Équations aux Dérivées Partielles Stochastiques avec bruit de Lévy

Cheikh Bécaye Ndongo

Thèse soumise à la Faculté des études supérieures et postdoctorales en vue de l'obtention du
Doctorat ès philosophie en Mathématiques[1]

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des sciences
Université d'Ottawa

1. le programme de doctorat est un programme conjoint avec l'Université Carleton, administré par l'Institut en mathématiques et en statistique d'Ottawa-Carleton

Abstract

In this thesis, we develop a stochastic calculus for the space-time Lévy white noise introduced in [2] as an alternative for the Gaussian white noise perturbing an stochastic partial differential equation (SPDE). We give a new proof for the Itô formula for some integral processes related to this Lévy white noise. Then, we consider a general non-linear SPDE on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ driven by this Lévy white noise and we show that this equation has a unique random-field solution. Using Rosenthal's inequality, we develop a maximal inequality for the moments of order $p \geq 2$ of the stochastic integral with respect to this noise. Based on this inequality, we show that the stochastic wave equation equation has a unique solution, which is weakly intermittent in the sense of [14, 20]. Finally, we develop a Malliavin calculus with respect to the compensated Poisson random measure associated to the Lévy white noise. Under certain conditions, we show that the solution is Malliavin differentiable and its Malliavin derivative satisfies an integral equation.

Dédicace

À la mémoire de ma très chère mère Rokhaya Diop et Astou Diop. Deux personnes qui seront toujours dans mon esprit et dans mon cœur. Que Dieu, le Très Miséricordieux, les accueille dans son éternel paradis.

Remerciements

Je remercie toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de cette thèse. De plus, je tiens à exprimer toute ma gratitude envers ma directrice de recherche, Raluca Balan, professeur au Département de Mathématiques et Statistiques de l'Université d'Ottawa, pour l'encadrement précieux et le temps qu'elle a eu l'amabilité de me consacrer. En plus d'avoir accepté de m'encadrer, elle a su m'encourager et me soutenir tout au long de ce travail. La confiance qu'elle m'a témoignée, l'aide financière qu'elle m'a octroyée, la grande disponibilité et ses judicieux conseils ont assuré la réussite de cette thèse. J'ai grandement apprécié de travailler avec elle.

Je remercie également ma famille, mes amis pour leur encouragement et leur soutien tout au long de ces années d'étude.

Enfin, je remercie tout particulièrement Thiémokho Diop pour la relecture attentive de cette thèse.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Durant ces dernières années, l'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques est devenue une zone d'activité de recherche en mathématiques fondamentales et appliquées, en mécanique des fluides et en physique théorique. D'une manière générale, dans la littérature, on distingue l'approche au sens des champs aléatoires et celle au sens fonctionnelle.

En 1986, Walsh avait introduit la théorie de l'intégrale stochastique par rapport à une mesure martingale. Dans [32], il avait mis en place les notions permettant de définir l'intégrale stochastique et avait donné ces propriétés comme dans le cas de l'intégrale d'Itô. Ainsi, dans le cas de l'équation des ondes classiques avec un bruit blanc Gaussien, il avait montré l'existence et l'unicité de la solution. Plus tard, Dalang et Frangos dans [8] avaient étudié l'équation des ondes stochastique dans l'espace à deux dimensions et avaient donné une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité de la solution. Par la suite, dans les années suivantes, plusieurs articles liés à l'étude de l'équation des ondes stochastiques linéaire ou non linéaire ont été publiés. Parmi les auteurs qui ont travaillé dans ce domaine, on peut citer : Chen et Dalang (2015), Sanz-Solé et Süß (2013), Balan et Tudor (2010), Liu et Lototsky (2010), Hausenblas (2010). La liste précédente n'est certainement pas exhaustive. Dans [9], Dalang avait travaillé sur l'extension de la définition de l'intégrale stochastique au sens de Walsh pour résoudre l'équation des ondes stochastiques dont la fonction de Green est une distribution au sens de Schwartz, c'est-à-dire dans le cas où la dimension est supérieure ou égale à trois.

Récemment, Khoshnevisan dans [20] a fait une étude détaillée de l'équation de la chaleur à une dimension en espace avec un bruit blanc Gaussien. Il a introduit la convolution stochastique, l'inégalité stochastique de Young et a démontré l'existence et l'unicité de la solution. Dès lors, on peut se poser la question de savoir, qu'allons nous obtenir si on travaille plutôt avec un bruit blanc de Lévy.

À la différence de la méthode basée sur les champs aléatoires, d'autres chercheurs utilisent l'approche fonctionnelle. Cette dernière qui est utilisée par Da Prato et Zabczyk (1992) traite les équations aux dérivées partielles stochastiques comme une équation différentielle ordinaire dans un espace de dimension infinie avec des coefficients irréguliers. Cette approche fonctionnelle a permis à certains chercheurs de faire de la simulation numérique sur les équations aux dérivées partielles stochastiques, comme cela est traité dans [17].

Comme mentionné ci-dessus, après les travaux faits sur les équations aux dérivées partielles stochastiques avec un bruit blanc Gaussien, il est naturel de s'intéresser aux équations avec un bruit blanc de Lévy. Ainsi, Applebaum dans [1] a contribué en travaillant sur l'intégrale stochastique basée sur un processus de Lévy. Dans son livre, il s'est concentré, en ce qui nous concerne sur la formule d'Itô, l'inégalité de Kunita basée sur un processus de Lévy à une composante en espace et a étudié en application des équations différentielles stochastiques. On se rappelle qu'on connait l'ordre de grandeur de la constante dans l'inégalité de Rosenthal. C'est la raison pour laquelle, dans cette thèse, elle sera préférée à l'inégalité de Kunita.

Contrairement à Applebaum, Peszat et Zabczyk ont travaillé sur les équations aux dérivées partielles stochastiques avec bruit de Lévy en utilisant l'approche fonctionnelle . Ils ont étudié, pour ce qui nous concerne, dans [23], les équations des ondes et de la chaleur avec un processus de Lévy homogène en espace. Par ailleurs, Øksendal dans [10] traite le calcul de Malliavin pour les processus de Lévy avec applications en finance. Le calcul de Malliavin développé dans les années 1970 est un calcul différentiel en dimension infinie dans l'espace de Wiener. Ce dernier a pris de l'importance dans de nombreuses branches de recherche et a donné naissance à d'intéressants résultats. Parmi ces derniers, on peut citer les travaux de Sanz-Solé (2005), Osswald (2012) et Solé, Utzet et Vives (2007).

Durant ces dernières années, plusieurs chercheurs se sont intéressés à étudier l'intermittence de la solution. Ce concept nous renseigne sur le comportement asymptotique des moments de la solution lorsque la variable liée au temps tend vers l'infini. Dans [14], Foondun et Khoshnevisan ont introduit des méthodes pour étudier l'intermittence des équations aux dérivées partielles stochastiques paraboliques et non linéaires. Cet article contient des références pour une grande partie de la littérature sur ce concept, par exemple Carmona et Molchanov (1994) qui ont introduit les définitions des exposants de Lyapunov.

Par la suite, après avoir pris connaissance du travail de Khoshnevisan dans [20] sur l'équation de la chaleur avec le bruit blanc Gaussien et le travail de Balan dans [2] sur l'intégration par rapport à un bruit blanc colorié, je me suis intéressé à étudier l'équation non linéaire des ondes et de la chaleur avec le bruit blanc de Lévy introduit dans [2]. Je rappelle que Balan dans [2] a traité le cas linéaire de l'équation de la chaleur et des ondes avec son bruit.

Dans le second chapitre de ce travail, on commence par la construction détaillée du bruit et les propriétés de ce dernier basées sur [2]. On revoit les notions de base sur la variable aléatoire de Poisson composée et sa fonction caractéristique. Ensuite, on se base sur la théorie de Walsh pour définir l'intégrale stochastique par rapport à ce bruit, qui est une mesure martingale, et pour énoncer une propriété essentielle de l'intégrale : l'isométrie d'Itô.

Dans le troisième chapitre, on fait une étude détaillée de la formule d'Itô pour un processus de Lévy à deux composantes en espace, en proposant une nouvelle preuve basée sur l'approximation par "Interlacing" introduite par Applebaum dans [1]. Par la suite, on présente une variante de deux inégalités connues de la littérature, les inégalités de Kunita et de Rosenthal. Pour ce travail, on choisira l'inégalité de Rosenthal, puisqu'on connait l'ordre de grandeur de la constante dans cette dernière. Ensuite, pour voir une application de la formule d'Itô, on présentera la notion de martingale exponentielle et pour terminer on parlera du théorème de représentation d'Itô. Les résultats de certaines parties de ce chapitre ont été publiés dans [3].

Le quatrième chapitre est dédié à l'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires avec un bruit blanc de Lévy. Dans cette partie, on s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution d'une équation stochastique. On montre que ces dernières sont satisfaites sous certaines conditions et que la solution est continue dans $L^2(\Omega)$. Par la suite, comme exemples, on étudie l'équation de la chaleur fractionnaire et l'équation des ondes. Ensuite, on s'intéresse aux moments d'ordre p ($p \geq 2$) de la solution et on montre que si la mesure de Lévy qui caractérise le bruit de Lévy et la solution fondamentale ont des moments d'ordre $p \geq 2$, alors la solution de notre équation a aussi des moments d'ordre p.

Le cinquième chapitre parle de l'intermittence de la solution de l'équation des ondes. Sous certaines conditions liées à la mesure qui caractérise le bruit, on prouve que la solution de l'équation des ondes stochastiques avec un bruit blanc de Lévy est faiblement intermittent. On commence par parler de l'inégalité de Young en introduisant l'espace des processus prévisibles avec une certaine norme comme dans [20] et la convolution stochastique. On montre que le moment d'ordre p de la solution de l'équation des ondes stochastiques est borné exponentiellement en temps. Pour terminer ce chapitre, on montre la continuité de la solution dans $L^p(\Omega)$. Tout au long du chapitre, on fera une comparaison avec les résultats existants dans la cas d'un bruit blanc Gaussien. Certains résultats du quatrième et cinquième chapitre ont été publiés dans [4].

Dans le dernier chapitre, on étudie la dérivée de Malliavin de la solution d'une nouvelle équation stochastique avec notre bruit blanc de Lévy. On débute en mettant en place les éléments de base du calcul de Malliavin. Ensuite, on parlera de la décomposition en chaos, de l'intégrale de Skorohod et on traitera quelques exemples d'application. Pour finir, on montre que sous certaines conditions, la solution de l'équation considérée est différentiable au sens de Malliavin et que sa dérivée de Malliavin vérifie une équation intégrale. Les résultats de ce chapitre seront publiés dans [5].

Chapitre 2

Bruit blanc de Lévy

Dans ce chapitre, on donne la construction et les propriétés du bruit blanc de Lévy (suivant [2]) et on introduit l'intégrale stochastique par rapport à ce bruit.

2.1 Définitions et propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et ν une mesure de Lévy sur $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R}\backslash\{0\}$, c'est-à-dire ν satisfait les propriétés suivantes : $\nu(\{0\}) = 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}_0} (1 \wedge |z|^2)\, \nu(d\, z) < \infty. \tag{2.1.1}$$

Soient $N = \sum_{i \geq 1} \delta_{(T_i, X_i, Z_i)}$ une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$ d'intensité $dt \times dx \times \nu$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^d$, et $\widehat{N}$ la mesure compensée (voir Annexe B.3). Soient $(\varepsilon_j)_{j \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs telles que : $\varepsilon_j \to 0$ quand $j \to \infty$ et $1 = \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$. Soient

$$\Gamma_j = \{z \in \mathbb{R} : \varepsilon_j < |z| \leq \varepsilon_{j-1}\},\ j \geq 1 \quad \text{et} \quad \Gamma_0 = \{z \in \mathbb{R}; |z| > 1\}.$$

Soit $\mathscr{B}_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ la classe des ensembles boréliens bornés de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.
Pour tout $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, on définit :

$$\begin{aligned} L_j(B) &= \int_{B \times \Gamma_j} z\, N(dt, dx, dz) = \int_{B \times \Gamma_j} z \sum_{i \geq 1} d\delta_{(T_i, X_i, Z_i)} \\ &= \sum_{i \geq 1} \int_{B \times \Gamma_j} z\, d\delta_{(T_i, X_i, Z_i)} = \sum_{(T_i, X_i) \in B} Z_i\, 1_{\{Z_i \in \Gamma_j\}}, \quad j \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Proposition 2.1.1. *Pour tout* $j \geq 0, L_j(B)$ *est une variable aléatoire de Poisson composée, de fonction caractéristique*

$$\mathrm{E}[e^{i\,u\,L_j(B)}] = \exp\left\{ |B| \int_{\Gamma_j} \left(e^{i\,u\,z} - 1\right) \nu(d\,z) \right\}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{2.1.3}$$

De plus, $\mathrm{E}[L_j(B)] = |B| \int_{\Gamma_j} z\, \nu(d\,z)$ *et* $\mathrm{Var}[L_j(B)] = |B| \int_{\Gamma_j} z^2\, \nu(dz)$.

Démonstration. On a :

$$L_j(B) = \int_{B\times\Gamma_j} z\, N(d\,s, d\,x, d\,z) = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0} z\, N|_{B\times\Gamma_j}(d\,s, d\,x, d\,z),$$

où $N|_{B\times\Gamma_j}$ est la restriction de N à $B \times \Gamma_j$. Par la Proposition B.3.2, nous pouvons écrire :

$$N|_{B\times\Gamma_j} = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{(T_i^*, X_i^*, Z_i^*)}, \tag{2.1.4}$$

où $\{(T_i^*, X_i^*, Z_i^*)\}_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $(dt \times dx)|_B \times \nu|_{\Gamma_j}/\,\lambda$, où $\lambda = |B|\,\nu(\Gamma_j)$ et τ est une variable aléatoire de Poisson indépendante des autres variables de paramètre λ. Alors $L_j(B) = \sum_{i=1}^{\tau} Z_i^*$ et nous pouvons appliquer un résultat connu sur la construction d'une variable aléatoire de loi de Poisson composée (voir Proposition A.1.3, Annexe A.1). Pour cela, on a besoin de connaître la loi de Z_i^*. Pour chaque borélien $A \subset \Gamma_j$ et puisque $\{(T_i^*, X_i^*) \in B\}$ est un événement certain, on a

$$F(A) = P(Z_i^* \in A) = P((T_i^*, X_i^*) \in B, Z_i^* \in A) = \frac{|B|\,\nu(A)}{|B|\nu(\Gamma_j)} = \frac{\nu(A)}{\nu(\Gamma_j)}\,.$$

Alors

$$\mathrm{E}[e^{i\,u\,L_j(B)}] = \exp\left\{ |B|\,\nu(\Gamma_j) \int_{\Gamma_j} \left(e^{i\,u\,z} - 1\right) \frac{\nu(d\,z)}{\nu(\Gamma_j)} \right\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

□

Notons que $\{L_j(B) - \mathrm{E}(L_j(B))\}_{j\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes. En utilisant (2.1.1) on a :

$$\sum_{j\geq 1} \mathrm{Var}(L_j(B)) = |B| \sum_{j\geq 1} \int_{\Gamma_j} z^2\, \nu(d\,z) = |B| \int_{\{|z|\leq 1\}} z^2\, \nu(d\,z) < \infty.$$

Donc, en vertu du critère de Kolmogorov (Théorème 22.6 de [6]),

$$\sum_{j\geq 1}(L_j(B)-\mathrm{E}(L_j(B)))$$

converge presque sûrement.

Pour chaque ensemble $B\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$, on définit alors :

$$Y(B)=\sum_{j\geq 1}(L_j(B)-\mathrm{E}(L_j(B)))+L_0(B). \tag{2.1.5}$$

En utilisant l'indépendance entre les variables $\{L_j(B)\}_{j\geq 0}$ et la Proposition 2.1.1 il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(e^{i\,u\,Y(B)}\right)\\
&= \mathrm{E}\left\{\exp\left[\sum_{j\geq 1} i\,u(L_j(B)-\mathrm{E}(L_j(B)))+i\,u\,L_0(B)\right]\right\}\\
&= \prod_{j\geq 1}\mathrm{E}\left(\exp\left\{i\,u(L_j(B)-\mathrm{E}(L_j(B))\right\}\right)\cdot\mathrm{E}\left(\exp\left\{i\,u\,L_0(B)\right\}\right)\\
&= \prod_{j\geq 1}\left(\exp\left\{|B|\int_{\Gamma_j}\left(e^{i\,u\,z}-1\right)\,\nu\,(d\,z)\right\}\cdot\exp\left\{i\,u\,|B|\int_{\Gamma_j} z\,\nu\,(d\,z)\right\}\right)\cdot\\
&\quad \exp\left\{|B|\int_{|z|>1}\left(e^{i\,u\,z}-1\right)\nu\,(d\,z)\right\}\\
&= \exp\left\{|B|\int_{\mathbb{R}}\left(e^{i\,u\,z}-1-i\,u\,z\,1_{\{|z|\leq 1\}}\right)\nu\,(d\,z)\right\}\ .
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Pour la suite on suppose que

$$v:=\int_{\mathbb{R}} z^2\,\nu(d\,z)<\infty\,. \tag{2.1.7}$$

On note que $\mathrm{E}\,(Y(B))=\mathrm{E}\,(L_0(B))=|B|\int_{\mathbb{R}} z\,1_{\{|z|>1\}}\,\nu\,(d\,z)$, et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(Y(B)) &= \sum_{j\geq 1}\mathrm{Var}\,(L_j(B))+\mathrm{Var}\,(L_0(B))\\
&= \sum_{j\geq 1}|B|\int_{\Gamma_j} z^2\,\nu\,(d\,z)+|B|\int_{|z|>1} z^2\,\nu\,(d\,z)=|B|\int_{\mathbb{R}} z^2\,\nu\,(d\,z).
\end{aligned}$$

Pour chaque ensemble $B\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)$, on définit,

$$L(B)=Y(B)-\mathrm{E}(Y(B))=\sum_{j\geq 0}(L_j(B)-\mathrm{E}(L_j(B)))\,.$$

On observe que :

$$L(B) = \int_B \int_{\mathbb{R}_0} z\, \hat{N}(ds, dx, dz). \qquad (2.1.8)$$

Notons que

$$\mathrm{E}\,|L(B)|^2 \;=\; \sum_{j\geq 1} \mathrm{Var}(L_j(B)) + \mathrm{Var}(L_0(B)) = v|B|.$$

En utilisant (2.1.6), on voit que la fonction caractéristique de $L(B)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[e^{i\,u\,L(B)}\right] &= \mathrm{E}\left[e^{i\,u\,(Y(B)-\mathrm{E}(Y(B)))}\right] = \mathrm{E}\left[e^{i\,u\,Y(B)}e^{-i\,u\,\mathrm{E}(Y(B))}\right] \\
&= \exp\left\{|B| \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z} - 1 - i\,u\,z\,1_{\{|z|\leq 1\}}\right)\,\nu\,(d\,z)\right\} \\
&\quad \exp\left\{-i\,u\,|B| \int_{\mathbb{R}} z\,1_{\{|z|>1\}}\,\nu\,(d\,z)\right\} \\
&= \exp\left\{|B| \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z} - 1 - i\,u\,z\,1_{\{|z|\leq 1\}} - i\,u\,z\,1_{\{|z|>1\}}\right)\,\nu\,(d\,z)\right\}.
\end{aligned}$$

Ce dernier calcul implique :

$$\mathrm{E}\left[e^{i\,u\,L(B)}\right] \;=\; \exp\left\{|B| \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z} - 1 - i\,u\,z\right)\,\nu\,(d\,z)\right\}, \quad u \in \mathbb{R}. \qquad (2.1.9)$$

Proposition 2.1.2. *La famille $\{L(B), B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)\}$ est une mesure aléatoire indépendamment dispersée (dans le sens de [24]), c'est-à-dire qu'elle satisfait les propriétés suivantes :*

a) pour chaque ensembles disjoints $B_1, \cdots, B_n \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$, $L(B_1), \cdots L(B_n)$ sont indépendants,

b) pour chaque suite d'ensembles disjoints $(B_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ tels que $\bigcup_n B_n$ est borné, on a

$$L\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = \sum_{n\geq 1} L(B_n) \;\; \textit{presque sûrement.}$$

Démonstration. a) On utilise la propriété suivante de la mesure de Poisson N : si $f_1, \ldots, f_k$ sont des fonctions sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$ à supports disjoints, alors $N(f_1), \cdots, N(f_k)$ sont indépendantes (voir Théorème 6.6.(v) de [23]). Dans notre cas, $L(B) = \sum_{n\geq 0} \left(N(f_j^B) - \mathrm{E}(N(f_j^B))\right)$ où les $f_j^B(t,x,z) = 1_B(t,x)\; z\; 1_{\Gamma_j}(z)$, pour $j \geq 0$ sont des fonctions à supports disjoints. Alors $L(B)$ est mesurable par rapport à la $\sigma-$algèbre $\mathcal{G}_B$ engendrée par les variables aléatoires indépendantes $\{N(f_j^B), j \geq 0\}$.

Puisque les ensembles $B_1, \dots, B_n \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ sont disjoints, les $\sigma-$algèbres $\mathcal{G}_{B_1}, \dots, \mathcal{G}_{B_n}$ sont indépendantes. Donc les variables aléatoires $L_j(B_1), \dots, L_j(B_n)$ sont indépendantes.

b) Soit $S_n = \sum_{k=1}^n L(B_k)$ et $S = L(B)$ avec $B = \bigcup_{n\geq 1} B_n$. Par le théorème de Lévy (voir page 130 et page 353 de [22]), $(S_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement si et seulement si $(S_n)_{n\geq 1}$ converge en distribution. Par l'indépendance entre les éléments la suite $\{L(B_k)\}_{k=1,\dots,n}$ et (2.1.9), on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[e^{i\,u\,S_n}\right] &= \mathrm{E}\left[e^{i\,u\,\sum_{k=1}^n L(B_k)}\right] \\
&= \exp\left\{\sum_{k=1}^n |B_k| \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z} - 1 - i\,u\,z\right)\nu(dz)\right\} \\
&= \exp\left\{\left|\bigcup_{k=1}^n B_k\right| \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z} - 1 - i\,u\,z\right)\nu(dz)\right\}.
\end{aligned}$$

En passant à la limite on obtient :

$$\mathrm{E}\left[e^{i\,u\,S_n}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left\{|B| \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z} - 1 - i\,u\,z\right)\nu(dz)\right\} = \mathrm{E}\left[e^{i\,u\,S}\right],$$

et donc $(S_n)_n$ converge en distribution vers S. D'où $S_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} S$ presque sûrement, c'est-à-dire, $S = \sum_{k\geq 1} L(B_k)$ presque sûrement.

$\square$

Lemme 2.1.3. *Pour chaque ensemble $A, B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\mathrm{E}[L(A)\,L(B)] = v\,|A \cap B|. \tag{2.1.10}$$

Démonstration. On remarque que : $A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$, $B = (B\backslash A) \cup (A \cap B)$, et donc, par l'additivité de L, on a : $L(A) = L(A\backslash B) + L(A\cap B)$ et $L(B) = L(B\backslash A) + L(A \cap B)$. Les variables $L(A\backslash B)$, $L(B\backslash A)$, $L(A\cap B)$ sont indépendants (en vertu de la Proposition 2.1.2.a)) et de moyenne 0. Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\,[L(A)\,L(B)] \\
&= \mathrm{E}[L(A\backslash B)\,L(B\backslash A)] + \mathrm{E}[L(A\backslash B)\,L(A\cap B)] + \mathrm{E}[L(B\backslash A)\,L(A\cap B)] \\
&+ \mathrm{E}\,|L(A\cap B)|^2 \\
&= \mathrm{E}\,|L(A\cap B)|^2 = v\,|A\cap B|.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 2.1.4. Si ν est une mesure finie qui satisfait (2.1.7), alors $L(B) = P(B) - \mathrm{E}(P(B))$, où $P(B)$ suit une loi de Poisson composée d'intensité $|B|\nu$, c'est-à-dire

$$\mathrm{E}(e^{i\,u\,P(B)}) = \exp\left\{|B|\int_{\mathbb{R}_0}(e^{i\,u\,z}-1)\,\nu(dz)\right\},$$

(voir Annexe A.1).

Exemple 2.1.5. On considère $\nu(dz) = \dfrac{\alpha}{z}\,e^{-\beta z}\,1_{\{z>0\}}\,dz$, avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Dans ce cas, $L(B)$ a la fonction caractéristique

$$\mathrm{E}(e^{i\,u\,L(B)}) = \exp\left\{|B|\int_0^\infty (e^{i\,u\,z}-1-i\,u\,z)\frac{\alpha}{z}e^{-\beta\,z}\,dz\right\}.$$

Donc $L(B) = X(B) - \mathrm{E}(X(B))$ où $X(B) \sim \mathit{Gamma}(\alpha|B|,\beta)$ (voir Annexe A.2). Dans ce cas, on dit que $L = \{L(B)\}$ un processus de Gamma centré.

Pour chaque $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, on définit $L(1_B) = L(B)$ et on étend cette définition par linéarité aux fonctions simples : si $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i 1_{B_i}$ avec $c_i \in \mathbb{R}$ et $B_i \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ disjoints alors on définit $L(\varphi) = \sum_{i=1}^n c_i L(B_i)$. On peut montrer que cette définition ne dépend pas de la représentation de φ. De plus, si φ est une fonction simple sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, alors en utilisant le Lemme 2.1.3, on peut montrer que :

$$\mathrm{E}|L(\varphi)|^2 = v\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d}\varphi^2(t,x)\,dt\,dx. \tag{2.1.11}$$

Pour chaque $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, on construit l'intégrale stochastique :

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d}\varphi(t,x)\,L(dt,dx),$$

comme la limite dans $L^2(\Omega)$ de $\{L(\varphi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions simples qui converge vers φ dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. On note que $\{L(\varphi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ puisque :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|L(\varphi_n)-L(\varphi_m)|^2 &= \mathrm{E}|L(\varphi_n-\varphi_m)|^2\\ &= v\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d}|\varphi_n(t,x)-\varphi_m(t,x)|^2\,dt\,dx\\ &\quad\longrightarrow 0 \text{ quand } n,m\longrightarrow\infty,\end{aligned}$$

à cause du (2.1.11).

Lemme 2.1.6. *Pour chaque $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\mathrm{E}\left[e^{i\,u\,L(\varphi)}\right] = \exp\left[\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}}\left(e^{i\,u\,z\,\varphi(t,x)}-1-i\,u\,z\,\varphi(t,x)\right)\,dt\,dx\,\nu(dz)\right],\quad u\in\mathbb{R}.$$

Démonstration. D'après le Théorème 13.5 de [6], il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ telles que $|\varphi_n| \leq \varphi$, pour chaque n, et $\varphi_n(t,x) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \varphi(t,x)$ pour chaque (t,x). Par conséquent $\varphi_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \varphi$ dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. Supposons que $\varphi_n = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{j,n} 1_{B_{j,n}}$, où $\alpha_{j,n} \in \mathbb{R}$ et $(B_{j,n})_{j=1\cdots k_n}$ sont des ensembles disjoints dans $\mathscr{B}_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. En utilisant l'équation (2.1.9), nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[e^{i\,u\,L(B_{j,n})}\right] &= \exp\left\{|B_{j,n}| \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z} - 1 - i\,u\,z\right)\,\nu(d\,z)\right\} \\
&= \exp\left\{\int_{B_{j,n}} dt\,dx \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z} - 1 - i\,u\,z\right)\,\nu(d\,z)\right\} \\
&= \exp\left\{\int_{B_{j,n}\times\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z} - 1 - i\,u\,z\right)\,dt\,dx\,\nu(d\,z)\right\}.
\end{aligned}$$

Alors, en utilisant l'indépendance entre les variables $\{L(B_{j,n})\}_{j=1\ldots k_n}$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[e^{i\,u\,L(\varphi_n)}\right] &= \prod_{j=1}^{k_n} \mathrm{E}(e^{i\,u\,\alpha_{j,n}\,L(B_{j,n})}) \\
&= \prod_{j=1}^{k_n} \exp\left\{\int_{B_{j,n}\times\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z\,\alpha_{j,n}} - 1 - i\,u\,z\,\alpha_{j,n}\right)\,dt\,dx\,\nu(dz)\right\} \\
&= \exp\left\{\int_{R_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{k_n} 1_{B_{j,n}}(t,x)\left(e^{i\,u\,z\,\alpha_{j,n}} - 1 - i\,u\,z\,\alpha_{j,n}\right)\,dt\,dx\,\nu(dz)\right\} \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z\,\varphi_n(t,x)} - 1 - i\,u\,z\,\varphi_n(t,x)\right)\,dt\,dx\,\nu(dz)\right). \qquad (2.1.12)
\end{aligned}$$

On sait que $L(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L(\varphi)$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to \infty$, donc en probabilité, et par conséquent, en distribution. Nous en déduisons la convergence des fonctions caractéristiques, c'est-à-dire

$$\mathrm{E}\left[e^{i\,u\,L(\varphi_n)}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{E}\left[e^{i\,u\,L(\varphi)}\right]. \qquad (2.1.13)$$

D'autre part nous avons :

$$\left|e^{i\,u\,z\,\varphi_n(t,x)} - 1 - i\,u\,z\,\varphi_n(t,x)\right| \leq u^2\,z^2\,\varphi_n^2(t,x) \leq u^2\,z^2\,\varphi^2(t,x),$$

et à cause de (2.1.7),

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} u^2\,z^2\,\varphi^2(t,x)\,dt\,dx\,\nu(dz) = u^2 \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} \varphi^2(t,x)\,dt\,dx \int_{\mathbb{R}} z^2 \nu(dz) < \infty.$$

Comme $\varphi_n(t,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(t,x)$ pour chaque (t,x), on déduit par le théorème de convergence dominée dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et (2.1.12) que

$$\mathrm{E}\left[e^{i\,u\,L(\varphi_n)}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left(\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z\,\varphi(t,x)} - 1 - i\,u\,z\,\varphi(t,x)\right)\,dt\,dx\,\nu(dz)\right) \tag{2.1.14}$$

En utilisant (2.1.13) et (2.1.14), on conclut que :

$$\mathrm{E}[e^{i\,u\,L(\varphi)}] = \exp\left(\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z\,\varphi(t,x)} - 1 - i\,u\,z\,\varphi(t,x)\right)\,dt\,dx\,\nu(dz)\right).$$

$\square$

Lemme 2.1.7. *a) Pour chaque fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ à support borné K, on définit :*

$$L_j(\varphi) \;=\; \int_{K\times\Gamma_j} \varphi(t,x)\,z\,N(dt,\,dx,\,dz), \quad j \geq 0.$$

Alors la série

$$L^*(\varphi) \;=\; \sum_{j\geq 0} \left[L_j(\varphi) - \mathrm{E}(L_j(\varphi))\right]$$

converge presque sûrement et sa fonction caractéristique est donnée pour $u \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\left[e^{i\,u\,L^*(\varphi)}\right]\\ &= \exp\left\{\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} \left(e^{i\,u\,z\,\varphi(t,x)} - 1 - i\,u\,z\,\varphi(t,x)\right)\,dt\,dx\,\nu(dz)\right\}.\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

De plus

$$\mathrm{E}|L^*(\varphi)|^2 = \int_K |\varphi(t,x)|^2\,dt\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}} z^2\nu(dz).$$

b) Pour chaque fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ à support borné, $L(\varphi) = L^*(\varphi)$ presque sûrement.

Démonstration. *a)* On utilise la même représentation (2.1.4) de $N|_{K\times\Gamma_j}$ comme dans la preuve de la Proposition 2.1.1 avec $B = K$. Par Proposition A.1.3 (Annexe A.1)

$$L_j(\varphi) = \sum_{i=1}^{\tau} \varphi(T_i^*, X_i^*)\,Z_i^*$$

est une variable aléatoire de loi de Poisson composée avec fonction caractéristique :

$$\mathrm{E}(e^{i\,u\,L_j(\varphi)}) = \exp\left\{|K|\,\nu(\Gamma_j)\int_{\mathbb{R}}(e^{i\,u\,z}-1)F(dz)\right\},\ u\in\mathbb{R},$$

où F est la loi de la variable $U_i = \varphi(T_i^*, X_i^*)\, Z_i^*$. Pour déterminer la loi F, on observe que par le Théorème B.1.1 (Annexe B), on a :

$$F((-\infty, x]) = P(U_i \le x) = P\left(\varphi(T_i^*, X_i^*)\, Z_i^* \le x\right) = \int_{\Gamma_j} P(\varphi(T_i^*, X_i^*)\, z \le x)\,\frac{\nu(dz)}{\nu(\Gamma_j)}.$$

Donc, pour chaque fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et bornée,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(z)F(dz) &= \frac{1}{\nu(\Gamma_j)}\int_{\Gamma_j}\mathrm{E}\left[h(\varphi(T_i^*, X_i^*)\, z)\right]\nu(dz)\\ &= \frac{1}{\nu(\Gamma_j)|K|}\int_{\Gamma_j}\left(\int_K h(\varphi(t,x)\, z)dt\, dx\right)\nu(dz).\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

En particulier, en utilisant ce résultat pour la fonction $h(z) = e^{i\,u\,z} - 1$, $z \in \mathbb{R}$ (avec $u \in \mathbb{R}$ fixé), on obtient :

$$\mathrm{E}\left(e^{i\,u\,L_j(\varphi)}\right) = \exp\left\{\int_{K\times\Gamma_j}\left(e^{i\,u\,z\,\varphi(t,x)} - 1\right)\, dt\, dx\, \nu(dz)\right\}. \tag{2.1.17}$$

De la Proposition A.1.3 (Annexe A.1) et en utilisant (2.1.16), d'une part avec $h(z) = z$ pour l'espérance et d'autre part avec $h(z) = z^2$ pour la variance, on obtient :

$$\mathrm{E}\left(L_j(\varphi)\right) = \nu(\Gamma_j)|K|\int_{\mathbb{R}} z\, F(dz) = \int_{K\times\Gamma_j}\varphi(t,x)\, z\, dt\, dx\, \nu(dz), \tag{2.1.18}$$

$$\mathrm{Var}\left(L_j(\varphi)\right) = \nu(\Gamma_j)|K|\int_{\mathbb{R}} z^2\, F(dz) = \int_{K\times\Gamma_j}|\varphi(t,x)|^2\, z^2\, dt\, dx\, \nu(dz).$$

La série $\sum_{j\ge1}\left[L_j(\varphi) - \mathrm{E}(L_j(\varphi))\right]$ converge presque sûrement par le critère de Kolmogorov car les variables $\{L_j(\varphi) - \mathrm{E}(L_j(\varphi))\}_{j\ge1}$ sont indépendantes de moyenne 0 avec

$$\begin{aligned}\sum_{j\ge1}\mathrm{Var}\left(L_j(\varphi)\right) &= \sum_{j\ge1}\int_{K\times\Gamma_j}|\varphi(t,x)|^2\, z^2\, dt\, dx\, \nu(dz)\\ &= \left(\int_K|\varphi(t,x)|^2\, dt\, dx\right)\left(\int_{|z|\le1} z^2\,\nu(dz)\right) < \infty.\end{aligned}$$

En utilisant l'indépendance entre les variables $\{L_j(\varphi)\}_{j\ge0}$ et les équations (2.1.17) et (2.1.18), on obtient :

$$\mathrm{E}\left[e^{i\,u\,L^*(\varphi)}\right] = \prod_{j\ge0}\mathrm{E}\left(e^{i\,u\,[L_j(\varphi) - \mathrm{E}(L_j(\varphi))]}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{j\geq 0}\Bigg[\exp\left\{\int_{K\times\Gamma_j}\left(e^{i\,u\,z\,\varphi(t,x)}-1\right)\,dt\,dx\,\nu(dz)\right\}\cdot \\
&\quad \exp\left\{i\,u\int_{K\times\Gamma_j} z\,\varphi(t,x)\,dt\,dx\,\nu(dz)\right\}\Bigg] \\
&= \exp\left\{\int_{K\times\mathbb{R}}\left(e^{i\,u\,z\,\varphi(t,x)}-1\right)\,dt\,dx\,\nu(dz)\right\}\cdot\exp\left\{i\,u\int_{K\times\mathbb{R}} z\,\varphi(t,x)\,dt\,dx\,\nu(dz)\right\} \\
&= \exp\left\{\int_{K\times\mathbb{R}}\left(e^{i\,u\,z\,\varphi(t,x)}-1-i\,u\,z\,\varphi(t,x)\right)\,dt\,dx\,\nu(dz)\right\}.
\end{aligned}
$$

$b)$ Nous allons montrer maintenant l'égalité $L(\varphi)=L^*(\varphi)$ presque sûrement. On se rappelle que $L_j(B)$ est donnée par (2.1.2). Observons d'abord qu'elle est vraie pour les fonctions simples : on note que pour chaque $B\in\mathscr{B}_b(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$,

$$L_j(B)=L_j(1_B),$$

et donc $L(1_B)=L(B)=\sum_{j\geq 0}\left[L_j(B)-\mathrm{E}(L_j(B))\right]=\sum_{j\geq 0}\left[L_j(1_B)-\mathrm{E}(L_j(1_B))\right]=L^*(1_B)$; par linéarité, il s'en suit que $L(\varphi)=L^*(\varphi)$ pour chaque fonction simple φ sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$. Pour montrer l'égalité dans le cas d'une fonction $\varphi\in L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$ à support borné, on considère une suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions simples à support borné telle que $\varphi_n\longrightarrow\varphi$ dans $L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$. On sait que, pour chaque n,

$$L(\varphi_n)=L^*(\varphi_n).$$

Ensuite, on passe à la limite dans $L^2(\Omega)$ quand $n\longrightarrow\infty$. Par construction, on sait que $L(\varphi_n)\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}L(\varphi)$ dans $L^2(\Omega)$. Pour le membre droit, par linéarité de L^* et la partie $a)$, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left|L^*(\varphi_n)-L^*(\varphi)\right|^2 &= \mathrm{E}\left|L^*(\varphi_n-\varphi)\right|^2 \\
&= \left(\int_K |(\varphi_n-\varphi)(t,x)|^2\,dt\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} z^2\,\nu(dz)\right)\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}0\,.
\end{aligned}
$$

Ce qui montre que $L^*(\varphi_n)\longrightarrow L^*(\varphi)$ dans $L^2(\Omega)$. Donc $L(\varphi)=L^*(\varphi)$ dans $L^2(\Omega)$, et en particulier, $L(\varphi)=L^*(\varphi)$ presque sûrement.

□

Lemme 2.1.8. *Pour toute fonction $\varphi\in L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$, on a :*

$$L(\varphi)=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(t,x)L(dt,dx)=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_0}\varphi(t,x)\;z\;\widehat{N}(ds,dx,dz).\quad(2.1.19)$$

Démonstration. On commence par montrer le résultat pour une fonction indicatrice. Soit $\varphi = 1_B$, où $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, alors on a par définition (voir (2.1.8)) :

$$L(\varphi) = L(1_B) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(t,x)\, L(dt,dx) = \int_B \int_{\mathbb{R}_0} z\, \widehat{N}(ds,dx,dz). \quad (2.1.20)$$

Si φ est une fonction simple c'est-à-dire $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$, où $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$ sont des ensembles boréliens bornés disjoints de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$, alors en utilisant les propriétés de l'intégrale et (2.1.20) on obtient :

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, 1_{A_i}(t,x)\, L(dt,dx) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} 1_{A_i}(t,x)\, L(dt,dx) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} 1_{A_i}(s,x)\, z\, \widehat{N}(ds,dx,dz) \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, 1_{A_i}(s,x)\, z\, \widehat{N}(ds,dx,dz) \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \varphi(s,x)\, z\, \widehat{N}(ds,dx,dz). \end{aligned}$$

Si φ est dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples telle que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. On sait que pour chaque n, on a :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(t,x)\, L(dt,dx) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_0} \varphi_n(s,x)\, z\, \widehat{N}(ds,dx,dz).$$

Le résultat s'en découle par passage à la limite.

□

2.2 Intégrale stochastique

Dans cette section, nous allons introduire les intégrales stochastiques par rapport à L et $\widehat{N}$.

