercheur : Qu'est-ce qui te permet de prendre ces informations?

Josué : Les chiffres et les nombres(...) puis je fais l'addition avec(...) j'ai 34 plus 71, j'ai fait 4 plus 1, 5(...) J'ai 3 plus 7 ça fait 1(...) C'est comme si je prenais le chiffre qui était là et je faisais un dessin ici c'est 34 non c'est 71 et ici c'est 34 c'est comme si je fais un dessin et après je vais juste faire cela.

Chercheur : Quand tu le fais, est-ce que cela te permet d'être concentré pour trouver le résultat ou ça te donne une idée, tu joues et tu es plus détendu (...).

Josué : Je suis plus concentré quand je fais des additions comme ça (...). Les dessins aussi mais pas les grandes additions là là (...) ça me mélange.

Chercheur : Mais si les grandes additions te mélangent c'est quoi les grandes additions pour toi? (...) Donne-moi un exemple de grandes additions.

Josué : Comme les 180 (...) 204(...) 704(...) 208 plus plein d'autres chiffres.

Chercheur : Tu avais du matériel à ta disposition (...) Pourquoi ne l'as-tu pas utilisé? (...)

Josué : Non! (...) moi, je compte vraiment avec des chiffres dans ma tête.

Chercheur : Est-ce que, par exemple, au lieu de faire cela dans ta tête tu ne pouvais

pas prendre des jetons?

Josué : Ce serait plus dur parce qu'il faut que tu fasses tous les chiffres ensemble; il faudrait que tu fasses 70 jetons, ce serait long pour que tu fasses 70 jetons (...) ce serait dur car il faudrait que tu fasses 70 jetons, il faut faire juste 70 jetons.

Chercheur : Explique-moi comment tu fais pour résoudre le problème.

Josué : Moi, quand je regarde les chiffres, je regarde la question (...) je me dépêche à faire des choses puis je fais des additions fouche fouche je les additionne et je bouge et je finis comme ça. Je fais des opérations avec des chiffres comme ça et pour vérifier je fais des dessins (...) je fais exactement ce que j'ai fait avec les chiffres (...) je fais ça pour les deux premiers problèmes (...) il y a juste pour le dernier parce que c'est plus dur le dernier.

Chercheur : Mais si tu as des billes disponibles ou si tu as d'autre matériel disponible est-ce que ça ne va pas t'aider à mieux résoudre le problème?

Josué : Peut-être que ça pourrait m'aider mais (...) juste un petit peu.

Chercheur : Est-ce que, quand tu comptes, tu penses à quelque chose?

Josué : Mais, oui de l'argent.

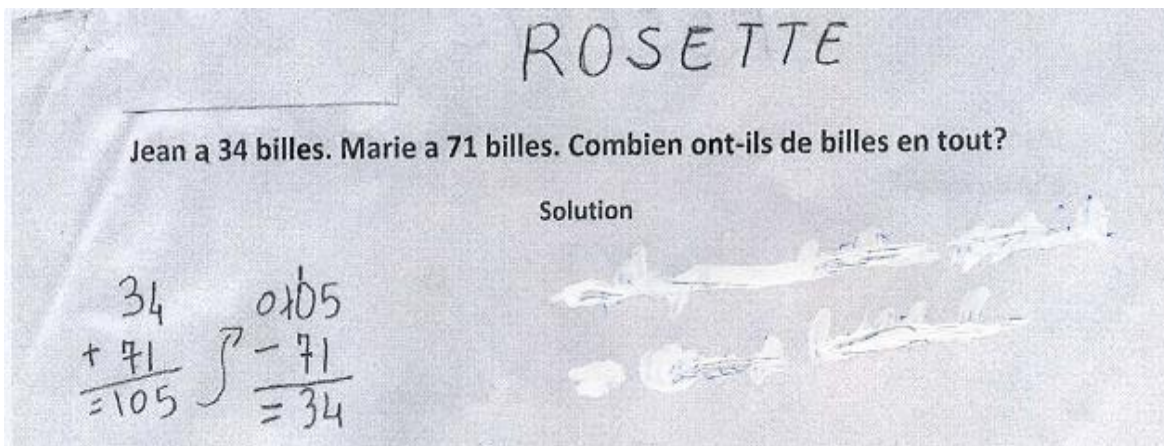
RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