Notons que $L_t(A) = \{L([0,t]\times A);\ t \geq 0,\ A \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}_d)\}$ est une mesure martingale (au sens de l'Annexe C) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t^L)_{t\geq 0}$ qui est définie pour chaque $t > 0$ par :

$$\mathcal{F}_t^L = \sigma\left(\left\{L_s(B); 0 \leq s \leq t, B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)\right\}\right) \vee \mathcal{N}, \quad (2.2.1)$$

où $\mathcal{N} = \{F \in \mathcal{F}; P(F) = 0 \text{ ou } P(F) = 1\}$. Pour voir cela, on vérifie les hypothèses de la Définition C.1.7. On a :

i) $L_0(A) = 0$ et $L_t(A \cup B) = L_t(A) + L_t(B)$ presque sûrement pour tout $A, B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $A \cap B = \emptyset$, d'après la Proposition 2.1.2 b).

ii) il existe une suite $(E_k)_k \subset \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ avec $E_k \subset E_{k+1}, \forall k$ et $\bigcup_k E_k = \mathbb{R}^d$ telle que pour chaque $k \geq 1$ fixé, alors $\sup_{A \in \mathscr{B}_k} \mathrm{E}|L_t(A)|^2 = \sup_{A \in \mathscr{B}_k}(v\, t\, |A|) \leq v\, t\, |E_k| < \infty$, où $\mathscr{B}_k = \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d); A \subset E_k\}$.

iii) si $(A_n)_n \subset \mathscr{B}_k$ avec $A_n \downarrow \emptyset$, alors par le théorème de convergence dominée $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}|L_t(A_n)|^2 = \lim\limits_{n\to\infty} v\, t\, |A_n| = 0$.

iv) Pour chaque $A \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $\{L_t(A), \mathcal{F}_t^L, t \geq 0\}$ est une martingale puisque : $E[L_t(A) - L_s(A)|\mathcal{F}_s^L] = E[L_t(A) - L_s(A)] = 0$.

Sa mesure de covariation est :

$$Q_L([0,t] \times A \times B) = \langle L(A), L(B) \rangle_t = t\, v\, |A \cap B|$$

et sa mesure dominante est $K_L = Q_L$ (voir Annexe C).

Pour chaque processus prévisible $X = \{X(t,x);\, t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^d\}$, qui satisfait :

$$\mathrm{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |X(t,x)|^2 \, dx\, dt < \infty, \quad \forall T > 0, \tag{2.2.2}$$

on peut définir l'intégrale stochastique $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} X(t,x)\, L(dt,dx)$. Cette intégrale est une isométrie, c'est-à-dire :

$$\mathrm{E} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} X(t,x)\, L(dt,dx) \right|^2 = v\, \mathrm{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |X(t,x)|^2 \, dx\, dt, \tag{2.2.3}$$

où v est donnée par (2.1.7).

Pour définir l'intégrale stochastique par rapport à $\widehat{N}$, on peut procéder comme dans l'Annexe C en observant que $\{\widehat{N}_t(A) = \widehat{N}([0,t] \times A);\, t \geq 0, A \in \mathcal{A}\}$ est une mesure martingale sur l'espace $E = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$ (avec l'algèbre $\mathcal{A} = \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0)$) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}$ définie par :

$$\mathcal{F}_t^N = \sigma\left(\left\{N([0,s] \times B \times \Gamma); 0 \leq s \leq t, B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d), \Gamma \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}_0)\right\}\right) \vee \mathcal{N}, \tag{2.2.4}$$

où $\mathcal{N} = \{F \in \mathcal{F}; P(F) = 0 \text{ ou } P(F) = 1\}$. On introduit les définitions suivantes.

Définition 2.2.1. Un processus $(\omega; s, x, z) \longmapsto X(\omega; s, x, z)$ est dit *élémentaire* s'il est de la forme :

$$X(\omega; s, x, z) = Y(\omega)\; 1_{(a,b]}(s)\; 1_A(x)\; 1_\Gamma(z), \tag{2.2.5}$$

où $0 \leq a < b$, $A \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $\Gamma \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}_0)$ et Y est une variable aléatoire bornée, $\mathcal{F}_a^N$-mesurable. Un processus *simple* sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$ est une combinaison linéaire de processus élémentaire sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$.

Définition 2.2.2. Soit $\mathscr{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}$, la σ-algèbre engendrée par les processus simples sur $\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0$. Un processus $X=\{X(t,x,z)\}_{t\geq 0,\, x\in\mathbb{R}^d,\, z\in\mathbb{R}_0}$ est dit *prévisible* si l'application $(\omega;t,x,z)\mapsto X(\omega;t,x,z)$ est $\mathscr{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}$-mesurable.

Remarque 2.2.3. On remarque que $\mathcal{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times R_0}$ coïncide avec la sigma-algèbre engendrée par les processus X qui ont les deux propriétés suivantes (voir page 216 [1]) :

i) $t\mapsto X(\omega,t,x,z)$ est continue à gauche pour tout (ω,x,z)

ii) $(\omega,x,z)\mapsto X(\omega,t,x,z)$ est $\mathcal{F}_t^N\times\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\times\mathscr{B}(\mathbb{R}_0)$-mesurable pour tout $t>0$.

Lemme 2.2.4. *Si $X=\{X(t,x,z)\}_{t\geq 0,\, x\in\mathbb{R}^d,\, z\in\mathbb{R}_0}$ est un processus prévisible, alors la fonction $(\omega;t,x,z)\mapsto X(\omega;t,x,z)$ définie sur $\Omega\times[0,t]\times\mathbb{R}^d\times R_0$ est $\mathcal{F}_t^N\times\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\times\mathscr{B}(\mathbb{R}_0)$-mesurable pour chaque $t>0$. En particulier, $X(t,x,z)$ est $\mathcal{F}_t^N$-mesurable, pour chaque $(t,x,z)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0$.*

En utilisant la procédure de Walsh, on déduit que si X est prévisible et vérifie :

$$\mathrm{E}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}|X(t,x,z)|^2\nu(dz)\,dx\,dt<\infty,\qquad \text{pour tout}\quad T>0,\tag{2.2.6}$$

alors, l'intégrale stochastique $\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{R_0}X(s,x,z)\widehat{N}(ds,\,dx,\,dz)$ est bien définie dans $L^2(\Omega)$.

Lemme 2.2.5. *Soit $X=\{X(t,x,z)\}_{t\geq 0,\, x\in\mathbb{R}^d,\, z\in\mathbb{R}_0}$ un processus prévisible qui satisfait* (2.2.6)*. Alors, le processus $M=(M_t)_{t\geq 0}$ défini par*

$$M_t=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}X(s,x,z)\widehat{N}(ds,dx,dz),t\geq 0$$

est une $\mathcal{F}_t^N$-martingale de moyenne 0, de carré intégrable et de variation quadratique prévisible $\langle M\rangle_t=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}|X(s,x,z)|^2\nu(dz)\,dx\,ds,\ t\geq 0$.

Lemme 2.2.6. *Soient $X=\{X(t,x,z);t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ z\in\mathbb{R}_0\}$ et $Y=\{Y(t,x,z);t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ z\in\mathbb{R}_0\}$ deux processus prévisibles qui satisfont* (2.2.6) *, alors*

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}Xd\widehat{N}\right)\cdot\left(\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}Yd\widehat{N}\right)\right]=\mathrm{E}\left(\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}X\cdot Y\ \nu(dz)dxdt\right).$$

Démonstration. En utilisant le fait que $xy=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}$, on obtient :

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}Xd\widehat{N}\right)\cdot\left(\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}Yd\widehat{N}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left[\mathrm{E}\left(\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}(X+Y)\,d\widehat{N}\right)^2 - \mathrm{E}\left(\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}(X-Y)\,d\widehat{N}\right)^2\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[\mathrm{E}\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}(X+Y)^2\,\nu(dz)dxdt - \mathrm{E}\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}(X-Y)^2\,\nu(dz)dxdt\right]\\
&= \mathrm{E}\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}\frac{(X+Y)^2-(X-Y)^2}{4}\,\nu(dz)dxdt\\
&= \mathrm{E}\left(\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0} X\cdot Y\ \nu(dz)dxdt\right).
\end{aligned}
$$

□

Le résultat suivant donne la relation entre les intégrales stochastiques par rapport à L et à $\widehat{N}$.

Théorème 2.2.7. *Pour chaque processus* $X = \{X(t,x);\, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\}$ *prévisible qui satisfait* (2.2.2)*, on a :*

$$
\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} X(t,x)\,L(dt,\,dx) = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} X(t,x)\,z\,\widehat{N}(dt,\,dx,\,dz).
$$

Démonstration. Notons que si X est un processus élémentaire donné par :

$$
X(\omega;t\,,x) = Y(\omega)\,1_{(a,b]}(t)\;1_A(x),
$$

où $0 \leq a < b$, $A \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ et Y est une variable aléatoire bornée, $\mathcal{F}_a$-mesurable, alors on a d'une part :

$$
\begin{aligned}
\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} X(s,x)\,L(ds,dx) &= Y(L_{t\wedge b}(A) - L_{t\wedge a}(A))\\
&= Y\int_{t\wedge a}^{t\wedge b}\int_A\int_{\mathbb{R}_0} z\,\widehat{N}(ds,dx,dz),
\end{aligned}
$$

et d'autre part

$$
\begin{aligned}
\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} X(s,x)\,z\,\widehat{N}(ds,dx,dz) &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} Y\,1_{(a,b]}(s)\;1_A(x)z\,\widehat{N}(ds,dx,dz)\\
&= Y\int_{t\wedge a}^{t\wedge b}\int_A\int_{\mathbb{R}_0} z\,\widehat{N}(ds,dx,dz).
\end{aligned}
$$

Nous en déduisons l'égalité des deux intégrales pour un processus élémentaire. La linéarité de l'intégrale permet d'étendre ce résultat aux processus simples. Finalement, un passage à la limite nous conduit à la conclusion. □

Chapitre 3

Formule d'Itô

Dans ce chapitre, on présente une formule d'Itô pour certains processus intégrables par rapport à une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$, qui est similaire à celle présentée dans [1] pour une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_0$. Ensuite, on discute quelques applications de cette formule, comme l'inégalité de Kunita et le théorème de représentation d'Itô. Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans [3].

3.1 Approximation par "Interlacing"

Dans cette section, on introduit deux théorèmes importants dans la démonstration de la formule d'Itô. Commençons par rappeler un résultat connu.

Soit N une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $dt\,dx\,\nu(dz)$ et $\hat{N}$ la mesure compensée.

Remarque 3.1.1. *Si $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ est un processus prévisible, alors :*

$$\mathrm{E} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} X(s,\, x,\, z)\, N(ds,\, dx,\, dz) = \mathrm{E} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} X(s,\, x,\, z)\, \nu(dz)\, dx\, ds.$$

On suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite :

Hypothèse (A). Il n'existe pas une constante $\varepsilon > 0$ telle que $\nu([-\varepsilon, \varepsilon]) = 0$.

Le premier théorème est une modification du Théorème 2.6.2 de [1].

Théorème 3.1.2. *Soit $Y = \{Y(t)\}_{t \geq 0}$ un processus donné par :*

$$Y(t) = \int_0^t \int_B \int_{\{0<|z|\leq 1\}} z\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz), \tag{3.1.1}$$

où $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$. *On suppose que la mesure* ν *satisfait l'hypothèse (A). Alors il existe une modification càdlàg* $\widetilde{Y}$ *de* Y *telle que pour chaque* $T > 0$ *:*

$$\sup_{0\le t\le T} |Y_n(t) - \widetilde{Y}(t)| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty \text{ presque sûrement,} \tag{3.1.2}$$

où $Y_n(t) = \int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} z\,\widehat{N}(ds,\,dx,\,dz)$, *pour une certaine suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $\varepsilon_n \downarrow 0$. *Par conséquent,*

$$\sup_{0\le t\le T} |Y_n(t-) - \widetilde{Y}(t-)| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty \text{ presque sûrement.} \tag{3.1.3}$$

Démonstration. On observe que Y_n est un processus càdlàg parce que

$$Y_n(t) = \int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} z\,N(ds,\,dx,\,dz) - t\,|B| \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} z\,\nu(dz) =: Y_{n,d}(t) + Y_{n,c}(t),$$

où le processus $Y_{n,d}$ est donné par une somme avec un nombre fini de termes (car B est borné) et le processus $Y_{n,c}$ est continu.

Soit $\varepsilon_n = \sup_n S_n$ où $S_n = \left\{\varepsilon > 0, I(\varepsilon) \le \dfrac{1}{8^n}\right\}$ et $I(\varepsilon) = \int_{\{0<|z|\le\varepsilon\}} z^2\,\nu(dz)$. On observe que I est une fonction croissante, $S_{n+1} \subset S_n$, et donc $\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_n$. De plus, $\varepsilon_n \downarrow 0$. (Pour voir cela, on suppose que $\varepsilon_n \downarrow \varepsilon^* > 0$. Alors $\frac{1}{8^n} \ge I(\varepsilon_n) \ge I(\varepsilon^*)$ pour chaque n, et donc $I(\varepsilon^*) = 0$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse (A).) Fixons $T > 0$. Alors pour tout $t \in [0,T]$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$Y_{n+1}(t) - Y_n(t) = \int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_{n+1}<|z|\le\varepsilon_n\}} z\,\widehat{N}(ds,\,dx,\,dz).$$

Puisque $\{Y_{n+1}(t) - Y_n(t);\, t \in [0,T]\}$ est une martingale càdlàg de moyenne 0 et de carré intégrable, alors, par l'inégalité de Doob (voir Corollaire 2.6 de [2]) :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)|^2\right) &\le 4\mathrm{E}\,|Y_{n+1}(T) - Y_n(T)|^2 \\ &= T\,|B| \int_{\{\varepsilon_{n+1}<|z|\le\varepsilon_n\}} z^2\nu(dz) \le 4\,T\,|B|\,\frac{1}{8^n}. \end{aligned}$$

Maintenant, en appliquant l'inégalité de Chebyshev, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{0\le t\le T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| \ge \frac{1}{2^n}\right) &\le 4^n\mathrm{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)|^2\right) \\ &\le 4\,T\,|B|\,\frac{1}{8^n}\,4^n = 4\,T\,|B|\,\frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

On considère la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'événements définies par $A_n = \left\{ \sup\limits_{0\leq t\leq T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| \right.$ $\left. \geq \frac{1}{2^n},\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Notons que $\sum\limits_{n\geq 1} P(A_n) < \infty$ car $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} < \infty$. Par le lemme de Borel-Cantelli, on déduit que $P(\overline{\lim_n} A_n) = 0$. Donc,

$$P\left(\underline{\lim_n} \sup_{0\leq t\leq T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| < \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

On note $\Omega_0 = \underline{\lim_n} A_n^c$ et on considère la norme $||\cdot||_\infty$ sur $D[0,T]$ définie par $||y||_\infty = \sup\limits_{0\leq t\leq T} |y(t)|$, pour tout y dans $D[0,T]$. Pour chaque $\omega \in \Omega_0$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ aléatoire tel que pour tout $n > n_0$, nous avons : $||Y_{n+1} - Y_n||_\infty \leq 2^{-n}$. Donc, par l'inégalité de Minkowski, pour tout $n, m \geq n_0$

$$||Y_n - Y_m||_\infty = \left|\left|\sum_{k=m}^{n-1} (Y_{k+1} - Y_k)\right|\right|_\infty \leq \sum_{k=m}^{n-1} ||Y_{k+1} - Y_k|\,|_\infty \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{2^k}.$$

On déduit que $\{Y_n(\cdot)\}_n$ est une suite de Cauchy dans $(D[0,T], ||\cdot||_\infty)$, donc elle converge dans cet espace. Notons par $\widetilde{Y}(\cdot)$ la limite de $Y_n(\cdot)$ dans $(D[0,T], ||\cdot||_\infty)$, c'est-à-dire $\sup\limits_{0\leq t\leq T} |Y_n(t) - \widetilde{Y}(t)| \longrightarrow 0$ presque sûrement quand $n \to \infty$. En particulier, pour chaque $t \in [0,T]$ fixé, $Y_n(t) \longrightarrow \widetilde{Y}(t)$ presque sûrement quand $n \longrightarrow \infty$. Remarquons que, par définition, la suite $Y_n(t) \longrightarrow Y(t)$ dans $L^2(\Omega)$ et donc il existe une sous-suite $(n_k)_k$ telle que $Y_{n_k}(t) \longrightarrow Y(t)$ presque sûrement. Par l'unicité de la limite, on a $Y(t) = \widetilde{Y}(t)$ presque sûrement. Finalement, la relation (3.1.3) est une conséquence directe du Lemme B.1.2 (Annexe B).

□

Le deuxième théorème est une modification du Théorème 4.3.4 de [1]. On considère un processus H qui satisfait l'hypothèse suivante :

Hypothèse (B). Ils n'existent pas $T > 0$ et $\varepsilon > 0$ telles que $H(\omega,\, t,\, x\,, z) = 0$ presque partout sur $\Omega \times [0,T] \times B \times \{z; |z| \leq \varepsilon\}$ par rapport à la mesure $P \times dt \times dx \times \nu(dz)$.

Théorème 3.1.3. *Soit $Y = \{Y(t)\}_{t\geq 0}$ un processus donné par :*

$$Y(t) = \int_0^t \int_B \int_{\{0<|z|\leq 1\}} H(s,x,z)\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz),$$

où $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ et $H = \{H(t,\, x,\, z);\, t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^d,\, z \in \mathbb{R}_0\}$ est un processus prévisible qui satisfait l'hypothèse (B) et

$$\mathrm{E} \int_0^t \int_B \int_{\{0<|z|\leq 1\}} |H(s,x,z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds < \infty, \ \textit{pour chaque}\ t > 0. \tag{3.1.4}$$

Alors pour chaque $T > 0$, il existe une modification càdlàg $\widetilde{Y}$ de Y telle que (3.1.2) et (3.1.3) ont lieu, où $Y_n(t) = \int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}} H(s,x,z)\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz)$, pour une certaine suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\varepsilon_n \downarrow 0$ (qui dépend de T).

Démonstration. On utilise le même raisonnement que pour le Théorème 3.1.2. On observe que Y_n est un processus càdlàg parce que

$$\begin{aligned} Y_n(t) \quad &= \quad \int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}} H(s,x,z)\, N(ds,\, dx,\, dz) - \\ &\quad\quad \int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}} H(s,x,z)\, \nu(dz)\, dx\, ds =: Y_{n,d}(t) - Y_{n,c}(t), \end{aligned}$$

où $Y_{n,d}$ est une somme avec un nombre fini de termes et $Y_{n,c}$ est continue. On note que $Y_{n,c}$ est bien définie car en utilisant Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}|Y_{n,c}(t)| \leq \mathrm{E} \int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}} |H(s,x,z)|\, \nu(dz)\, dx\, ds \\ &\leq \quad (t\, |B|\, \nu\{z; \varepsilon_n < |z| \leq 1\})^{1/2} \left(\mathrm{E} \int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}} |H(s,x,z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds \right)^{1/2} \\ &< \quad \infty. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon_n = \sup\, S_n$ où $S_n = \left\{ \varepsilon > 0, I(\varepsilon) \leq \dfrac{1}{8^n} \right\}$ et

$$I(\varepsilon) = \mathrm{E} \int_0^T \int_B \int_{\{0 < |z| \leq \varepsilon\}} |H(s,x,z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds.$$

On observe que I est une fonction croissante, $S_{n+1} \subset S_n$, et donc $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$. De plus, $\varepsilon_n \downarrow 0$. (Pour voir cela, on suppose par contradiction que $\varepsilon_n \downarrow \varepsilon^* > 0$. Alors $\frac{1}{8^n} \geq I(\varepsilon_n) \geq I(\varepsilon^*)$ pour chaque n, et donc $I(\varepsilon^*) = 0$. Il s'ensuit que $H(\omega, s, x, z) = 0$ presque partout, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (B).) Alors, pour tout $t \in [0,T]$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$Y_{n+1}(t) - Y_n(t) = \int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_{n+1} < |z| \leq \varepsilon_n\}} H(s,x,z)\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz).$$

Le processus $\{Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\}_{t\in[0,T]}$ est une martingale càdlàg de moyenne 0 et de carré intégrable. Par l'inégalité de Doob,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)|^2 \right) &\leq 4\mathrm{E}\, |Y_{n+1}(T) - Y_n(T)|^2 \\ = \quad &4\mathrm{E} \left(\int_0^T \int_B \int_{\{\varepsilon_{n+1} < |z| \leq \varepsilon_n\}} H(s,x,z)\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz) \right)^2 \end{aligned}$$

$$= \quad 4\mathrm{E}\left(\int_0^T \int_B \int_{\{\varepsilon_{n+1}<|z|\leq\varepsilon_n\}} |H(s,x,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\right) \leq \frac{4}{8^n}.$$

Maintenant, en appliquant l'inégalité de Chebyshev, nous obtenons :

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_{n+1}(t)-Y_n(t)| > \frac{1}{2^n}\right) \quad \leq \quad 4^n\mathrm{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_{n+1}(t)-Y_n(t)|^2\right) \leq \frac{4}{2^n}.$$

Le reste est comme dans la preuve du Théorème 3.1.2. On omet les détails.

□

Pour traiter le cas $B = \mathbb{R}^d$, on considère des boréliens bornés de $\mathbb{R}^d$ de la forme $K_a = [-a,a]^d$ pour $a > 0$. On introduit les hypothèses suivantes :

Hypothèse (C). Ils n'existent pas $T > 0$ et $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ telles que $H(\omega,\, t,\, x\,, z) = 0$ presque partout sur $\Omega \times [0,T] \times B^c \times \{z \in \mathbb{R}_0; |z| \leq 1\}$ par rapport à la mesure $P \times dt \times dx \times \nu(dz)$.

Hypothèse (D). Ils n'existent pas $T > 0$ et $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ telles que $K(\omega,\, t,\, x\,, z) = 0$ presque partout sur $\Omega \times [0,T] \times B^c \times \{z \in \mathbb{R}_0; |z| > 1\}$ par rapport à la mesure $P \times dt \times dx \times \nu(dz)$.

On a le résultat suivant :

Théorème 3.1.4. *Soit $Y = \{Y(t)\}_{t\geq 0}$ un processus donné par :*

$$\begin{aligned} Y(t) \quad &= \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\{|z|\leq 1\}} H(s,x,z)\,\widehat{N}(ds,\,dx,\,dz) + \\ &\quad\quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\{|z|>1\}} K(s,x,z)\,N(ds,\,dx,\,dz), \end{aligned}$$

où $H = \{H(t,\,x,\,z);\, t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^d,\, z \in \mathbb{R}_0\}$ est un processus prévisible qui satisfait l'hypothèse (C) et $K = \{K(t,\,x,\,z);\, t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^d,\, z \in \mathbb{R}_0\}$ est un processus prévisible qui satisfait l'hypothèse (D). On suppose que :

$$\mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\{|z|\leq 1\}} |H(s,x,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds < \infty,\ \textit{pour chaque}\ t > 0, \quad \textit{et} \tag{3.1.5}$$

$$\mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\{|z|>1\}} |K(s,x,z)|\,\nu(dz)\,dx\,ds < \infty,\ \textit{pour chaque}\ t > 0. \tag{3.1.6}$$

Alors, il existe une modification càdlàg $\widetilde{Y}$ de Y telle que pour chaque $T > 0$,

$$\sup_{0\leq t\leq T}|\widetilde{Y}_n(t) - \widetilde{Y}(t)| \longrightarrow 0,\ \textit{quand}\, n \longrightarrow \infty\ \ \textit{presque sûrement}, \tag{3.1.7}$$

où $\widetilde{Y}_n$ est une modification càdlàg du processus Y_n défini par :

$$Y_n(t) \quad = \quad \int_0^t \int_{E_n} \int_{\{|z|\leq 1\}} H(s,x,z)\,\widehat{N}(ds,\,dx,\,dz) +$$

$$\int_0^t \int_{E_n} \int_{\{|z|>1\}} K(s,x,z)\, N(ds,\, dx,\, dz) =: Y_n^{(1)}(t) + Y_n^{(2)}(t), \quad (3.1.8)$$

avec $E_n = K_{a_n}$, pour une certaine suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui dépend de T), avec $a_n \uparrow \infty$. Par conséquent,

$$\sup_{t\le T} |\widetilde{Y}_n(t-) - \widetilde{Y}(t-)| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty \text{ presque sûrement.} \quad (3.1.9)$$

Démonstration. Fixons $T > 0$. On considère l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} I(a) \quad = \quad & \mathrm{E} \int_0^T \int_{K_a^c} \int_{\{|z|\le 1\}} |H(s,x,z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds + \\ & \int_0^t \int_{K_a^c} \int_{\{|z|>1\}} K(s,x,z)\, \nu(dz)\, dx\, ds. \end{aligned}$$

On observe que la fonction est décroissante. Soit $a_n = \inf S_n$ où $S_n = \Big\{a > 0, I(a) \le \dfrac{1}{8^n}\Big\}$. On observe que $S_{n+1} \subset S_n$, et $a_n \le a_{n+1}$, pour chaque n. De plus, $a_n \uparrow \infty$. (Pour voir cela, on suppose par contradiction que $a_n \uparrow a^* < \infty$. Alors $\frac{1}{8^n} \ge I(a_n) \ge I(a^*)$ pour chaque n, et donc $I(a^*) = 0$. Il s'ensuit que $H(\omega,s,x,z) = 0$ (ou $K(\omega,s,x,z) = 0$) presque partout sur $\Omega \times [0,\, T] \times K_a^c \times \{z; |z| \le 1\}$ (ou sur $\Omega \times [0,\, T] \times K_a^c \times \{z; |z| > 1\}$), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (C) (ou (D)).) On considère maintenant les processus $Y_n, Y_n^{(1)}$ et $Y_n^{(2)}$ donné par (3.1.8) avec $E_n = K_{a_n}$ où a_n est défini ci-dessus. Soit $\widetilde{Y}_n^{(1)}(t)$ la modification càdlàg de $Y_n^{(1)}(t)$ donné par le Théorème 3.1.3. Le processus $\Big\{\widetilde{Y}_{n+1}^{(1)}(t) - \widetilde{Y}_n^{(1)}(t)\Big\}_{t\in[0,T]}$ est une martingale càdlàg de moyenne 0 et de carré intégrable. Par l'inégalité de Doob, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\sup_{t\le T}\left|\widetilde{Y}_{n+1}^{(1)}(t) - \widetilde{Y}_n^{(1)}(t)\right|^2\right) \quad & \le \quad 4\,\mathrm{E}\left|\widetilde{Y}_{n+1}^{(1)}(T) - \widetilde{Y}_n^{(1)}(T)\right|^2 \\ & = \quad 4\,\mathrm{E}\left|Y_{n+1}^{(1)}(T) - Y_n^{(1)}(T)\right|^2 \\ & = \quad 4\mathrm{E}\int_0^T \int_{K_{a_{n+1}}\setminus K_{a_n}} \int_{\{|z|\le 1\}} |H(s,x,z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds \\ & \le \quad 4\, I(a_n) \le \frac{4}{8^n}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Chebyshev, nous obtenons :

$$P\left(\sup_{t\le T}\left|\widetilde{Y}_{n+1}^{(1)}(t) - \widetilde{Y}_n^{(1)}(t)\right| > \frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad \le \quad 4^{n+1}\,\mathrm{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)|^2\right)$$

$$\leq \frac{16}{2^n}. \tag{3.1.10}$$

Le processus $\left\{Y_n^{(2)(t)}\right\}_{t\in[0,T]}$ est càdlàg, et on a :

$$\left|Y_{n+1}^{(2)}(t) - Y_n^{(2)}(t)\right| \leq \int_0^t \int_{K_{a_{n+1}}\setminus K_{a_n}} \int_{\{|z|>1\}} |K(s,\, x,\, z)|\, N(ds,\, dx,\, dz),$$

pour chaque $t \in [0, T]$. Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|Y_{n+1}^{(2)}(t) - Y_n^{(2)}(t)\right|\right) &\leq \mathrm{E}\int_0^T \int_{K_{a_{n+1}}\setminus K_{a_n}} \int_{\{|z|>1\}} |K(s,\, x,\, z)|\, N(ds,\, dx,\, dz) \\ &= \mathrm{E}\int_0^T \int_{K_{a_{n+1}}\setminus K_{a_n}} \int_{\{|z|>1\}} |K(s,\, x,\, z)|\, \nu(dz)\, dx\, ds \\ &\leq I(a_n) \leq \frac{1}{8^n}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Markov, on a :

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{t\leq T}\left|\widetilde{Y}_{n+1}^{(2)}(t) - \widetilde{Y}_n^{(2)}(t)\right| > \frac{1}{2^{n+1}}\right) &\leq 2^{n+1}\mathrm{E}\left(\left|Y_{n+1}^{(2)}(t) - Y_n^{(2)}(t)\right|\right) \\ &\leq \frac{2}{4^n}. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

On note $\widetilde{Y}_n(t) := \widetilde{Y}_n^{(1)}(t) + Y_n^{(2)}(t)$. Alors $\widetilde{Y}_n$ est une modification càdlàg de Y_n et $\widetilde{Y}_{n+1}(t) - \widetilde{Y}_n(t) = \left(\widetilde{Y}_{n+1}^{(1)}(t) - \widetilde{Y}_n^{(1)}(t)\right) + \left(\widetilde{Y}_{n+1}^{(2)}(t)) - \widetilde{Y}_n^{(2)}(t)\right)$. En utilisant (3.1.10) et (3.1.11), on obtient :

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{t\leq T}\left|\widetilde{Y}_{n+1}(t) - \widetilde{Y}_n(t)\right| > \frac{1}{2^n}\right) &\leq P\left(\sup_{t\leq T}\left|\widetilde{Y}_{n+1}^{(1)}(t) - \widetilde{Y}_n^{(1)}(t)\right| > \frac{1}{2^n}\right) \\ &+ P\left(\sup_{t\leq T}\left|\widetilde{Y}_{n+1}^{(2)}(t) - \widetilde{Y}_n^{(2)}(t)\right| > \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{16}{2^n} + \frac{2}{4^n}, \end{aligned}$$

qui est sommable. Comme dans la preuve du Théorème 3.1.3, par le lemme de Borel Cantelli, on conclut qu'il existe un processus càdlàg $\widetilde{Y}$ qui est la limite de $\widetilde{Y}_n$ dans $(D[0,T], ||\cdot||_\infty)$, c'est-à-dire $\sup_{t\leq T}\left|\widetilde{Y}_n(t) - \widetilde{Y}(t)\right| \to 0$ presque sûrement quand $n \to \infty$. Comme $\widetilde{Y}_n(t) = Y_n(t)$ presque sûrement et $\{Y_n(t)\}_n$ converge vers $Y(t)$ dans $L^1(\Omega)$ (parce que $Y_n^{(1)}(t) \to Y^{(1)}(t)$ dans $L^2(\Omega)$ et $Y_n^{(2)}(t) \to Y^{(2)}(t)$ dans $L^1(\Omega)$), on conclut que $Y(t) = \widetilde{Y}(t)$ presque sûrement pour chaque $t \in [0, T]$. La dernière convergence s'en suit du Lemme B.1.2 (Annexe B).

□

Finalement, dans le dernier résultat de cette section, on considère le cas $H = K$. On introduit maintenant l'hypothèse suivante :

Hypothèse (E). Ils n'existent pas $T > 0$ et $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ telles que $H(\omega, t, x, z) = 0$ presque partout sur $\Omega \times [0,T] \times B^c \times \mathbb{R}_0$ par rapport à la mesure $P \times dt \times dx \times \nu(dz)$.

On a le résultat suivant :

Théorème 3.1.5. *Soit $Y = \{Y(t)\}_{t\geq 0}$ un processus donné par :*

$$Y(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} H(s,x,z)\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz), \tag{3.1.12}$$

où $H = \{H(t,\, x,\, z);\, t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^d,\, z \in \mathbb{R}_0\}$ est un processus prévisible qui satisfait l'hypothèse (E) et

$$\mathrm{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |H(s,x,z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds < \infty, \text{ pour chaque } t > 0. \tag{3.1.13}$$

Alors il existe une modification càdlàg $\widetilde{Y}$ de Y telle que pour chaque $T > 0$, les relations (3.1.7) *et* (3.1.9) *ont lieu, où $\widetilde{Y}_n$ est une modification càdlàg du processus Y_n défini par :*

$$Y_n(t) = \int_0^t \int_{E_n} \int_{\mathbb{R}_0} H(s,x,z)\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz), \tag{3.1.14}$$

avec $E_n = K_{a_n}$, pour une certaine suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui dépend de T), avec $a_n \uparrow \infty$.

Démonstration. Fixons $T > 0$. On utilise un raisonnement similaire à celui donné dans la preuve du Théorème 3.1.4. On considère l'intégrale

$$I(a) = \mathrm{E} \int_0^T \int_{K_a^c} \int_{\mathbb{R}_0} |H(s,\, x,\, z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds.$$

Soit $a_n = \inf\{a > 0; I(a) \leq \frac{1}{8^n}\}$. Par l'hypothèse (E), $a_n \uparrow \infty$. Soit Y_n le processus donné par (3.1.14) avec $E_n = K_{a_n}$. On écrit $Y_n(t) = Y_n^{(1)}(t) + Y_n^{(2)}(t)$, où

$$\begin{aligned} Y_n^{(1)}(t) &= \mathrm{E} \int_0^t \int_{K_{a_n}} \int_{\{|z|\leq 1\}} |H(s,x,z)|\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz), \\ Y_n^{(2)}(t) &= \mathrm{E} \int_0^t \int_{K_{a_n}} \int_{\{|z|> 1\}} |H(s,x,z)|\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz). \end{aligned}$$

On observe que $Y_n^{(2)}$ est un processus càdlàg. Soit $\widetilde{Y}_n^{(1)}$ la modification càdlàg de $Y_n^{(1)}$ donnée par le Théorème 3.1.3. Alors $\widetilde{Y}_n = \widetilde{Y}_n^{(1)} + Y_n^{(2)}$ est une modification càdlàg de Y_n. Le processus $\widetilde{Y}_{n+1} - \widetilde{Y}_n$ est une martingale càdlàg de moyenne 0 et de carré intégrable. Par l'inégalité de Doob, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sup_{t\leq T} |\widetilde{Y}_{n+1}(t) - \widetilde{Y}_n(t)|^2\right) &\leq 4\mathrm{E}\int_0^T \int_{K_{a_{n+1}}\setminus K_{a_n}} \int_{\mathbb{R}_0} |H(s,\, x,\, z)|^2 \,\nu(dz)\,dx\,ds \\
&\leq \frac{4}{8^n}.
\end{aligned}$$

Le résultat s'en suit comme dans la preuve du Théorème 3.1.3.

□

3.2 Formules d'Itô

Dans cette section nous allons introduire une variante de la formule d'Itô présentée dans [1].

Notre premier résultat est une modification du Lemme 4.4.5 de [1]. Si $\{x(t)\}_{t\geq 0}$ est une fonction càdlàg, on note par $x(t-) = \lim_{s\uparrow t} x(s)$ la limite à gauche au point t, et $\Delta x(t) = x(t) - x(t-)$ le saut au point t.

Lemme 3.2.1. *Soit*

$$Y(t) = \int_0^t \int_B \int_\Gamma K(s,\, x,\, z) N(ds,\, dx, dz)$$

où $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$, Γ est un ensemble de $\mathbb{R}_0$, borné inférieurement (par exemple $\Gamma = \{z \in \mathbb{R}; |z| > \varepsilon\}$) et $K = \{K(t,\, x,\, z); t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{R}_0\}$ est un processus prévisible. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, et pour chaque $t \geq 0$, nous avons :

$$f(Y(t)) - f(Y(0)) = \int_0^t \int_B \int_\Gamma \left[f(Y(s-) + K(s,\, x,\, z)) - f(Y(s-))\right] N(ds,\, dx,\, dz).$$

Démonstration. On commence par spécifier les points de la mesure N dans $\mathbb{R}_+ \times B \times \Gamma$. Soient $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ les points d'une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $|B|\,\nu(\Gamma)$ et $\{(X_i,\, Z_i)\}_{i\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur $B\times\Gamma$ de loi $\dfrac{\mathrm{Leb}|_{\mathrm{B}} \cdot \nu|_\Gamma}{|B|\nu(\Gamma)}$ telles que les variables $(T_i)_{i\geq 1}$ et $\{(X_i,\, Z_i)\}_{i\geq 1}$ sont indépendantes. Alors, d'après la Proposition 5.3 de [28], $N|_{\mathbb{R}_+\times B\times\Gamma}$ est une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $\mathrm{Leb}|_{\mathbb{R}_+} \times \mathrm{Leb}|_{\mathrm{B}} \times \nu|_\Gamma$, et on a :

$$N|_{\mathbb{R}_+\times B\times\Gamma} = \sum_{i\geq 1} \delta_{(T_i, X_i, Z_i)}. \tag{3.2.1}$$

En utilisant cette représentation de N on obtient :

$$Y(t) = \sum_{i\geq 1} K(T_i,\, X_i,\, Z_i)\, 1_{\{T_i\leq t\}}.$$

Remarquons que pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $t \longmapsto Y(\omega, t)$ est une fonction càdlàg étagée donnée par :

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n-1} K(T_i,\, X_i,\, Z_i) 1_{\{T_{n-1}\leq t<T_n\}} \quad \text{avec} \quad T_0 = 0.$$

Nous en déduisons que $\Delta Y(T_n) = K(T_n, X_n, Z_n)$. Notons aussi que

$$Y(T_n-) = \sum_{i=1}^{n-1} K(T_i,\, X_i,\, Z_i) = Y(T_{n-1}), \tag{3.2.2}$$

et $Y(T_n) = Y(T_n-) + \Delta Y(T_n)$. On a pour chaque $t > 0$:

$$f(Y(t)) - f(Y(0)) = \sum_{i\geq 1} \left[f(Y(T_i)) - f(Y(T_{i-1}))\right]\, 1_{\{T_i\leq t\}}. \tag{3.2.3}$$

Pour montrer cette relation, on observe que les ensembles $\{T_{n-1} \leq t < T_n\}\, n \geq 1$, forment une partition de Ω. Pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $t \mapsto Y(\omega, t)$ est constante sur l'intervalle $[T_{n-1}(\omega), T_n(\omega))$. Donc, si $T_{n-1} \leq t < T_n$:

$$\begin{aligned}
f(Y(t)) - f(Y(0)) &= \sum_{i=1}^{n-1} \left[f(Y(T_i)) - f(Y(T_{i-1}))\right] + \left[f(Y(t)) - f(Y(T_{i-1}))\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} [f(Y(T_i)) - f(Y(T_{i-1}))] = \sum_{i\geq 1} [f(Y(T_i)) - f(Y(T_{i-1}))] 1_{\{T_i\leq t\}}.
\end{aligned}$$

Ceci montre (3.2.3).

En utilisant (3.2.3) on obtient :

$$\begin{aligned}
f(Y(t)) - f(Y(0)) &= \sum_{i\geq 1} \left[f(Y(T_i-) + \Delta Y(T_i)) - f(Y(T_{i-1}))\right]\, 1_{\{T_i\leq t\}} \\
&= \sum_{i\geq 1} \left[f(Y(T_i-) + K(T_i, X_i, Z_i)) - f(Y(T_i-))\right]\, 1_{\{T_i\leq t\}} \\
&= \int_0^t \int_B \int_\Gamma \left[f(Y(s-) + K(s,\, x,\, z)) - f(Y(s-))\right] \sum_{i\geq 1} \delta_{(T_i, X_i, Z_i)}\, (ds,\, dx,\, dz) \\
&= \int_0^t \int_B \int_\Gamma \left[f(Y(s-) + K(s,\, x,\, z)) - f(Y(s-))\right]\, N(ds,\, dx,\, dz).
\end{aligned}$$

□

Le résultat suivant est une variante du Lemme 4.4.6 de [1].

Lemme 3.2.2. *Soit*

$$Y(t) = \int_0^t G(s)ds + \int_0^t \int_B \int_\Gamma K(s,\, x,\, z) N(ds,\, dx, dz)$$

où B, Γ et K sont comme dans le Lemme 3.2.1 et $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est un processus prévisible tel que :

$$\mathrm{E} \int_0^t |G(s)|\, ds < \infty, \text{ pour tout } \ t \geq 0. \tag{3.2.4}$$

Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, et pour chaque $t \geq 0$, nous avons :

$$f(Y(t)) - f(Y(0)) = \int_0^t f^{'}(Y(s))\, G(s)\, ds +$$
$$\int_0^t \int_B \int_\Gamma [f(Y(s-) + K(s,\, x,\, z)) - f(Y(s-))]\ N(ds,\, dx,\, dz).$$

Démonstration. On considère la même représentation $N|_{\mathbb{R}_+ \times B \times \Gamma} = \sum_{i\geq 1} \delta_{(T_i, X_i, Z_i)}$ comme dans le Lemme 3.2.1. Soit $Y(t) =: Y_c(t) + Y_d(t)$, où

$$\begin{cases} Y_c(t) = \displaystyle\int_0^t G(s)ds\,, \\ Y_d(t) = \displaystyle\int_0^t \int_B \int_\Gamma K(s,\, x,\, z)\, N(ds,\, dx, dz)\,. \end{cases}$$

Le processus Y_d est comme dans le Lemme 3.2.1. Notons que pour $T_{n-1} \leq t < T_n$, on a :

$$f(Y(t)) - f(Y(0)) \ = \ \sum_{i=1}^{n-1} [f(Y(T_i)) - f(Y(T_{i-1}))] + [f(Y(t)) - f(Y(T_{n-1}))].$$

On observe que :

$$\Delta Y(T_i) = \Delta Y_d(T_i) = K(T_i, X_i, Z_i). \tag{3.2.5}$$

On écrit $f(Y(t)) - f(Y(0)) = A(t) + B(t)$ avec :

$$\begin{cases} A(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} [f(Y(T_i)) - f(Y(T_i-))] \quad \text{si } T_{n-1} \leq t < T_n \\ B(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} [f(Y(T_i-)) - f(Y(T_{i-1}))] + [f(Y(t)) - f(Y(T_{n-1}))],\ T_{n-1} \leq t < T_n. \end{cases}$$

On va traiter les processus A et B séparément. Pour le processus A, on a :

$$A(t) = \sum_{i=1}^{n-1} [f(Y(T_i)) - f(Y(T_i-))] = \sum_{i=1}^{n-1} [f(Y(T_i-) + \Delta Y(T_i)) - f(Y(T_i-))]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-1} [f(Y(T_i-) + \Delta Y_d(T_i)) - f(Y(T_i-))] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} [f(Y(T_i-) + K(T_i, X_i, Z_i)) - f(Y(T_i-))] \\
&= \int_0^t \int_B \int_\Gamma [f(Y(s-) + K(s,\, x,\, z)) - f(Y(s-))]\, N(ds,\, dx,\, dz),
\end{aligned}
$$

où on a utilisé (3.2.5) pour la troisième égalité.

Il reste à montrer que $B(t) = \int_0^t f'(Y(s))\, G(s)\, ds$. On note que $Y_c'(s) = G(s)$. Donc il suffit de montrer que

$$
B(t) = \int_0^t f'(Y(s)) dY_c(s). \tag{3.2.6}
$$

Si $T_{n-1} \le t < T_n$, alors on a :

$$
\begin{aligned}
\int_0^t f'(Y(s))\, dY_c(s) &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{T_{i-1}}^{T_i} f'(Y(s))\, dY_c(s) + \int_{T_{n-1}}^t f'(Y(s))\, dY_c(s) \\
&=: I + II.
\end{aligned} \tag{3.2.7}
$$

On va traiter les deux termes précédents séparément. On observe que

$$
Y_d(s) = Y_d(T_{i-1}) \ \text{ si } \ T_{i-1} < s < T_i. \tag{3.2.8}
$$

Pour chaque i, $1 \le i \le n-1$, on a :

$$
\begin{aligned}
\int_{T_{i-1}}^{T_i} f'(Y(s))\, dY_c(s) &= \int_{(T_{i-1}, T_i)} f'(Y(s))\, Y_c'(s)\, ds \\
&= \int_{(T_{i-1}, T_i)} f'(Y_c(s) + Y_d(s))\, Y_c'(s)\, ds \\
&= \int_{(T_{i-1}, T_i)} f'(Y_c(s) + Y_d(T_{i-1}))\, Y_c'(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

On considère le processus g_i défini par $g_i(s) = Y_c(s) + Y_d(T_{i-1})$ si $T_{i-1} < s < T_i$. Alors $g_i'(s) = Y_c'(s)$ si $T_{i-1} < s < T_i$. On en déduit que :

$$
\begin{aligned}
\int_{T_{i-1}}^{T_i} f'(Y(s))\, dY_c(s) &= \int_{(T_{i-1}, T_i)} f'(g_i(s))\, g_i'(s)\, ds = f(g_i(T_i)) - f(g_i(T_{i-1})) \\
&= f(Y_c(T_i) + Y_d(T_{i-1})) - f(Y_c(T_{i-1}) + Y_d(T_{i-1})).
\end{aligned}
$$

On observe que

$$
Y_d(T_i-) = Y_d(T_{i-1})
$$

(voir la relation (3.2.2) dans la preuve du Lemme 3.2.1, appliquée au processus Y_d). Donc $Y_c(T_i) + Y_d(T_{i-1}) = Y_c(T_i-) + Y_d(T_i-) = Y(T_i-)$, et on en déduit que

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} f^{'}(Y(s))\, dY_c(s) = f(Y(T_i-)) - f(Y(T_{i-1})). \tag{3.2.9}$$

Par conséquent,

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} [f(Y(T_i-)) - f(Y(T_{i-1}))]. \tag{3.2.10}$$

Pour le deuxième terme, on va montrer que :

$$II = f(Y(t)) - f(Y(T_{n-1})). \tag{3.2.11}$$

Cette relation est claire si $t = T_{n-1}$ parce que dans ce cas, les deux termes sont nuls. Si $T_{n-1} < t < T_n$ alors,

$$\begin{aligned}
II &= \int_{T_{n-1}}^{t} f^{'}(Y(s))\, Y_c^{'}(s)\, ds = \int_{(T_{n-1},t)} f^{'}(Y_c(s) + Y_d(s))\, Y_c^{'}(s)\, ds \\
&= \int_{(T_{n-1},t)} f^{'}(Y_c(s) + Y_d(T_{n-1}))\, Y_c^{'}(s)\, ds = \int_{(T_{n-1},t)} f^{'}(g(s))\, g^{'}(s) ds \\
&= f(g(t)) - f(g(T_{n-1})) = f(Y_c(t) + Y_d(T_{n-1})) - f(Y_c(T_{n-1}) + Y_d(T_{n-1})) \\
&= f(Y_c(t) + Y_d(t)) - f(Y(T_{n-1})) = f(Y(t)) - f(Y(T_{n-1})),
\end{aligned}$$

avec $g(s) = Y_c(s) + Y_d(T_{n-1})$, où on a utilisé la relation (3.2.8) pour l'avant dernière égalité, parce que $T_{n-1} < t < T_n$. En utilisant (3.2.7), (3.2.10) et (3.2.11), on conclut que :

$$\begin{aligned}
\int_0^t f^{'}(Y(s)) dY_c(s) &= \sum_{i=1}^{n-1} [f(Y(T_i-)) - f(Y(T_{i-1}))] + f(Y(t)) - f(Y(T_{n-1})) \\
&= B(t).
\end{aligned}$$

Ceci finit la preuve de (3.2.6), ce qui complète la preuve.

□

Nous allons maintenant introduire une variante de la formule d'Itô présentée dans le Théorème 4.4.7 de [1].

Théorème 3.2.3. *Soit $Y = \{Y(t)\}_{t\geq 0}$ un processus défini par :*

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \int_0^t G(s)\, ds + \int_0^t \int_B \int_{\{|z|\leq 1\}} H(s,\, x,\, z)\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz) \\
&+ \int_0^t \int_B \int_{\{|z|>1\}} K(s,\, x,\, z)\, N(ds,\, dx,\, dz),
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

où $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $G = \{G(t); t \geq 0\}, H = \{H(t, x, z); t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{R}_0\}$ *et* $K = \{K(s, x, z); t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{R}_0\}$ *sont des processus prévisibles, G satisfait* (3.2.4) *et H satisfait* (3.1.4).

On considère la modification càdlàg du processus Y (notée aussi par Y) obtenue en utilisant le Théorème 3.1.3 pour le deuxième terme de Y(t). Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *et pour chaque* $t \geq 0$*, nous avons presque sûrement :*

$$\begin{aligned}
& f(Y(t)) - f(Y(0)) = \\
& \quad \int_0^t \int_B \int_{\{|z|>1\}} [f(Y(s-) + K(s, x, z)) - f(Y(s-))] \, N(ds, dx, dz) \\
+ & \quad \int_0^t \int_B \int_{\{|z|\leq 1\}} [f(Y(s-) + H(s, x, z)) - f(Y(s-))] \, \widehat{N}(ds, dx, dz) \\
+ & \quad \int_0^t \int_B \int_{\{|z|\leq 1\}} \Big[f(Y(s) + H(s, x, z)) - f(Y(s)) \\
- & \quad H(s, x, z) \, f'(Y(s))\Big] \, \nu(dz) \, dx \, ds + \int_0^t f'(Y(s)) \, G(s) ds \\
:= & \quad T_1 + T_2 + T_3 + T_4.
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Démonstration. On suppose que H satisfait l'hypothèse (B). (Dans le cas contraire, le résultat s'ensuit par le Lemme 3.2.2.) On fixe $t > 0$ et pour chaque $n \geq 1$, on considère le processus càdlàg $\{Y_n(s)\}_{s \in [0,t]}$ défini par :

$$\begin{aligned}
Y_n(s) = & \int_0^s G(r) \, dr + \int_0^s \int_B \int_{\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}} H(r, x, z) \, \widehat{N}(dr, dx, dz) \\
+ & \int_0^s \int_B \int_{\{|z|>1\}} K(r, x, z) \, N(dr, dx, dz),
\end{aligned}$$

où $(\varepsilon_n)_n$ est la suite donnée par le Théorème 3.1.3 avec $T = t$. Pour simplifier l'écriture, notons par $G_1(r) = \int_B \int_{\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}} -H(r, x, z) \, \nu(dz) \, dx$, $\overline{G}(r) = G_1(r) + G(r)$ et $\overline{K}(r, x, z) = H(r, x, z) \, 1_{\{|z|\leq 1\}} + K(r, x, z) \, 1_{\{|z|>1\}}$. Donc on a :

$$\begin{aligned}
Y_n(s) &= \int_0^s \overline{G}(r) dr + \int_0^s \int_B \int_{\{|z|>\varepsilon_n\}} \overline{K}(r, x, z) \, N(dr, dx, dz) \\
&= : Y_{n,c}(t) + Y_{n,d}(t).
\end{aligned}$$

Par le Théorème 3.1.3 on a :

$$\sup_{s\leq t} |Y_n(s) - \widetilde{Y}(s)| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty \text{ presque sûrement,} \tag{3.2.14}$$

$$\sup_{s\leq t} |Y_n(s-) - \widetilde{Y}(s-)| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty \text{ presque sûrement.} \tag{3.2.15}$$

Nous allons appliquer le Lemme 3.2.2 avec $(\overline{K}, \overline{G})$ à la place de (K, G) et l'ensemble $\Gamma = \{z; |z| > \varepsilon_n\}$. Pour pouvoir appliquer le Lemme 3.2.2, nous devons montrer que : $i)$ $\overline{G}$ est prévisible et $ii)$ $\mathrm{E}\int_0^t |\overline{G}(r)|dr < \infty$.
Pour $i)$, notons que l'application $(\omega; r, x, z) \mapsto H(\omega; r, x, z)$ est $\mathscr{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}-$ mesurable, et puisque $\mathscr{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0} \subset \mathscr{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_0)$, on déduit alors par le théorème de Fubini que l'application $(\omega; r) \mapsto \int_B \int_{\varepsilon_n<|z|\le 1} -H(r,\, x,\, z)\,\nu(dz)\,dx$ est $\mathscr{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+}-$ mesurable. Pour $ii)$, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$|G_1(r)|^2 \le \left(\int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} H^2(r,\, x,\, z)\,\nu(dz)\,dx\right)\left(\int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} 1^2\,\nu(dz)\,dx\right).$$

Notons que $C_n := \int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} 1^2\,\nu(dz)\,dx < \infty$ et par conséquent

$$\mathrm{E}\int_0^t |G_1(r)|^2 dr \le C_n\,\mathrm{E}\int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} H^2(r,\, x,\, z)\,\nu(dz)\,dx\,dr < \infty.$$

Une autre application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que :

$$\mathrm{E}\int_0^t |G_1(r)|\,dr \le \left(\mathrm{E}\int_0^t |G_1(r)|^2\,dr\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Par l'application du Lemme 3.2.2, on obtient :

$$\begin{aligned} f(Y_n(t)) - f(Y_n(0)) &= \int_0^t f'(Y_n(s))\,\overline{G}(s)\,ds \\ &+ \int_0^t \int_B \int_{\{|z|>\varepsilon_n\}} \left[f(Y_n(s-) + \overline{K}(s,\, x,\, z)) - f(Y_n(s-))\right] N(ds,\, dx,\, dz). \end{aligned}$$

En utilisant les définitions de $\overline{K}$ et $\overline{G}$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(Y_n(t)) - f(Y_n(0)) &= \int_0^t f'(Y_n(s))\left(\int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} -H(s,\, x,\, z)\,\nu(dz)\,dx\right)ds \\ &+ \int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} [f(Y_n(s-) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y_n(s-))]\, N(ds,\, dx,\, dz) \\ &+ \int_0^t \int_B \int_{\{|z|>1\}} [f(Y_n(s-) + K(s,\, x,\, z)) - f(Y_n(s-))]\, N(ds,\, dx,\, dz) \\ &+ \int_0^t f'(Y_n(s))\,G(s)\,ds. \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Maintenant on rajoute et on soustrait au membre de droite de (3.2.16), la quantité $\int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} [f(Y_n(s) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y_n(s)]\,\nu(dz)\,dx\,ds$. On obtient :

$$f(Y_n(t)) - f(Y_n(0)) =$$

$$
\begin{aligned}
& \int_0^t \int_B \int_{\{|z|>1\}} [f(Y_n(s-) + K(s,\, x,\, z)) - f(Y_n(s-))]\; N(ds,\, dx,\, dz) \\
+ \quad & \int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} [f(Y_n(s-) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y_n(s-))]\; \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz) \\
+ \quad & \int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} [f(Y_n(s) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y_n(s)) \\
- \quad & H(s,\, x,\, z)\, f'(Y_n(s))\Big]\; \nu(dz)\, dx\, ds + \int_0^t f'(Y_n(s))\, G(s)\, ds \\
=: \quad & T_{1,n} + T_{2,n} + T_{3,n} + T_{4,n}. \qquad (3.2.17)
\end{aligned}
$$

Par la relation (3.2.14) et la continuité de f, le membre de gauche de (3.2.17) converge presque sûrement vers $f(Y(t)) - f(Y(0))$. Il nous reste à prouver le passage à la limite pour le membre de droit.

On considère deux cas : $a)$ f' et f'' sont bornées ; $b) f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est arbitraire.
$a)$ On note $||f'||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ et $||f''||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$. Pour le premier terme, remarquons que :

$$T_{1,n} = \sum_{T_i\le t,\, X_i\in B,\, |Z_i|>1} [f(Y_n(T_i-) + K(T_i,\, X_i,\, Z_i)) - f(Y_n(T_i-))]\,.$$

Notons alors que $T_{1,n}$ est une somme avec un nombre fini de terme (voir la preuve du Lemme 3.2.1). En utilisant la relation (3.2.15) et la continuité de f, on voit que $T_{1,n} \longrightarrow T_1$ presque sûrement.

On traite maintenant le deuxième terme. On va montrer que $T_{2,n} \longrightarrow T_2$ dans $L^2(\Omega)$ (et donc $T_{2,n_k} \longrightarrow T_2$ presque sûrement pour une sous-suite $\{n_k\}_k$). On observe que : $\mathrm{E}|T_{2,n} - T_2|^2 \le 2(A_n + B_n)$, où :

$$
\begin{aligned}
A_n &= \mathrm{E}\left|\int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} (V_n - V)(s,\, x,\, z)\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz)\right|^2 \\
&= \mathrm{E}\int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\le 1\}} |(V_n - V)(s,\, x,\, z)|^2\; \nu(dz) dx\, ds, \\
B_n &= \mathrm{E}\left|\int_0^t \int_B \int_{\{0<|z|\le \varepsilon_n\}} V(s,\, x,\, z)\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz)\right|^2 \\
&= \mathrm{E}\int_0^t \int_B \int_{\{0<|z|\le \varepsilon_n\}} |V(s,\, x,\, z)|^2\; \nu(dz) dx\, ds,
\end{aligned}
$$

avec $V_n(s,\, x,\, z) = f(Y_n(s) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y_n(s))$ et $V(s,\, x,\, z) = f(Y(s) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y(s))$. Pour étudier A_n, on observe premièrement que par la relation (3.2.14) et la continuité de f :

$$V_n(s,\, x,\, z) \to V(s,\, x,\, z) \text{ presque sûrement pour chaque } (s,\, x,\, z). \qquad (3.2.18)$$

On utilise la formule de Taylor de premier ordre donnée par

$$f(b) - f(a) = (b-a)\int_0^1 f^{'}(a + \theta(b-a))\, d\theta. \tag{3.2.19}$$

Donc,

$$\begin{aligned} V_n(s,\, x,\, z) - V(s,\, x,\, z) &= H(s,\, x,\, z)\int_0^1 \Big[f^{'}(Y_n(s) + \theta H(s,\, x,\, z)) \\ &- f^{'}(Y(s) + \theta H(s,\, x,\, z))\Big]\, d\theta. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |V_n(s,\, x,\, z) - V(s,\, x,\, z)|^2 &\leq |H(s,\, x,\, z)|^2 \int_0^1 \Big|f^{'}(Y_n(s) + \theta H(s,\, x,\, z)) \\ &- f^{'}(Y(s) + \theta H(s,\, x,\, z))\Big|^2\, d\theta. \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Cette dernière intégrale est bornée par $||f^{'}||_\infty^2$. Une application du théorème de convergence dominée montre que $A_n \longrightarrow 0$, parce que le processus H satisfait l'hypothèse (3.1.4). Pour traiter B_n, on note que, par la formule de Taylor (3.2.19) :

$$V(s,\, x,\, z) = H(s,\, x,\, z)\int_0^1 f^{'}(Y(s) + \theta H(s,\, x,\, z))\, d\theta, \tag{3.2.21}$$

et donc $|V(s,\, x,\, z)| \leq ||f^{'}||_\infty\, |H(s,\, x,\, z)|$. Par le théorème de convergence dominée, il s'ensuit que $B_n \longrightarrow 0$.

Pour le troisième terme, on va montrer que $T_{3,n} \longrightarrow T_3$ dans $L^1(\Omega)$ (et donc $T_{3,n_k} \longrightarrow T_3$ presque sûrement pour une sous suite $\{n_k\}_k$). On observe que $\mathrm{E}|T_{3,n} - T_3| \leq C_n + D_n$, où

$$\begin{aligned} C_n &= \mathrm{E}\int_0^t \int_B \int_{\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}} |U_n(s,\, x,\, z) - U(s,\, x,\, z)|\; \nu(dz)\, dx\, ds, \\ D_n &= \mathrm{E}\int_0^t \int_B \int_{\{0 < |z| \leq \varepsilon_n\}} |U(s,\, x,\, z)|\; \nu(dz)\, dx\, ds, \end{aligned}$$

avec

$$U_n(s,\, x,\, z) = f(Y_n(s) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y_n(s)) - H(s,\, x,\, z)\, f^{'}(Y_n(s)), \tag{3.2.22}$$

$$U(s,\, x,\, z) = f(Y(s) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y(s)) - H(s,\, x,\, z)\, f^{'}(Y(s)). \tag{3.2.23}$$

Par la relation (3.2.14) et la continuité de f et $f^{'}$, on a :

$$U_n(s,\, x,\, z) \to U(s,\, x,\, z) \quad \text{presque sûrement pour chaque } (s,\, x,\, z). \tag{3.2.24}$$

On utilise la formule de Taylor de deuxième ordre de la forme :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f^{'}(a) + (b-a)^2 \int_0^1 f^{''}(a+\theta(b-a))\,(1-\theta)\,d\theta. \tag{3.2.25}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |U_n(s,\,x,\,z) - U(s,\,x,\,z)| \;&\leq\; |H(s,\,x,\,z)|^2 \int_0^1 \Big| f^{''}(Y_n(s-) + \theta\, H(s,\,x,\,z)) \\ &- \; f^{''}(Y(s-) + \theta\, H(s,\,x,\,z)) \Big|\, d\theta. \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Cette dernière intégrale est bornée par $||f^{''}||_\infty$. En utilisant le théorème de convergence dominée et le fait que le processus H satisfait l'hypothèse (3.1.4), on conclut que $C_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. Pour le terme D_n, on observe que par la formule de Taylor (3.2.25) :

$$U(s,\,x,\,z) = H^2(s,\,x,\,z) \int_0^1 f^{''}(Y(s) + \theta\, H(s,\,x,\,z))(1-\theta)\,d\theta. \tag{3.2.27}$$

Donc $|U(s,\,x,\,z)| \leq ||f^{'}||_\infty\, |H(s,\,x,\,z)|^2$, et $D_n \longrightarrow 0$ par le théorème de convergence dominée.

Finalement, on considère le terme $T_{4,n}$. On observe que $T_{4,n} \longrightarrow T_4$ dans $L^1(\Omega)$ parce que

$$\mathrm{E}|T_{4,n} - T_4| \leq \mathrm{E} \int_0^t \Big| f^{'}(Y_n(s)) - f^{'}(Y(s)) \Big|\, |G(s)|\, ds \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } \; n \longrightarrow \infty,$$

par le théorème de convergence dominée. Pour l'application de ce théorème, on utilise encore une fois la relation (3.2.14), le fait que $f^{'}$ est continue et bornée, et de plus le fait que G satisfait (3.2.4).

b) Dans le cas général, on considère une suite $(\tau_k)_{k\geq 1}$ de temps d'arrêt définie par :

$$\tau_k = \inf\{s > 0;\; |Y(s)| > k\}, \quad k \geq 1. \tag{3.2.28}$$

Si $s < \tau_k \wedge t$ alors par (3.2.14), $|Y_n(s)| \to |Y(s)|$ presque sûrement. Comme $|Y(s)| \leq k$, il s'en suit qu'il existe n_0 (aléatoire) tel que $|Y_n(s)| \leq k$ pour chaque $n \geq n_0$. Par le même raisonnement, si $s < \tau_k \wedge t$, alors en utilisant (3.2.15), on a aussi $|Y_n(s-)| \leq k$ pour chaque $n \geq n_0$, et donc $|\Delta Y_n(s)| \leq 2\,k$. On observe que $\tau_k \uparrow \infty$ presque sûrement si $k \longrightarrow \infty$. (Pour montrer cela, on note que $\tau_k \leq \tau_{k+1}$, pour chaque k. Donc, il faut montrer que pour chaque $T > 0$, il existe k_0 aléatoire telle que $\tau_{k_0} > T$. Mais $\tau_{k_0} > T$ si et seulement si $|Y(s)| \leq k_0$ pour tout $s \in [0, T]$. Donc il suffit de prendre $k_0 = [\sup_{s\in[0,T]} |Y(s)|] + 1)$, où $[x]$ est la partie entière de x.)

On va montrer la relation (3.2.13) pour $t \wedge \tau_k$ au lieu de t, pour un k fixé. La conclusion s'ensuit. Pour voir cela, on fixe $t > 0$ et on note par $\Omega_{t,k}$ l'ensemble de tous les $\omega \in \Omega$ pour lesquelles (3.2.13) a lieu avec $t \wedge \tau_k$ au lieu de t. Soit $\tilde{\Omega} = \{\tau_k \uparrow \infty\}$ et $\Omega_{t,0} = \bigcap\limits_{k \geq 1} \Omega_{t,k}$. Pour chaque $\omega \in \tilde{\Omega} \cap \Omega_{0,t}$, parce que $\tau_k(\omega) \uparrow \infty$, il existe k_0 telle que $\tau_{k_0}(\omega) > t$, et donc $t \wedge \tau_{k_0} = t$. La relation (3.2.13) s'ensuit.

On fixe $k \geq 1$. On écrit la relation (3.2.17) avec t remplacé par $t \wedge \tau_k$, et on note par $T^*_{1,n}, T^*_{2,n}, T^*_{3,n}$ et $T^*_{4,n}$ les quatre termes dans le membre de droite. On note par T^*_1, T^*_2, T^*_3 et T^*_4 les quatre termes dans le membre de droite de (3.2.13) avec t remplacé par $t \wedge \tau_k$.

Dans le membre de gauche, $f(Y_n(t \wedge \tau_k)) - f(Y_n(0)) \to f(Y(t \wedge \tau_k)) - f(Y(0))$ presque sûrement, à cause de (3.2.14).

On traite le membre de droite, qui contient quatre termes. Pour le premier terme, on a $T^*_{1,n} \longrightarrow T^*_1$ presque sûrement comme dans la partie a). On considère maintenant le second terme. Nous allons montrer que $T^*_{2,n} \longrightarrow T^*_2$ dans $L^2(\Omega)$ comme dans la partie a). On observe que $\mathrm{E}|T^*_{2,n} - T^*_2|^2 \leq 2(A^*_n + B^*_n)$, où A^*_n et B^*_n ont les mêmes définitions que A_n et B_n, avec t remplacé par $t \wedge \tau_K$. En utilisant la Remarque 3.1.1 et le fait que $N = \sum\limits_{i \geq 1} \delta_{(T_i,\, X_i,\, Z_i)}$, on observe que :

$$
\begin{aligned}
A^*_n &= \mathrm{E} \int_0^{t\wedge\tau_k} \int_B \int_{\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}} |(V_n - V)(s,\, x,\, z)|^2 \; \nu(dz)\, dx\, ds \\
&= \mathrm{E} \int_0^{t\wedge\tau_k} \int_B \int_{\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}} |(V_n - V)(s,\, x,\, z)|^2 \; N(ds,\, dx,\, dz) \\
&= \mathrm{E} \sum_{T_i \leq t\wedge\tau_k,\, X_i \in B,\, \varepsilon_n < |Z_i| \leq 1} |V_n(T_i,\, X_i,\, Z_i) - V(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2 .
\end{aligned}
$$

Par la relation (3.2.18), $V_n(T_i, X_i, Z_i) \to V(T_i, X_i, Z_i)$ presque sûrement pour chaque i. En utilisant l'inégalité (3.2.20), on observe que :

$$
\begin{aligned}
|V_n(T_i,\, X_i,\, Z_i) - V(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2 \leq |H(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2 \int_0^1 \Big| f^{'}(Y_n(T_i) + \\
\theta\, H(T_i,\, X_i,\, Z_i)) - f^{'}(Y(T_i) + \theta\, H(T_i,\, X_i,\, Z_i)) \Big|^2 d\,\theta.
\end{aligned}
$$

Notons que

$$
\begin{aligned}
|Y_n(T_i) + \theta H(T_i,\, X_i,\, Z_i)| &\leq |Y_n(T_i)| + |H(T_i,\, X_i,\, Z_i)| \\
&= |Y_n(T_i)| + |\Delta Y(T_i)| \leq 3\, k.
\end{aligned}
$$

Donc l'intégrale précédente est bornée par $4\,[N_k(f^{'})]^2$, où

$$
N_k(f^{'}) = \sup_{|x| \leq 3\,k} |f^{'}(x)|. \tag{3.2.29}
$$

Ce raisonnement montre aussi que $|V_n(T_i,\, X_i,\, Z_i) - V(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2 \leq 4[N_k(f')]^2$ $|H(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2$. On observe que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} \sum_{T_i \leq t\wedge\tau_k,\, X_i\in B,\, \varepsilon_n<|Z_i|\leq 1} |H(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2 &\leq \mathrm{E} \sum_{T_i\leq t,\, X_i\in B,\, |Z_i|\leq 1} |H(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2 \\
&= \mathrm{E}\int_0^t \int_B \int_{\{|z|\leq 1\}} |H(s,\, x,\, z)|^2\, N(ds,\, dx,\, dz) \\
&= \mathrm{E}\int_0^t \int_B \int_{\{|z|\leq 1\}} |H(s,\, x,\, z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds < \infty. \qquad (3.2.30)
\end{aligned}$$

Donc, par le théorème de convergence dominée, on conclut que $A_n^* \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. En ce qui concerne B_n^*, on observe que, par la Remarque 3.1.1 :

$$\begin{aligned}
B_n^* &= \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_k} \int_B \int_{\{0<|z|\leq\varepsilon_n\}} |V(s,\, x,\, z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds \\
&= \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_k} \int_B \int_{\{0\leq|z|\leq\varepsilon_n\}} |V(s,\, x,\, z)|^2\, N(ds,\, dx,\, dz) \\
&= \mathrm{E} \sum_{T_i\leq t\wedge\tau_k,\, X_i\in B,\, 0<|Z_i|\leq\varepsilon_n} |V(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2 .
\end{aligned}$$

Ce terme converge vers 0 par le théorème de convergence dominée. L'application de ce théorème est justifiée parce qu'en utilisant (3.2.21), on obtient :

$$\begin{aligned}
|V(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2 &\leq |H(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2 \int_0^1 \left| f'(Y(T_i) + \theta\, H(T_i,\, X_i,\, Z_i)) \right|^2 d\theta \\
&\leq |H(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2\, [N_K(f')]^2,
\end{aligned}$$

et $\mathrm{E} \sum_{T_i\leq t\wedge\tau_K,\, X_i\in B,\, 0<|Z_i|\leq\varepsilon_n} |H(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2 < \infty$ (voir la relation (3.2.30)).

Nous allons maintenant traiter le troisième terme en montrant que $T_{3,n}^* \longrightarrow T_3^*$ dans $L^1(\Omega)$. Comme dans la partie a), $\mathrm{E}|T_{3,n}^* - T_3^*| \leq C_n^* + D_n^*$, où C_n^* et D_n^* ont les mêmes définitions comme dans la partie a) avec t remplacé par $t\wedge\tau_k$. En utilisant la Remarque 3.1.1,

$$\begin{aligned}
C_n^* &= \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_k} \int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\leq 1\}} |U_n(s,\, x,\, z) - U(s,\, x,\, z)|\, \nu(dz)\, dx\, ds \\
&= \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_k} \int_B \int_{\{\varepsilon_n<|z|\leq 1\}} |U_n(s,\, x,\, z) - U(s,\, x,\, z)|\, N(ds,\, dx,\, dz) \\
&= \mathrm{E} \sum_{T_i\leq t\wedge\tau_k,\, X_i\in B,\, \varepsilon_n<|Z_i|\leq 1} |U_n(T_i,\, X_i,\, Z_i) - U(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2 .
\end{aligned}$$

Par la relation (3.2.24), $U_n(T_i, X_i, Z_i) \to U(T_i, X_i, Z_i)$ presque sûrement pour chaque i. En utilisant l'inégalité (3.2.26), on observe que :

$$|U_n(T_i,\, X_i,\, Z_i) - U(T_i,\, X_i,\, Z_i)| \leq |H(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2 \int_0^1 \Big| f^{''}(Y_n(T_i) + \theta\, H(T_i,\, X_i,\, Z_i)) - f^{''}(Y(T_i) + \theta\, H(T_i,\, X_i,\, Z_i))\Big|\, d\theta.$$

Cette intégrale est borné par $2\, N_k(f^{''})$, où $N_k(f^{''}) = \sup_{|x| \leq 3\, k} |f^{''}(x)|$. Donc $|U_n(T_i,\, X_i,\, Z_i) - U(T_i,\, X_i,\, Z_i)| \leq 2\, N_k(f^{''}) |H(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2$ et par le théorème de convergence dominée $C_n^* \longrightarrow 0$. En ce qui concerne D_n^*, en utilisant la Remarque 3.1.1

$$\begin{aligned}
D_n^* &= \mathrm{E} \int_0^{t \wedge \tau_k} \int_B \int_{\{0 \leq |z| \leq \varepsilon_n\}} |U(s,\, x,\, z)|\, \nu(dz)\, dx\, ds \\
&= \mathrm{E} \int_0^{t \wedge \tau_k} \int_B \int_{\{0 \leq |z| \leq \varepsilon_n\}} |U(s,\, x,\, z)|\; N(ds,\, dx,\, dz) \\
&= \mathrm{E} \sum_{T_i \leq t \wedge \tau_k,\; X_i \in B,\; 0 < |Z_i| \leq \varepsilon_n} |U(T_i,\, X_i,\, Z_i)|\,.
\end{aligned}$$

Ce terme converge vers 0 par le théorème de convergence dominée. L'application de ce théorème est justifiée parce qu'en utilisant l'égalité (3.2.27), on observe que :

$$\begin{aligned}
|U(T_i,\, X_i,\, Z_i)| &\leq |H(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2 \int_0^1 \Big| f^{''}(Y(T_i) + \theta\, H(T_i,\, X_i,\, Z_i))\Big|\, (1-\theta)\, d\theta \\
&\leq 2\, N_k(f^{''})\, |H(T_i,\, X_i,\, Z_i)|^2,
\end{aligned}$$

et $\mathrm{E} \sum_{T_i \leq t \wedge \tau_k,\; X_i \in B,\; 0 < |Z_i| \leq \varepsilon_n} |U(T_i,\, X_i,\, Z_i)| < \infty$.

Finalement pour le terme $T_{4,n}^*$. On observe, que $T_{4,n}^* \longrightarrow T_n^*$ dans $L^1(\Omega)$, parce que $\mathrm{E}|T_{4,n}^* - T_4^*| \leq \mathrm{E} \int_0^{t \wedge \tau_k} |f^{'}(Y_n(s)) - f^{'}(Y(s))||G(s)|\, ds \longrightarrow 0$ par le théorème de convergence dominée. L'application de ce théorème est justifiée parce que $|Y_n(s-)| \leq k$ pour chaque n et donc le terme sous l'intégrale est dominée par $2 \sup_{|x| \leq k} |f^{'}(x)||G(s)|$.

□

On considère maintenant le cas $B = \mathbb{R}^d$.

Théorème 3.2.4. *Soit* $Y = \{Y(t)\}_{t \geq 0}$ *un processus défini par* (3.2.12) *avec* $B = \mathbb{R}^d$, *où on suppose que* G, H *et* K *sont des processus prévisibles tels que* G *satisfait* (3.2.4), H *satisfait*

$$\mathrm{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\{|z| \leq 1\}} |H(s,x,z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds < \infty, \text{ pour chaque } t > 0, \tag{3.2.31}$$

et K satisfait :

$$\mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\{|z|>1\}} |K(s,x,z)|\,\nu(dz)\,dx\,ds < \infty,\ \textit{pour chaque } t > 0. \tag{3.2.32}$$

On considère la modification càdlag du processus Y (notée aussi Y) donnée par le Théorème 3.1.4. Alors, pour chaque fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et pour chaque $t \geq 0$, la relation (3.2.13) *a lieu presque sûrement avec B remplacé par $\mathbb{R}^d$ dans les intégrales du membre de droite.*

Démonstration. On suppose que H satisfait l'hypothèse (B) ou K satisfait l'hypothèse (D). (Dans le cas contraire, le résultat s'ensuit par le Lemme 3.2.2 ou par le Lemme 3.2.1.) Soient $(E_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ la suite d'ensembles donnée par la Théorème 3.1.4 et $Y_n = \{Y_n(t)\}_{t\geq 0}$ le processus donné par (3.2.12) avec $B = E_n$. On note aussi par Y_n la modification càdlàg de ce processus (obtenue en utilisant le Théorème 3.1.3 pour le deuxième terme, qui dépend de H). Par le Théorème 3.1.4 on sait que :

$$\begin{aligned} \sup_{s\leq t} |Y_n(s) - Y(s)| &\longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty \text{ presque sûrement,} && (3.2.33)\\ \sup_{s\leq t} |Y_n(s-) - Y(s-)| &\longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty \text{ presque sûrement.} && (3.2.34) \end{aligned}$$

En écrivant la relation (3.2.13) pour $Y_n(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & f(Y_n(t)) - f(Y_n(0)) = \\ & \quad \int_0^t \int_{E_n} \int_{\{|z|>1\}} [f(Y_n(s-) + K(s,\,x,\,z)) - f(Y_n(s-))]\ N(ds,\,dx,\,dz) \\ + & \quad \int_0^t \int_{E_n} \int_{\{|z|\leq 1\}} [f(Y_n(s-) + H(s,\,x,\,z)) - f(Y_n(s-))]\ \widehat{N}(ds,\,dx,\,dz) \\ + & \quad \int_0^t \int_{E_n} \int_{\{|z|\leq 1\}} \Big[f(Y_n(s) + H(s,\,x,\,z)) - f(Y_n(s)) \\ - & \quad H(s,\,x,\,z)\, f'(Y_n(s))\Big]\ \nu(dz)\,dx\,ds + \int_0^t f'(Y_n(s))G(s)ds \\ := & \quad T_{1,n} + T_{2,n} + T_{3,n} + T_{4,n}. \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Par la relation (3.2.33) et la continuité de f, le membre de gauche de (3.2.12) converge presque sûrement vers $f(Y(t)) - f(Y(0))$. Il nous reste à justifier le passage à la limite pour le membre de droite. Pour cela, on note par T_1, T_2, T_3, T_4 les quatre termes dans le membre de droite de (3.2.13) avec $B = \mathbb{R}^d$. On considère deux cas : $a)$ f' et f'' sont bornées ; $b)$ $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est arbitraire.

$a)$ Pour le premier terme on note $W_n(s,\,x,\,z) = f(Y_n(s)+K(s,\,x,\,z)) - f(Y_n(s))$, $W(s,\,x,\,z) = f(Y(s)+K(s,\,x,\,z)) - f(Y(s))$ et on observe que : $\mathrm{E}|T_{1,n} - T_1| \leq I_n + J_n$, où :

$$\begin{aligned} I_n &= \mathrm{E}\int_0^t \int_{E_n} \int_{\{|z|>1\}} |(W_n - W)(s,\, x,\, z)|\; N(ds,\, dx,\, dz) \\ &= \mathrm{E}\int_0^t \int_{E_n} \int_{\{|z|>1\}} |(W_n - W)(s,\, x,\, z)|\; \nu(dz)dx\, ds, \\ J_n &= \mathrm{E}\int_0^t \int_{E_n^c} \int_{\{|z|>1\}} |W(s,\, x,\, z)|\; N(ds,\, dx,\, dz) \\ &= \mathrm{E}\int_0^t \int_{E_n^c} \int_{\{|z|>1\}} |W(s,\, x,\, z)|\; \nu(dz)dx\, ds. \end{aligned}$$

Par (3.2.33) et la continuité de f,

$$W_n(s,\, x,\, z) \to W(s,\, x,\, z) \,\text{presque sûrement pour tout}\, (s,\, x,\, z). \tag{3.2.36}$$

Par la formule de Taylor (3.2.19) on a :

$$\begin{aligned} |W_n(s,\, x,\, z) - W(s,\, x,\, z)| \;\le\; & |K(s,x,z)| \int_0^1 |f^{'}(Y_n(s) + \theta\, K(s,x,z)) - \\ & f^{'}(Y(s) + \theta\, K(s,x,z))|\, d\theta. \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Par le fait que $f^{'}$ est continue et bornée, on voit que $|W_n(s,\, x,\, z) - W(s,\, x,\, z)| \le 2\,||f^{'}||_\infty |K(s,\, x,\, z)|$ pour chaque $(s,\, x,\, z)$. Par le théorème de convergence dominée, en utilisant le fait que K satisfait (3.2.32), on déduit que $I_n \longrightarrow 0$. On note aussi que $J_n \longrightarrow 0$ par le théorème de convergence dominée, parce que par la formule de Taylor (3.2.19) on a :

$$W(s,\, x,\, z) = |K(s,x,z)| \int_0^1 f^{'}(Y(s) + \theta\, K(s,x,z))\, d\theta. \tag{3.2.38}$$

et donc $|W(s,\, x,\, z)| \le ||f||_\infty\, |K(s,\, x,\, z)|$. Ceci montre que $T_{1,n} \longrightarrow T_1$ dans $L^1(\Omega)$, et donc $T_{1,n_k} \longrightarrow T_1$ presque sûrement pour une sous-suite $\{n_k\}_k$.

Pour le deuxième terme, on va montrer que $T_{2,n} \longrightarrow T_2$ dans $L^2(\Omega)$ (et donc $T_{2,n_k} \longrightarrow T_2$ presque sûrement pour une sous-suite $\{n_k\}_k$). On observe que : $\mathrm{E}|T_{2,n} - T_2|^2 \le 2(A_n + B_n)$, où :

$$\begin{aligned} A_n &= \mathrm{E}\left|\int_0^t \int_{E_n} \int_{\{|z|\le 1\}} (V_n - V)(s,\, x,\, z)\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz)\right|^2 \\ &= \mathrm{E}\int_0^t \int_{E_n} \int_{\{|z|\le 1\}} |(V_n - V)(s,\, x,\, z)|^2\; \nu(dz)dx\, ds, \\ B_n &= \mathrm{E}\left|\int_0^t \int_{E_n^c} \int_{\{|z|\le 1\}} V(s,\, x,\, z)\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz)\right|^2 \end{aligned}$$

$$= \ \mathrm{E}\int_0^t \int_{E_n^c} \int_{\{|z|\le 1\}} |V(s,\,x,\,z)|^2 \ \nu(dz)dx\,ds,$$

avec $V_n(s,\,x,\,z) = f(Y_n(s) + H(s,\,x,\,z)) - f(Y_n(s))$ et $V(s,\,x,\,z) = f(Y(s) + H(s,\,x,\,z)) - f(Y(s))$. Le fait que $A_n \longrightarrow 0$ et $B_n \longrightarrow 0$ s'ensuit comme dans preuve du Théorème 3.2.3, en utilisant (3.2.33) et le fait que H satisfait (3.2.31).