✧ Rosette

Observation de l'activité 1 de Rosette

Aussitôt que Rosette a pris la copie des mains du chercheur, elle l'a lue durant 1 minute 30 secondes puis elle a commencé à écrire. Elle s'est appliquée à résoudre les trois problèmes sans pause. Durant le processus de résolution du premier problème, elle a d'abord posé deux opérations symétriques (voir Figure C.13) puis elle s'est référée à ses doigts pour recompter et vérifier les résultats des opérations posées. Elle a compté trois doigts à partir du pouce en observant un angle aigu entre la paume de la main et la surface du pupitre. Elle a posé les doigts au fur et à mesure sur cette surface. Un hochement de tête a semblé terminer cette vérification. Elle n'a pas manipulé les jetons disponibles. Elle n'a même pas jeté un regard furtif en leur direction.

Figure C.13. Copie de Rosette, activité 1



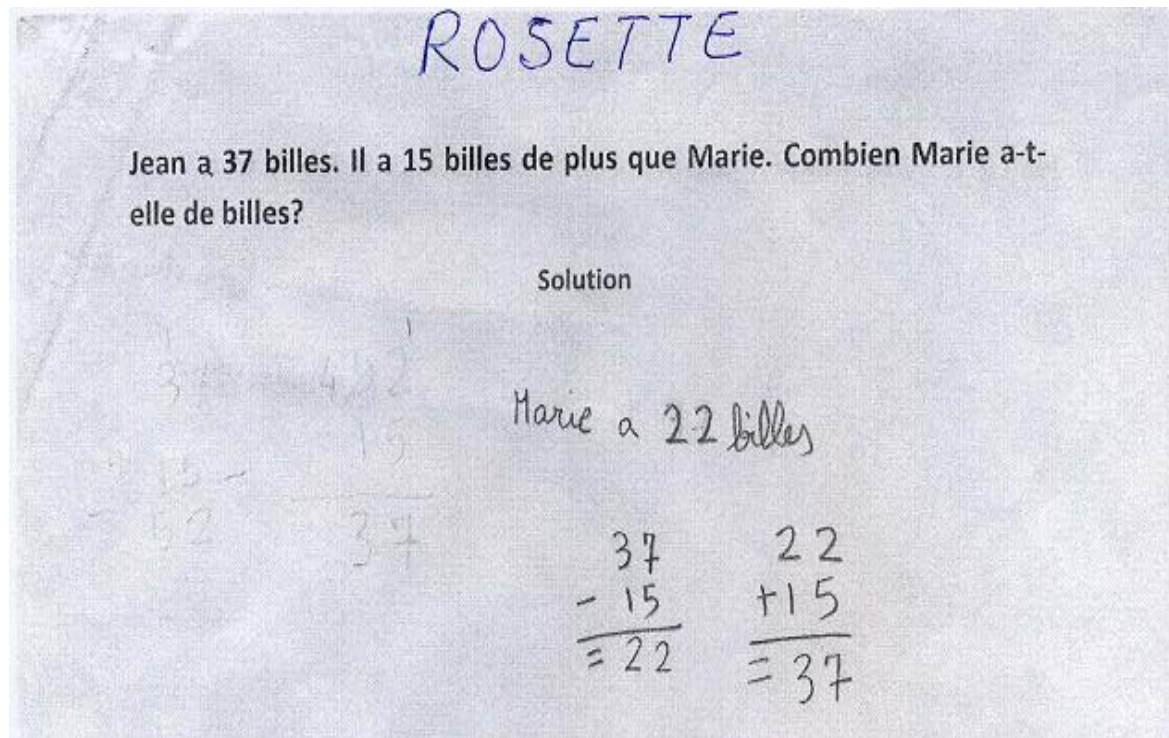
Observation de l'activité2 de Rosette

Le comportement de Rosette au cours de la résolution de ce problème a été en tout point semblable au premier problème. Même si le processus de vérification du comptage subséquent s'est effectué à l'aide des doigts (physique), ce sont les opérations

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

posées qui fixent le rapport au matériel (voir Figure C.14) et dans ces opérations, ce sont les symboles qui sont utilisés et une proposition mathématique qui a finalement été soumise : « Marie a 22 billes ».