Pour le troisième terme, on va montrer que $T_{3,n} \longrightarrow T_3$ dans $L^1(\Omega)$ (et donc $T_{3,n_k} \longrightarrow T_3$ presque sûrement pour une sous suite $\{n_k\}_k$). On observe que $\mathrm{E}|T_{3,n} - T_3| \le C_n + D_n$, où

$$\begin{aligned} C_n &= \mathrm{E}\int_0^t \int_{E_n} \int_{\{|z|\le 1\}} |U_n(s,\,x,\,z) - U(s,\,x,\,z)| \ \nu(dz)\,dx\,ds, \\ D_n &= \mathrm{E}\int_0^t \int_{E_n^c} \int_{\{|z|\le 1\}} |U(s,\,x,\,z)| \ \nu(dz)\,dx\,ds, \end{aligned}$$

avec U_n et U donnée par (3.2.22) et (3.2.23). Le fait que $C_n \longrightarrow 0$ et $D_n \longrightarrow 0$ s'ensuit comme dans preuve du Théorème 3.2.3, en utilisant (3.2.33) et le fait que H satisfait (3.2.31).

Finalement, $T_{4,n} \longrightarrow T_4$ dans $L^1(\Omega)$ comme dans preuve du Théorème 3.2.3, en utilisant (3.2.33) et le fait que G satisfait (3.2.4) .

b) Dans le cas général, on considère la suite $(\tau_k)_{k\ge 1}$ définie par (3.2.28). Comme dans la preuve du Théorème 3.2.3, il suffit de montrer la relation (3.2.13) avec B remplacé par $\mathbb{R}^d$ et t remplacé par $t \wedge \tau_k$ (pour un k fixé).

On écrit la relation (3.2.35) avec t remplacé par $t\wedge\tau_k$, et on note par $T^*_{1,n}, T^*_{2,n}, T^*_{3,n}$ et $T^*_{4,n}$ les termes dans le membre de droite. On note par T^*_1, T^*_2, T^*_3 et T^*_4 les termes dans le membre de droite de (3.2.13) B remplacé par $\mathbb{R}^d$ et t remplacé par $t\wedge\tau_k$. Dans le membre de gauche $f(Y_n(t\wedge\tau_k)) - f(Y(t\wedge\tau_k)) \to f(Y(t\wedge\tau_k)) - f(Y(0))$ à cause de (3.2.33). On traite maintenant le membre de droite, qui contient quatre termes.

Pour le premier terme, on observe que : $\mathrm{E}|T^*_{1,n} - T^*_1| \le I^*_n + J^*_n$, où I^*_n et J^*_n ont les mêmes définitions que I_n et J_n comme dans la partie *a*) avec t remplacé par $t\wedge\tau_k$. En utilisant la Remarque 3.1.1 et le fait que $N = \sum_{i\ge 1} \delta_{(T_i,\,X_i,\,Z_i)}$, on observe que :

$$\begin{aligned} I^*_n &= \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_k} \int_{E_n} \int_{\{|z|>1\}} |(W_n - W)(s,\,x,\,z)| \ N(ds,\,dx,\,dz) \\ &= \mathrm{E} \sum_{T_i \le t\wedge\tau_k,\ X_i\in E_n,\ |Z_i|>1} |W_n(T_i,\,X_i,\,Z_i) - W(T_i,\,X_i,\,Z_i)|\,, \\ J^*_n &= \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_k} \int_{E_n^c} \int_{\{|z|>1\}} |W(s,\,x,\,z)| \ N(ds,\,dx,\,dz) \\ &= \mathrm{E} \sum_{T_i \le t\wedge\tau_k,\ X_i\in E_n^c,\ |Z_i|>1} |W(T_i,\,X_i,\,Z_i)|\,. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (3.2.37), on observe que :

$$|W_n(T_i,\,X_i,\,Z_i) - W(T_i,\,X_i,\,Z_i)| \leq |K(T_i,\,X_i,\,Z_i)| \int_0^1 |f^{'}(Y_n(T_i)+ \\ \theta\, K(T_i,\,X_i,\,Z_i)) - f^{'}(Y(T_i) + \theta\, K(T_i,\,X_i,\,Z_i))|\, d\theta \leq |K(T_i,\,X_i,\,Z_i)| N_k(f^{'}),$$

où N_k est donnée par (3.2.29). Pour la dernière inégalité, on a utilisé le fait que $|Y_n(T_i) + \theta\, K(T_i,\,X_i,\,Z_i)| \leq |Y_n(T_i)| + |K(T_i,\,X_i,\,Z_i)| = |Y_n(T_i)| + |\Delta Y(T_i)| \leq 3k$. Par la relation (3.2.36), $|W_n(T_i,\,X_i,\,Z_i) \to W(T_i,\,X_i,\,Z_i)$ presque sûrement pour chaque i. On observe que :

$$\begin{aligned}
E \sum_{T_i \leq t\wedge\tau_k,\, X_i\in E_n,\, |Z_i|>1} |K(T_i,\,X_i,\,Z_i)| &\leq E \sum_{T_i \leq t\;\; X_i\in E_n,\, |Z_i|>1} |K(T_i,\,X_i,\,Z_i)| \\
&= \mathrm{E} \int_0^t \int_{E_n} \int_{\{|z|>1\}} |K(s,\,x,\,z)|\; N(ds,\,dx,\,dz) \\
&= \mathrm{E} \int_0^t \int_{E_n} \int_{\{|z|>1\}} |K(s,\,x,\,z)|\; \nu(dz)\, dx\, ds \\
&\leq \mathrm{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\{|z|>1\}} |K(s,\,x,\,z)|\; \nu(dz)\, dx\, ds < \infty, \quad \text{pour chaque} \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, on déduit que $I_n^* \longrightarrow 0$ et $J_n^* \longrightarrow 0$. L'application de ce théorème est justifié parce qu'en utilisant (3.2.38), on obtient :

$$\begin{aligned}
|W(T_i,\,X_i,\,Z_i)| &\leq |K(T_i,\,X_i,\,Z_i)| \int_0^1 |f^{'}(Y(T_i) + \theta\, K(T_i,\,X_i,\,Z_i))|\, d\theta \\
&\leq |K(T_i,\,X_i,\,Z_i)| N_k(f^{'}),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E \sum_{T_i \leq t\wedge\tau_k,\, X_i\in E_n^c,\, |Z_i|>1} |K(T_i,\,X_i,\,Z_i)| &\leq E \sum_{T_i \leq t\;\; X_i\in E_n^c,\, |Z_i|>1} |K(T_i,\,X_i,\,Z_i)| \\
&= \mathrm{E} \int_0^t \int_{E_n^c} \int_{\{|z|>1\}} |K(s,\,x,\,z)|\; N(ds,\,dx,\,dz) \\
&= \mathrm{E} \int_0^t \int_{E_n^c} \int_{\{|z|>1\}} |K(s,\,x,\,z)|\; \nu(dz)\, dx\, ds \\
&\leq \mathrm{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\{|z|>1\}} |K(s,\,x,\,z)|\; \nu(dz)\, dx\, ds < \infty, \quad \text{pour chaque} \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Le traitement des trois autres termes est similaire au cas b) de la preuve du Théorème 3.2.3.

□

Finalement, dans les deux derniers résultats de cette section, on considère le cas où $H = K$. On commence avec le cas d'une intégrale sur un ensemble B borné.

Théorème 3.2.5. *Soit $Y = \{Y(t)\}_{t\geq 0}$ un processus défini par :*

$$Y(t) = \int_0^t G(s)\,ds + \int_0^t \int_B \int_{\mathbb{R}_0} H(s,\,x,\,z)\,\widehat{N}(ds,\,dx,\,dz) \tag{3.2.39}$$

où $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $G = \{G(t); t \geq 0\}$ est un processus prévisible vérifiant (3.2.4) *et $H = \{H(t,\,x,\,z);\, t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^d,\, z \in \mathbb{R}_0\}$ est un processus prévisible qui satisfait*

$$\mathrm{E}\int_0^t \int_B \int_{\mathbb{R}_0} |H(s,x,z)|^2 \nu(dz)\,dx\,ds < \infty, \text{ pour chaque } t > 0. \tag{3.2.40}$$

On considère la modification càdlag du processus Y (notée aussi par Y) obtenue en utilisant le Théorème 3.1.3 pour le terme $\int_0^t \int_B \int_{\{|z|\leq 1\}} H(s,\,x,\,z)\,\widehat{N}(ds,\,dx,\,dz)$. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et pour chaque $t \geq 0$, nous avons presque sûrement :

$$\begin{aligned} f(Y(t)) - f(Y(0)) &= \int_0^t f'(Y(s))\,G(s)ds \\ &+ \int_0^t \int_B \int_{\mathbb{R}_0} [f(Y(s-) + H(s,\,x,\,z)) - f(Y(s-))]\ \widehat{N}(ds,\,dx,\,dz) \\ &+ \int_0^t \int_B \int_{\mathbb{R}_0} [f(Y(s) + H(s,\,x,\,z)) - f(Y(s)) \\ &- H(s,\,x,\,z)\,f'(Y(s))\Big]\ \nu(dz)\,dx\,ds. \end{aligned} \tag{3.2.41}$$

Démonstration. Écrivons $Y(t)$ sous la forme du Théorème 3.2.3 afin de pouvoir l'appliquer. On a :

$$Y(t) = \int_0^t \overline{G}(s)\,ds + \int_0^t \int_B \int_{\{|z|\leq 1\}} H(s,\,x,\,z)\,\widehat{N}(ds,\,dx,\,dz) + \int_0^t \int_B \int_{\{|z|>1\}} H(s,\,x,\,z)\,N(ds,\,dx,\,dz),$$

avec $\overline{G}(s) = G(s) - \int_B \int_{\{|z|>1\}} H(s,\,x,\,z)\,\nu(dz)\,dx$. Nous allons montrer que $\overline{G}(s)$ satisfait (3.2.4) afin de vérifier les conditions du théorème. Nous avons :

$$\mathrm{E}\int_0^t |\overline{G}(s)|\,ds \leq \mathrm{E}\int_0^t |G(s)|\,ds + \mathrm{E}\int_0^t \int_B \int_{\{|z|>1\}} |H(s,\,x,\,z)|\,\nu(dz)\,dx\,ds.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au dernier terme du membre de droite, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\int_0^t |\overline{G}(s)|\,ds &\leq \mathrm{E}\int_0^t |G(s)|\,ds + \\
&\left(\mathrm{E}\int_0^t\int_B\int_{\mathbb{R}_0} |H(s,\,x,\,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_B\int_{\mathbb{R}_0} 1^2_{\{|z|>1\}}\,\nu(dz)\,dx\,ds\right)^{1/2} \\
= &\ \mathrm{E}\int_0^t |G(s)|\,ds + \\
&(t\,|B|\,\nu\{z;|z|>1\})^{1/2}\left(\mathrm{E}\int_0^t\int_B\int_{\mathbb{R}_0} |H(s,\,x,\,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\right)^{1/2} < \infty,
\end{aligned}$$

en utilisant (3.2.4), (3.2.40) et (2.1.1). En appliquant le Théorème 3.2.3, on obtient :

$$\begin{aligned}
f(Y(t)) - f(Y(0)) &= \int_0^t f'(Y(s))\,\overline{G}(s)\,ds + \\
&+ \int_0^t\int_B\int_{\{|z|>1\}} [f(Y(s-)+H(s,\,x,\,z)) - f(Y(s-))]\ N(ds,\,dx,\,dz) \\
&+ \int_0^t\int_B\int_{\{|z|\leq 1\}} [f(Y(s-)+H(s,\,x,\,z)) - f(Y(s-))]\ \widehat{N}(ds,\,dx,\,dz) \\
&+ \int_0^t\int_B\int_{\{|z|\leq 1\}} \Big[f(Y(s)+H(s,\,x,\,z)) - \\
&\quad f(Y(s)) - H(s,\,x,\,z)\,f'(Y(s))\Big]\ \nu(dz)\,dx\,ds.
\end{aligned}$$

En remplaçant $\overline{G}$ par sa valeur, en ajoutant et en retranchant la quantité $\int_0^t\int_B\int_{\{|z|>1\}}[f(Y(s)+H(s,\,x,\,z)) - f(Y(s))]\,\nu(dz)\,dx\,ds$, on obtient :

$$\begin{aligned}
f(Y(t)) - f(Y(0)) &= \int_0^t f'(Y(s))\,G(s)\,ds \\
&- \int_0^t\int_B\int_{\{|z|>1\}} f'(Y(s))\,H(s,\,x,\,z)\,\nu(dz)\,dx\,ds \\
&+ \int_0^t\int_B\int_{\{|z|>1\}} [f(Y(s-)+H(s,\,x,\,z)) - f(Y(s-))]\ N(ds,\,dx,\,dz) \\
&- \int_0^t\int_B\int_{\{|z|>1\}} [f(Y(s)+H(s,\,x,\,z)) - f(Y(s))]\ \nu(dz)\,dx\,ds \\
&+ \int_0^t\int_B\int_{\{|z|\leq 1\}} [f(Y(s-)+H(s,\,x,\,z)) - f(Y(s-))]\ \widehat{N}(ds,\,dx,\,dz)
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \int_B \int_{\{|z|\le 1\}} \Big[f(Y(s) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y(s)) -$$
$$H(s,\, x,\, z)\, f^{'}(Y(s)) \Big]\, \nu(dz)\, dx\, ds.$$
$$+ \int_0^t \int_B \int_{\{|z|>1\}} [f(Y(s) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y(s))]\, \nu(dz)\, dx\, ds.$$

En regroupant le deuxième terme avec le dernier, et le troisième avec le quatrième, il résulte :

$$f(Y(t)) - f(Y(0)) = \int_0^t f^{'}(Y(s))\, G(s)\, ds$$
$$+ \int_0^t \int_B \int_{\{|z|>1\}} [f(Y(s-) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y(s-))]\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz)$$
$$+ \int_0^t \int_B \int_{\{|z|\le 1\}} [f(Y(s-) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y(s-))]\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz)$$
$$+ \int_0^t \int_B \int_{\{|z|\le 1\}} \Big[f(Y(s) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y(s)) -$$
$$H(s,\, x,\, z)\, f^{'}(Y(s)) \Big]\, \nu(dz)\, dx\, ds$$
$$+ \int_0^t \int_B \int_{\{|z|>1\}} \Big[f(Y(s) + H(s,\, x,\, z)) - f(Y(s)) -$$
$$f^{'}(Y(s))\, H(s,\, x,\, z) \Big]\, \nu(dz)\, dx\, ds.$$

L'équation (3.2.41) s'en déduit par linéarité de l'intégrale.

□

Dans le cas où $H = K$ et $B = \mathbb{R}^d$, on a le résultat suivant :

Théorème 3.2.6. *Soit $Y = \{Y(t)\}_{t\ge 0}$ un processus défini par* (3.2.39) *avec $B = \mathbb{R}^d$, où on suppose que G et H sont des processus prévisibles tels que G satisfait* (3.2.4) *et H satisfait* (3.1.13)*. On considère la modification càdlag du processus Y (notée aussi par Y) donnée par le Théorème 3.1.5. Alors, pour chaque fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et pour chaque $t \ge 0$, la relation*(3.2.41) *a lieu presque sûrement avec $B = \mathbb{R}^d$ dans les intégrales du membre de droite.*

Démonstration. On suppose que H satisfait l'hypothèse (E). (Dans le cas contraire le résultat s'en suit par le Théorème 3.2.5.) La preuve est similaire à celle du Théorème 3.2.4. On écrit la relation (3.2.41) pour la modification càdlàg du processus $Y_n = \{Y_n(t)\}_{t\ge 0}$ définie par (3.2.39) avec B remplacé par E_n, où $(E_n)_{n\ge 1} \subset \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ est la suite donnée par le Théorème 3.1.5. Alors la démonstration sera faite en deux étapes comme dans Théorème 3.2.4. On omet les détails.

□

3.3 Inégalité de Kunita

Dans cette partie, on présente un résultat qui est une variante de l'inégalité de Kunita donnée par le Théorème 2.11 de [25] (page 332).

Théorème 3.3.1. *Soit* $Y = \{Y(t)\}_{t\geq 0}$ *un processus défini par* (3.1.12)*, où* $H = \{H(t,\, x,\, z);\ t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^d,\, z \in \mathbb{R}_0\}$ *est un processus prévisible qui satisfait* (3.1.13)*. On considère la modification càdlag du processus* Y *(notée aussi par* Y*) donnée par le Théorème 3.1.5. Alors, pour chaque* $p \geq 2$*, il existe une constante* $C_p > 0$ *telle que pour chaque* $t \geq 0$*,*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\sup_{s\leq t} |Y(s)|^p\right) &\leq C_p \left\{ \mathrm{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |H(s,\, x,\, z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds\right)^{p/2} \right. \\ &+ \left. \mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |H(s,\, x,\, z)|^p\, \nu(dz)\, dx\, ds \right\}. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Démonstration. Le cas $p = 2$ s'ensuit par le l'inégalité de Doob parce que :

$$\mathrm{E}\left(\sup_{s\leq t} |Y(s)|^2\right) \leq \mathrm{E}|Y(t)|^2 = \mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |H(s,\, x,\, z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds.$$

On s'intéresse maintenant au cas $p > 2$. On applique la formule d'Itô (c'est-à-dire Théorème 3.2.6) avec $f(x) = |x|^p$. Alors, $f'(x) = p|x|^{p-1}\,\mathrm{sgn}(x) = p\,x\,|x|^{p-2}$ et $f''(x) = p\,(p-1)\,|x|^{p-2} \geq 0$, où $\mathrm{sgn}(x)$ désigne le signe de x. On obtient $|Y(t)|^p = M(t) + A(t)$, où :

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \left[|Y(s-) + H(s,\, x,\, z)|^p - |Y(s-)|^p\right]\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz) \\ A(t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \Big[|Y(s) + H(s,\, x,\, z)|^p - |Y(s)|^p \\ &- p\,|Y(s)|^{p-2}\, Y(s) H(s,\, x,\, z)\Big]\ \nu(dz)\, dx\, ds. \end{aligned}$$

Puisque que $\mathrm{E}(M(t)) = 0$, alors $\mathrm{E}|Y(t)|^p = \mathrm{E}(A(t))$. On applique la formule de Taylor de deuxième ordre pour la fonction f de la forme :

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)\, f''(a + \theta(b-a)) \ \text{ pour un certain } \quad \theta \in (0,1).$$

Dans notre cas $a = Y(s)$ et $b = Y(s) + H(s,\, x,\, z)$. On obtient :

$$\begin{aligned} &|Y(s) + H(s,\, x,\, z)|^p - |Y(s)|^p - p\,|Y(s)|^{p-2}\, Y(s)\, H(s,\, x,\, z) \\ &= \frac{1}{2}\, p\,(p-1)\, H^2(s,\, x,\, z)\, |Y(s) + \theta\, H(s,\, x,\, z)|^{p-2} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Alors $A = \{A(t)\}_{t\geq 0}$ est un processus croissant positif, donc une sous-martingale. Il s'ensuit que $\{|Y(t)|^p\}_{t\geq 0}$ est aussi une sous-martingale positive. En appliquant l'inégalité de Doob, nous obtenons :

$$\mathrm{E}\left(\sup_{s\leq t}|Y(s)|^p\right) \leq C_1\,\mathrm{E}(|Y(t)|^p) = C_1\,\mathrm{E}(A(t)), \tag{3.3.3}$$

où $C_1 = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$. Maintenant on va donner une borne pour $\mathrm{E}(A(t))$. Notons d'abord qu'en utilisant l'inégalité $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$ si $p>1$ ou $(a+b)^p \leq a^p+b^p$ si $0<p\leq 1$ pour $a,b>0$,

$$\begin{aligned}|Y(s)+\theta\, H(s,\,x,\,z)|^{p-2} &\leq C_2\left(|Y(s)|^{p-2}+|\theta|^{p-2}|H(s,\,x,\,z)|^{p-2}\right)\\ &\leq C_2\left(|Y(s)|^{p-2}+|H(s,\,x,\,z)|^{p-2}\right),\end{aligned}$$

où $C_2 = \max(2^{p-3},1)$. En utilisant (3.3.2), on obtient :

$$\begin{aligned}&|Y(s)+H(s,\,x,\,z)|^p-|Y(s)|^p-p\,|Y(s)|^{p-2}\,Y(s)\,H(s,\,x,\,z)\\ &\leq\; C_3\left(|Y(s)|^{p-2}|H(s,\,x,\,z)|^2+|H(s,\,x,\,z)|^p\right),\end{aligned}$$

où $C_3 = \frac{1}{2}\,p\,(p-1)C_2$. Par la suite,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(A(t)) \;\leq\;& C_3\,\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}|Y(s)|^{p-2}|H(s,\,x,\,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\,+\\ & C_3\,\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}|H(s,\,x,\,z)|^p\,\nu(dz)\,dx\,ds =: C_3\,(K_1(t)+K_2(t)).\end{aligned}$$

Soit $\alpha>1$ une constante arbitraire. En réécrivant $K_1(t)$ et en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}K_1(t) &= \mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\left(\frac{1}{\alpha}|Y(s)|\right)^{p-2}\alpha^{p-2}\,|H(s,\,x,\,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\\ &\leq\; \mathrm{E}\left[\sup_{s\leq t}\left(\frac{1}{\alpha}|Y(s)|\right)^{p-2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\alpha^{p-2}\,|H(s,\,x,\,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\right]\\ &\leq\; \left\{\mathrm{E}\left[\sup_{s\leq t}\left(\frac{1}{\alpha}|Y(s)|\right)^p\right]\right\}^{\frac{p-2}{p}}\left\{\mathrm{E}\Big(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\alpha^{p-2}\,|H(s,\,x,\,z)|^2\right.\\ &\qquad \left.\nu(dz)\,dx\,ds\Big)^{\frac{p}{2}}\right\}^{\frac{2}{p}}\\ &\leq\; \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{p-2}\left(\mathrm{E}\left[\sup_{s\leq t}|Y(s)|^p\right]\right)^{\frac{p-2}{p}}\Big\{\mathrm{E}\Big(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\alpha^{p-2}\,|H(s,\,x,\,z)|^2\end{aligned}$$

$$\nu(dz)\,dx\,ds\Big)^{\frac{p}{2}}\Big\}^{\frac{2}{p}}.$$

En utilisant l'inégalité de Young $a\,b \leq \dfrac{a^{p'}}{p'} + \dfrac{b^{q'}}{q'}$ avec $p' = \dfrac{p}{p-2}$, $q' = \dfrac{p}{2}$,
$a = \left(\mathrm{E}\left[\sup\limits_{s\leq t}|Y(s)|^p\right]\right)^{\frac{p-2}{p}}$ et $b = \Big\{\mathrm{E}\Big(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\alpha^{p-2}\,|H(s,\,x,\,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\Big)^{\frac{p}{2}}\Big\}^{\frac{2}{p}}$,
on obtient :

$$\begin{aligned} K_1(t) \ &\leq \ C_4\,\alpha^{2-p}\,\mathrm{E}\left(\sup_{s\leq t}|Y(s)|^p\right) + C_5\,\alpha^{\frac{p}{2}\,(p-2)+2-p} \\ &\quad \mathrm{E}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}|H(s,\,x,\,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\right)^{\frac{p}{2}}, \end{aligned}$$

où $C_4 = \dfrac{p-2}{p}$ et $C_5 = \dfrac{2}{p}$. On observe que $\frac{p}{2}\,(p-2)+2-p = (p-2)(\frac{p}{2}-1) = \frac{1}{2}(p-2)^2$. Ainsi

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(A(t)) \leq C_3\,C_4\,\alpha^{2-p}\,\mathrm{E}\left(\sup_{s\leq t}|Y(s)|^p\right) \\ &+ \ C_3\,C_5\,\alpha^{\frac{1}{2}\,(p-2)^2}\,\mathrm{E}\Big(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}|H(s,\,x,\,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\Big)^{\frac{p}{2}} \\ &+ \ C_3\,\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}|H(s,\,x,\,z)|^p\,\nu(dz)\,dx\,ds. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Par (3.3.3) et (3.3.4), on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left(\sup_{s\leq t}|Y(s)|^p\right) \leq C_1\,C_3\,C_4\,\alpha^{2-p}\,\mathrm{E}\left(\sup_{s\leq t}|Y(s)|^p\right) \\ &+ \ C_1\,C_3\,C_5\,\alpha^{\frac{1}{2}\,(p-2)^2}\,\mathrm{E}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}|H(s,\,x,\,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\right)^{\frac{p}{2}} \\ &+ \ C_1\,C_3\,\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}|H(s,\,x,\,z)|^p\,\nu(dz)\,dx\,ds. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\sup_{s\leq t}|Y(s)|^p\right)\left[1 - C_1\,C_3\,C_4\,\alpha^{2-p}\right] \leq \alpha_p \Bigg[\mathrm{E}\Big(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}|H(s,\,x,\,z)|^2 \\ \nu(dz)\,dx\,ds\Big)^{\frac{p}{2}} + \mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}|H(s,\,x,\,z)|^p\,\nu(dz)\,dx\,ds\Bigg], \end{aligned}$$

où $\alpha_p = C_1\, C_3 \max\{C_5\, \alpha^{\frac{1}{2}(p-2)^2}, 1\}$. En choisissant α suffisamment grand pour que $1 - C_1\, C_3\, C_4\, \alpha^{2-p} > 0$ (c'est-à-dire $\alpha^{p-2} > C_1\, C_2,\, C_3$), on obtient (3.3.1) avec $C_p = \dfrac{\alpha_p}{1 - C_1\, C_3\, C_4\, \alpha^{2-p}}$.

□

En utilisant la relation entre l'intégrale par rapport à $\widehat{N}$ et l'intégrale par rapport à L (voir le Chapitre 2 pour la définition de L), on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.3.2. *Soit $Y = \{Y(t)\}_{t\geq 0}$ un processus défini par :*

$$Y(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} X(s,\, x)\, L(ds,\, dx), \tag{3.3.5}$$

où $X = \{X(t,\, x)\,;\, t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^d\}$ est un processus prévisible qui satisfait (2.2.2). On suppose que la mesure ν satisfait :

$$m_p := \int_{\mathbb{R}_0} |z|^p \nu(dz) < \infty, \tag{3.3.6}$$

pour un certain $p \geq 2$. On considère la modification càdlag du processus Y (notée aussi par Y) donnée par le Théorème 3.1.5 avec $H(s,\, x,\, z) = X(s,\, x)\, z$. Alors, pour chaque $t > 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\sup_{s\leq t} |Y(s)|^p\right) \;\; &\leq \;\; C_p \left\{ v^{p/2}\, \mathrm{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |X(s,\, x)|^2\, dx\, ds\right)^{p/2} \right. \\ &+ \;\; \left. m_p\, \mathrm{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |X(s,\, x)|^p\, dx\, ds \right\}, \end{aligned}$$

où C_p est la constante donnée par le Théorème 3.3.1.

Démonstration. On utilise le résultat du Théorème 2.2.7 qui lie l'intégrale par rapport à L à l'intégrale par rapport à $\widehat{N}$. Soit $H(t,x,z) = X(t,x)\, z$. On note que le processus H vérifie les hypothèses du Théorème 3.3.1. En appliquant ce dernier, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\sup_{s\leq t} |Y(s)|^p\right) &\leq C_p \left\{ \mathrm{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |X(s,\, x)|^2\, dx\, ds \int_{\mathbb{R}_0} |z|^2\, \nu(dz)\right)^{p/2} \right. \\ &+ \;\; \left. \mathrm{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |X(s,\, x)|^p\, dx\, ds \int_{\mathbb{R}_0} |z|^p \nu(dz) \right\}. \\ &= \;\; C_p \left\{ v^{p/2}\, \mathrm{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |X(s,\, x)|^2\, dx\, ds\right)^{p/2} + m_p\, \mathrm{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |X(s,\, x)|^p\, dx\, ds \right\}. \end{aligned}$$

□

3.4 Inégalité de Rosenthal

Dans cette section, nous allons déduire par une autre méthode l'inégalité (3.3.1) de la section précédente. Cette méthode se base sur l'inégalité de Rosenthal (Théorème B.2.3, Annexe B). L'avantage de cette méthode est qu'elle montre qu'on peut prendre la constante C_p dans (3.3.1) comme la constante B_p dans l'inégalité de Rosenthal, qui est de l'ordre de $\dfrac{p}{\ln p}$.

Théorème 3.4.1. *Soit $Y = \{Y(t)\}_{t\geq 0}$ le processus donné par :*

$$Y(t) = \int_0^t \int_B \int_{\{|z|>\varepsilon\}} H(s,x,z)\,\widehat{N}(ds,\,dx,\,dz),$$

où $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $\varepsilon > 0$ et $H = \{H(t,\,x,\,z);\, t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^d,\, z \in \mathbb{R}_0\}$ est un processus prévisible tel que :

$$\mathrm{E}\int_0^t \int_B \int_{\{|z|>\varepsilon\}} |H(s,x,z)|^2 \nu(dz)\,dx\,ds < \infty,\ \textit{pour chaque}\ t > 0. \tag{3.4.1}$$

Alors il existe une modification càdlàg du processus Y (notée aussi Y) tel que pour chaque $t > 0$ et $p \geq 2$:

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{E}\left(\sup_{s\leq t}|Y(s)|^p\right)\right]^{1/p} &\leq B_p\left\{\left[\mathrm{E}\left(\int_0^t\int_B\int_{\{|z|>\varepsilon\}}|H(s,x,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\right)^{p/2}\right]^{1/p}\right.\\ &+ \left.\left[\mathrm{E}\int_0^t\int_B\int_{\{|z|>\varepsilon\}}|H(s,x,z)|^p\,\nu(dz)\,dx\,ds\right]^{1/p}\right\},\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

où B_p est la constante dans l'inégalité de Rosenthal donnée dans le Théorème B.2.3 (Annexe B).

Démonstration. En utilisant la définition de l'intégrale par rapport à $\widehat{N}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}Y(t) &= \int_0^t\int_B\int_{\{|z|>\varepsilon\}} H(s,x,z)\,N(ds,\,dx,\,dz) - \\ &\quad \int_0^t\int_B\int_{\{|z|>\varepsilon\}} H(s,x,z)\,\nu(dz)\,dx\,ds =: Y_d(t) + Y_c(t).\end{aligned}$$

On observe que $Y_d(t)$ est donné par une somme avec un nombre fini de termes et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathrm{E}|Y_c(t)| \leq (t\,|B|\,\nu\{z;|z|>\varepsilon\})^{1/2}\left(\mathrm{E}\int_0^t\int_B\int_{\{|z|>\varepsilon\}}|H(s,x,z)|^2\nu(dz)\,dx\,ds\right)^{1/2} < \infty.$$

On utilise le Théorème B.2.2 (Annexe B). On observe que Y est une martingale càdlàg de variation quadratique prévisible donnée par :

$$\langle Y\rangle(t) = \int_0^t \int_B \int_{\{|z|>\varepsilon\}} |H(s,x,z)|^2 \,\nu(dz)\,dx\,ds. \tag{3.4.3}$$

De plus, le saut de Y au temps t est donné par $\Delta Y(t) = \Delta Y_d(t)$, car Y_c est un processus continu. Soit $\Gamma = \{z \in \mathbb{R}; |z| > \varepsilon\}$. On utilise la représentation de $N|_{\mathbb{R}_+\times B\times\Gamma}$ donnée par (2.1.4) avec B remplacé par $[0,\,t]\times B$ et Γ_j remplacé par Γ. Alors l'application $t \longmapsto Y_d(t)$ est une fonction étagée donnée par :

$$Y_d(t) = \sum_{i=1}^n H(T_i, X_i, Z_i) \quad \text{si } T_{n-1} \le t < T_n.$$

On en déduit que la fonction $t \longmapsto Y_d$ a un saut de taille $H(T_i, X_i, Z_i)$ au temps T_i. On obtient alors, en utilisant le fait que l'application $s \longmapsto Y_d(s)$ a un nombre fini de sauts dans $[0,t]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sup_{s\le t}|\Delta Y(s)|^p\right) &= \mathrm{E}\left(\sup_{s\le t}|\Delta Y_d(s)|^p\right) \\
&\le \mathrm{E}\left(\sum_{s\le t}|\Delta Y_d(s)|^p\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{T_i\le t}|H(T_i,X_i,Z_i)|^p\right) \\
&= \mathrm{E}\int_0^t\int_B\int_{\{|z|>\varepsilon\}}|H(s,x,z)|^p\,N(dz,\,dx\,ds) \\
&= \mathrm{E}\int_0^t\int_B\int_{\{|z|>\varepsilon\}}|H(s,x,z)|^p\,\nu(dz)\,dx\,ds,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant la Remarque 3.1.1. La conclusion s'ensuit en appliquant le Théorème B.2.2 (Annexe B) au martingale càdlàg $M = Y$, et en utilisant la relation (3.4.3).

$\square$

Théorème 3.4.2. *Soit $Y = \{Y(t)\}_{t\ge 0}$ le processus donné par :*

$$Y(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\{|z|>\varepsilon\}} H(s,x,z)\,\widehat{N}(ds,\,dx,\,dz),$$

où $\varepsilon > 0$ et $H = \{H(t,\,x,\,z);\, t \ge 0,\, x \in \mathbb{R}^d,\, z \in \mathbb{R}_0\}$ est un processus prévisible vérifiant (3.4.1) avec $B = \mathbb{R}^d$. Alors il existe une modification càdlàg du processus Y (notée aussi Y) tel que pour chaque $t > 0$ et $p \ge 2$:

$$\left[\mathrm{E}\left(\sup_{s\le t}|Y(s)|^p\right)\right]^{1/p} \le B_p\left\{\left[\mathrm{E}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\{|z|>\varepsilon\}}|H(s,x,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\right)^{p/2}\right]^{1/p}\right.$$

$$+ \quad \left[\mathrm{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\{|z|>\varepsilon\}} |H(s,x,z)|^p \, \nu(dz)\, dx\, ds \right]^{1/p} \Bigg\}, \qquad (3.4.4)$$

où B_p est la constante dans l'inégalité de Rosenthal donnée dans le Théorème B.2.2 (Annexe B).

Démonstration. Fixons $t > 0$. Si un des deux termes dans le membre de droite de (3.4.4) est égal à l'infini, alors on a rien à démontrer. Donc, on suppose que les deux intégrales sont finies. Écrivons $\mathbb{R}^d = \bigcup\limits_{k \geq 1} E_k$, où $(E_k)_{k\geq 1} \subset \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $E_k \subset E_{k+1}$ pour chaque k et considérons :

$$Y_k(t) = \int_0^t \int_{E_k} \int_{\{|z|>\varepsilon\}} H(s,\, x,\, z)\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz), \quad \text{pour tout} \quad k \geq 1.$$

En appliquant le Théorème 3.4.1 à Y_k, on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\mathrm{E} \left(\sup_{s\leq t} |Y_k(s)|^p \right) \right]^{1/p} &\leq B_p \left\{ \left[\mathrm{E} \left(\int_0^t \int_{E_k} \int_{\{|z|>\varepsilon\}} |H(s,\, x,\, z)|^2 \nu(dz)\, dx\, ds \right)^{p/2} \right]^{1/p} \right. \\ &\quad + \left. \left[\mathrm{E} \int_0^t \int_{E_k} \int_{\{|z|>\varepsilon\}} |H(s,\, x,\, z)|^p \, \nu(dz)\, dx\, ds \right]^{1/p} \right\}. \qquad (3.4.5) \end{aligned}$$

On aimerait passer à la limite sur k. Pour cela, on va montrer que $(Y_k)_{k\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $L^p(\Omega; D([0,t]))$. En appliquant le Théorème 3.4.1 au processus $Y_k - Y_l$, on obtient pour tout $k \geq l$:

$$\left[\mathrm{E} \left(\sup_{s\leq t} |Y_k(s) - Y_l(s)|^p \right) \right]^{1/p} \leq B_p(A_{k,l} + B_{k,l}),$$

où

$$\begin{aligned} A_{k,l} &= \left[\mathrm{E} \left(\int_0^t \int_{E_k \setminus E_l} \int_{\{|z|>\varepsilon\}} |H(s,\, x,\, z)|^2 \, \nu(dz)\, dx\, ds \right)^{p/2} \right]^{1/p} \quad \text{et} \\ B_{k,l} &= \left[\mathrm{E} \int_0^t \int_{E_k \setminus E_l} \int_{\{|z|>\varepsilon\}} |H(s,\, x,\, z)|^p \, \nu(dz)\, dx\, ds \right]^{1/p}. \end{aligned}$$

Soit $X_k = \int_0^t \int_{E_k} \int_{\{|z|>\varepsilon\}} |H(s,\, x,\, z)|^2 \, \nu(dz)\, dx\, ds$. Alors, puisque $(X_k)_k$ est une suite de Cauchy dans $L^{p/2}(\Omega)$, on déduit que $A_{k,l} = \left[\mathrm{E}(X_k - X_l)^{p/2} \right]^{1/p} = ||X_k - X_l||^{1/2}_{L^{p/2}(\Omega)} \longrightarrow 0$, quand $k, l \longrightarrow \infty$. En effet, si on note

$$X = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\{|z|>\varepsilon\}} |H(s,\, x,\, z)|^2 \nu(dz)\, dx\, ds,$$

alors nous avons :

$$\mathrm{E}(X_k - X)^{p/2} = \mathrm{E}\left(\int_0^t \int_{E_k^c} \int_{\{|z|>\varepsilon\}} |H(s,\, x,\, z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds\right)^{p/2} \longrightarrow 0,$$

par le théorème de convergence dominée. L'application de ce théorème est justifiée par le fait que $\mathrm{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\{|z|>\varepsilon\}} |H(s,x,z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds\right)^{p/2} < \infty$.

Maintenant, en notant par $a_k = \mathrm{E}\int_0^t \int_{E_k} \int_{\{|z|>\varepsilon\}} |H(s,\, x,\, z)|^p\, \nu(dz)\, dx\, ds$, on déduit par le théorème de convergence monotone que :

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\{|z|>\varepsilon\}} |H(s,\, x,\, z)|^p\, \nu(dz)\, dx\, ds.$$

Par conséquent $(a_k)_k$ est une suite de Cauchy, et on en déduit que $B_{k,l} = (a_k - a_l)^{1/p} \longrightarrow 0$, quand $k,\, l \longrightarrow \infty$. En résumé, on vient de montrer que $(Y_k)_{k\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega; D([0,t]))$, qui est un espace complet. On en déduit qu'il existe $\widetilde{Y} = \lim_{k\longrightarrow\infty} Y_k$ dans l'espace $L^p(\Omega; D([0,t]))$. En particulier, pour chaque $s \leq t$, $Y_k(s) \longrightarrow \widetilde{Y}(s)$ quand $k \longrightarrow \infty$ dans $L^p(\Omega)$, ce qui implique que $Y_k(s) \longrightarrow \widetilde{Y}(s)$ quand $k \longrightarrow \infty$ dans $L^2(\Omega)$. Par construction, $Y(s)$ est la limite de $\{Y_k(s)\}_{k\geq 1}$ dans $L^2(\Omega)$. Donc $Y(s) = \widetilde{Y}(s)$ presque sûrement, c'est-à-dire $\widetilde{Y}$ est une modification de Y. Le passage à limite quand $k \longrightarrow \infty$ dans (3.4.5) donne le résultat.

□

Finalement, on considère le cas où l'ensemble $\{z; |z| > \varepsilon\}$ est remplacé par $\mathbb{R}_0$.

Théorème 3.4.3. *Soit $Y = \{Y(t)\}_{t\geq 0}$ le processus donné par* (3.1.12)*, où H est un processus prévisible qui satisfait* (3.1.13)*. Alors, il existe une modification càdlàg du processus Y (notée aussi Y) tel que pour chaque $t > 0$ et $p \geq 2$:*

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{E}\left(\sup_{s\leq t} |Y(s)|^p\right)\right]^{1/p} \quad &\leq \quad B_p \left\{\left[\mathrm{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |H(s,x,z)|^2\, \nu(dz)\, dx\, ds\right)^{p/2}\right]^{1/p}\right. \\ &\quad + \left.\left[\mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |H(s,x,z)|^p\, \nu(dz)\, dx\, ds\right]^{1/p}\right\}, \qquad (3.4.6)\end{aligned}$$

où B_p est la constante dans l'inégalité de Rosenthal donnée dans le Théorème B.2.2.

Démonstration. Si une des intégrales dans le membre de droite de (3.4.6) est infini, alors on a rien à démontrer. On suppose maintenant que les deux intégrales sont finies. Soit $\mathbb{R}_0 = \bigcup_{k\geq 1} \Gamma_k$, avec $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$, $\Gamma_k = \{z \in \mathbb{R}_0; |z| > \varepsilon_k\}$ et $\varepsilon_k \downarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$. Pour chaque k, on considère la modification càdlàg du processus

$$Y_k(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Gamma_k} H(s,\, x,\, z)\, \widehat{N}(ds,\, dx,\, dz), \quad t \geq 0,$$

donnée par le Théorème 3.4.2. En appliquant le Théorème 3.4.2, on obtient :

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{E}\left(\sup_{s\le t}|Y_k(s)|^p\right)\right]^{1/p} \quad &\le \quad B_p\left\{\left[\mathrm{E}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\Gamma_k}|H(s,x,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\right)^{p/2}\right]^{1/p} + \right.\\ &\left.\left[\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\Gamma_k}|H(s,x,z)|^p\,\nu(dz)\,dx\,ds\right]^{1/p}\right\}.\end{aligned}$$

On va montrer que la suite $(Y_k)_{k\ge 1}$ est de Cauchy dans l'espace $L^p(\Omega; D([0,t]))$. En appliquant le Théorème 3.4.2 au processus $Y_k - Y_l$, on obtient pour tout $k \ge l$:

$$\left[\mathrm{E}\left(\sup_{s\le t}|Y_k(s)-Y_l(s)|^p\right)\right]^{1/p} \quad \le \quad 2^{p-1}\,B_p(A_{k,l}+B_{k,l}),$$

avec

$$\begin{aligned}A_{k,l} \quad &= \quad \left[\mathrm{E}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\Gamma_k\setminus\Gamma_l}|H(s,\,x,\,z)|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\right)^{p/2}\right]^{1/p} \text{ et}\\ B_{k,l} \quad &= \quad \left[\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\Gamma_k\setminus\Gamma_l}|H(s,\,x,\,z)|^p\,\nu(dz)\,dx\,ds\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

Le reste de la démonstration est similaire à celle du Théorème 3.4.2.

□

Le dernier résultat de cette section est similaire au Corollaire 3.3.2 dans lequel on considère le cas d'une intégrale stochastique par rapport à L.

Corollaire 3.4.4. *Soit $Y = \{Y(t)\}_{t\ge 0}$ un processus donné comme dans le Corollaire 3.3.2. Si la condition* (3.3.6) *est vérifiée pour un certain $p \ge 2$, alors il existe une modification càdlàg du processus Y (notée aussi Y) tel que pour chaque $t > 0$,*

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{E}\left(\sup_{s\le t}|Y(s)|^p\right)\right]^{1/p} \quad &\le \quad B_p\left\{v^{p/2}\left[\mathrm{E}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}|X(s,\,x)|^2\,dx\,ds\right)^{p/2}\right]^{1/p}\right.\\ &+ \quad \left. m_p^{1/p}\left[\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}|X(s,\,x)|^p\,dx\,ds\right]^{1/p}\right\},\end{aligned}$$

où B_p est la constante donnée par le Théorème B.2.2.

Démonstration. On utilise le résultat du Théorème 2.2.7 suivi de l'application du Théorème 3.4.3 avec $H(s,x,z) = X(s,x)\,z$. On obtient ainsi :

$$\left[\mathrm{E}\left(\sup_{s\le t}|Y(s)|^p\right)\right]^{1/p} \quad \le \quad B_p\left\{v^{1/2}\left[\mathrm{E}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}|X(s,x)|^2\;dx\,ds\right)^{p/2}\right]^{1/p} + \right.$$

$$m_p^{1/p}\left[\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}|X(s,x)|^p\,dx\,ds\right]^{1/p}\Bigg\}.$$

Le résultat s'en déduit.

□

3.5 Martingale exponentielle

Dans cette section, nous allons introduire la notion de martingale exponentielle, qui, par la suite, sera utilisée dans l'application du théorème d'Itô (voir (3.2.6)). Pour tout $h \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, on note $L_h(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} h(s,x)\,L(ds,dx)$ pour $t \geq 0$. On note d'après le Théorème 3.1.5 que L_h admet une modification càdlàg et nous travaillons avec cette modification. En remarquant que :

$$L_h(t) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} 1_{[0,t]}(s)\,h(s,x)\,L(ds,dx) =: L(\phi),$$

où $\phi(s,x) = 1_{[0,t]}(s)\,h(s,x)$, par le Lemme 2.1.6 avec $u=1$, on obtient que :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[e^{i\,L_h(t)}\right]\\
&= \exp\left\{\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\left(e^{i\,z\,1_{[0,t]}(s)\,h(s,x)} - 1 - i\,z\,1_{[0,t]}(s)\,h(s,x)\right)\nu(dz)\,dx\,ds\right\}\\
&= \exp\left\{\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\left(e^{i\,z\,h(s,x)} - 1 - i\,z\,h(s,x)\right)\,\nu(dz)\,dx\,ds\right\}\\
&= \exp\left\{\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Psi(h(s,x))\,dx\,ds\right\},
\end{aligned}$$

où $\Psi(u) = \int_{\mathbb{R}_0}(e^{i\,z\,u} - 1 - i\,z\,u)\ \nu(dz)$, pour $u \in \mathbb{R}$. On en déduit que $\mathrm{E}(M_h(t)) = 1$ pour tout $t \geq 0$, où

$$M_h(t) = \exp\left\{i\,L_h(t) - \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Psi(h(s,x))\,dx\,ds\right\}. \tag{3.5.1}$$

Le résultat suivant est l'analogue du Lemme 5.3.3 de [1] pour le bruit L.

Lemme 3.5.1. *Pour tout $h \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ continue à gauche en t ($t > 0$), on a presque sûrement :*

$$M_h(t) = 1 + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}(e^{i\,z\,h(s,x)} - 1)\,M_h(s-)\,\widehat{N}(ds,\,dx,dz). \tag{3.5.2}$$

Démonstration. On applique le Théorème 3.2.6 à la fonction $f(x) = e^{ix}$ et le processus $Y(t) = L_h(t) + i\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Psi(h(s,x))\,dx\,ds$. On note alors que :

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} h(s,x)L(ds,\,dx) + i\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Psi(h(s,x))\,dx\,ds \\ &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} h(s,x)\,z\widehat{N}(ds,\,dx,dz) + \int_0^t\left(i\int_{\mathbb{R}^d}\Psi(h(s,x))\,dx\right)ds, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant le Lemme 2.1.8. En remarquant que dans notre cas $H(s,x,z) = h(s,x)\,z$ et $G(s) = i\int_{\mathbb{R}^d}\Psi(h(s,x))\,dx$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} M_h(t) - 1 &= \int_0^t i\,e^{i\,Y(s)}\left(i\int_{\mathbb{R}^d}\Psi(h(s,x))\,dx\right)ds \\ &+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\left[e^{i(Y(s-)+h(s,x)\,z)} - e^{i\,Y(s-)}\right]\widehat{N}(ds,\,dx,\,dz) \\ &+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\left[e^{i(Y(s)+h(s,\,x)\,z)} - e^{i\,Y(s)} - h(s,\,x)\,z\,i\,e^{i\,Y(s)}\right]\nu(dz)\,dx\,ds \\ &= -\int_0^t e^{i\,Y(s)}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\Psi(h(s,x))\,dx\right)ds \\ &+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} e^{i\,Y(s-)}(e^{i\,h(s,x)\,z} - 1)\,\widehat{N}(ds,\,dx,\,dz) \\ &+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\,Y(s)}\left[\int_{\mathbb{R}_0}\left(e^{i\,h(s,\,x)\,z} - 1 - i\,z\,h(s,\,x)\right)\nu(dz)\right]dx\,ds. \end{aligned}$$

En se rappelant que $\Psi(h(s,x)) = \int_{\mathbb{R}_0}\left(e^{i\,h(s,\,x)\,z} - 1 - i\,z\,h(s,\,x)\right)\nu(dz)$, on obtient :

$$M_h(t) - 1 = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} e^{i\,Y(s-)}(e^{i\,h(s,x)\,z} - 1)\,\widehat{N}(ds,\,dx,\,dz).$$

Le résultat donné par (3.5.2) s'en déduit puisque $M_h(s-) = e^{i\,Y(s-)}$.

□

Lemme 3.5.2. *Pour chaque fonction $h \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et $t > 0$, on a :*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}|M_h(t)|^2 &= \exp\left\{\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}|e^{i\,z\,h(s,x)} - 1|^2\,\nu(dz)\,dx\,ds\right\} \qquad (3.5.3) \\ &\le \exp\left\{v\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|h(s,x)|^2\,dx\,ds\right\}. \end{aligned}$$

Démonstration. On note que :

$$\begin{aligned} M_h(t) &= \exp\left\{ i \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} h(s,x) L(ds,\, dx) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{R}(\Psi(h(s,x)))\, dx\, ds \right. \\ &- \left. i \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{I}(\Psi(h(s,x)))\, dx\, ds \right\} \\ &= \exp\left\{ i \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} h(s,x) L(ds,\, dx) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{I}(\Psi(h(s,x)))\, dx\, ds \right) \right. \\ &- \left. \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{R}(\Psi(h(s,x)))\, dx\, ds \right\}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{I}$ désignent la partie réelle et la partie imaginaire. Puisque $\mathcal{R}(\Psi(h(s,x))) = \int_{\mathbb{R}_0} (\cos((h(s,x)) - 1)\nu(dz)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}|M_h(t)|^2 = \exp\left\{ -2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{R}(\Psi(h(s,x)))\, dx\, ds \right\} \\ = \exp\left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} (2 - 2\cos((h(s,x)))\nu(dz)\, dx\, ds \right\}. \end{aligned}$$

On obtient le résultat en remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|e^{ix} - 1|^2 = 2 - 2\cos(x) = 4\sin^2 \frac{x}{2} \leq |x|^2$.

□

Nous énonçons un résultat qui est l'analogue du Lemme 5.3.2 de [1] pour le bruit L. On note que pour chaque $A \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ fixé, le processus $\{L_t(A)\}_{t\geq 0}$ (voir la section 2.2) est un processus de Lévy à sauts purs. Donc il possède une modification càdlàg et on travaille avec cette modification. On fixe $T > 0$ et on considère $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}^L_T, P)$, l'espace des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{C}$ de carré intégrable qui sont mesurables par rapport à $\mathcal{F}^L_T$ qui est donnée par (2.2.1).

Lemme 3.5.3. *L'ensemble* $\mathcal{S} = \left\{ \exp\left(i \sum_{j=1}^n u_j\, L_{t_j}(A_j) \right),\ t_j \in [0,T],\ u_j \in \mathbb{R},\ A_j \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)) \right\}$ *est total dans* $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}^L_T, P)$.

Démonstration. Soit $G \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}^L_T, P)$ telle que $\mathrm{E}(G \cdot F) = 0$ pour tout $F \in \mathcal{S}$. On doit montrer que $G = 0$. Pour cela, pour tout $t_j \in [0,T]$, $A_j \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $u_j \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 = \mathrm{E}\left(e^{i \sum_{j=1}^n u_j\, L_{t_j}(A_j)} \right) = \mathrm{E}\left[e^{i \sum_{j=1}^n u_j\, L_{t_j}(A_j)} \mathrm{E}(G | L_{t_1}(A_1), \ldots, L_{t_n}(A_n)) \right].$$

Par le Lemme de Doob-Dynkin (voir page 8, Proposition 3 de [26]), il existe une fonction mesurable $g_G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telle que :

$$\mathrm{E}(G | L_{t_1}(A_1), \ldots, L_{t_n}(A_n)) = g_G\left(L_{t_1}(A_1), \ldots, L_{t_n}(A_n) \right).$$

Si on note par μ_n la loi de $(L_{t_1}(A_1), \ldots, L_{t_n}(A_n))$, on déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}_n} e^{i\sum_{j=1}^n u_j x_j} g_G(x_1, \ldots, x_n) \, d\mu_n(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Par le Lemme 5.3.1 de [1], il s'ensuit que $g_G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pour μ_n presque tout $(x_1, \ldots, x_n)$. Donc

$$\mathrm{E}(G|L_{t_1}(A_1), \ldots, L_{t_n}(A_n)) = g_G(L_{t_1}(A_1), \ldots, L_{t_n}(A_n)) = 0 \quad \text{presque sûrement.} \tag{3.5.4}$$

On note $T_{\mathbb{Q}} = [0, T] \cap \mathbb{Q}$, et on note $(s_n)_{n\geq 1}$ la suite des éléments de $T_{\mathbb{Q}}$. On considère la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ donnée par :

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\{L_{s_1}(A_1), \ldots, L_{s_n}(A_n); A_i \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d), 1 \leq i \leq n\}\right) \vee \mathcal{N}. \tag{3.5.5}$$

On note $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\right) = \bigvee_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$. Montrons que

$$\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_T^L. \tag{3.5.6}$$

Il est claire que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_T^L$ pour chaque n, et donc $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}_T^L$. Pour l'autre inclusion, on fixe $t \in [0, T]$ et $A \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$. Il existe une suite $(r_n)_n \subset T_{\mathbb{Q}}$ telle que $r_n \downarrow t$. Puisque le processus $\{L_t(A)\}_{t\geq 0}$ est continu à droite, on a $L_t(A) = \lim_{n\to\infty} L_{r_n}(A)$. Donc pour chaque ensemble ouvert $B \in \mathbb{R}$,

$$\{L_t(A) \in B\} = \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq m} \{L_{r_n}(A) \in B\}. \tag{3.5.7}$$

Puisque $r_n \in T_{\mathbb{Q}}$, il existe une suite k_n telle que $r_n = s_{k_n}$. Donc $\{L_{r_n}(A) \in B\} = \{L_{s_{k_n}}(A) \in B\} \in \mathcal{F}_{k_n} \subset \mathcal{F}_\infty$, pour chaque n. Ceci montre que $L_t(A)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_\infty$, et donc $\mathcal{F}_T^L \subset \mathcal{F}_\infty$. Ceci montre (3.5.6).

Par le corollaire du théorème de convergence martingale (voir Corollaire C.9 dans [10]), on a :

$$G = \mathrm{E}(G|\mathcal{F}_T^L) = \mathrm{E}(G|\mathcal{F}_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(G|\mathcal{F}_n) = 0, \text{presque sûrement,}$$

où on a utilisé (3.5.6) pour la deuxième égalité et (3.5.4) pour la dernière égalité.

$\square$

Le lemme suivant est l'analogue du Lemme 5.3.4 de [1] pour le bruit L.

Lemme 3.5.4. *Pour chaque $h \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, l'ensemble $\{M_h(T), h \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d)\}$ est total dans $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} := L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}_T^L, P)$, où $M_h(T)$ est donnée par* (3.5.1).

Démonstration. Soit $G \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ telle que $\mathrm{E}(GM_h(T)) = 0$, pour tout $h \in L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)$. Alors on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{E}\left(e^{i\,L_h(T) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(h(s,x))\,dx\,ds}\ G\right) \\ &= e^{-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(h(s,x))\,dx\,ds}\mathrm{E}(e^{i\,L_h(T)}\,G). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\mathrm{E}(e^{i\,L_h(T)}G) = 0$ pour toute fonction $h \in L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)$. En particulier, on prend $h = \sum_{j=1}^n u_j\, 1_{[0,t_j] \times A_j}$ avec $u_j \in \mathbb{R}, t_j \in [0,T]$ et $A_j \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$. Pour une telle fonction h, on a

$$\begin{aligned} L_h(T) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} h(s,x) L(ds,dx) = \sum_{j=1}^n u_j \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} 1_{[0,t_j]}(s) 1_{A_j}(x) L(ds,dx) \\ &= \sum_{j=1}^n u_j L_{t_j}(A_j). \end{aligned}$$

On obtient que $\mathrm{E}(e^{i\,\sum_{j=1}^n u_j L_{t_j}(A_j)}G) = 0$ pour tout $u_j \in \mathbb{R}, t_j \in [0,T]$ et $A_j \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$. Par le Lemme 3.5.3, on conclut que $G = 0$. $\square$

3.6 Théorème de représentation d'Itô

On rappelle qu'un processus $X = \{X(t,x,z); t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ z \in \mathbb{R}_0\}$ est prévisible s'il est mesurable par rapport à $\mathscr{P}_{\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0}$ (voir (2.2.1)). Pour montrer qu'un processus X est prévisible, il suffit de montrer qu'il satisfait les deux propriétés données dans la Remarque 2.2.3. Nous allons maintenant donner le Théorème de représentation d'Itô qui est l'analogue du Théorème 5.3.5 de [1]. Soit $T > 0$ fixé et $(\mathcal{F}_t^L)_{t \geq 0}$ la filtration donnée par (2.2.1).

Théorème 3.6.1. *Pour chaque $F \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ qui est $\mathcal{F}_T^L$-mesurable, il existe un unique processus prévisible $\psi = \{\psi(t,x,z); t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d, x \in \mathbb{R}_0\}$ qui satisfait :*

$$\mathrm{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |\psi(t,x,z)|^2 \nu(dz)\,dx\,dt < \infty, \tag{3.6.1}$$

tel que

$$F = \mathrm{E}(F) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \psi(t,x,z) \widehat{N}(dt,dx,dz). \tag{3.6.2}$$

Démonstration. Pour la démonstration, nous allons considérer trois cas :
Cas 1. On prend $F = M_h(T)$ pour un certain $h \in L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ qui est continue à gauche en t. Dans ce cas, par le Lemme 3.5.1, on déduit (3.6.2) avec $\psi(t,x,z) =$

$(e^{i\,z\,h(t,x)} - 1)\, M_h(t-)$. Il reste à montrer que ψ est prévisible et satisfait (3.6.1). On observe que ψ est prévisible parce qu'elle satisfait les propriétés $i)$ et $ii)$ dans la Remarque 2.2.3. Pour $i)$, ψ est le produit de deux fonctions continues à gauche en t, donc ψ est continue à gauche en t. Pour $ii)$, on note que $M_h(t-)$ est $\mathcal{F}_t^L$-mesurable, donc $\mathcal{F}_t^N$-mesurable car $\mathcal{F}_t^L \subset \mathcal{F}_t^N$; et puisque $M_h(t-)$ est $\mathcal{F}_t^N$-mesurable et $(t,x,z) \mapsto h(t,x,z)z$ est $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_0)$-mesurable, on conclut que l'application $(\omega,x,z) \mapsto \psi(\omega,t,x,z)$ est $\mathcal{F}_t^N \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_0)$-mesurable pour tout $t > 0$. On observe que pour chaque $t \in [0,T]$, si $(t_n)_n \subset [0,T]$ est telle que $t_n \uparrow t$, alors $M_h(t-) = \lim_{n\to\infty} M_h(t_n)$ presque sûrement et donc par le Lemme de Fatou on a :

$$\mathrm{E}|M_h(t-)|^2 = \mathrm{E}\left(\varliminf_{n\to\infty} |M_h(t_n)|^2\right) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathrm{E}|M_h(t_n)|^2 \leq C,$$

où C est une constante positive (voir Lemme 3.5.2). En utilisant l'inégalité $|e^{ix}-1|^2 \leq |x|^2$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} |\psi(t,x,z)|^2 \nu(dz)\,dx\,dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} |e^{iz\,h(t,x)} - 1|^2\, \mathrm{E}|M_h(t-)|^2\, \nu(dz)\,dx\,dt \\
&\leq C\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} z^2\,|h(t,x)|^2\,\nu(dz)\,dx\,dt = C\,v\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} |h(t,x)|^2\,dx\,dt < \infty.
\end{aligned}$$

Cas 2. On considère $F = \sum_{j=1}^{k} a_j\, M_{h_j}(T)$ pour $a_j \in \mathbb{C}$ et $h_j \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)$. Le résultat découle de la linéarité de l'intégrale.
Cas 3. On suppose que $F \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ est arbitraire. Par le Lemme 3.5.4, il existe une suite $(F_n)_{n\geq 1}$ qui est une combinaison linéaire complexe de variables aléatoires de forme $M_h(T)$ et $\mathrm{E}|F_n - F|^2 \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$. D'après le deuxième cas, pour chaque $n \geq 1$, on a :

$$F_n = \mathrm{E}(F_n) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} \psi_n(t,x,z)\widehat{N}(dt,dx,dz), \tag{3.6.3}$$

pour un certain processus prévisible ψ_n qui satisfait (3.6.1). On montre que $(\psi_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2_{\mathcal{C}}\left(\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0, \mathcal{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0}, P\,dt\,dx\,d\nu\right)$. Pour voir cela, on observe que :

$$(F_n - F_m) - \mathrm{E}(F_n - F_m) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} (\psi_n - \psi_m)(t,x,z)\widehat{N}(dt,dx,dz),$$

et

$$\mathrm{E}|F_n - F_m|^2 - |\mathrm{E}(F_n - F_m)|^2 \;=\; \mathrm{E}\left|(F_n - F_m) - \mathrm{E}(F_n - F_m)\right|^2$$

$$= \mathrm{E}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}|(\psi_n-\psi_m)(t,x,z)|^2\nu(dz)\,dxdt.$$

Le membre de gauche de la relation précédente converge vers 0 quand $n,m\to\infty$, car $(F_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ (donc dans $L^1_{\mathbb{C}}(\Omega)$). Ceci montre que $(\psi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans l'espace mentionné ci-dessus et on note par ψ sa limite dans cet espace. Par passage à la limite dans $L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0)$ dans (3.6.3), on déduit (3.6.2).

□

Exemple 3.6.2. (Représentation d'Itô de $F=L^2_T(B)$) On rappelle que :

$$L_t(B)=\int_0^t\int_B\int_{\mathbb{R}_0}z\widehat{N}(ds,dx,dz)\quad \text{pour chaque } t>0 \text{ et } B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d). \tag{3.6.4}$$

En utilisant la formule d'Itô (voir Théorème 3.2.5) pour le processus $Y(t)=L_t(B)$ avec $G=0$, $H=z$ et la fonction $f(x)=x^2$, on obtient

$$\begin{aligned} L_t^2(B) &= t\,|B|\,v+\int_0^t\int_B\int_{\mathbb{R}_0}(2\,L_{s-}(B)+z)\,z\,\widehat{N}(ds,dx,dz)\\ &= t\,|B|\,v+\int_0^t\int_B(2\,L_{s-}(B)+z)\,L(ds,dx). \end{aligned}$$

En particulier, pour $t=T$, on obtient la représentation d'Itô pour $L^2_T(B)$:

$$L_T^2(B) = T\,|B|\,v+\int_0^T\int_B(2\,L_{t-}(B)+z)\,L(dt,dx). \tag{3.6.5}$$

Exemple 3.6.3. (Représentation d'Itô de $F=Z(T)=e^{Y(T)}$) Soit

$$Y(t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}h(s,x)\,z\,\widehat{N}(ds,dx,dz)-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}[e^{h(s,x)z}-1-h(s,x)z]\nu(dz)\,dx\,ds,$$

où $h\in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ est une fonction càdlàg en t, $Z(t)=e^{Y(t)}$ et

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\left|e^{h(s,x)z}-1-h(s,x)z\right|\nu(dz)\,dx\,ds<\infty. \tag{3.6.6}$$

En utilisant la formule d'Itô (Théorème 3.2.6) pour le processus Y et la fonction $f(x)=e^x$, on obtient que :

$$Z(t)=1+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}Z(s-)(e^{h(s,x)\,z}-1)\widehat{N}(ds,dx,dz). \tag{3.6.7}$$

En particulier, pour $t=T$, on obtient la représentation d'Itô pour $Z(T)$:

$$Z(T)=1+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}Z(t-)(e^{h(t,x)\,z}-1)\widehat{N}(dt,dx,dz). \tag{3.6.8}$$

Chapitre 4

EDPS avec un bruit blanc de Lévy

Dans ce chapitre, nous considérons l'équation stochastique :

$$\mathcal{L}u(t,x) = \sigma(u(t,x))\,\dot{L}(t,x) + b(u(t,x)), \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}, \tag{4.0.1}$$

avec certaines conditions initiales déterministes, où $\mathcal{L}$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre deux à coefficients constants, b et σ sont des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ et L est le bruit blanc de Lévy introduit dans le Chapitre 2 (dans le cas $d = 1$).

Dans la section 4.1, nous allons montrer que cette équation a une solution unique $u = \{u(t,x); t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ qui est continue dans $L^2(\Omega)$. Dans la section 4.2, nous considérons deux exemples d'équations pour lesquelles on peut appliquer les résultats de la section précédente : l'équation de la chaleur fractionnaire et l'équation des ondes. Pour terminer, nous allons montrer dans la section 4.3 que, sous certaines conditions, la solution de l'équation (4.0.1) a des moments d'ordre p. Ce résultat peut être appliqué pour l'équation des ondes, mais pas pour l'équation de la chaleur.

4.1 Existence et unicité

Nous allons donner un théorème d'existence et d'unicité de la solution dont la démonstration repose sur les itérations de Picard.

On note par $w = \{w(t,x); t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ la solution de l'équation homogène $\mathcal{L}u(t,x) = 0$ avec les mêmes conditions initiales que (4.0.1) et par G_t la solution fondamentale du même problème (voir [12]). On suppose que G_t est une fonction positive dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. On note par $\mathcal{F}G_t$ sa transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}G_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\,\xi\,x}\, G_t(x)\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

On suppose que les applications σ et b sont globalement Lipschitziennes de constante C_σ et C_b, c'est à dire :

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \;\leq\; C_\sigma\,|x - y| \quad \text{pour tout } x,\, y \in \mathbb{R}, \tag{4.1.1}$$

$$|b(x) - b(y)| \quad \leq \quad C_b\,|x-y| \quad \text{pour tout } x,\, y \in \mathbb{R}. \tag{4.1.2}$$

Donc, $|\sigma(x)| \leq |\sigma(x) - \sigma(0)| + |\sigma(0)| \leq C_\sigma|x| + |\sigma(0)|$. Il s'ensuit que :

$$|\sigma(x)| \leq D_\sigma(1+|x|) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \tag{4.1.3}$$

où $D_\sigma = \max(C_\sigma, |\sigma(0)|)$. De la même manière, si on note $D_b = \max(C_b, |b(0)|)$, alors :

$$|b(x)| \leq D_b(1+|x|) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{4.1.4}$$

On note qu'il existe une constante $L_0 = \max(C_\sigma, C_b)$ telle que :

$$\max\{|\sigma(x) - \sigma(y)|, |b(x) - b(y)|\} \leq L_0\,|x-y| \quad \text{pour tout } x,\, y \in \mathbb{R}. \tag{4.1.5}$$

En choisissant $L_0 > \max\{D_\sigma, D_b\}$, nous avons :

$$\max\{|\sigma(x)|, |b(x)|\} \leq L_0\,(1+|x|) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{4.1.6}$$

De plus on suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

$$(H_1)\begin{cases} a) \quad K := \sup\limits_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} |w(t,x)|^2 < \infty, \\ b) \quad w(t,x) \text{ est continue par rapport à } (t,x), \end{cases}$$

et

$$(H_2)\begin{cases} a)\, \Gamma_T := \int_0^T \int_{\mathbb{R}} G_t(x)\,dx\,dt < \infty \ \text{ et } \ \nu_T := \int_0^T \int_{\mathbb{R}} G_t^2(x)\,dx\,dt < \infty, \\ b)\, t \mapsto \mathcal{F}G_t(\xi) \text{ est continue pour tout } \xi \in \mathbb{R}, \\ c)\ \text{il existe } \varepsilon > 0 \text{ et une fonction positive } k_t(\cdot),\ \text{telle que pour tout } t \geq 0 \\ \ \text{et } h \in [0,\varepsilon], \end{cases}$$

$$|\mathcal{F}G_{t+h}(\xi) - \mathcal{F}G_t(\xi)| \leq k_t(\xi),$$

et

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} k_t^2(\xi)\,d\xi\,dt < \infty,$$

(voir hypothèse C de la correction de [9]).

On introduit maintenant la définition de la solution de (4.0.1).

Définition 4.1.1. Un processus $u = \{u(t,x); t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ est une *solution* de (4.0.1), si u est prévisible et pour chaque $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u(t,x) \quad &= \quad w(t,x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,\sigma(u(s,y))\,L(ds,\,dy) \\ &+ \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,b(u(s,y))\,dy\,ds, \ \text{presque sûrement}. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section.

Théorème 4.1.2. *On suppose que w satisfait l'hypothèse (H_1) et G satisfait l'hypothèse (H_2). L'équation (4.0.1) admet une unique solution $u = \{u(t,x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}\}$ qui est continue dans $L^2(\Omega)$ et qui satisfait la condition suivante : pour chaque $T > 0$ on a :*

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u(t,x)|^2 < \infty. \tag{4.1.8}$$

Démonstration. La démonstration est basée sur les itérations de Picard. On définit alors la suite suivante :

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t,x) &= w(t,x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, \sigma(u_n(s,y))\, L(ds,\, dy) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, b(u_n(s,y))\, dy\, ds,\ n \geq 0 \qquad (4.1.9) \\ u_0(t,x) &= w(t,x). \qquad (4.1.10) \end{aligned}$$

Notons que par un changement de variable, on peut écrire u_{n+1} sous la forme

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t,x) &= w(t,x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, \sigma(u_n(s,y))\, L(ds,\, dy) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_s(y)\, b(u_n(t-s, x-y))\, dy\, ds,\ n \geq 0. \qquad (4.1.11) \end{aligned}$$

Montrons d'abord la propriété suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(t,x) \text{ est bien définie,} \\[2mm] K_n := \displaystyle\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(t,x)|^2 < \infty, \\ u_n \text{ est continue dans } L^2(\Omega) \text{, c'est à dire} \\ \mathrm{E}|u_n(t+h,x+h) - u(t,x)|^2 \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0 \end{array} \right. \tag{P}$$

D'après la propriété (H_1), la propriété (P) est vraie pour $n = 0$. On suppose alors que la propriété (P) est vraie pour u_n et on va la montrer pour u_{n+1}. Montrons d'abord que u_{n+1} est bien définie. On commence par montrer que la dernière intégrale au sens de Lebesgue de (4.1.9) est bien définie. Notons que par l'inégalité de Hölder (voir la relation (B.1.1), Annexe B), en utilisant (4.1.6) et $a)$ de l'hypothèse (H_2) on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, b(u_n(s,y))\, dy\, ds\right)^2 \\ &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, dy\, ds \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, \mathrm{E}|b(u_n(s,y))|^2\, dy\, ds \end{aligned}$$

$$\leq \; 2\,L_0^2\,(1+K_n)\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_s(y)\,dy\,ds\right)^2 = 2\,\Gamma_T^2\,L_0^2\,(1+K_n) < \infty. \quad (4.1.12)$$

Maintenant, il suffit de montrer que l'intégrale stochastique du membre de droite de (4.1.9) est bien définie. Pour cela on doit prouver que :

i) u_n a une modification prévisible (qu'on appelle aussi u_n),

ii) $\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(x-y)\;\sigma(u_n(s,y))|^2\;dy\;ds < \infty$.

Pour i), on observe que, par la troisième condition dans (P), u_n est continue dans $L^2(\Omega)$ et par la définition de l'intégrale stochastique, $u_n(t,x)$ est $\mathcal{F}_t^N-$ mesurable (voir (2.2.4)). Par une extension aux champs aléatoires de la Proposition 3.21 de [23] (voir Proposition C.1.6, Annexe B), il découle que u_n a une modification prévisible.
Pour ii), notons qu'en utilisant (4.1.3), le fait que u_n satisfait la deuxième propriété de (P) et le théorème de Plancherel, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(x-y)\;\sigma(u_n(s,y))|^2\;dy\,ds\\
&\leq \; 2\,L_0^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)(1+\mathrm{E}|u_n(s,y)|^2)\,dy\,ds\\
&\leq \; 2\,L_0^2\;(1+K_n)\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\,dy\;ds = 2\,L_0^2\;(1+K_n)\,\nu_t < \infty.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale ci-dessous est finie par (H_2) a).

On montre maintenant que u_{n+1} satisfait la deuxième propriété dans (P). Pour ceci notons en utilisant (4.1.9), (2.2.3), (4.1.12) et le calcul précédent que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}|u_{n+1}(t,x)|^2 \;&\leq\; 3\left[w(t,x)^2 + v\,\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\;|\sigma(u_n(s,y))|^2 dy\;ds\right.\\
&+\; \left. 2\,L_0^2\,(1+K_n)\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_s(y)\,dy\;ds\right)^2\right]\\
&\leq\; 3\sup_{(t,x)\,\in\,[0,T]\times\mathbb{R}}|w(t,x)|^2 + 3\,v\,L_0^2\,(1+K_n)\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\,dy\;ds\\
&+\; 6\,\Gamma_T^2\,L_0^2\,(1+K_n) < \infty,
\end{aligned}$$

où v est donnée par (2.1.7).
Par l'hypothèse (H_2) $a)$, nous en déduisons que $\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u_{n+1}(t,x)|^2 < \infty$. Ceci montre que u_{n+1} satisfait la deuxième propriété dans (P).

On va montrer la troisième propriété dans (P) pour u_{n+1}. Pour cela, nous commençons par prouver la continuité en espace. Soit alors $h>0$. En utilisant (4.1.11), (2.2.3) et (4.1.3) et (4.1.3), nous obtenons :

$$\mathrm{E}|u_{n+1}(t,x+h) - u_{n+1}(t,x)|^2 \leq 3\,|w(t,x+h) - w(t,x)|^2$$

$$+ \quad 3\,v \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}|\sigma(u_n(s,y))|^2 |G_{t-s}(x-y+h) - G_{t-s}(x-y)|^2\,dy\,ds$$
$$+ \quad 3\,\mathrm{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_s(y)\ [b((u_n(t-s,x-y+h)) - b(u_n(t-s,x-y))]\ dy\,ds\right)^2. \tag{4.1.13}$$

D'après la propriété (H_1) $b)$, le premier terme du membre de droit converge vers 0, si $h \longrightarrow 0$. Le second terme est borné par :

$$3\,L_0^2\,v \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{E}|u_n(s,y)|^2 + 1)\,|G_{t-s}(x-y+h) - G_{t-s}(x-y)|^2\,dy\,ds$$
$$\leq 3\,L_0^2\,v\,(1+K_n) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(x-y+h) - G_{t-s}(x-y)|^2\,dy\,ds.$$

Par un changement de variable et le théorème de Plancherel nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(x-y+h) - G_{t-s}(x-y)|^2\,dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(y+h) - G_{t-s}(y)|^2\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} [\mathcal{F}G_{t-s}(h+\cdot)(\xi) - \mathcal{F}G_{t-s}(\xi)]^2\,d\xi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |1 - e^{-i\,h\,\xi}|^2\,|\mathcal{F}G_{t-s}(\xi)|^2 d\xi.$$

Notons que $\lim_{h \longrightarrow 0} |1 - e^{-i\,h\,\xi}|^2 = 0$ et $|1 - e^{-i\,h\,\xi}|^2 \leq 4$. Par le théorème de convergence dominée, on conclut que le second terme de (4.1.13) converge vers 0, quand $h \longrightarrow 0$. Pour le troisième terme, en utilisant l'inégalité de Hölder (voir Annexe B, (B.1.1)), on peut le borner par :

$$3\,L_0^2\,\Gamma_T \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_s(y)\,\mathrm{E}|u_n(t-s,x-y+h) - u_n(t-s,x-y)|^2\,dy\,ds.$$

Puisque u_n est continue en espace dans $L^2(\Omega)$, on conclut par le théorème de convergence dominée que le troisième terme de (4.1.13) converge vers 0, quand $h \longrightarrow 0$.

Nous allons ensuite prouver la continuité en temps, uniformément en x. Pour $t \in [0,T]$ et $h > 0$ telle que $t + h < T$, nous avons :

$$\mathrm{E}[u_{n+1}(t+h,x) - u_{n+1}(t,x)]^2 \leq 3\,|w(t+h,x) - w(t,x)|^2$$
$$+ \quad 6\,v\,\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}|\sigma(u_n(s,y))|^2 |G_{t+h-s}(x-y) - G_{t-s}(x-y)|^2\,dy\,ds\right.$$
$$\left.+ \quad \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}|\sigma(u_n(s,y))|^2\,G_{t+h-s}^2(x-y)\,dy\,ds\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+\quad 6\left(\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_s(y)\,[b(u_n(t+h-s,x-y))-b(u_n(t-s,x-y))]\,dy\,ds\right)^2\\
&+\quad 6\left(\mathrm{E}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{R}} G_s(y)\,b(u_n(t+h-s,x-y))\,dy\,ds\right)^2. \qquad (4.1.14)
\end{aligned}
$$

D'après la propriété (H_1) $b)$, le premier terme du membre de droite de (4.1.14) converge vers 0, si $h \longrightarrow 0$. Les autres termes sont bornés par :

$$
\begin{aligned}
&6\,v\,L_0^2\,(1+K_n)\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}} |G_{t+h-s}(x-y)-G_{t-s}(x-y)|^2\,dy\,ds\right.\\
&\quad+\quad\left.\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{R}} G_{t+h-s}^2(x-y)\,dy\,ds\right]\\
&\quad=\quad \frac{3}{\pi}\,v\,L_0^2\,(1+K_n)\,\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}G_{t+h-s}(\xi)-\mathcal{F}G_{t-s}(\xi)|^2\;d\xi\,ds\right.\\
&\quad+\quad\left.\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}G_{t+h-s}(\xi)|^2\;d\xi\,ds\right],
\end{aligned}
$$

où on a utilisé le théorème de Plancherel pour la dernière égalité. Puisque $\int_t^{t+h}|\mathcal{F}G_{t+h-s}(\xi)|^2\;ds=\int_0^h|\mathcal{F}G_{r+h}(\xi)|^2dr$, on déduit par le théorème de convergence dominée que $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}G_{t+h-s}(\xi)|^2\;d\xi\,ds=0$. En remarquant que

$$
\int_0^t\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}G_{t+h-s}(\xi)-\mathcal{F}G_{t-s}(\xi)|^2\;d\xi\,ds=\int_0^t\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}G_{s+h}(\xi)-\mathcal{F}G_{s}(\xi)|^2\;d\xi\,ds,
$$

et qu'en vertu de la propriété (H_2), l'application $s\mapsto \mathcal{F}G_s(\xi)$ est continue et $|\mathcal{F}G_{s+h}(\xi)-\mathcal{F}G_s(\xi)|^2\le k_s^2(\xi)$, alors, on déduit par le théorème de convergence dominée que :

$$
\lim_{h\longrightarrow 0^+}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}G_{t+h-s}(\xi)-\mathcal{F}G_{t-s}(\xi)|^2\;d\xi\,ds=0.
$$

Pour l'avant dernier terme de (4.1.14), en utilisant l'inégalité de Hölder (voir inégalité (B.1.1), Annexe B) et (4.1.5), on peut le borner par :

$$
6\,L_0^2\,\Gamma_T\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_s(y)\,\mathrm{E}|u_n(t+h-s,x-y)-u_n(t-s,x-y)|^2\,dy\,ds.
$$

Puisque u_n est continue en espace dans $L^2(\Omega)$, ce dernier tend vers 0 par le théorème de convergence dominée. De la même manière, le dernier terme de (4.1.14) est borné par :

$$
6\,\Gamma_T\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{R}} G_s(y)\,\mathrm{E}|b(u_n(t+h-s,x-y))|^2\,dy\,ds
$$

$$\leq 12\, L_0^2\, \Gamma_T(1+K_n) \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}} G_s(y)\, dy\, ds$$

qui tend vers 0, quand h tend vers 0.

Pour la continuité à gauche en temps, soit $t \in [0,T]$ et $h > 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}\,|u_{n+1}(t,x) - u_{n+1}(t-h,x)|^2 \leq 3|w(t,x) - w(t-h,x)|^2 \\
& + \;\; 6\,v \left[\int_0^{t-h} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}\,|\sigma(u_n(s,y))|^2\, |G_{t-s}(x-y) - G_{t-h-s}(x-y)|^2\, dy\, ds \right. \\
& + \;\; \left. \int_{t-h}^{t} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}\,|\sigma(u_n(s,y))|^2\, G_{t-s}^2(x-y)\, dy\, ds \right] \\
& + \;\; 6 \left(\mathrm{E} \int_0^{t-h} \int_{\mathbb{R}} G_s(y) \left[b(u_n(t-s,x-y)) - b(u_n(t-h-s,x-y)) \right] dy\, ds \right)^2 \\
& + \;\; 6 \left(\mathrm{E} \int_{t-h}^{t} \int_{\mathbb{R}} G_s(y)\, b(u_n(t-s,x-y))\, dy\, ds \right)^2 . \qquad (4.1.15)
\end{aligned}$$

De la propriété $b)$ de (H_1), on déduit que le premier terme du membre de droit converge vers 0, si $h \longrightarrow 0$. Les autres termes qui suivent sont bornés par :

$$\begin{aligned}
& 6\,v\,L^2\,(1+K_n) \left[\int_0^{t-h} \int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(x-y) - G_{t-h-s}(x-y)|^2\, dy\, ds \right. \\
& + \;\; \left. \int_{t-h}^{t} \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\, dy\, ds \right] \\
& = \;\; \frac{3}{\pi}\, v\, L^2\,(1+K_n) \left[\int_0^{t-h} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}G_{t-s}(\xi) - \mathcal{F}G_{t-h-s}(\xi) \right|^2\, d\xi\, ds \right. \\
& + \;\; \left. \int_{t-h}^{t} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}G_{t-s}(\xi) \right|^2\, d\xi\, ds \right].
\end{aligned}$$

On remarque qu'en utilisant le changement de variable $r = t-h-s$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t-h} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}G_{t-s}(\xi) - \mathcal{F}G_{t-h-s}(\xi) \right|^2\, d\xi\, ds \\
& = \;\; \int_0^{t-h} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}G_{r+h}(\xi) - \mathcal{F}G_{r}(\xi) \right|^2\, d\xi\, dr \leq \int_0^{t} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}G_{r+h}(\xi) - \mathcal{F}G_{r}(\xi) \right|^2\, d\xi\, dr.
\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de l'application $s \mapsto \mathcal{F}G_s(\xi)$, et le fait que $|\mathcal{F}G_{r+h}(\xi) - \mathcal{F}G_r(\xi)| \leq k_r(\xi)$, on conclut par le théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \int_0^{t-h} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}G_{t-s}(\xi) - \mathcal{F}G_{t-h-s}(\xi) \right|^2\, d\xi\, ds = 0.$$

De plus, puisque $\int_{t-h}^{t} |\mathcal{F}G_{t-s}(\xi)|^2 \, ds = \int_0^h |\mathcal{F}G_r(\xi)|^2 dr$, on déduit par le théorème de convergence dominée que $\lim_{h \longrightarrow 0} \int_{t-h}^{t} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}G_{t-s}(\xi)|^2 \, d\xi \, ds = 0$. Par l'inégalité de Hölder (voir inégalité (B.1.1), Annexe B), et (4.1.5), l'avant dernier terme de (4.1.15) est borné par :

$$6\,\Gamma_T\, L_0^2 \int_0^{t-h} \int_{\mathbb{R}} G_s(y)\,\mathrm{E}|u_n(t-s,x-y) - u_n(t-h-s,x-y)|^2\,dy\,ds,$$

qui tend vers 0 quand h tend vers 0 par le théorème de convergence dominée et la continuité de u_n en espace dans $L^2(\Omega)$. Ceci conclut la preuve de la continuité de u_{n+1} en temps, uniformément en espace.