Figure C.14. Copie de Rosette, activité 2



Observation de l'activité 3 de Rosette

Comme pour les problèmes précédents, Rosette a utilisé les nombres en symbole pour, selon moi, saisir l'objet de savoir dans le problème et produire une réponse. Elle a semblé établir un rapport symbolique au matériel parce que la production de la réponse passe d'abord par des symboles (les nombres des opérations posées) (voir Figure C.15). Par contre, à la différence des deux premiers problèmes, Rosette a produit une réponse

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

incorrecte au troisième problème : « en une partie Louise a perdu – La deuxième partie, elle a gagné 28 billes en tout ».

Figure C.15. Copie de Rosette, activité 3

ROSETTE

Louise joue deux parties de billes. Elle joue une partie. À la seconde partie, elle perd 13 billes. Après les deux parties, elle a gagné 28 billes. Que s'est-il passé à la première partie?

Solution

$$\begin{array}{r} 28 \\ - 13 \\ \hline = 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ + 13 \\ \hline = 28 \end{array}$$

en une partie
Louise a perdu.
La deuxième
partie
elle a gagné
28 billes en tout

Entretien

Chercheur : OK mais (...) quand on te donne des problèmes à résoudre qu'est-ce que tu fais en premier lieu?

Rosette : J'utilise d'abord (...) je relis les consignes même si le prof les a déjà lues puis après ça, j'utilise ce que j'ai comme dans les consignes puis après ça, j'essaie de trouver la réponse puis de résoudre le problème, c'est ça, avec ce que j'ai. (...)

Chercheur : Il y avait des jetons disponibles (...); tu pouvais les utiliser mais tu ne les as pas utilisés. (...) Pourquoi?

Rosette : Non! (...) Je trouve que c'est trop; (...) sans jetons, je suis capable.

Chercheur : Explique-moi!

Rosette : Pour moi, même si c'était des balles, des billes mais pour moi l'important est de savoir c'est quoi le nombre. C'est juste ça; (...) ça se peut que ce soit des balles, des quilles (...); ça se peut que ce soit ça (...). Pour moi, le matériel n'est pas vraiment important (...) parce que ça se peut que ce ne soit pas juste des billes dans d'autres problèmes (...); il se peut que ce soit n'importe quel matériel (...) c'est ça (...) mais il ne faut pas que ce soit plusieurs matériels dans le même problème (...) ça me mélange.

Chercheur : Est-ce qu'on n'a pas eu l'habitude d'utiliser des jetons dans ta classe comme ça?

Rosette : Oui! On a l'habitude, mais moi non! (...) Je n'utilise vraiment pas le

matériel.

Chercheur : Mais, parfois je vois que tu comptes avec tes doigts(...) Pourquoi?

Rosette : Des fois. (...) Oui, comme 5 plus 3; ça se peut que des fois je fasse des erreurs de calcul. Ça fait que mes doigts m'aident beaucoup comme s'il y avait 18 plus 19 plus 9 bon c'est ça je dois d'abord vérifier(...) même si la réponse est dans ma tête, je dois tout le temps vérifier puis je dis elle est bonne (...) des fois aussi même si le prof disait bon je vais vérifier quand même (...) même si après toute une évaluation après une semaine le prof corrige déjà j'ai tout réussi je dois tout le temps revérifier puis je dois être sûre sans mettre une note et je le corrige tout de suite après.

Chercheur : Est-ce que dans les classes antérieures tu n'as pas utilisé de matériel?

Rosette : Jamais de ma vie au primaire quand j'étais en première année (...) non.

Chercheur : Comment fais-tu?

Rosette : Non (...) toujours je compte avec ma tête (...) et mes doigts.

Chercheur : Ouais (...) comment fais-tu avec tes doigts?

Rosette : Admettons $9 + 9$ et je retiens le 9 dans ma tête (...) je commence tout le temps je prends le plus grand nombre donc c'est le 9 (...) le 9 est dans ma tête j'affiche 8 fait que 8 je veux dire 9 10 11 12 13 14 15 16 17 donc c'est ça que je fais.