Montrons l'existence de la solution. Soient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} J_{n+1}(t,x) & = & u_{n+1}(t,x) - u_n(t,x), \quad n \geq 0 \\ J_0(t,x) & = & u_0(t,x), \end{array} \right. \tag{4.1.16}$$

et $H_n(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{E}|J_n(t,x)|^2$. Notons que par (4.1.9),

$$\begin{aligned} J_{n+1}(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,[\sigma(u_n(s,y)) - \sigma(u_{n-1}(s,y))]\,L(ds,\,dy) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,[b(u_n(s,y)) - b(u_{n-1}(s,y))]\,dy\,ds. \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

Alors par (2.2.3), (4.1.5) et l'inégalité de Hölder (voir inégalité (B.1.1), Annexe B), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}|J_{n+1}(t,x)|^2 &\leq 2\left[\mathrm{E}\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,[\sigma(u_n(s,y)) - \sigma(u_{n-1}(s,y))]\,L(ds,\,dy)\right|^2\right. \\ &+ \left.\mathrm{E}\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,[b(u_n(s,y)) - b(u_{n-1}(s,y))]\,dy\,ds\right|^2\right] \\ &\leq 2\,v \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\,\mathrm{E}|\sigma(u_n(s,y)) - \sigma(u_{n-1}(s,y))|^2\,dy\,ds \\ &+ 2\,\Gamma_T \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,\mathrm{E}|b(u_n(s,y)) - b(u_{n-1}(s,y))|^2\,dy\,ds\right) \\ &\leq 2\,L_0^2\,v \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\,\mathrm{E}|J_n(s,y)|^2\,dy\,ds \\ &+ 4\,L_0^2\,\Gamma_T \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,\mathrm{E}|J_n(s,y)|^2\,dy\,ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4\, C_1 \int_0^t \sup_{y\in\mathbb{R}} \mathrm{E}|J_n(s,y)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}} [G_{t-s}^2(x-y) + G_{t-s}(x-y)]\, dy\right) ds \\
&= 4\, C_1 \int_0^t H_n(s) \left(\int_{\mathbb{R}} [G_{t-s}^2(y) + G_{t-s}(y)]\, dy\right) ds,
\end{aligned}$$

où

$$C_1 = L_0^2 \max(v,\, \Gamma_T). \tag{4.1.18}$$

Ainsi, en prenant le borne supérieure pour $x \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $n \geq 0$:

$$H_{n+1}(t) \leq C_1 \int_0^t H_n(s)\, g(t-s)\, ds,$$

où

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} [G_t^2(x) + G_t(x)]\, dx. \tag{4.1.19}$$

En appliquant le Lemme 15 de [9] avec $k_1 = k_2 = 0$ et $p = 2$, nous déduisons que

$$\sum_{n\geq 0} \sup_{t\leq T} [H_n(t)]^{1/2} < \infty. \tag{4.1.20}$$

Par conséquent, $\{u_n(t,x)\}_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. On note par $u(t,x)$ sa limite. Pour chaque $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, il existe une sous-suite $\{n_k\}_k$ telle que $u_{n_k}(t,x) \longrightarrow u(t,x)$ presque sûrement. Comme $u_{n_k}(t,x)$ est $\mathcal{F}_t^N-$ mesurable pour chaque k, il s'ensuit que $u(t,x)$ est $\mathcal{F}_t^N-$ mesurable. Montrons que $\{u_n(t,x)\}_n$ converge vers $u(t,x)$ dans $L^2(\Omega)$ uniformément en $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|u_n(t,x) - u(t,x)\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0\, . \tag{4.1.21}$$

Pour cela, on note par $\|\cdot\|$ la norme dans $L^2(\Omega)$ et $s_n = \sum_{k=1}^n \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|J_k(t,x)\|$. Par (4.1.20), $\sum_{n\geq 0} \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|J_n(t,x)\| < \infty$. Donc, $(s_n)_n$ est une suite de Cauchy et pour tout $n > m$

$$\begin{aligned}
\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|u_n(t,x) - u_m(t,x)\| &= \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|\sum_{k=m+1}^n J_k(t,x)\| \\
&\leq \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \sum_{k=m+1}^n \|J_k(t,x)\| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^n \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|J_k(t,x)\| = s_n - s_m.
\end{aligned}$$

On obtient que

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|u_n(t,x) - u_m(t,x)\| \underset{n,m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \ . \tag{4.1.22}$$

Par l'inégalité de Minkowski, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ et $n > m$, on a :

$$\|u_n(t,x) - u(t,x)\| \leq \|u_n(t,x) - u_m(t,x)\| + \|u_m(t,x) - u(t,x)\|.$$

On prend $m \longrightarrow \infty$ et donc

$$\|u_n(t,x) - u(t,x)\| \leq \overline{\lim_{m\longrightarrow\infty}} \|u_n(t,x) - u_m(t,x)\|.$$

Ensuite on prend la borne supérieure pour (t,x) dans $[0,T] \times \mathbb{R}$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|u_n(t,x) - u(t,x)\| &\leq \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \overline{\lim_{m\longrightarrow\infty}} \|u_n(t,x) - u_m(t,x)\| \\
&\leq \overline{\lim_{m\longrightarrow\infty}} \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|u_n(t,x) - u_m(t,x)\|.
\end{aligned}$$

Pour voir pourquoi la dernière inégalité est vraie, on observe que celle-ci est équivalente à l'inégalité $\overline{\lim\limits_{m\longrightarrow\infty}} \|u_n(t,x) - u_m(t,x)\| \leq \overline{\lim\limits_{m\longrightarrow\infty}} \sup\limits_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|u_n(t,x) - u_m(t,x)\|$ pour chaque (t,x), qui est vraie parce que $\|u_n(t,x) - u_m(t,x)\| \leq \sup\limits_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|u_n(t,x) - u_m(t,x)\|$, pour chaque m, et pour chaque $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$.
En prenant maintenant $n \longrightarrow \infty$, on obtient en utilisant (4.1.22) que :

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}} \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|u_n(t,x) - u(t,x)\| \\
&\quad \leq \overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}}\, \overline{\lim_{m\longrightarrow\infty}} \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|u_n(t,x) - u_m(t,x)\| = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat (4.1.21).

Nous allons maintenant montrer que u est une solution. Notons que l'application $(t,x) \longrightarrow u_n(t,x) \in L^2(\Omega)$ est continue. En utilisant (4.1.21), il s'ensuit que $(t,x) \longrightarrow u(t,x) \in L^2(\Omega)$ est continue. Puisque $u(t,x)$ est $\mathscr{F}_t-$ mesurable, il s'ensuit par une extension aux champs aléatoires du Proposition 3.21 de [23]) (voir Proposition C.1.6, Annexe B) que u a une modification prévisible. Par la suite, on travaille avec cette modification.

Montrons maintenant que u satisfait (4.1.7). Ceci découle par passage à la limite dans $L^2(\Omega)$ dans la relation (4.1.9). En effet, pour le membre de gauche notons que $u_{n+1}(t,x) \longrightarrow u(t,x)$ dans $L^2(\Omega)$ par construction. Pour le membre de droite,

$$w(t,x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, \sigma(u_n(s,y))\, L(ds,\, dy)$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, b(u_n(s,y))\, dy\, ds \\
&\longrightarrow \quad w(t,x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, \sigma(u(s,y))\, L(ds,\, dy) \\
&+ \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, b(u(s,y))\, dy\, ds
\end{aligned}
$$

dans $L^2(\Omega)$, car

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, [\sigma(u_n(s,y)) - \sigma(u(s,y))]\, L(ds,\, dy) \right|^2 \\
&= \; v\, \mathrm{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y) |\sigma(u_n(s,y)) - \sigma(u(s,y))|^2 dy\, ds \\
&\leq \; v\, L_0^2\, \mathrm{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y) |u_n(s,y) - u(s,y)|^2 dy\, ds \\
&\leq \; v\, L_0^2 \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(t,x) - u(t,x)|^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\, dy\, ds \\
&\leq \; \frac{1}{2\,\pi}\, v\, L_0^2 \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(t,x) - u(t,x)|^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}G_s(\xi)|^2\, d\xi\, ds \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}
$$

en utilisant (4.1.21) et par l'inégalité de Hölder (voir Annexe B, (B.1.1)) avec $p = 2$, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, [b(u_n(s,y)) - b(u(s,y))]\, dy\, ds \right|^2 \\
&\leq \; L_0^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(y)\, dy\, ds \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, \mathrm{E}|u_n(t,x) - u(t,x)|^2\, dy\, ds \\
&\leq \; L_0^2 \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(t,x) - u(t,x)|^2 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(y)\, dy\, ds \right)^2 \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}
$$

On conclut que u satisfait (4.1.7).

Montrons maintenant que, la suite $\{u_n\}_n$ satisfait :

$$
\sup_{n\geq 1} \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(t,x)|^2 < \infty. \tag{4.1.23}
$$

La relation (4.1.8) s'en suit, car $\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(t,x)|^2 \longrightarrow \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u(t,x)|^2$ quand $n \to \infty$. Pour montrer (4.1.23), observons en utilisant les équations (4.1.9), (2.2.3) et (4.1.6) que :

$$
\mathrm{E}|u_{n+1}(t,x)|^2 \;\leq\; 2|w(t,x)|^2 + 4\, \mathrm{E}\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, \sigma(u_n(s,y))\, L(ds,\, dy) \right|^2
$$

$$\begin{aligned}
&+\quad 4\,\mathrm{E}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, b(u_n(s,y))\, dy\, ds\right|^2\\
&\leq\quad 2\,K+4\,v\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\,\mathrm{E}\left|\sigma(u_n(s,y))\right|^2\, dy\, ds\\
&+\quad 4\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(y)\, dy\, ds\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,\mathrm{E}\left|b(u_n(s,y))\right|^2\, dy\, ds\\
&\leq\quad 2\,K+8\,v\,L_0^2\int_0^t\left(1+\sup_{y\in\mathbb{R}}\mathrm{E}\left|u_n(s,y)\right|^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\, dy\right)\, ds\\
&+\quad 8\,L_0^2\,\Gamma_T\int_0^t\left(1+\sup_{y\in\mathbb{R}}\mathrm{E}\left|u_n(s,y)\right|^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, dy\right)\, ds\\
&\leq\quad 2\,K+8\,C_1\int_0^t\left(1+\sup_{y\in\mathbb{R}}\mathrm{E}\left|u_n(s,y)\right|^2\right) g(t-s)\, ds,
\end{aligned}$$

où $g(\cdot)$ est définie par (4.1.19) et C_1 par (4.1.18). En notant $M_n(t)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\mathrm{E}\left|u_n(t,x)\right|^2$ et en prenant la borne supérieure pour $x\in\mathbb{R}$, on obtient :

$$M_{n+1}(t)\leq 2\,K+\ 8\,C_1\int_0^t(1+M_n(s))\, g(t-s)\, ds.$$

En utilisant le Lemme 15 de [9] avec $k_1=2\,K$ et $k_2=1$, on obtient (4.1.23).

Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux solutions u et u' de (4.0.1). Soit $d(t,x)=u(t,x)-u'(t,x)$. Alors par (2.2.3) et (4.1.1) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}|d(t,x)|^2\quad &\leq\quad 2\,\mathrm{E}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,[\sigma(u(s,y))-\sigma(u'(s,y))]\, L(ds,\, dy)\right|^2\\
&+\quad 2\,\mathrm{E}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,[b(u(s,y))-b(u'(s,y))]\, dy\, ds\right|^2\\
&=\quad 2\,v\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\,\mathrm{E}|\sigma(u(s,y))-\sigma(u'(s,y))|^2\, dy\, ds\\
&+\quad 2\,\Gamma_T\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,\mathrm{E}|b(u(s,y))-b(u'(s,y))|^2\, dy\, ds\\
&\leq\quad C_T\int_0^t\int_{\mathbb{R}}[G^2_{t-s}(x-y)+G_{t-s}(x-y)]\,\mathrm{E}|d(s,y)|^2\, dy\, ds,
\end{aligned}$$

où $C_T=\max(v,\Gamma_T)$. Soit maintenant $H(t)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\mathrm{E}|d(t,x)|^2$. Nous obtenons :

$$\mathrm{E}|d(t,x)|^2\quad\leq\quad C_T\int_0^t H(s)\int_{\mathbb{R}}[G^2_{t-s}(x-y)+G_{t-s}(x-y)]\, dy\, ds$$

$$= \quad C_T \int_0^t H(s)\, g(t-s)\, ds.$$

Par conséquent :

$$H(t) \quad \leq \quad C_T \int_0^t H(s)\, g(t-s)\, ds.$$

En appliquant le Lemme 15 de [9] avec $k_1 = k_2 = 0$, on conclut que $H(t) = 0$. Donc $u(t,x) = u'(t,x)$ presque sûrement pour chaque $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}$.

$\square$

4.2 Exemples

Nous allons étudier deux exemples d'application du résultat précédent.

4.2.1 L'équation de la chaleur fractionnaire

Considérons l'équation de la chaleur fractionnaire stochastique :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) & = - \quad (-\Delta)^{\alpha/2} u(t,x) + \sigma(u(t,x))\dot{L}(t,x) + b(u(t,x)), \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) & = \quad g(x), \end{cases} \tag{4.2.1}$$

où L est un bruit de Lévy introduit précédemment, $\alpha \in (0,2]$, σ est globalement Lipschitzienne de constante L_0 et g est continue et bornée. On suppose que $g \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.

Dans ce cas G_t est une fonction de densité, c'est-à-dire $\int_{\mathbb{R}} G_t(x)\, dx = 1$. En fait, G_t est la densité d'une loi symétrique stable d'indice α, $S_\alpha(t,0,0)$ (voir [30]). Il n'existe pas de formule exacte pour G_t, sauf dans les cas $\alpha = \frac{1}{2}, \alpha = 1$ et $\alpha = 2$. On note par $G_t(\cdot)$ la solution fondamentale de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = -(-\Delta)^{\alpha/2} u$. Dans ce cas, notons que la transformée de Fourier de la solution fondamentale G_t est donnée par

$$\mathcal{F}G_t(\xi) = \exp\left(-t\, |\xi|^\alpha\right),$$

et la solution homogène est donnée par :

$$w(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Lemme 4.2.1. *a) L'hypothèse (H_1) est vérifiée si $\alpha \in (0,2]$.*

b) L'hypothèse (H_2) est vérifiée si $\alpha > 1$.

Démonstration. *a*) Notons que :

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} |w(t,x)|^2 = \left(\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} |w(t,x)|\right)^2 < \infty,$$

puisque $|w(t,x)| \leq \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\,|g(y)|\,dy \leq ||g||_\infty < \infty$ (en utilisant le fait que G_t est une fonction de densité).

Pour la continuité en espace de w, on a par un changement de variable :

$$\begin{aligned} w(t,x+h) - w(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} \left[G_t(x+h-y) - G_t(x-y)\right]\, g(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} G_t(\bar{y})\left[g(x+h-\bar{y}) - g(x-\bar{y})\right]\, d\bar{y}, \end{aligned}$$

et donc $|w(t,x+h) - w(t,x)| \leq \int_{\mathbb{R}} G_t(\bar{y})|g(x+h-\bar{y}) - g(x-\bar{y})|\,d\bar{y} \longrightarrow 0$, quand $h \longrightarrow 0$, par le théorème de convergence dominée.

Pour la continuité à droite en temps de w, on suppose premièrement que $g \in L^1(\mathbb{R})$. En utilisant l'inégalité de Hölder (voir Annexe B, (B.1.1)) avec $p = q = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} |w(t+h,x) - w(t,x)|^2 &= \left|\int_{\mathbb{R}} \left[G_{t+h}(x-y) - G_t(x-y)\right]\, g(y)\,dy\right|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |G_{t+h}(x-y) - G_t(x-y)|^2\, |g(y)|\,dy \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx \\ &\leq ||g||_\infty\, A_t(h)\, ||g||_{L^1(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

où $A_t(h) = \int_{\mathbb{R}} |G_{t+h}(x-y) - G_t(x-y)|^2\, dy$. Par le théorème de Plancherel et le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\begin{aligned} A_t(h) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}G_{t+h}(\xi) - \mathcal{F}G_t(\xi)|^2\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2t\,|\xi|^\alpha}\left(1 - e^{-h\,|\xi|^\alpha}\right)^2\, d\xi \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quand $h \longrightarrow 0^+$, car $\left(1 - e^{-h\,|\xi|^\alpha}\right)^2 \leq 1$ si $h > 0$. Ce qui montre que w est continue en temps à droite, uniformément en x. Pour la continuité à gauche en temps de w, en utilisant (B.1.1), on a, pour chaque $h > 0$:

$$\begin{aligned} |w(t,x) - w(t-h,x)|^2 &= \left|\int_{\mathbb{R}} \left[G_t(x-y) - G_{t-h}(x-y)\right]\, g(y)\,dy\right|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |G_t(x-y) - G_{t-h}(x-y)|^2\, |g(y)|\,dy \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx \end{aligned}$$

$$\leq \; ||g||_\infty \, B_t(h) \, ||g||_{L^1(\mathbb{R})},$$

où

$$\begin{aligned} B_t(h) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}G_t(\xi) - \mathcal{F}G_{t-h}(\xi)|^2 \, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(t-h)\,|\xi|^\alpha} \left(1 - e^{-h\,|\xi|^\alpha}\right)^2 \, d\xi \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quand $h \longrightarrow 0$, car $\left(1 - e^{-h\,|\xi|^\alpha}\right)^2 \leq 1$ et $e^{-2(t-h)\,|\xi|^\alpha} \leq e^{-2(t-1)\,|\xi|^\alpha}$, pour chaque $h \in (0,1]$.

Si par contre $g \in L^2(\mathbb{R})$, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|w(t+h,x) - w(t,x)|^2 \leq A_t(h) ||g||^2_{L^2(\mathbb{R})} \underset{h \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0 \; .$$

Pour la continuité à gauche en temps, si $h > 0$, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|w(t,x) - w(t-h,x)|^2 \;\; \leq \;\; B_t(h) ||g||^2_{L^2(\mathbb{R})} \underset{h \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0 \; .$$

b) Pour l'hypothèse (H_2). On observe premièrement que $\Gamma_T = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} G_t(x) \, dx \, dt = T$, car G_t est une fonction de densité. On va montrer alors la propriété suivante :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}G_s(\xi)|^2 \, d\xi \, ds < \infty \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{1 + |\xi|^\alpha} < \infty. \tag{4.2.2}$$

Pour ceci, il suffit de montrer que

$$c_t^{(1)} \frac{1}{1 + |\xi|^\alpha} \leq \int_0^t |\mathcal{F}G_s(\xi)|^2 \, ds \leq c_t^{(2)} \frac{1}{1 + |\xi|^\alpha}, \tag{4.2.3}$$

pour certaines constantes $c_t^{(1)} > 0$ et $c_t^{(2)} > 0$ qui dépendent de t.

Notons que :

$$\int_0^t |\mathcal{F}G_s(\xi)|^2 \, ds = \frac{1}{2\,|\xi|^\alpha} \left(1 - \exp(-2\,t\,|\xi|^\alpha)\right). \tag{4.2.4}$$

Pour $|\xi| \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{|\xi|^\alpha} \left(1 - \exp\left(-2\,t\,|\xi|^\alpha\right)\right) \leq \frac{1}{|\xi|^\alpha} \leq \frac{2}{1 + |\xi|^\alpha}. \tag{4.2.5}$$

Maintenant si $|\xi| \leq 1$, en utilisant les inégalités $1 - e^{-x} \leq x$, $\forall x \geq 0$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+|\xi|^\alpha}$, nous obtenons que :

$$\frac{1}{|\xi|^\alpha} \left(1 - \exp\left(-2\,t\,|\xi|^\alpha\right)\right) \;\; \leq \;\; \frac{1}{|\xi|^\alpha} \, 2\,t\,|\xi|^\alpha = 4\,t\,\frac{1}{2} \leq 4\,t\,\frac{1}{1 + |\xi|^\alpha}. \tag{4.2.6}$$

En utilisant (4.2.5) et (4.2.6), on obtient :

$$\frac{1}{|\xi|^\alpha}\,(1-\exp(-2\,t\,|\xi|^\alpha)) \leq 4(t+1)\frac{1}{1+|\xi|^\alpha}. \tag{4.2.7}$$

Remarquons que $1-e^{-x} \geq \frac{x}{1+x}$, $\forall x \geq 0$, et cela implique

$$\frac{1}{|\xi|^\alpha}\,(1-\exp(-2\,t\,|\xi|^\alpha)) \geq \frac{2\,t}{1+2\,t\,|\xi|^\alpha}.$$

On considère deux cas :

i) si $2\,t\,|\xi|^\alpha \geq 1$, alors $1+2\,t\,|\xi|^\alpha \leq 4\,t\,|\xi|^\alpha \leq 4\,t\,(1+|\xi|^\alpha)$,

ii) si $2\,t\,|\xi|^\alpha \leq 1$, alors $1+2\,t\,|\xi|^\alpha \leq 2 \leq 2\,(1+|\xi|^\alpha)$.

Donc

$$\frac{1}{|\xi|^\alpha}\,(1-\exp(-2\,t\,|\xi|^\alpha)) \geq \frac{2\,t}{4t(1+|\xi|^\alpha)} \wedge \frac{2\,t}{2(1+|\xi|^\alpha)} = \left(\frac{1}{2}\wedge t\right)\,\frac{1}{1+|\xi|^\alpha}. \tag{4.2.8}$$

Par conséquent, en utilisant (4.2.4), (4.2.7) et (4.2.8), on obtient :

$$\frac{(1/4)\wedge(t/2)}{1+|\xi|^\alpha} \leq \int_0^t |\mathcal{F}G_s(\xi)|^2 ds \leq 2\,\frac{t+1}{1+|\xi|^\alpha}.$$

Ceci montre (4.2.3). On observe que $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{1+|\xi|^\alpha} < \infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. On en déduit que la propriété $a)$ de (H_2) est satisfaite si et seulement $\alpha > 1$.

Il est clair que l'application $t \mapsto \mathcal{F}G_t(\xi) = \exp\left(-t\,|\xi|^\alpha\right)$ est continue pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Pour la propriété $c)$, on a, pour chaque $t > 0$ et $h > 0$

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}G_{t+h}(\xi) - \mathcal{F}G_t(\xi)| &= \exp\left(-t|\xi|^\alpha\right)\,\left(1-\exp\left(-h|\xi|^\alpha\right)\right) \\ &\leq \exp\left(-t|\xi|^\alpha\right) =: k_t(\xi), \end{aligned}$$

et $\int_0^T \int_{\mathbb{R}} k_t(\xi)^2 d\xi dt < \infty$ si et seulement si $\alpha > 1$ (voir (4.2.2)).

□

4.2.2 L'équation des ondes

Considérons maintenant l'équation des ondes stochastique :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \sigma(u(t,x))\dot{L}(t,x) + b(u(t,x)) \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= h(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.2.9}$$

où σ et b sont globalement Lipschitzienne de constante L_0. On suppose que g est continue, bornée et $h \in L^1(\mathbb{R})$.

On note que la solution fondamentale est donnée par :

$$G_t(x) = \frac{1}{2} 1_{\{|x|<t\}}, \tag{4.2.10}$$

et sa transformée de Fourier par

$$\mathcal{F}G_t(\xi) = \frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}. \tag{4.2.11}$$

La solution de l'équation homogène est donnée par :

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\,h(y)\,dy + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\,g(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy + \frac{1}{2}[g(x+t)+g(x-t)]. \end{aligned}$$

Lemme 4.2.2. *Les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées.*

Démonstration. On commence par montrer que w satisfait l'hypothèse (H_1). Notons que :

$$|w(t,x)| \leq \frac{1}{2}||h||_{L^1} + ||g||_\infty < \infty. \tag{4.2.12}$$

Le fait que w est continue en (t,x) résulte de la continuité de g et du fait que $h \in L^1(\mathbb{R})$ (par le théorème de convergence dominée).

On vérifie maintenant l' hypothèse (H_2). Pour la partie $a)$, on observe premièrement que $\Gamma_T = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} G_s(x)\,dx\,ds = \frac{1}{2}\int_0^T 2\,s\,ds = \dfrac{T^2}{2}$. On va montrer maintenant que :

$$c_t^{(1)} \frac{d\xi}{1+|\xi|^2} \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}G_s(\xi)|^2\,d\xi\,ds \leq c_t^{(2)} \frac{d\xi}{1+|\xi|^2}, \tag{4.2.13}$$

pour certaines constantes $c_t^{(1)} > 0$ et $c_t^{(2)} > 0$ qui dépendent de t.

Si $|\xi| \leq 1$, on utilise le fait que $|\sin\xi| \leq |\xi|$, et donc $\sin^2(s\,|\xi|) \leq s^2|\xi|^2$. On a :

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}G_s(\xi)|^2 &= \frac{\sin^2(s\,|\xi|)}{|\xi|^2} \leq \frac{1}{|\xi|^2} 1_{\{|\xi|\geq 1\}} + s^2\,1_{\{|\xi|\leq 1\}} \\ &\leq \frac{2}{1+|\xi|^2} 1_{\{|\xi|\geq 1\}} + s^2\,\frac{2}{1+|\xi|^2}\,1_{\{|\xi|\leq 1\}} \leq 2\frac{1+s^2}{1+|\xi|^2}. \end{aligned}$$

En intégrant nous obtenons :

$$\int_0^t |\mathcal{F}G_s(\xi)|^2\,ds \;\leq\; 2\frac{t+t^3/3}{1+|\xi|^2}.$$

Maintenant montrons qu'on peut borner inférieurement l'intégrale précédente. On considère deux cas :

i) Si $t\,|\xi| \geq 1$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\sin^2(s\,|\xi|)}{|\xi|^2}\,ds &= \frac{1}{2\,|\xi|^2}\int_0^t [1-\cos(2\,s\,|\xi|)]\;ds\\ &= \frac{1}{2\,|\xi|^2}\left[t-\frac{1}{2\,|\xi|}\sin(2\,t\,|\xi|)\right].\end{aligned}$$

Nous savons que $\sin(2\,x) \leq x$ pour tout $x > 1$, alors

$$\int_0^t \frac{\sin^2(s\,|\xi|)}{|\xi|^2}\,ds \;\geq\; \frac{t}{4\,|\xi|^2},$$

et en utilisant $\dfrac{1}{|\xi|^2} \geq \dfrac{1}{1+|\xi|^2}$, nous obtenons :

$$\int_0^t \frac{\sin^2(s\,|\xi|)}{|\xi|^2}\,ds \;\geq\; \frac{1}{4}\,\frac{t}{1+|\xi|^2}.$$

ii) Si $t\,|\xi| \leq 1$, du fait que $\dfrac{\sin^2 r}{r^2} \geq \sin^2(1)$ pour tout $r \in [0,1]$, on déduit que :

$$\int_0^t \frac{\sin^2(s\,|\xi|)}{|\xi|^2}\,ds \;\geq\; \sin^2(1)\int_0^t s^2 ds \geq \frac{\sin^2(1)}{3}\,\frac{t^3}{1+|\xi|^2}.$$

Par conséquent :

$$\frac{\sin^2(1)}{3}\,\frac{t^3\wedge t}{1+|\xi|^2} \leq \int_0^t |\mathcal{F}G_s(\xi)|^2 ds \leq 2\frac{t+t^3/3}{1+|\xi|^2}.$$

On en déduit que la propriété $a)$ de (H_2) est satisfaite si et seulement si :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|\xi|^2}\,d\xi < \infty.$$

Cette condition est clairement satisfaite. Pour la partie $b)$, on note que l'application $t \mapsto \mathcal{F}G_t(\xi) = \frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}$ est continue pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Pour la propriété $c)$, en utilisant le fait que $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}G_{t+h}(\xi) - \mathcal{F}G_t(\xi)| &= \frac{1}{|\xi|}\left|\sin\left((t+h)\,|\xi|\right) - \sin\left(t\,|\xi|\right)\right|\\ &= \frac{2}{|\xi|}\left|\sin\left(\frac{h}{2}\,|\xi|\right)\cos\left(\left(t+\frac{h}{2}\right)\,|\xi|\right)\right|\\ &\leq 2\frac{\left|\sin\left(\frac{h}{2}\,|\xi|\right)\right|}{|\xi|}.\end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $0 \le h \le 1$,

$$\frac{|\sin(h\,x)|}{|x|} \le \frac{\sqrt{2}}{(1+x^2)^{1/2}}.$$

Pour voir cette dernière inégalité, on observe que :

$$\begin{cases} \dfrac{\sin^2(h\,x)}{x^2} \le h^2 \le 1 \le \dfrac{2}{1+x^2}, \text{ si } |x| \le 1 \\ \dfrac{\sin^2(h\,x)}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2} \le \dfrac{2}{1+x^2} \text{ si } |x| \ge 1. \end{cases}$$

Pour chaque $t > 0$ et $h \in [0, 2]$, on obtient :

$$|\mathcal{F}G_{t+h}(\xi) - \mathcal{F}G_t(\xi)| \le \frac{2\sqrt{2}}{(1+|\xi|^2)^{1/2}} =: k(\xi).$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} |k(\xi)|^2 d\xi < \infty$, la propriété $c)$ est vérifiée.

□

4.3 Moments d'ordre p

Dans cette section, on montre que si la mesure de Lévy ν (qui caractérise le bruit blanc de Lévy L) et la solution fondamentale G de l'opérateur $\mathcal{L}$ ont des moments d'ordre $p \ge 2$, alors la solution de l'équation (4.0.1) a aussi des moments d'ordre p.

Théorème 4.3.1. *On suppose que pour un certain $p \ge 2$:*

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_s(y)|^p \, dy \, ds < \infty, \tag{4.3.1}$$

et

$$m_p := \int_{\mathbb{R}_0} |z|^p \nu(dz) < \infty. \tag{4.3.2}$$

Sous les hypothèses du Théorème 4.1.2, la solution $u = \{u(t,x),\ t \ge 0,\ x \in \mathbb{R}\}$ de l'équation (4.0.1) *satisfait la condition suivante : pour chaque $T > 0$,*

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u(t,x)|^p < \infty. \tag{4.3.3}$$

Démonstration. Soient $(u_n)_{n\ge0}$ la suite des itérations de Picard définie par (4.1.9) et $(J_n)_{n\ge0}$ la suite définie par (4.1.16). Soit $H_n(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{E}|J_n(t,x)|^p$. On rappelle que $J_{n+1}(t,x)$ contient un terme donné par une intégrale stochastique par rapport au bruit L (voir la relation (4.1.17)).

Alors, en utilisant le Corollaire 3.4.4, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}|J_{n+1}(t,x)|^p &\leq 2^{p-1}\,\mathrm{E}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)[\sigma(u_n(s,y))-\sigma(u_{n-1}(s,y))]\,L(ds,dy)\right|^p \\
&+ \ 2^{p-1}\,\mathrm{E}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)[b(u_n(s,y))-b(u_{n-1}(s,y))]\,dy\,ds\right|^p \\
&\leq \ 2^{2(p-1)}B_p^p\left\{v^{p/2}\left(\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(x-y)|^2\,|\sigma(u_n(s,y))-\sigma(u_{n-1}(s,y))|^2\,dy\,ds\right)^{p/2}\right. \\
&+ \ \left. m_p\,\mathrm{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(x-y)|^p|\sigma(u_n(s,y))-\sigma(u_{n-1}(s,y))|^p\;dy\,ds\right\} \\
&+ \ 2^{p-1}\,\mathrm{E}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)[b(u_n(s,y))-b(u_{n-1}(s,y))]\,dy\,ds\right|^p,
\end{aligned}$$

où B_p est la constante de (3.4.6). Pour le premier terme, on applique l'inégalité de Hölder avec $p^{'}=p/2$, $q^{'}=p/(p-2)$, $f(s,y)=|\sigma(u_n(s,y))-\sigma(u_{n-1}(s,y))|^2$ et $g(s,y)=|G_{t-s}(x-y)|^2$ (voir la relation (B.1.1)). Pour le dernier terme, on applique aussi l'inégalité de Hölder ((B.1.1)). On obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}|J_{n+1}(t,x)|^p \\
&\leq \ 2^{2(p-1)}\,B_p^p\left\{v^{p/2}\,\nu_t^{p/2-1}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\,\mathrm{E}\,|\sigma(u_n(s,y))-\sigma(u_{n-1}(s,y))|^p\;dy\,ds\right. \\
&+ \ \left. m_p\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^p(x-y)\,\mathrm{E}|\sigma(u_n(s,y))-\sigma(u_{n-1}(s,y))|^p\;dy\,ds\right\} \\
&+ \ 2^{p-1}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,dy\,ds\right)^{p-1} \\
&\quad \int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\mathrm{E}\,|b(u_n(s,y))-b(u_{n-1}(s,y))|^p\;dy\,ds.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (4.1.5), on obtient pour chaque $t\in[0,T]$ et $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}|J_{n+1}(t,x)|^p &\leq \ 2^{2(p-1)}\,B_p^p\,L_0^p\left\{v^{p/2}\,\nu_t^{p/2-1}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\,\mathrm{E}\,|J_n(s,y)|^p\;dy\,ds\right. \\
&+ \ \left. m_p\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^p(x-y)\,\mathrm{E}|J_n(s,y)|^p\;dy\,ds\right\} \\
&+ \ 2^{p-1}\,L_0^p\,\Gamma_t^{p-1}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,\mathrm{E}|J_n(s,y)|^p\;dy\,ds \\
&\leq \ C^{'}\int_0^t H_n(s)\,\delta(t-s)\,ds,
\end{aligned}$$

où

$$C' = 2^{2(p-1)} \max(B_p^p\, L_0^p\, m_{T,p}, L_0^p \Gamma_T^{p-1}), \quad m_{T,p} = \max(v^{p/2}\, \nu_T^{p/2-1}, m_p) \tag{4.3.4}$$

et

$$\delta(t) = \int_{\mathbb{R}} \left[G_t^2(y) + G_t^p(y) + G_t(y)\right]\, dy.$$

À cause de la condition (4.3.1) et l'hypothèse (H_2), la fonction δ est intégrable sur $[0,T]$. On prend la borne supérieure pour $x \in \mathbb{R}$. On obtient que pour chaque $n \geq 0$ et pour chaque $t \in [0,T]$,

$$H_{n+1}(t) \leq C' \int_0^t H_n(s)\, \delta(t-s)\, ds. \tag{4.3.5}$$

En appliquant le Lemme 15 de [9] avec $k_1 = k_2 = 0$, nous déduisons que

$$\sum_{n\geq 0} \sup_{t\leq T} [H_n(t)]^{1/p} < \infty. \tag{4.3.6}$$

Par conséquent, $\{u_n(t,x)\}_n$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. On note par $u(t,x)$ sa limite. Comme dans le cas $p = 2$, il s'ensuit que $\{u_n(t,x)\}_n$ converge vers $u(t,x)$ dans $L^p(\Omega)$, uniformément en $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$.

Montrons maintenant que $\{u_n\}_n$ satisfait :

$$\sup_{n\geq 0} \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(t,x)|^p < \infty. \tag{4.3.7}$$

En utilisant le Corollaire 3.4.4 on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}|u_{n+1}(t,x)|^p &\leq 2^{2\,p-2}\, \mathrm{E}\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, \sigma(u_n(s,y))\, L(ds,dy)\right|^p \\
&+ \;\; 2^{p-1}\, |w(t,x)|^p + 2^{2\,p-2}\, \mathrm{E}\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, b(u_n(s,y))\, dy\, ds\right|^p \\
&\leq \;\; 2^{3p-3}\, B_p^p \Bigg\{ v^{p/2} \left(\mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)|\sigma(u_n(s,y))|^2\, dy\, ds\right)^{p/2} \\
&+ \;\; m_p\, \mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^p(x-y)|\sigma(u_n(s,y))|^p\, dy\, ds \Bigg\} + 2^{p-1}\, |w(t,x)|^p \\
&+ \;\; 2^{2\,p-2}\, \mathrm{E}\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, b(u_n(s,y))\, dy\, ds\right|^p.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Holder (B.1.1), on obtient :

$$\mathrm{E}|u_{n+1}(t,x)|^p \leq 2^{3p-3}\, B_p^p \Bigg\{ v^{p/2}\, \nu_t^{p/2-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\mathrm{E}|\sigma(u_n(s,y))|^p\, dy\, ds$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad m_p \, \mathrm{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^p(x-y) |\sigma(u_n(s,y))|^p \, dy \, ds \Big\} + 2^{p-1} \, |w(t,x)|^p \\
&+ \quad 2^{2\,p-2} \, \Gamma_t^{p-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y) \, \mathrm{E}|b(u_n(s,y))|^p \, dy \, ds.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'équation (4.1.6), on obtient :

$$
\mathrm{E}|u_{n+1}(t,x)|^p \quad \leq \quad K + C' \int_0^t \left(1 + \sup_{y \in \mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(s,y)|^p \right) \delta(t-s) \, ds,
$$

où $K = 2^{p-1} \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}} |w(t,x)|^p$ et C' est une constante qui dépend de p. En notant $M_n(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(t,x)|^p$, et en prenant la borne supérieure pour $x \in \mathbb{R}$, nous en déduisons que :

$$
M_{n+1}(t) \leq K + C' \int_0^t (1 + M_n(s)) \; \delta(t-s) \, ds.
$$

En utilisant le Lemme 15 de [9] avec $k_1 = K$ et $k_2 = 1$, on obtient que :

$$
\sup_{n \geq 0} \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(t,x)|^p < \infty.
$$

La relation (4.3.3) s'en suit, car $\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(t,x)|^p \longrightarrow \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}} \mathrm{E}|u(t,x)|^p$ quand $n \to \infty$.

□

Exemple 4.3.2. Dans le cas de l'équation des ondes, la condition (4.3.1) est satisfaite pour tout $p \geq 1$. Dans ce cas, $G_t(x) = \frac{1}{2} \, 1_{\{|x| < t\}}$, et on en déduit que pour tout $p \geq 0$

$$
\int_{\mathbb{R}} G_s^p(y) \, dy = \frac{1}{2^p} \int_{\mathbb{R}} 1_{\{|y| < s\}} \, ds = \frac{1}{2^{p-1}} \, s, \tag{4.3.8}
$$

et donc

$$
\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_s^p(y) \, dy \, ds = \int_0^t \frac{1}{2^{p-1}} s \, ds = \frac{1}{2^p} t^2. \tag{4.3.9}
$$

Remarque 4.3.3. Malheureusement, la condition (4.3.1) *n'est pas satisfaite* par l'équation de la chaleur pour $p \geq 3$. Pour cette équation :

$$
\int_{\mathbb{R}} G_s^p(y) \, dy = \frac{1}{(2\,\pi\,s)^{p/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{p|y|^2}{2\,s}} \, dy = c_p \, s^{\frac{1-p}{2}},
$$

où $c_p = p^{-1/2}\,(2\,\pi)^{(1-p)/2}$ et donc

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_s^p(y)\,dy\,ds = c_p \int_0^t s^{\frac{1-p}{2}} = \infty \quad \text{si} \quad p \geq 3. \tag{4.3.10}$$

Étudier les moments d'ordre $p \geq 3$ de l'équation de la chaleur stochastique avec un bruit blanc de Lévy reste un problème ouvert.