Chercheur : Ah! OK OK... Donc tu comptes au fur et à mesure?

Rosette : Au fur et à mesure je compte (...) j'enlève les doigts.

Chercheur : Comment fais-tu?

Rosette : J'enlève les doigts quand je baisse les doigts c'est comme ça (...) c'est-à-dire je l'ai déjà compté.

Chercheur : Où as-tu appris à compter de cette façon?

Rosette : C'est parce que je viens d'un autre pays (...) le pays d'où je viens le niveau en première année est plus élevé qu'ici (...) J'ai fait toute ma maternelle (...) qui a duré trois ans (...) la première année, je l'ai toute faite. J'ai continué la 2^{ième} année ici (...) en première année on faisait le programme de 3^{ième} année.

Chercheur : OK, est-ce que les trois problèmes sont faciles au même degré ou bien y en a un qui était plus difficile que d'autres pour toi ? Non pas vraiment?

Rosette : J'ai utilisé la même stratégie pour les trois problèmes (...) puis ça a bien allé (...) et aussi on peut vérifier comme moi j'ai deux façons comme j'ai fait le problème avec une stratégie et je vérifie avec une autre (...) il y a plusieurs stratégies (...) comme tu peux résoudre ton problème avec des nombres le vérifier avec des dessins ou avec du matériel mais moi la façon la plus facile c'est de vérifier comme ça (...) j'utilise le moins et puis le plus (...).

Chercheur : Explique-moi comment tu fais ça (...).

Rosette : C'est vraiment le mot stratégie qui me passe par la tête (...) mais c'est à partir du problème que je fais toutes mes démarches (...) ma première

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

chose je lis bien la 2^{ème} chose je prends les nombres des fois aussi je prends le surligneur, je surligne ce que j'ai besoin pour faire le problème, ce qui est nécessaire pour faire la démarche (...) moi, en lisant, j'ai des idées qui viennent par la tête directement je les écris puis je vérifie encore c'est ça là, je vérifie si mes idées sont bonnes.

✧ **Esther**

Esther a résolu les trois problèmes en dix minutes.

Observation de l'activité 1 d'Esther

Aussitôt qu'Esther a pris possession de la copie des mains du chercheur, elle l'a lue silencieusement pendant deux à trois minutes puis elle a commencé la résolution. Elle a observé une pause en adoptant une attitude réflexive comme avec des yeux hagards. Au cours de la résolution du premier problème, elle a d'abord dessiné des images de billes et a écrit des mots et des nombres sur sa copie : « Jean 34 billes et Marie 71 billes » (voir Figure C.16). Ensuite, elle a posé une opération d'addition puis, elle a écrit le résultat : « 105 billes en tout ». Elle a utilisé des dessins de billes pour, selon moi, saisir le sens du problème. Elle n'a pas utilisé le matériel (les jetons) disponible ni ses doigts pour recompter. Elle a eu recours à ses dessins.

Figure C.16. Copie d'Esther, activité 1

ESTHER

Jean a 34 billes. Marie a 71 billes. Combien ont-ils de billes en tout?

Solution

34 105 billes en tout

$$\begin{array}{r} 34 \\ + 71 \\ \hline 105 \end{array}$$

Jean = 34

Marie = 71

105 billes

○ ○ ○ ○ ○

{ Jean et Marie }

Observation de l'activité 2 d'Esther

Au cours de la résolution du deuxième problème, elle a d'abord partagé sa copie de telle sorte que Marie et Jean occupent chacun une partie (voir Figure C.17). Ensuite, elle a écrit des symboles d'opération. Dans l'une des parties, elle a posé ses stratégies de comptage. Les bâtonnets représentent les unités et les boules les dizaines de billes. Il en reste deux boules et deux bâtonnets non barrés donc 22. Enfin, elle a posé une opération

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

sur sa copie. Les traces produites à l'issue de la résolution de ce problème présentent une division de l'ensemble des billes en groupement. Toutefois, cette division n'est pas simulée à l'aide du matériel (jetons) disponible mais représentée en dessins. À la différence du premier problème, pour le deuxième problème, elle a dessiné des espaces délimitant des parties (voir Figure C.17).

À l'issue de la résolution du deuxième problème, tout en écrivant : « Jean 37 billes et Marie 22 billes », Esther a balayé du regard à la fois sa réponse au premier problème et le matériel disponible (jetons) : « Pendant que je résous le problème je dois faire des dessins pour m'aider à résoudre le problème et faire des calculs ». Richard (2004) soutient à ce sujet que le dessin est l'ensemble des éléments pertinents du problème pour celui qui dessine pour résoudre un problème.

Figure C.17. Copie d'Esther, activité 2

ESTHER

Jean a 37 billes. Il a 15 billes de plus que Marie. Combien Marie a-t-elle de billes?

Solution

Jean { Marie

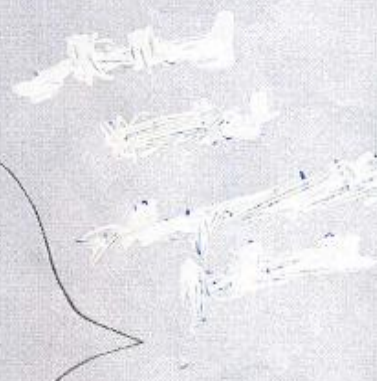
37 billes { 22 billes

$$\begin{array}{r} + \\ - \\ \times \\ \% \end{array}$$

Calcul + - x %

37 □□□□□□□□□□

$$\begin{array}{r} - \\ 15 \\ \hline 22 \end{array}$$



Observation de l'activité 3 d'Esther

Au cours de la résolution du troisième problème, elle a d'abord partagé sa copie en trois parties (voir Figure C.18). Ensuite, elle a écrit dans les deuxième et troisième parties respectivement « -13 billes » et « +28 billes ». Elle est restée figée pendant 10 à 15 secondes tout en adoptant une attitude, en apparence, réflexive. Ensuite, elle a écrit dans la première partie une proposition (voir Figure C.18). Il est à remarquer que le problème

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

dans sa formulation n'a pas explicitement demandé une réponse numérique telle que : «
Que s'est-il passé durant la première partie et est-ce qu'il y a gain ou perte et combien? ».

Figure C.18. Copie d'Esther, activité 3

ESTHER

Louise joue deux parties de billes. Elle joue une partie. À la seconde partie, elle perd 13 billes. Après les deux parties, elle a gagné 28 billes. Que s'est-il passé à la première partie?

1^{er}
+ des
billes
à gagné
des
billes
parce-que
elle ne
pourrais pas
perdre des
bille
si elle
en
n'a
pas

Solution
2^{er}
- 13 billes

3^{ème}
+ 28 billes



RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Entretien

Chercheur : Aussitôt que tu prends les problèmes, qu'est-ce que tu fais en premier lieu? (...) Avant tout? (...)

Esther : Je lis le problème avant. Après, je me dis comment je vais faire ça après je fais les calculs (...) Je calcule dans ma tête.

Chercheur : Même si c'est dans ta tête que tu calcules (...) je vois que tu fais des dessins (...) Pourquoi?

Esther : Pendant que je résous le problème, je dois faire des dessins pour m'aider à résoudre le problème et faire des calculs. Il a gagné des billes parce qu'elle ne pourra pas perdre des billes si elle n'en a pas ou si elle n'a pas gagné.

Chercheur : OK. Qu'est-ce que tu aimes dans les problèmes?

Esther : C'est surtout faire des calculs genre...

Chercheur : Comment comptes-tu? (...)

Esther : Je compte avec des objets (...) ouais de l'argent (...) mon argent parfois je compte avec des jetons.

Chercheur : Pourquoi tu comptes ton argent avec des jetons.

Esther : Euh...ben si je fais des fautes ça me permet de corriger.

Chercheur : C'est plus facile par exemple si moi je te donne ces problèmes-là et je te donne que le papier est-ce que ça va être plus facile ou plus difficile ou si je te donne le papier avec les jetons?

Esther : Ça va être plus facile!

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES VERBAUX

Chercheur : Mais (...) il y avait du matériel disponible quand tu résolvais les problèmes et j'ai vu que tu ne les avais pas utilisés (...) Pourquoi tu n'as pas utilisé les jetons?

Esther : Je dirais j'ai essayé de faire moi-même.