Remarque 4.3.4. La condition (4.3.2) est satisfaite pour tout $p \geq 2$ si $L = \{L(B);\ B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})\}$ est un bruit blanc de Gamma, c'est-à-dire sa mesure de Lévy ν est donnée par : $\nu(dz) = \alpha\, z^{-1}\, e^{-\beta z} 1_{\{z>0\}}\, dz$ (voir Exemple (2.1.5)). Dans ce cas

$$m_p = \int_{\mathbb{R}} |z|^p \nu(dz) = \alpha \int_0^\infty z^{p-1} e^{-\beta z}\, dz = \alpha \frac{\Gamma(p)}{\beta^p} < \infty.$$

Chapitre 5

Intermittence pour l'équation des ondes

Dans ce chapitre, nous allons montrer que la solution de l'équation des ondes stochastique (4.2.9) avec un bruit blanc de Lévy L possède la propriété d'intermittence faible et est continue dans $L^p(\Omega)$. Pour ceci, on suppose que la mesure ν qui caractérise le bruit L satisfait la condition (4.3.2) pour *tout* $p \geq 2$. Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans [4].

On note par G la solution fondamentale de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}$:

$$G_t(x) = \frac{1}{2} 1_{\{|x|<t\}}, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}. \tag{5.0.1}$$

On se rappelle que $\Gamma_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_s(x)\, dx\, ds = t^3/3$ et $\nu_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_s^2(x)\, dx\, ds = t^2/4$.

5.1 Inégalité stochastique de Young

Dans cette section, nous allons définir la convolution stochastique par rapport à L, puis nous allons présenter une inégalité stochastique de Young pour le bruit blanc de Lévy.

Comme dans [20], pour chaque processus prévisible Φ et pour chaque $\beta > 0$ et $p \geq 2$, on définit :

$$||\Phi||_{\beta,p} = \sup_{(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}} e^{-\beta t} ||\Phi(t,x)||_p, \tag{5.1.1}$$

où $||\cdot||_p$ est la norme dans $L^p(\Omega)$. On note par $\mathcal{L}^{\beta,p}$ l'espace des processus prévisibles Φ tel que $||\Phi||_{\beta,p} < \infty$. On identifie deux processus Φ_1 et Φ_2 tels que $\Phi_1(t,x) = \Phi_2(t,x)$ presque sûrement pour presque tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Lemme 5.1.1. *$\mathcal{L}^{\beta,p}$ est un espace Banach.*

Démonstration. On commence par montrer que $\mathcal{L}^{\beta,p}$ est un espace normé.

i) Il est clair que pour tout $X \in \mathcal{L}^{\beta,p}$, $||X||_{\beta,p} \geq 0$. De plus, si $||X||_{\beta,p} = 0$ alors $||X(t,x)||_p = 0$. On en déduit que $X(t,x) = 0$ presque sûrement pour tout (t,x).

ii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $||a\,X||_{\beta,p} = |a|||\,X||_{\beta,p}$, parce que $||.||_p$ est une norme.

iii) Puisque $||\cdot||_p$ est une norme, l'inégalité triangulaire s'en déduit facilement.

Il est évident que $\mathcal{L}^{\beta,p}$ est un espace vectoriel. En effet, si $a, b \in \mathbb{R}$ et X, $Y \in \mathcal{L}^{\beta,p}$, alors en utilisant le fait que la somme de deux processus prévisibles est prévisible et les propriétés de la norme, on conclut que $a\,X + b\,Y \in \mathcal{L}^{\beta,p}$.

Soit maintenant $(X_n)_n$, une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^{\beta,p}$ c'est-à-dire $||X_n - X_m||_{\beta,p} = \sup_{(t,x)\,\in\,[0,\infty)\times\mathbb{R}} e^{-\beta t}||X_n(t,x) - X_m(t,x)||_p$ tend vers 0 quand n, m tend vers l'infini. Alors, on a pour chaque (t,x), $||X_n(t,x) - X_m(t,x)||_p$ tend vers 0 quand n, m tend vers l'infini. Ainsi $\{X_n(t,x)\}_n$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, donc elle converge, et on note $X(t,x)$ sa limite dans $L^p(\Omega)$. Il faut montrer que :

a) $X \in \mathcal{L}^{\beta,p}$ (c'est-à-dire X a une modification prévisible et $||X||_{\beta,p} < \infty$),

b) $||X_n - X||_{\beta,p}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

a) On observe que $(X_n)_n$ une suite de Cauchy dans l'espace $B = L^p\,\big(\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathcal{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}, P \times e^{-p\,\beta\,t}\,e^{-\lambda\,t}\,dt \times \frac{1}{1+x^2}\,dx\big)$, où $\lambda > 0$ et $\mathcal{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}$ est la $\sigma-$ algèbre engendrée par les processus prévisibles sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, parce que :

$$\begin{aligned} ||X_n - X_m||_B^p &:= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}|X_n(t,x) - X_m(t,x)|^p\,e^{-p\,\beta\,t}\,\frac{1}{1+x^2}\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt \\ &\leq ||X_n - X_m||_{\beta,p}^p \int_0^\infty e^{-\lambda\,t}\,dt \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx \to 0 \quad \text{quand } n, m \to \infty. \end{aligned}$$

Comme B est un espace complet (voir Théorème 19.1 de [6]), on conclut qu'il existe $\widetilde{X} = \lim_n X_n$ dans B. Par définition, $\widetilde{X}$ est prévisible. Comme la convergence dans L^p entraîne la convergence en mesure (par l'inégalité de Markov) et la convergence en mesure implique la convergence presque partout pour une sous-suite (par Théorème $9-2$ C de [7]), on conclut qu'il existe $(n_k)_k$ telle que $X_{n_k}(\omega,t,x) \to \widetilde{X}(\omega,t,x)$ pour $\mu-$ presque tout (ω,t,x), où $\mu = P \times e^{-(p\beta+\lambda)\,t}\,dt \times \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Il reste à montrer que $\widetilde{X}$ est une modification de X. Puisque $\nu = P \times dt \times dx$ est absolument continu par rapport à μ, on déduit que :

$$X_{n_k}(\omega,t,x) \to \widetilde{X}(\omega,t,x) \text{ pour } \nu - \text{ presque tout } (\omega,t,x). \tag{5.1.2}$$

Soit $N = \{(\omega,t,x); (5.1.2) \text{ n'a pas lieu pour ce } (\omega,t,x)\}$. On sait que $\nu(N) = 0$. On considère la section $N_{t,x} = \{\omega \in \Omega; (\omega,t,x) \in N\}$. Par le théorème de Fubini, $0 = \nu(N) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} P(N_{t,x})\,dx\,dt$, donc $P(N_{t,x}) = 0$ pour presque tout (t,x). On en déduit que :

$$X_{n_k}(t,x) \to \widetilde{X}(t,x) \quad \text{presque sûrement, pour presque tout } (t,x). \tag{5.1.3}$$

D'autre part, on sait que pour tout (t,x), $X_{n_k}(t,x) \to X(t,x)$ dans $L^p(\Omega)$, ce qui implique qu'il existe une sous-suite $(n_{k_l})_{k_l}$ telle que $X_{n_{k_l}}(t,x) \to X(t,x)$ presque sûrement. Cette dernière relation et (5.1.3) donnent $\widetilde{X}(t,x) = X(t,x)$ presque sûrement, pour presque tout (t,x). Ceci montre que $\widetilde{X}$ est une modification de X.

On montre maintenant que $||X||_{\beta,p} < \infty$. Puisque $(X_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^{\beta,p}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_ε telle que pour tout $n, m \geq N_\varepsilon$, on ait $e^{-\beta\, t}\, ||X_m(t,x) - X_n(t,x)||_p \leq \varepsilon$. En faisant tendre m vers l'infini, on obtient :

$$e^{-\beta t}\, ||X(t,x) - X_n(t,x)||_p \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } (t,x) \text{ et } n \geq N_\varepsilon. \tag{5.1.4}$$

Donc,

$$\begin{aligned} e^{-\beta t}\, ||X(t,x)||_p &\leq e^{-\beta t}\, ||X(t,x) - X_n(t,x)||_p + e^{-\beta t}\, ||X_n(t,x)||_p \\ &\leq \varepsilon + e^{-\beta t}\, ||X_n(t,x)||_p \quad \text{pour tout } (t,x) \text{ et } \quad n \geq N_\varepsilon. \end{aligned}$$

En prenant la borne supérieure en (t,x), on en déduit que :

$$||X(t,x)||_{\beta,p} \leq \varepsilon + ||X_n||_{\beta,p} < \infty.$$

b) En prenant la borne supérieure en (t,x) dans (5.1.4), on observe que $||X - X_n||_{\beta,p} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N_\varepsilon$. Ceci montre que $||X - X_n||_{\beta,p} \to 0$ quand $n \to \infty$.

$\square$

Le résultat suivant est une variante de l'inégalité de Rosenthal (donnée par le Corollaire 3.4.4) qui jouera le même rôle dans notre étude que l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy donnée par la Proposition 4.4 de [20] dans le cas d'une équation avec un bruit blanc Gaussien.

Proposition 5.1.2. *Soient $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $h \in L^2([0,t] \times \mathbb{R})$ pour tout $t > 0$. Alors pour tout $\Phi \in \bigcup_{\beta>0} \mathcal{L}^{\beta,2}$, l'intégrale stochastique $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s,y)\, \Phi(s,y)\, L(ds,dy)$ est bien définie et pour tout $p \geq 2$ et $t > 0$, on a :*

$$\begin{aligned} &\left|\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s,y)\, \Phi(s,y)\, L(ds,\, dy) \right|\right|_p \\ &\leq B_p \left\{ v^{1/2} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |h(s,y)|^2\, ||\Phi(s,y)||_p^2\, dy\, ds \right)^{1/2} \right. \\ &+ \left. m_p^{1/p} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |h(s,y)|^p\, ||\Phi(s,y)||_p^p\, dy\, ds \right)^{1/p} \right\}, \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

où B_p est la constante dans l'inégalité de Rosenthal.

Démonstration. L'intégrale $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s,y)\,\Phi(s,y)\,L(ds,dy)$ est bien définie car :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |h(s,y)|^2\,|\Phi(s,y)|^2\,dy\,ds &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |h(s,y)|^2\,||\Phi(s,y)||_2^2\,dy\,ds \\ &\leq ||\Phi||_{\beta,2}^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\,\beta\,s}|h(s,y)|^2 dy\,ds \\ &\leq ||\Phi||_{\beta,2}^2\,e^{2\,\beta\,t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |h(s,y)|^2 dy\,ds < \infty. \end{aligned}$$

En appliquant le Corollaire 3.4.4 avec $X(s,y) = \Phi(s,y)\,h(s,y)$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\left|\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s,y)\,\Phi(s,y)\,L(ds,\,dy)\right|\right|_p \\ &\leq\ B_p \left\{ v^{1/2}\left[\mathrm{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |h(s,y)|^2\,|\Phi(s,y)|^2\,dy\,ds\right)^{p/2}\right]^{1/p} \right. \\ &+\ \left. m_p^{1/p}\left(\mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |h(s,y)|^p\,|\Phi(s,y)|^p\,dy\,ds\right)^{1/p}\right\} =: B_p\,\left(v^{1/2}\,I + m_p^{1/p}\,II\right). \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Minkowski, on a :

$$\begin{aligned} I &= \left|\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |h(s,y)\,\Phi(s,y)|^2\,dy\,ds\right|\right|_{p/2}^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left|\left||h(s,y)\,\Phi(s,y)|^2\right|\right|_{p/2}\,dy\,ds\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |h(s,y)|^2\,||[\Phi(s,y)]^2||_{p/2}\,dy\,ds\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |h(s,y)|^2\,||\Phi(s,y)||_p^2\,dy\,ds\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où pour la dernière égalité, nous avons utilisé le fait que pour toute variable aléatoire Y, $||Y^2||_{p/2} = ||Y||_p^2$.

Pour le second terme, on note que :

$$\begin{aligned} II &= \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |h(s,y)|^p\,\mathrm{E}|\Phi(s,y)|^p\,dy\,ds\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |h(s,y)|^p\,||\Phi(s,y)||_p^p\,dy\,ds\right)^{1/p} \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit. □

Définition 5.1.3. Pour chaque $\Phi \in \bigcup\limits_{\beta>0} \mathcal{L}^{\beta,2}$, on définit la *convolution stochastique* $G \circledast \Phi$ *par :*

$$(G \circledast \Phi)(t,x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, \Phi(s,y)\, L(ds,dy), \tag{5.1.6}$$

pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, *avec* $(G \circledast \Phi)(0,x) = 0$.

On observe que $(G \circledast \Phi)(t,x)$ est bien défini par la Proposition 5.1.2 car $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\, dy\, ds < \infty$, pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

On rappelle que la convolution au sens habituel est définie par :

$$(G * \Phi)(t,x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, \Phi(s,y)\, dy\, ds, \tag{5.1.7}$$

pour tout $\Phi \in \bigcup\limits_{\beta>0} \mathcal{L}^{\beta,2}$. Cette intégrale est bien définie car par l'inégalité de Hölder (voir la relation (B.1.1), Annexe B) on a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}\Phi(s,y)\, dy\, ds\right|^2 \\
&\le \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\mathrm{E}\left|\Phi(s,y)\right|^2\, dy\, ds \cdot \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, dy\, ds \\
&\le \Gamma_t\, ||\Phi||_{\beta,2}^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, e^{2\,\beta\, s}\, dy\, ds \le \Gamma_t^2\, ||\Phi||_{\beta,2}^2\, e^{2\,\beta\, t} < \infty.
\end{aligned}$$

Le résultat suivant donne une inégalité stochastique de Young pour la convolution de la solution fondamentale G de l'équation des ondes avec le bruit blanc de Lévy L. Ce résultat est l'analogue de la Proposition 5.2 de [20] qui traite la convolution de la solution fondamentale de G de l'équation de la chaleur avec le bruit blanc Gaussien W.

Proposition 5.1.4. *Pour tout* $\beta > 0$, $p \ge 2$ *et* $\Phi \in \mathcal{L}^{\beta,2}$, *on a :*

$$||G \circledast \Phi||_{\beta,p} \le B_p \left\{ \frac{v^{1/2}}{2\sqrt{2}\beta} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\, m_p}{p^2\beta^2}\right)^{1/p} \right\} ||\Phi||_{\beta,p}\,. \tag{5.1.8}$$

Démonstration. On fixe $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $||\Phi||_{\beta,p} < \infty$, sinon on a rien à démontrer. En utilisant le fait que :

$$||\Phi(s,y)||_p \le e^{\beta\, s}\, ||\Phi||_{\beta,p}\,, \tag{5.1.9}$$

et l'inégalité (5.1.5) avec $h(s,y) = G_{t-s}(x-y)$, on obtient :

$$||(G \circledast \Phi)(t,x)||_p \;=\; \left|\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, \phi(s,y)\, L(ds,dy)\right|\right|_p$$

$$
\begin{aligned}
&\le \; B_p \left\{ v^{1/2} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y) \; ||\Phi(s,y)||_p^2 \; dy\, ds \right)^{1/2} \right.\\
&+ \; \left. m_p^{1/p} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G^p_{t-s}(x-y) \; ||\Phi(s,y)||_p^p \; dy\, ds \right)^{1/p} \right\}\\
&\le \; B_p \; ||\Phi||_{\beta,p} \left\{ v^{1/2} \left(\int_0^t e^{2\,\beta\, s} \int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\, dy\, ds \right)^{1/2} \right.\\
&+ \; \left. m_p^{1/p} \left(\int_0^t e^{p\,\beta\, s} \int_{\mathbb{R}} G^p_{t-s}(x-y)\, dy\, ds \right)^{1/p} \right\}.
\end{aligned}
$$

Par la relation (4.3.8), on déduit que pour chaque $p > 0$,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t e^{p\,\beta s} \left(\int_{\mathbb{R}} G^p_{t-s}(x-y)\, dy \right) ds\\
&= \; \frac{1}{2^{p-1}} \int_0^t e^{p\,\beta\, s}\,(t-s)\, ds = \frac{1}{2^{p-1}} \int_0^t e^{p\,\beta\,(t-s)}\, s\, ds\\
&= \; \frac{1}{2^{p-1}} e^{p\,\beta\, t} \int_0^t e^{-p\,\beta\, s}\, s\, ds \le \frac{1}{2^{p-1}} e^{p\,\beta\, t} \int_0^\infty s\, e^{-p\,\beta\, s}\; ds\\
&= \; \frac{1}{2^{p-1}} e^{p\,\beta\, t} \frac{1}{(p\,\beta)^2} \int_0^\infty r\, e^{-r}\, dr = \frac{1}{2^{p-1}}\, \frac{1}{(p\,\beta)^2}\, e^{p\,\beta\, t}.
\end{aligned} \tag{5.1.10}
$$

On en déduit que :

$$
\begin{aligned}
||(G \circledast \Phi)(t,x)||_p \; &\le \; B_p \; ||\Phi||_{\beta,p} \left\{ v^{1/2} \left(\frac{e^{2\,\beta\, t}}{8\beta^2} \right)^{1/2} + m_p^{1/p} \left(\frac{e^{p\,\beta\, t}}{2^{p-1}\, p^2\, \beta^2} \right)^{1/p} \right\}\\
&\le \; B_p \; ||\Phi||_{\beta,p} \left\{ \frac{v^{1/2}}{2\sqrt{2}\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\, m_p}{p^2\, \beta^2} \right)^{1/p} \right\} e^{\beta\, t}.
\end{aligned}
$$

En divisant par $e^{\beta\, t}$ et en prenant la borne supérieure pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on obtient le résultat. □

Remarque 5.1.5. Si G est la solution fondamentale de l'équation des ondes et W est un bruit blanc Gaussien, alors en utilisant le même raisonnement que dans la démonstration de la Proposition 5.1.4, on obtient pour tout $\beta > 0$, $p \ge 2$ et $\Phi \in \bigcup_{\beta>0} \mathcal{L}^{\beta,2}$:

$$
\left|\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(y-x)\, \Phi(s,y)\, W(ds,dy) \right|\right|_p \le z_p\, \frac{1}{2\sqrt{2}\,\beta}\, ||\Phi||_{\beta,p}\,,
$$

où $z_p \sim 2\,\sqrt{p}$ est la constante dans l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy.

5.2 Borne supérieure pour le moment d'ordre p

Dans cette section, nous allons montrer que le moment d'ordre p de la solution de l'équation des ondes stochastiques (4.2.9) possède une borne exponentielle en temps. On suppose que g est une fonction continue et bornée et $h \in L^1(\mathbb{R})$. On note $L_0 = \max(C_\sigma, D_\sigma)$ où C_σ et D_σ sont les constantes données par (4.1.1) et (4.1.3).

Soit $(u_n)_n$ la suite des itérations de Picard définie par (4.1.9) et (4.1.10).

Théorème 5.2.1. *Si la mesure ν satisfait la condition* (4.3.2)*, alors pour chaque $t > 0$, $p \geq 2$ et $n \geq 0$, on a :*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(t,x)|^p \leq L_1^p \exp(L_2^{p/2}\, p^{p/2}\, M_p^{1/2}\, t), \tag{5.2.1}$$

où $M_p = \max(v, m_p)$, L_1 et L_2 sont des constantes positives qui ne dépendent pas de p.

Démonstration. On utilise le même raisonnement que dans la preuve de la Proposition 5.8 de [20]. Par définition, $u_0(t,x) = w(t,x)$ et

$$u_{n+1}(t,x) = w(t,x) + (G \circledast \sigma(u_n))(t,x) + (G * b(u_n))(t,x). \tag{5.2.2}$$

On rappelle que (voir (4.2.12))

$$|w(t,x)| \leq \frac{1}{2}||h||_{L^1} + ||g||_\infty =: K. \tag{5.2.3}$$

En utilisant l'inégalité (4.1.6), on observe que :

$$|\sigma(u_n(t,x))|^p \leq L_0^p\,(1 + |u_n(t,x)|)^p\,.$$

En prenant l'espérance et puis la puissance $1/p$, on obtient :

$$||\sigma(u_n(t,x))||_p \leq L_0 ||1 + |u_n(t,x)|\,||_p.$$

Par l'inégalité de Minkowski, $||1 + |u_n(t,x)|\,||_p \leq 1 + ||u_n(t,x)||_p$, et donc

$$||\sigma(u_n(t,x))||_p \leq L_0\,(1 + ||u_n(t,x)||_p)\,.$$

On multiplie par $e^{-\beta t}$ et on prend la borne supérieure pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Comme $\sup\limits_{t>0} e^{-\beta t} = 1$, on déduit que :

$$||\sigma(u_n)||_{\beta,p} \leq L_0\,(1 + ||u_n||_{\beta,p})\,. \tag{5.2.4}$$

En utilisant les inégalités (5.1.8) et (5.2.4) on obtient :

$$||G \circledast \sigma(u_n)||_{\beta,p} \quad \leq \quad B_p \left\{ \frac{v^{1/2}}{2\sqrt{2}\beta} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\,m_p}{p^2\beta^2}\right)^{1/p} \right\} ||\sigma(u_n)||_{\beta,p}$$

$$\leq \ C_{\beta,p}\, L_0 \Big(1 + ||u_n||_{\beta,p}\Big)\,, \tag{5.2.5}$$

où

$$C_{\beta,p} := B_p \left\{ \frac{v^{1/2}}{2\sqrt{2}\beta} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\,m_p}{p^2\beta^2}\right)^{1/p} \right\}. \tag{5.2.6}$$

On note aussi que par l'inégalité de Minkowski, les relations (4.1.6), (4.3.10) et (5.1.9) que :

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y) b(u_n(s,y))\, dy\, ds\right|\right|_p \\
&\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, ||b(u_n(s,y))||_p\, dy\, ds \\
&\leq L_0 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, (1 + ||u_n(s,y)||_p)\, dy\, ds \\
&\leq L_0 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, (1 + e^{\beta\, s}||u_n||_{\beta,p})\, dy\, ds \\
&= L_0 \left\{ \frac{t^2}{2} + ||u_n||_{\beta,p} \int_0^t e^{\beta\, s} \left(\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, dy \right) ds \right\} \\
&= L_0 \left\{ \frac{t^2}{2} + ||u_n||_{\beta,p} \frac{1}{\beta^2} e^{\beta\, t} \right\},
\end{aligned}$$

où pour la dernière égalité, nous avons utilisé (5.1.10) avec $p = 1$. Ainsi, en multipliant par $e^{-\beta\, t}$, nous obtenons :

$$e^{-\beta\, t} \left|\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y) b(u_n(s,y))\, dy\, ds\right|\right|_p \leq \frac{L_0}{2} e^{-\beta\, t}\, t^2 + \frac{L_0}{\beta^2} ||u_n||_{\beta,p}.$$

Par conséquent, en utilisant le fait que $\sup_{t\geq 0} (t^2\, e^{-\beta\, t}) = \frac{4}{e^2\, \beta^2}$, on a :

$$||G * b(u_n)||_{\beta,p} \ \leq \frac{2\, L_0}{e^2\, \beta^2} + \frac{L_0}{\beta^2} ||u_n||_{\beta,p}. \tag{5.2.7}$$

Par application de l'inégalité de Minkowski dans l'espace $\mathcal{L}^{\beta,p}$ et les inégalités (5.2.3), (5.2.5) et (5.2.7) on obtient :

$$\begin{aligned}
||u_{n+1}||_{\beta,p} &\leq ||w||_{\beta,p} + ||G \circledast \sigma(u_n)||_{\beta,p} + ||G * b(u_n)||_{\beta,p} \\
&\leq K + C_{\beta,p}\, L_0\, (1 + ||u_n||_{\beta,p}) + \frac{2\, L_0}{e^2\, \beta^2} + \frac{L_0}{\beta^2} ||u_n||_{\beta,p} \\
&= K + C_{\beta,p}\, L_0 + \frac{2\, L_0}{e^2\, \beta^2} + L_0 (C_{\beta,p} + \frac{1}{\beta^2}) ||u_n||_{\beta,p}.
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

On fixe $p \geq 2$ et on doit trouver la constante β (qui dépend de p) telle que :

$$C_{\beta,p}\, L_0 < \frac{1}{4} \text{ et } \frac{L_0}{\beta^2} < \frac{1}{4}. \tag{5.2.9}$$

Pour ceci, il suffit de choisir β telle que :

$$\begin{cases} \frac{L_0}{\beta^2} < \frac{1}{4} \\ B_p\, L_0\, \left(\frac{v}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{\beta} < \dfrac{1}{4} \\ B_p\, L_0\, \left(\frac{m_p}{p^2/2}\right)^{1/p} \left(\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/p} < \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à dire que :

$$\begin{cases} \beta^2 > 4L_0 \\ \beta^2 > B_p^2\, \frac{v}{2}\, (4\, L_0)^2 \\ \beta^2 > B_p^p\, \frac{m_p}{p^2/2}\, (4\, L_0)^p. \end{cases}$$

On se rappelle que $B_p = O\left(\frac{p}{\ln p}\right)$. Donc pour tout $p \geq 2$, on a $B_p \leq C\dfrac{p}{\ln p} \leq C_0\, p$, où C est une constante positive et $C_0 = \frac{C}{\ln 2}$. On prend $M_p = \max(v,\, m_p)$. Ainsi, il suffit de choisir $\beta > 0$ telle que :

$$\begin{cases} \beta^2 > C_0^2\, p^2\, \frac{M_p}{2}\, (4\, L_0)^2 \\ \beta^2 > C_0^p\, p^p\, \frac{M_p}{p^2/2}\, (4\, L_0)^p. \end{cases} \tag{5.2.10}$$

On observe que pour chaque $p \geq 2$, on a $p^p\, \frac{1}{p^2/2} = 2\, p^{p-2} \geq \frac{p^2}{2}$. De plus, si on choisit $L_0 \geq \frac{1}{2}$, alors $(4\, L_0)^p \geq (4\, L_0)^2$, et si on prend C suffisamment grand telle que $C_0 \geq 1$, alors $C_0^p \geq C_0^2$. Donc pour que (5.2.10) soit satisfaite, il suffit de choisir β telle que :

$$\beta^2 > C_0^p\, p^p\, \frac{M_p}{p^2/2}\, (4\, L_0)^p = 2\, p^{p-2}\, M_p\, (4\, C_0\, L_0)^p.$$

Comme $2 < 2^p$, il suffit de prendre β telle que $\beta^2 > p^{p-2}\, M_p\, (8\, C_0\, L_0)^p$. On prend

$$\beta^2 = p^{p-2}\, M_p\, (9\, C_0\, L_0)^p =: p^{p-2}\, M_p\, L_2^p, \quad L_2 = 9\, C_0 L_0. \tag{5.2.11}$$

Avec ce choix, la condition (5.2.9) est satisfaite. Par les inégalités (5.2.8) et (5.2.9), on obtient :

$$||u_{n+1}||_{\beta,p} \leq K + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\, e^2} + \frac{1}{2}\, ||u_n||_{\beta,p}.$$

Donc, si on définit $\gamma = K + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2\, e^2}$, alors pour tout $n \geq 0$, on a :

$$||u_{n+1}||_{\beta,p} \leq \gamma + \frac{1}{2}\, ||u_n||_{\beta,p}\, . \tag{5.2.12}$$

En utilisant la relation (5.2.12) de manière récursive, on obtient :

$$||u_n||_{\beta,p} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\gamma}{2^j} + \frac{1}{2^n}\,||u_0||_{\beta,p} \leq 2\,\gamma + \frac{1}{2}K = \frac{5}{2}K + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^2} =: L_1.$$

Il résulte que :

$$||u_n||_{\beta,p} \leq L_1, \tag{5.2.13}$$

pour tout $n \geq 0$, avec β donné par (5.2.11). Ceci signifie que pour chaque $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $||u_n(t,x)||_p \leq L_1\, e^{\beta\, t}$, et donc

$$\mathrm{E}|u_n(t,x)|^p \leq L_1^p \, \exp(p\,\beta\, t) \leq L_1^p \, \exp(L_2^{p/2}\, p^{p/2}\, M_p^{1/2}\, t).$$

□

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section.

Théorème 5.2.2. *Si la mesure* ν *satisfait la condition* (4.3.2), *alors la solution* $u = \{u(t,x); t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ *de l'équation* (4.2.9) *vérifie pour tout* $p \geq 2$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{E}|u(t,x)|^p \leq L_1^p \, \exp(L_2^{p/2}\, p^{p/2}\, M_p^{1/2}\ t), \tag{5.2.14}$$

où L_1 *et* L_2 *sont les constantes données par le Théorème 5.2.1.*

Démonstration. Par la relation (4.1.17), on a :

$$u_{n+1} - u_n = G \circledast [\sigma(u_n) - \sigma(u_{n-1})] + G * [b(u_n) - b(u_{n-1})]. \tag{5.2.15}$$

De la même manière que (5.2.5) et (5.2.7), en utilisant la propriété (4.1.1), on peut montrer que :

$$||G \circledast [\sigma(u_n) - \sigma(u_{n-1})]||_{\beta,p} \leq C_{\beta,p}\, L_0\, ||u_n - u_{n-1}||_{\beta,p},$$

et

$$||G * [b(u_n) - b(u_{n-1})]||_{\beta,p} \leq \frac{L_0}{\beta^2}\, ||u_n - u_{n-1}||_{\beta,p},$$

avec $C_{\beta,p}$ donnée par (5.2.6). Donc, en utilisant l'inégalité de Minkowski, on obtient :

$$\begin{aligned} ||u_{n+1} - u_n||_{\beta,p} &\leq ||G \circledast [\sigma(u_n) - \sigma(u_{n-1})]\,||_{\beta,p} + ||G * [b(u_n) - b(u_{n-1})]||_{\beta,p} \\ &\leq C_{\beta,p}\, L_0\ ||u_n - u_{n-1}||_{\beta,p} + \frac{L_0}{\beta^2}\, ||u_n - u_{n-1}||_{\beta,p}\,. \end{aligned}$$

En procédant comme dans le Théorème 5.2.1, pour chaque $p \geq 2$ fixé, on peut choisir la constante β (qui dépend de p) telle que (5.2.9) a lieu. Donc $||u_{n+1} - u_n||_{\beta,p} \leq \frac{1}{2} ||u_n - u_{n-1}||_{\beta,p}$. Par récurrence,

$$||u_{n+1} - u_n||_{\beta,p} \leq \frac{1}{2^n} ||u_1 - u_0||_{\beta,p} \leq \frac{1}{2^n}(2L_1),$$

où on a utilisé (5.2.13) pour la dernière inégalité. L'espace $\mathcal{L}^{\beta,p}$ étant complet et $\sum_{n\geq 0} ||u_{n+1} - u_n||_{\beta,p} < \infty$, on en déduit que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge dans cet espace. Sa limite u est la solution de l'équation (4.2.9). Le résultat s'en suit en passant à la limite dans (5.2.1). □

On introduit maintenant la définition des exposants de Lyapunov et de l'intermittence faible (voir Définition 7.5 de [20]).

Définition 5.2.3. Soit $u = \{u(t,x); t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ un processus aléatoire.

a) L'*exposant de Lyapunov supérieur* de u est défini par :

$$\overline{\gamma}_p(x) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathrm{E}|u(t,x)|^p, \quad p \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

b) L'*exposant de Lyapunov inférieur* de u est défini par :

$$\underline{\gamma}_p(x) = \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathrm{E}|u(t,x)|^p, \quad p \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

c) On dit que le processus u est *faiblement intermittent* si pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on a $\underline{\gamma}_2(x) > 0$ et $\overline{\gamma}_p(x) < \infty$ pour tout $p \geq 2$.

Remarque 5.2.4. Par le Théorème 5.2.14, on déduit que pour tout $p \geq 2, t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{t} \log \mathrm{E}\, |u(t,x)|^p \leq \frac{p}{t} \log L_1 + L_2^{p/2}\, p^{p/2}\, M_p^{1/2},$$

et donc $\overline{\gamma}_p(x) \leq L_2^{p/2}\, p^{p/2}\, M_p^{1/2}$ pour tout $p \geq 2$ et $x > 0$.

Remarque 5.2.5. *(Comparaison avec le cas du bruit blanc Gaussien)* On considère l'équation des ondes suivante, avec un bruit blanc Gaussien W :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) & = & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \sigma(u(t,x))\dot{W}(t,x) \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) & = & g(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) & = & h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array}\right. \tag{5.2.16}$$

On se rappelle que $W = \{W(h); h \in L(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})\}$ est défini comme un processus Gaussien de moyenne 0 et de covariance

$$\mathrm{E}[W(g)W(h)] = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} g(t,x)\, h(t,x)\, dx\, dt. \tag{5.2.17}$$

L'intégrale stochastique par rapport à W a été construite par Walsh dans [32].
Soit $(u_n)_n$ la suite des itérations de Picard. Dans ce cas, en utilisant la même méthode que dans la preuve de la Proposition 5.8 de [20] (pour l'équation de la chaleur), on peut montrer que pour chaque $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $||u_n||_{\beta,p} \leq L_1$ pour tout $n \geq 0$, avec $\beta = L_2\, p^{1/2}$, où L_1 et L_2 sont des constantes positives. Dans ce cas, pour tout $t > 0$, $p \geq 2$, on a :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(t,x)|^p \leq L_1^p \exp(L_2\, p^{3/2}\, t), \quad n \geq 0,$$

et aussi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{E}|u(t,x)|^p \leq L_1^p \exp(L_2\, p^{3/2}\, t). \tag{5.2.18}$$

Par conséquent, l'exposant de Lyapunov supérieur de u satisfait $\overline{\gamma}_p(x) \leq L_2 p^{3/2}$.

Si on compare (5.2.18) et (5.2.14), on voit que la dépendance en p dans l'exponentielle est plus compliquée dans le cas du bruit L que dans celui de W.

5.3 Borne inférieure pour le moment d'ordre 2

Dans cette section, nous allons montrer que la solution u de l'équation (4.2.9) est faiblement intermittente. Pour ceci, il nous reste à montrer que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on a $\underline{\gamma}_2(x) > 0$.

Théorème 5.3.1. *On considère l'équation* (4.2.9) *avec $h \equiv 0$ et $b \equiv 0$. On suppose qu'il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq a$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $L_\sigma := \inf_{x\neq 0} |\sigma(x)/x| > 0$. Alors, il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \geq t_0$,*

$$\inf_{x\neq 0} \mathrm{E}|u(t,x)|^2 \geq \frac{a^2}{2} \exp\left\{ L_\sigma \left(\frac{v}{2}\right)^{1/2} t \right\}. \tag{5.3.1}$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\underline{\gamma}_2(x) \geq L_\sigma\, (v/2)^{1/2}$.

Démonstration. Nous suivons la démonstration du Théorème 7.8 de [20]. On se rappelle que la solution de (4.2.9) est donnée par (4.1.9), et l'intégrale stochastique par rapport à L dans (4.1.9) a une moyenne nulle. En utilisant la propriété d'isométrie (2.2.3) et le fait que $b \equiv 0$ et $\mathrm{E}(u(t,x)) = w(t,x)$ on a :

$$\mathrm{Var}(u(t,x)) \;=\; \mathrm{E}\,|u(t,x)|^2 - w(t,x)^2 = \mathrm{E}|u(t,x) - w(t,x)|^2$$

$$= \quad v\,\mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)|\sigma(u(s,y))|^2\,dy\,ds.$$

En utilisant les hypothèses sur g et h, on déduit que $w(t,x) \geq a$, pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Puisque $|\sigma(x)| \geq L_\sigma |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par conséquent,

$$\mathrm{E}|u(t,x)|^2 \geq a^2 + L_\sigma^2\, v \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\,\mathrm{E}|u(s,y)|^2\,dy\,ds,$$

pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On note $I(t) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{E}|u(t,x)|^2$. En utilisant (4.3.8) avec $p = 2$, nous obtenons :

$$\mathrm{E}|u(t,x)|^2 \geq a^2 + \frac{L_\sigma^2\, v}{2} \int_0^t I(s)(t-s)ds.$$

En prenant la borne inférieure pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$I(t) \geq a^2 + \frac{L_\sigma^2\, v}{2} \int_0^t I(s)(t-s)ds.$$

On utilise maintenant le Théorème 7.11 de [20] basé sur la théorie de renouvellement. On observe que ce théorème est vrai pour n'importe quelle fonction g telle que $\tilde{g}(t) = e^{-\lambda t}\,g(t)$ est une fonction intégrable, pour un certain $\lambda > 0$. On déduit que

$$I(t) \geq f(t)\,\text{pour tout}\,t > 0, \tag{5.3.2}$$

où f est la solution de

$$f(t) = a^2 + \int_0^t f(s)\,g(t-s)\,ds,$$

avec $g(t) = \frac{L_\sigma^2\, v}{2} t$. En multipliant par $e^{-\lambda\, t}$ pour un certain $\lambda > 0$, nous obtenons :

$$f(t)\,e^{-\lambda\, t} = a^2\,e^{-\lambda\, t} + \int_0^t e^{-\lambda\, t}\,f(s)\,g(t-s)\,ds.$$

En faisant un changement de variable $u = t - s$, on déduit que :

$$\begin{aligned} f(t)e^{-\lambda\, t} &= a^2\,e^{-\lambda\, t} + \int_0^t e^{-\lambda\, t} f(t-u)\,g(u)\,du \\ &= a^2\,e^{-\lambda\, t} + \int_0^t e^{-\lambda\,(t-u)}\,f(t-u)\,e^{-\lambda\, u} g(u)\,du. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\widetilde{f}(t) = a^2\,e^{-\lambda\, t} + \int_0^t \widetilde{f}(t-s)\,\widetilde{g}(s)\,ds, \tag{5.3.3}$$

avec $\widetilde{h}(t) = e^{-\lambda t} h(t)$ pour toute fonction h. Puisque $\int_0^\infty \widetilde{g}(s)\, ds = \frac{L_\sigma^2 v}{2} \frac{1}{\lambda^2}$, il suffit de choisir $\lambda^2 = \frac{L_\sigma^2 v}{2}$ pour que $\tilde{g}$ devienne une densité sur $(0, \infty)$. Donc (5.3.3) est une “équation de renouvellement”. Avec ce choix sur λ, en utilisant le Théorème de Renouvellement de Feller (voir page 363 de [13]), nous obtenons que :

$$\lim_{t\to\infty} \widetilde{f}(t) = \frac{\int_0^\infty a^2 e^{-\lambda t}\, dt}{\int_0^\infty t\, \widetilde{g}(t)\, dt} = \frac{a^2 \lambda^{-1}}{v\, L_\sigma^2\, \lambda^{-3}} = \frac{a^2}{v\, L_\sigma^2} \lambda^2 = \frac{a^2}{2},$$

car $\int_0^\infty s\, \widetilde{g}(s)\, ds = \frac{v\, L_\sigma^2}{\lambda^3}$. Par (5.3.2), on obtient $\liminf_{t\to\infty} (e^{-\lambda t} I(t)) \geq \frac{a^2}{2}$, et donc, il existe t_0 tel que $\inf_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{E}|u(t,x)|^2 = I(t) \geq \frac{a^2}{2} e^{\lambda t}$ pour tout $t \geq t_0$.

□

5.4 Continuité dans l'espace $L^p(\Omega)$

Dans cette section, nous allons montrer la continuité de la solution u de l'équation (4.2.9) dans l'espace $L^p(\Omega)$. On commence avec deux résultats préliminaires sur les accroissements de la solution fondamentale G de l'équation des ondes.

Lemme 5.4.1. *Soit G la solution fondamentale de l'équation des ondes. Alors, pour tout $p > 0$, $t > 0$ et $h \in \mathbb{R}$*

$$A_t^{(p)}(h) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_s(y) - G_s(y+h)|^p\, dy\, ds \, = 2^{1-p}\, |h|\, t. \tag{5.4.1}$$

Démonstration. On se rappelle que $G_t(x) = \frac{1}{2} 1_{\{|x|<t\}}$ et on en déduit que $G_s(y) - G_s(y+h) = \frac{1}{2}\left(1_{\{|y|<s\}} - 1_{\{|y+h|<s\}}\right)$. Ainsi,

$$|G_s(y) - G_s(y+h)| = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y \in [s-h, s) \cup (-s-h, -s] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $h > 0$. Dans ce cas, on a

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_s(y) - G_s(y+h)|^p\, dy\, ds = \frac{1}{2^p} \int_0^t \int_{[s-h,s)\cup(-s-h,-s]} dy\, ds = \frac{1}{2^p}\, 2\, h\, t.$$

□

Lemme 5.4.2. *Soit G est la solution fondamentale de l'équation des ondes. Alors, pour tout $p > 0$, $t > 0$ et $h \in \mathbb{R}$*

$$B_t^{(p)}(h) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{s+h}(y) - G_s(y)|^p\, dy\, ds \, = 2^{1-p}\, |h|\, t, \tag{5.4.2}$$

et pour $h > 0$

$$C_t^{(p)}(h) := \int_0^h \int_{\mathbb{R}} G_{s+h}^p(y)\, dy\, ds = \frac{3}{2^p} h^2. \tag{5.4.3}$$

Démonstration. On suppose que $h > 0$. On remarque que :

$$|G_s(y) - G_{s+h}(y)| = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si}\, y \in (-s-h, -s] \cup [s, s+h) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_s(y) - G_{s+y}(y)|^p\, dy\, ds &= \frac{1}{2^p} \int_0^t \int_{(-s-h,-s]\cup[s,s+h)} dy\, ds \\ &= \frac{1}{2^p}\, 2\, h\, t. \end{aligned}$$

Le cas $h < 0$ est similaire. Par la définition de G, on a :

$$C_t^{(p)}(h) = \frac{1}{2^p} \int_0^h \int_{\mathbb{R}} 1_{\{|y|<s+h\}}\, dy\, ds = \frac{1}{2^p} \int_0^h 2\,(s+h)\, ds = \frac{3}{2^p}\, h^2.$$

□

Les deux résultats suivants sont les analogues des Lemmes 5.3 et 5.4 de [20] pour la convolution stochastique avec le bruit L. Le premier donne une estimation du moment d'ordre p de l'accroissement en espace de la *convolution stochastique* avec un processus Φ et le second en temps. Ces résultats seront appliqués pour $\Phi = \sigma(u_n)$.

Proposition 5.4.3. *Si G est la solution fondamentale de* (4.2.9). *Alors pour tout $p \geq 2$, $\beta \geq 0, t \in [0, T]$ et $x, x' \in \mathbb{R}$, avec $|x - x'| < K$, pour un certain $K > 0$, on a :*

$$\mathrm{E}\left|(G \circledast \Phi)(t, x) - (G \circledast \Phi)(t, x')\right|^p \leq\, C_{T,K,p}\, e^{p\,\beta\, t}\, ||\Phi||_{p,\beta}^p\, |x - x'|$$

où $C_{T,K,p}$ est une constante qui dépend de T, K et p.

Démonstration. En utilisant (5.1.5), on a :

$$\begin{aligned} &\left|\left|(G \circledast \Phi)(t, x) - (G \circledast \Phi)(t, x')\right|\right|_p \\ &= \left|\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} [G_{t-s}(x-y) - G_{t-s}(x'-y)]\, \Phi(s, y)\, L(ds, dy)\right|\right|_p \\ &\leq B_p(v^{1/2} I_1^{1/2} + m_p^{1/p} I_2^{1/p}), \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

avec

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(x-y) - G_{t-s}(x^{'}-y)|^2 || \, \Phi(s,y)||_p^2 \, dy \, ds \\ I_2 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(x-y) - G_{t-s}(x^{'}-y)|^p || \, \Phi(s,y)||_p^p \, dy \, ds. \end{cases}$$

En utilisant (5.1.9), suivi de (5.4.1) on obtient :

$$I_1 \leq e^{2\,\beta\, t} ||\Phi||^2_{\beta,p} \, A_t^{(2)}(x-x^{'}) = e^{2\,\beta\, t} \, ||\Phi||^2_{\beta,p} \, \frac{1}{2} |x-x^{'}| \, t.$$

Ainsi, on déduit que :

$$I_1^{1/2} \leq e^{\beta\, t} \, ||\Phi||_{\beta,p} \, \frac{1}{\sqrt{2}} |x-x^{'}|^{1/2} \, t^{1/2}. \tag{5.4.5}$$

De façon similaire, en utilisant (5.1.9), suivi de (5.4.1), on déduit que :

$$I_2 \leq e^{p\,\beta\, t} \, ||\Phi||^p_{\beta,p} \, A_t^{(p)}(x-x^{'}) = e^{p\,\beta\, t} \, ||\Phi||^p_{\beta,p} \, 2^{1-p} |x-x^{'}| \, t,$$

et

$$I_2^{1/p} \leq e^{\beta\, t} \, ||\Phi||_{\beta,p} \, 2^{\frac{1-p}{p}} \, |x-x^{'}|^{1/p} \, t^{1/p}. \tag{5.4.6}$$

En utilisant (5.4.4), (5.4.5) et (5.4.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Big|\Big|(G \circledast \Phi)(t,x) - (G \circledast \Phi)(t,x^{'})\Big|\Big|_p \quad &\leq \quad B_p \, e^{\beta\, t} \, ||\Phi||_{\beta,p} \left(v^{1/2} \, \frac{1}{\sqrt{2}} \, |x-x^{'}|^{1/2} \, t^{1/2} \right. \\ &+ \quad \left. m_p^{1/p} \; 2^{\frac{1-p}{p}} \; |x-x^{'}|^{1/p} \; t^{1/p} \right) \end{aligned}$$

En posant $C_T = \max\left(T^{1/2}, T^{1/p}\right)$, $K_p = B_p \max(v^{1/2},\, m_p^{1/p})$ et puisque $2^{\frac{1}{p}-1} \leq 2^{\frac{1}{2}-1}$ (car $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$), on déduit que :

$$\begin{aligned} &\Big|\Big|(G \circledast \Phi)(t,x) - (G \circledast \Phi)(t,x^{'})\Big|\Big|_p \\ &\quad \leq \quad K_p \, C_T \, e^{\beta\, t} \, ||\Phi||_{\beta,p} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|x-x^{'}|^{1/2} + |x-x^{'}|^{1/p} \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse $|x-x^{'}| < K$, on déduit que :

$$\Big|\Big|(G \circledast \Phi)(t,x) - (G \circledast \Phi)(t,x^{'})\Big|\Big|_p \quad \leq \quad C_{T,K,p} \, e^{\beta\, t} \, ||\Phi||_{\beta,p} \, |x-x^{'}|^{1/p},$$

où $C_{T,K,p}$ est une constante qui dépend de T, K et p. Le résultat découle en élevant à la puissance p.

$\square$

Proposition 5.4.4. *Si G est la solution fondamentale de* (4.2.9), *alors pour tout $p \geq 2$, $\beta \geq 0, t, t^{'} \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\mathrm{E}\left|(G \circledast \Phi)(t,x) - (G \circledast \Phi)(t^{'},x)\right|^p \leq C_{T,K,p}\, e^{p\,\beta\, t}\, ||\Phi||^p_{\beta,p}\, |t-t^{'}|,$$

où $C_{T,K,p}$ est une constante qui dépend de T, K et p (qui n'est pas la même que dans la Proposition 5.4.3).

Démonstration. On suppose que $t < t^{'}$ et on écrit :

$$\begin{aligned} &(G \circledast \Phi)(t^{'},x) - (G \circledast \Phi)(t,x) \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [G_{t'-s}(x-y) - G_{t-s}(x-y)]\, \Phi(s,y)\, L(ds,\, dy) \\ &+ \int_t^{t^{'}} \int_{\mathbb{R}} G_{t'-s}(x-y)\ \Phi(s,y)\, L(ds,\, dy). \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Minkowski, on a :

$$\left|\left|(G \circledast \Phi)(t,x) - (G \circledast \Phi)(t^{'},x)\right|\right|_p \leq I_1 + I_2, \tag{5.4.7}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} I_1 = \left|\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} [G_{t'-s}(x-y) - G_{t-s}(x-y)]\, \Phi(s,y)\, L(ds,\, dy)\right|\right|_p \\ I_2 = \left|\left|\int_t^{t^{'}} \int_{\mathbb{R}} G_{t'-s}(x-y)\ \Phi(s,y)\, L(ds,\, dy)\right|\right|_p. \end{array}\right.$$

Pour le terme I_1, en utilisant (5.1.5), on obtient :

$$I_1 \leq B_p \left(v^{1/2} I_{11}^{1/2} + m_p^{1/p} I_{12}^{1/p}\right),$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} I_{11} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{t'-s}(x-y) - G_{t-s}(x-y)|^2\, ||\Phi(s,y)||^2\, dy\, ds \\ I_{12} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{t'-s}(x-y) - G_{t-s}(x-y)|^p\, ||\Phi(s,y)||^p\, dy\, ds. \end{array}\right.$$

On note $h = t^{'} - t$. En utilisant (5.1.9), suivi de (5.4.2), on obtient :

$$\begin{aligned} I_{11} &\leq e^{2\,\beta\, t}\, ||\Phi||^2_{\beta,p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{t'-s}(x-y) - G_{t-s}(x-y)|^2\, dy\, ds \\ &= e^{2\,\beta\, t}\, ||\Phi||^2_{\beta,p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{s+h}(y) - G_s(y)|^2\, dy\, ds = \frac{1}{2}\, e^{2\,\beta\, t}\, ||\Phi||^2_{\beta,p} h\, t, \end{aligned}$$

et

$$I_{12} \leq e^{p\,\beta\, t}\, ||\Phi||^p_{\beta,p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{t'-s}(x-y) - G_{t-s}(x-y)|^p\, dy\, ds$$

$$= \quad e^{p\,\beta\,t}\ ||\Phi||^p_{\beta,p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{s+h}(y) - G_s(y)|^p \, dy \, ds = 2^{1-p}\, e^{p\,\beta\,t}\ ||\Phi||^p_{\beta,p} h\, t.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} I_1 \quad &\leq \quad B_p\, e^{\beta\,t}\ ||\Phi||_{\beta,p} \left(v^{1/2}\, \frac{1}{\sqrt{2}}\, h^{1/2}\, t^{1/2} + m_p^{1/p}\, 2^{\frac{1-p}{p}}\, h^{1/p}\, t^{1/p} \right) \\ &\leq \quad C_{T,K,p}\, e^{\beta\,t}\ ||\Phi||_{\beta,p} (h^{1/2} + h^{1/p}) \leq C_{T,K,p}\, e^{\beta\,t}\ ||\Phi||_{\beta,p}\, h^{1/p}, \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

où $C_{T,K,p}$ est une constante qui dépend de T, K et p.

Pour le second terme I_2, en utilisant de nouveau (5.1.5), on obtient :

$$I_2 \leq B_p \left(v^{1/2} I_{21}^{1/2} + m_p^{1/p} I_{22}^{1/p} \right),$$

où

$$\begin{cases} I_{21} = \int_t^{t'} \int_{\mathbb{R}} |G_{t'-s}(x-y)|^2 \, ||\Phi(s,y)||^2 \, dy \, ds \\ I_{22} = \int_t^{t'} \int_{\mathbb{R}} |G_{t'-s}(x-y)|^p \, ||\Phi(s,y)||^p \, dy \, ds. \end{cases}$$

De nouveau, en utilisant (5.1.9), suivi d'un changement de variable $u = t - s$ et (5.4.3), on obtient :

$$I_{21} \leq e^{2\,\beta\,t}\ ||\Phi||^2_{\beta,p} \int_0^h \int_{\mathbb{R}} |G_{s+h}(y)|^2 \, dy \, ds = \frac{3}{4}\, e^{2\,\beta\,t}\, ||\Phi||^2_{\beta,p}\, h^2,$$

et

$$I_{22} \leq e^{p\,\beta\,t}\ ||\Phi||^p_{\beta,p} \int_0^h \int_{\mathbb{R}} |G_{s+h}(y)|^p \, dy \, ds = \frac{3}{2^p}\, e^{p\,\beta\,t}\, ||\Phi||^p_{\beta,p}\, h^2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} I_2 \quad &\leq \quad B_p\, e^{\beta\,t}\ ||\Phi||_{\beta,p} \left(v^{1/2}\, \frac{\sqrt{3}}{2}\, h + m_p^{1/p}\, \frac{3^{1/p}}{2}\, h^{2/p} \right) \\ &\leq \quad C_{T,K,p}\, e^{\beta\,t}\ ||\Phi||_{\beta,p}\, (h + h^{2/p}) \leq C_{T,K,p}\, e^{\beta\,t}\ ||\Phi||_{\beta,p}\, h^{2/p}, \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

où $C_{T,K,p}$ est une constante qui dépend de T, K et p.
En utilisant (5.4.7), (5.4.8) et (5.4.9), on déduit que :

$$\left|\left| (G \circledast \Phi)(t,x) - (G \circledast \Phi)(t',x) \right|\right|_p \leq C_{T,K,p}\, e^{\beta\,t}\, ||\Phi||_{\beta,p}\, h^{1/p}.$$

Le résultat découle en élevant à la puissance p. □

Remarque 5.4.5. *(Comparaison avec le cas du bruit blanc Gaussien)* Soit G la solution fondamentale de l'équation des ondes. On définit la *convolution stochastique* $G \underset{W}{\circledast} \Phi$ par rapport au bruit blanc Gaussien par :

$$(G \underset{W}{\circledast} \Phi)(t,x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\, \Phi(s,y)\, W(ds,dy), \tag{5.4.10}$$

pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Alors, il est possible de montrer que pour tout $p \geq 2$, $\beta \geq 0$, $t, t^{'} \in [0,T]$ et x, $x^{'} \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{E}\left|(G \underset{W}{\circledast} \Phi)(t,x) - (G \underset{W}{\circledast} \Phi)(t,x^{'})\right|^p \leq \left(\frac{T}{2}\right)^{p/2} z_p^p\, e^{p\,\beta\, t}\, ||\Phi||_{p,\beta}^p\, |x-x^{'}|^{p/2}$$

et

$$\mathrm{E}\left|(G \underset{W}{\circledast} \Phi)(t,x) - (G \underset{W}{\circledast} \Phi)(t^{'},x)\right|^p \leq T^{p/2}\, z_p^p\, e^{p\,\beta\, t}\ \ ||\Phi||_{p,\beta}^p\, |t-t^{'}|^{p/2}.$$

Le premier résultat suivant donne une estimation du moment d'ordre p de l'accroissement en espace de la convolution avec un processus Φ et le second en temps. Ce résultat sera appliqué pour $\Phi = b(u_n)$.

Proposition 5.4.6. *Si G est la solution fondamentale de* (4.2.9)*, alors pour tout $p \geq 2$, $\beta > 0, t$, $t^{'} \in [0,T]$, et $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\mathrm{E}\left|(G*\Phi)(t,x) - (G*\Phi)(t^{'},x)\right|^p \leq\ A_{T,p}\, e^{p\,\beta\, t}\, ||\Phi||_{\beta,p}^p\, |t-t^{'}|^p,$$

où $A_{T,p}$ est une constante qui dépend de T et p.

Démonstration. On suppose que $t < t^{'}$ et on écrit :

$$\begin{aligned}(G*\Phi)(t^{'},x) - (G*\Phi)(t,x) \quad &= \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [G_{t^{'}-s}(x-y) - G_{t-s}(x-y)]\, \Phi(s,y)\, dy\, ds \\ &+ \quad \int_t^{t^{'}} \int_{\mathbb{R}} G_{t^{'}-s}(x-y)\ \Phi(s,y)\ dy\, ds.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Minkowski, on a :

$$\left|\left|(G*\Phi)(t^{'},x) - (G*\Phi)(t,x)\right|\right|_p \quad \leq \quad I_1 + I_2, \tag{5.4.11}$$

où

$$\begin{cases} I_1 = \left|\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} [G_{t^{'}-s}(x-y) - G_{t-s}(x-y)]\, \Phi(s,y)\, dy\, ds\right|\right|_p \\ I_2 = \left|\left|\int_t^{t^{'}} \int_{\mathbb{R}} G_{t^{'}-s}(x-y)\ \Phi(s,y)\, dy\, ds\right|\right|_p. \end{cases}$$

Pour le terme I_1, en utilisant l'inégalité de Minkowski, (5.1.9) et (5.4.2) (avec $p = 1$), on obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{t'-s}(x-y) - G_{t-s}(x-y)| \, ||\Phi(s,y)||_p \, dy \, ds \\ &\leq ||\Phi||_{\beta,p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{t'-s}(x-y) - G_{t-s}(x-y)| e^{\beta s} \, dy \, ds \\ &\leq e^{\beta t} \, ||\Phi||_{\beta,p} \, (t^{'} - t) \, t. \end{aligned}$$

Pour le terme I_2, en utilisant l'inégalité de Minkowski et (5.1.9), on obtient :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_t^{t^{'}} \int_{\mathbb{R}} G_{t'-s}(x-y) \, ||\Phi(s,y)||_p \, dy \, ds \\ &\leq ||\Phi||_{\beta,p} \int_t^{t^{'}} \int_{\mathbb{R}} G_{t'-s}(x-y) \, e^{\beta s} \, dy \, ds \\ &\leq ||\Phi||_{\beta,p} \, e^{\beta t^{'}} \int_t^{t^{'}} \int_{\mathbb{R}} G_{t'-s}(x-y) \, dy \, ds. \end{aligned}$$

Par un changement de variable et en utilisant (4.3.9) avec $p = 1$, nous obtenons :

$$\int_t^{t^{'}} \int_{\mathbb{R}} G_{t'-s}(x-y) \, dy \, ds = \int_0^{t^{'}-t} \int_{\mathbb{R}} G_s(y) \, dy \, ds = \frac{1}{2}(t^{'} - t)^2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Big|\Big|(G * \Phi)(t^{'}, x) - (G * \Phi)(t, x)\Big|\Big|_p &\leq e^{\beta t} \, ||\Phi||_{\beta,p} \, (t^{'} - t) \, t + \frac{1}{2} \, e^{\beta t^{'}} \, ||\Phi||_{\beta,p} \, (t^{'} - t)^2 \\ &\leq A_T \, e^{\beta t^{'}} \, ||\Phi||_{\beta,p} \, (t^{'} - t), \end{aligned}$$

où A_T est une constante qui dépend de T. Le résultat s'en suit en élevant à la puissance p.

□

Proposition 5.4.7. *Soit G la solution fondamentale de* (4.2.9)*. Alors pour tout $p \geq 2$, $\beta > 0, t, \in [0, T]$, et x, $x^{'} \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\mathrm{E}\Big|(G * \Phi)(t, x) - (G * \Phi)(t, x^{'})\Big|^p \leq A_{T,p} \, e^{p \, \beta \, t} \, ||\Phi||^p_{\beta,p} \, |x - x^{'}|^p,$$

où $A_{T,p}$ est une constante qui dépend de T et p.

Démonstration. En utilisant (5.1.7) on a :

$$(G * \Phi)(t, x) - (G * \Phi)(t, x') = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [G_{t-s}(x-y) - G_{t-s}(x'-y)] \, \Phi(s, y) \, dy \, ds.$$

Par l'inégalité de Minkowski, (5.1.9) et (5.4.1), on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\left|(G * \Phi)(t, x) - (G * \Phi)(t, x')\right|\right|_p \\
&\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(x-y) - G_{t-s}(x'-y)| \, ||\Phi(s,\, y)||_p \, dy \, ds \\
&\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(x-y) - G_{t-s}(x'-y)| \, e^{\beta\, s} \, ||\Phi||_{\beta,p} \, dy \, ds \\
&\leq e^{\beta\, t} \, ||\Phi||_{\beta,p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |G_{t-s}(x-y) - G_{t-s}(x'-y)| \, dy \, ds \\
&= t \, e^{\beta\, t} \, ||\Phi||_{\beta,p} \, |x' - x| \leq T \, e^{\beta\, t} \, ||\Phi||_{\beta,p} \, |x' - x|.
\end{aligned}$$

En élevant à la puissance p, on obtient le résultat.

□

Le prochain résultat montre que la solution u de l'équation des ondes avec un bruit L de Lévy est continue dans $L^p(\Omega)$. Il est clair qu'on ne peut pas obtenir l'existence d'une modification de la solution qui est continue au sens de Hölder (comme dans le cas du bruit blanc Gaussien) car dans notre cas, le bruit L n'a pas de trajectoires continues.

Théorème 5.4.8. *Si la mesure ν satisfait* (4.3.2), *alors la solution u de l'équation* (4.2.9) *vérifie : pour tout $p \geq 2$, $t, t' \in [0, T]$ et $x, x' \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - x'| < K$ pour un certain $K > 0$*

$$\mathrm{E}\left|u(t,\, x) - u(t',\, x')\right|^p \leq D_{T,K,p}\left\{|t - t'| + |x - x'|\right\}, \tag{5.4.12}$$

où $D_{T,K,p}$ est une constante qui dépend de T, K et p.

Démonstration. On commence premièrement par montrer le résultat pour la suite $(u_n)_n$ donnée par (5.2.2), c'est-à-dire

$$\mathrm{E}\left|u_n(t,\, x) - u_n(t',\, x')\right|^p \leq D_{T,K,p}\left(|t - t'| + |x - x'|\right). \tag{5.4.13}$$

La conclusion s'obtiendra en passant à la limite pour $n \to \infty$. Pour montrer (5.4.13), on considère premièrement les accroissements en temps de u_n. On note que :

$$\mathrm{E}\left|u_n(t,\, x) - u_n(t',\, x)\right|^p \leq 2^{p-1}\left\{\mathrm{E}\middle|(G \circledast \sigma(u_{n-1}))(t, x) - \right.$$

$$(G \circledast \sigma(u_{n-1}))(t^{'}, x)\Big|^p + \mathrm{E}\Big|(G * b(u_{n-1}))(t,x) - (G * b(u_{n-1}))(t^{'}, x)\Big|^p\Big\} .$$

En utilisant la Proposition 5.4.4 avec $\Phi = \sigma(u_{n-1})$ et la Proposition 5.4.6 avec $\Phi = b(u_{n-1})$ et , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left|u_n(t,\, x) - u_n(t^{'},\, x)\right|^p &\leq 2^{p-1}\Big\{C_{T,K,p}\, e^{p\,\beta\, t}\,||\sigma(u_{n-1})||^p_{\beta,p}\,|t-t^{'}| \\ &+ A_{T,p}\, e^{p\,\beta\, t}\,||b(u_{n-1})||^p_{\beta,p}\,|t-t^{'}|^p\Big\}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (5.2.4) et l'inégalité analogue pour $b(u_{n-1})$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left|u_n(t,\, x) - u_n(t^{'},\, x)\right|^p &\leq 2^{p-1}\Big\{C_{T,K,p}\, e^{p\,\beta\, t}\, L_0^p\,(1 + ||u_{n-1}||_{\beta,p})^p\,|t-t^{'}| \\ &+ A_{T,p}\, e^{p\,\beta\, t}\, L_0^p\,(1 + ||u_{n-1}||_{\beta,p})^p\,|t-t^{'}|^p\Big\}. \end{aligned}$$

On déduit de l'inégalité (5.2.13) et du fait que $|t-t^{'}|^p \leq C_T\,|t-t^{'}|$, où $C_T > 0$ est une constante qui dépend de T que :

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left|u_n(t,\, x) - u_n(t^{'},\, x)\right|^p \\ &\leq 2^{p-1}\, e^{p\,\beta\, t}\, L_0^p\,(1+L_1^p)\,\max(C_{T,K,p}, A_{T,p})\, C_T\,|t-t^{'}|. \end{aligned} \tag{5.4.14}$$

Par analogie, en utilisant la Proposition 5.4.3 avec $\Phi = \sigma(u_n)$ et la Proposition 5.4.7 avec $\Phi = b(u_n)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left|u_n(t^{'},\, x) - u_n(t^{'},\, x^{'})\right|^p &\leq 2^{p-1}\Big\{C_{T,K,p}\, e^{p\,\beta\, t}||\sigma(u_{n-1})||^p_{\beta,p}|x-x^{'}| \\ &+ A_{T,p}\, e^{p\,\beta\, t}||b(u_{n-1})||^p_{\beta,p}|x-x^{'}|^p\Big\}. \end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire, en utilisant l'inégalité (5.2.13) et le fait que $|x-x^{'}|^p \leq D_K\,|x-x^{'}|$, où $D_K > 0$ est une constante qui dépend de K, on obtient que :

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left|u_n(t,\, x) - u_n(t,\, x^{'})\right|^p \\ &\leq 2^{p-1}\, e^{p\,\beta\, t}\, L_0^p\,(1+L_1^p)\,\max(C_{T,K,p}, A_{T,p})\,(1+D_K)\,|x-x^{'}|. \end{aligned} \tag{5.4.15}$$

La relation (5.4.12) se déduit des inégalités (5.4.14) et (5.4.15) en prenant :

$$D_{T,K,p} = 2^{2\,p-2}\, e^{p\,\beta\, T}\, L_0^p\,(1+L_1^p)\,\max(C_{T,K,p}, A_{T,p})\,(1+\max(C_T, D_K)).$$

$\square$

Chapitre 6

Calcul de Malliavin par rapport à $\widehat{N}$

Dans ce chapitre, nous allons étudier la dérivée de Malliavin par rapport à $\widehat{N}$ de la solution $u(t,x)$ de l'équation de la chaleur (4.2.1) avec $\alpha = 2$ ou de l'équation des ondes (4.2.9). Pour cela, nous allons commencer par introduire les éléments de base du calcul de Malliavin par rapport à $\widehat{N}$. Les résultats de ce chapitre font l'objet de l'article [5].

6.1 Décomposition en chaos

Soit N une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$ d'intensité $dt\, dx\, \nu(dz)$ et soit $\widehat{N}$ sa mesure compensée. On note par $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}$ sa filtration donnée par (2.2.4) et on suppose que ν est une mesure de Lévy qui satisfait (2.1.7). On note aussi que pour chaque $t > 0$ et $B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $L_t(B)$ est donnée par (3.6.4) et la filtration $(\mathcal{F}_t^L)_{t\geq 0}$ par (2.2.1).

On fixe $T > 0$. On considère l'ensemble G_n défini par :

$$G_n = \{(t_1, x_1, z_1), \ldots, (t_n, x_n, z_n); 0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq T, x_i \in \mathbb{R}^d, z_i \in \mathbb{R}_0\}. \quad (6.1.1)$$

Définition 6.1.1. On note $L^2(G_n)$ l'espace des fonctions $f : G_n \to \mathbb{R}$ tel que :

$$||f||^2_{L^2(G_n)} := \int_{G_n} |f(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_n, x_n, z_n)|^2\, dt_1 dx_1 \nu(dz_1) \ldots dt_n dx_n \nu(dz_n) < \infty.$$

Alors *l'intégrale itérée* de f par rapport à $\widehat{N}$ d'ordre n est définie par :

$$\begin{aligned} J_n(f) \; = \; & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \Big(\int_0^{t_n-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \ldots \Big(\int_0^{t_2-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} f(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_n, x_n, z_n) \\ & \widehat{N}(dt_1, dx_1, dz_1) \Big) \ldots \Big) \widehat{N}(dt_{n-1}, dx_{n-1}, dz_{n-1}) \widehat{N}(dt_n, dx_n, dz_n). \end{aligned}$$

On a la propriété suivante :

Proposition 6.1.2. Pour toutes fonctions $f \in L^2(G_n)$ et $g \in L^2(G_n)$, on a :

$$\mathrm{E}[J_n(f)J_m(f)] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m \\ \langle f, g\rangle_{L^2(G_n)} & \text{si} \quad n = m, \end{cases}$$

où $\langle f, g\rangle_{L^2(G_n)} = \int_{G_n} f(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_n, x_n, z_n) g(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_n, x_n, z_n)$ $dt_1 dx_1 \nu(dz_1) \ldots dt_n dx_n \nu(dz_n)$. En particulier $\mathrm{E}|J_n(f)|^2 = ||f||^2_{L^2(G_n)}$.

Démonstration. La démonstration de la proposition est similaire à la preuve de la Proposition 1.4 de [10] dans le cas où $\widehat{N}$ est remplacé par une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_0$ d'intensité $dt\, \nu(dz)$. On omet les détails.

□

Nous allons maintenant définir l'intégrale multiple d'une fonction symétrique par rapport à $\widehat{N}$ d'ordre n. Soient :

$$\mathcal{H} = L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0, \mathscr{B}([0,T]) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_0), \mu) \tag{6.1.2}$$

et $\mathcal{H}^{\otimes n} = L^2(([0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0)^n, (\mathscr{B}([0,T]) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_0))^n, \mu^n)$, où $\mu = dt dx \nu(dz)$. On note par $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ les espaces analogues de fonctions à valeurs complexes.

Définition 6.1.3. Pour chaque fonction $f \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ symétrique, on définit *l'intégrale multiple* de f par rapport à $\widehat{N}$ d'ordre n par :

$$I_n(f) = n!\, J_n(f).$$

On utilise la notation suivante :

$$I_n(f) = \int_{([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0)^n} f(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_n, x_n, z_n) \widehat{N}(t_1, x_1, z_1) \ldots \widehat{N}(t_n, x_n, z_n).$$

Le résultat suivant est une conséquence de la Proposition 6.1.2.

Proposition 6.1.4. Pour toutes fonctions symétriques $f \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ et $g \in \mathcal{H}^{\otimes n}$, on a :

$$\mathrm{E}[I_n(f)I_m(f)] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ n!\, \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}} & \text{si } n = m. \end{cases}$$

En particulier $\mathrm{E}|I_n(f)|^2 = n!\, ||f||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$.

On se rappelle la définition de la variable $M_h(t)$ pour $t > 0$ qui est donnée par le Lemme 3.5.1.

Lemme 6.1.5. *Si $F = M_h(T)$ pour un certain $h \in L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)$, alors*

$$M_h(T) = \sum_{n\geq 0} J_n(g_n^h) \text{ dans } L^2(\Omega),$$

où

$$g_n^h(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_n, x_n, z_n) = \prod_{j=1}^{n} \left(e^{i\, h_j(t_j, x_j)\, z_j} - 1 \right). \tag{6.1.3}$$

Démonstration. On se rappelle que $M_h(T)$ vérifie (3.5.2), c'est-à-dire :

$$M_h(T) = 1 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^0} (e^{i\, z_1\, h(t_1,x_1)} - 1)\, M_h(t_1-)\, \widehat{N}(dt_1,\, dx_1, dz_1).$$

En utilisant de nouveau (3.5.2) pour $M_h(t_1-)$, on déduit que :

$$M_h(T) = 1 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^0} (e^{i\, z_1\, h(t_1,x_1)} - 1)\, \widehat{N}(dt_1,\, dx_1, dz_1) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^0} \Bigg(\int_0^{t_1-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^0} (e^{i\, z_1\, h(t_1,x_1)} - 1)\, (e^{i\, z_2\, h(t_2,x_2)} - 1) M_h(t_2-) \widehat{N}(dt_2,\, dx_2, dz_2) \Bigg)\, \widehat{N}(dt_1,\, dx_1, dz_1).$$

En répétant cette procédure après n étapes, on obtient :

$$F = M_h(T) = \sum_{k=0}^{n} J_k(g_k^h) + R_{n+1}(F),$$

où g_k^h est donnée par (6.1.3) pour $k \geq 1$ et $g_0^h = 1$. On va montrer que :

$$\mathrm{E}|M_h(T)|^2 = \sum_{k\geq 0} \mathrm{E}|J_k(g_k^h)|^2. \tag{6.1.4}$$

On se rappelle que $\mathrm{E}|M_h(T)|^2$ est donnée par (3.5.3). On a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}|J_n(g_n^h)|^2 = ||g_n^h||^2_{L^2(G_n)} \\
&= \frac{1}{n!} \int_{([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0)^n} |g_n^h(t_1,x_1,z_1,\ldots,t_n,x_n,z_n)|^2 dt_1\, dx_1 \nu(dz_1) \ldots dt_n\, dx_n \nu(dz_n) \\
&= \frac{1}{n!} \left(\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0} |g_1^h(t_1,x_1,z_1)|^2 dt_1\, dx_1 \nu(dz_1) \right)^n,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \mathrm{E}|J_n(g_n^h)|^2 &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0} |g_1^h(t_1,x_1,z_1)|^2 dt_1\, dx_1 \nu(dz_1) \right)^n \\
&= \exp\left(\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0} |g_1^h(t_1,x_1,z_1)|^2 dt_1\, dx_1 \nu(dz_1) \right) = \mathrm{E}|M_h(T)|^2.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de (6.1.4).

$\square$

Le résultat suivant est l'analogue du Théorème 5.4.6 de [1] pour le cas d'une mesure aléatoire de Poisson N sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$.

Théorème 6.1.6. *(Décomposition en chaos) Pour chaque variable aléatoire* $F \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega,$ $\mathcal{F}^L_T, P)$*, il existe une unique suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *symétriques telle que* $f_n \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ *pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ *et*

$$F = \mathrm{E}(F) + \sum_{n\geq 1} I_n(f_n) \quad \textit{dans} \quad L^2_{\mathbb{C}}(\Omega). \tag{6.1.5}$$

De plus,

$$\mathrm{E}|F|^2 = |\mathrm{E}(F)|^2 + \sum_{n\geq 1} n!\, ||f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}. \tag{6.1.6}$$

Démonstration. On commence par montrer l'existence. On utilise le même raisonnement que dans le cas classique quand $\widehat{N}$ est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ d'intensité $dt\nu(dz)$ (voir Théorème 5.4.6 de [1] ou Théorème 10.2 de [10]). Par le théorème de représentation d'Itô (Théorème 3.6.1), il existe un unique processus prévisible $\psi_1 = \{\psi_1(t_1, x_1, z_1), t_1 \in [0, T], x_1 \in \mathbb{R}^d, z_1 \in \mathbb{R}_0\}$ satisfaisant

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \mathrm{E}|\psi_1(t_1, x_1, z_1)|^2 \nu(dz_1)\, dx_1\, dt_1 < \infty, \tag{6.1.7}$$

tel que :

$$F = \mathrm{E}(F) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \psi_1(t_1, x_1, z_1) \widehat{N}(dt_1, dx_1, dz_1). \tag{6.1.8}$$

On observe que par (6.1.7), $\mathrm{E}|\psi(t_1, x_1, z_1)|^2 < \infty$ pour μ-presque tout (t_1, x_1, z_1). Supposons alors que cette condition est satisfaite pour $(t_1, x_1, z_1) \notin N_1$ où $N_1 \subset [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$ avec $\mu(N_1) = 0$. Fixons $(t_1, x_1, z_1) \notin N_1$. On applique de nouveau le théorème de représentation d'Itô à la variable aléatoire $\psi_1(t_1, x_1, z_1)$. Donc il existe un processus prévisible $\psi_2 = \{\psi_2(t_2, x_2, z_2), t_2 \in [0, t_1], x_2 \in \mathbb{R}^d, z_2 \in \mathbb{R}_0\}$ satisfaisant

$$\int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \mathrm{E}|\psi_2(t_2, x_2, z_2)|^2 \nu(dz_2)\, dx_2\, dt_2 < \infty, \tag{6.1.9}$$

tel que :

$$\begin{aligned} \psi_1(t_1, x_1, z_1) &= \mathrm{E}[\psi_1(t_1, x_1, z_1)] \\ &\quad + \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \psi_2(t_1, x_1, z_1, t_2, x_2, z_2) \widehat{N}(dt_2, dx_2, dz_2). \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

On insère la relation (6.1.10) dans (6.1.8) pour obtenir :

$$F = \mathrm{E}(F) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \Big(\mathrm{E}[\psi_1(t_1, x_1, z_1)]$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \psi_2(t_1, x_1, z_1, t_2, x_2, z_2) \widehat{N}(dt_2, dx_2, dz_2) \Big) \, \widehat{N}(dt_1, dx_1, dz_1) \\
&= \quad g_0 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} g_1(t_1, x_1, z_1) \widehat{N}(dt_1, dx_1, dz_1) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \\
&+ \quad \Big(\int_0^{t_1 -} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \psi_2(t_1, x_1, z_1, t_2, x_2, z_2) \widehat{N}(dt_2, dx_2, dz_2) \Big) \, \widehat{N}(dt_1, dx_1, dz_1),
\end{aligned}
$$

où $g_0 = \mathrm{E}(F)$ et $g_1(t_1, x_1, z_1) = \mathrm{E}[\psi_1(t_1, x_1, z_1)]$. En répétant cette procédure après n étapes, on obtient :

$$
F \quad = \quad \mathrm{E}(F) + \sum_{k=1}^{n} J_k(g_k) + R_{n+1}(F), \tag{6.1.11}
$$

où $g_1, \ldots, g_n$ sont des fonctions déterministes telles que $g_k \in L^2(G_k)$ et

$$
\begin{aligned}
R_{n+1}(F) \quad = \quad & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \Big(\int_0^{t_{n+1} -} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \cdots \Big(\int_0^{t_2 -} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \psi_{n+1}(t_1, x_1, z_1, \ldots, \\
& t_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1}) \widehat{N}(dt_1, dx_1, dz_1) \Big) \cdots \Big) \widehat{N}(dt_{n+1}, dx_{n+1}, dz_{n+1}).
\end{aligned}
$$

On montre d'abord que, pour tout $f_k \in L^2(G_k)$ avec $k = 1, \ldots, n$

$$
\mathrm{E}[J_k(f_k) R_{n+1}(F)] = 0 \tag{6.1.12}
$$

Il suffit de montrer (6.1.12) pour $n = 2$ (le cas général s'ensuit par récurrence). On a :

$$
\begin{aligned}
R_3(F) \quad = \quad & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \Big(\int_0^{t_1 -} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \Big(\int_0^{t_2 -} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \psi_3(t_1, x_1, z_1, t_2, x_2, z_2, t_3, x_3, z_3) \\
& \widehat{N}(dt_3, dx_3, dz_3) \Big) \, \widehat{N}(dt_2, dx_2, dz_2) \Big) \, \widehat{N}(dt_1, dx_1, dz_1) \\
J_2(f_2) \quad = \quad & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \Big(\int_0^{t_1 -} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} f_2(t_1, x_1, z_1, t_2, x_2, z_2) \widehat{N}(dt_2, dx_2, dz_2) \Big) \\
& \widehat{N}(dt_1, dx_1, dz_1).
\end{aligned}
$$

Donc par le Lemme 2.2.6, on déduit que :

$$
\mathrm{E}[J_2(f_2) R_3(F)] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \mathrm{E}[X(t_1, x_1, z_1) \, Y(t_1, x_1, z_1)] dt_1 \, dx_1 \, \nu(dz_1),
$$

avec

$$
X(t_1, x_1, z_1) \quad = \quad \int_0^{t_1 -} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \Big(\int_0^{t_2 -} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \psi_3(t_1, x_1, z_1, t_2, x_2, z_2, t_3, x_3, z_3)
$$

$$\widehat{N}(dt_3, dx_3, dz_3)\Big)\widehat{N}(dt_2, dx_2, dz_2),$$

et

$$Y(t_1, x_1, z_1) = \int_0^{t_1-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} f_2(t_1, x_1, z_1, t_2, x_2, z_2)\widehat{N}(dt_2, dx_2, dz_2).$$

En appliquant de nouveau le Lemme 2.2.6, on obtient que pour chaque $(t_1, x_1, z_1) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$,

$$\mathrm{E}[X(t_1, x_1, z_1)Y(t_1, x_1, z_1)] = \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} f_2(t_1, x_1, z_1, t_2, x_2, z_2)\mathrm{E}\Bigg(\int_0^{t_2-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \psi_3(t_1, x_1, z_1, t_2, x_2, z_2, t_3, x_3, z_3)\widehat{N}(dt_3, dx_3, dz_3)\Bigg)\, dt_2 dx_2 \nu(dz_2) = 0,$$

car f_2 est une fonction déterministe et l'intégrale par rapport à $\widehat{N}$ a une moyenne 0. Ceci finit la preuve de (6.1.12) pour $n = 2$.

De (6.1.11) et (6.1.12), on déduit que :

$$\mathrm{E}|F|^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}|J_k(g_k)|^2 + \mathrm{E}|R_{n+1}(F)|^2,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}|J_k(g_k)|^2 \leq \mathrm{E}|F|^2, \text{pour chaque } n \geq 1.$$

Il s'ensuit que la série $\sum_{k\geq 0} J_k(g_k)$ est convergente dans $L^2(\Omega)$, et donc $\{R_{n+1}(F)\}_{n\geq 0}$ converge dans $L^2(\Omega)$. On note par $R(F)$ sa limite dans $L^2(\Omega)$. On montre maintenant que pour chaque suite $(f_k)_{k\geq 0}$ telle que $f_k \in L^2(G_k)$

$$\mathrm{E}[J_k(f_k)R(F)] = 0. \tag{6.1.13}$$

Pour voir cela, on observe que $\mathrm{E}[J_k(f_k)R_{n+1}(F)] = 0$, pour tout $n \geq k$ par (6.1.12). En faisant tendre n vers l'infini, on obtient (6.1.13). Nous allons montrer maintenant que :

$$R(F) = 0, \tag{6.1.14}$$

ce qui est équivalent à dire que :

$$F = \sum_{n\geq 0} J_n(g_n) \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{6.1.15}$$

Pour montrer (6.1.14), on observe que pour toute fonction $h \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ continue à gauche en t, par le Lemme 6.1.5, on a :

$$\mathrm{E}[M_h(T)\cdot R(F)] = \mathrm{E}\left[\sum_{n\geq 0} J_n(g_n^h)\cdot R(F)\right] = \sum_{n\geq 0}\mathrm{E}\left[J_n(g_n^h)\cdot R(F)\right] = 0,$$

où pour la dernière égalité on a utilisé (6.1.13). Puisque l'ensemble des combinaisons linéaires de $M_h(T)$ est totale dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega,\mathcal{F}_T^L,P)$ (voir Lemme 3.5.4), on conclut que $R(F)=0$.

On définit maintenant les fonctions symétriques $f_n = \widetilde{g}_n$, où on définit $g_n = 0$ sur $([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0)\backslash G_n$. Alors $I_n(f_n) = n!J_n(f_n) = n!J_n(\widetilde{g}_n) = n!J_n(g_n)$.

Pour l'unicité, on suppose qu'il existe une autre suite $(f_n^{'})_{n\geq 0}$ de fonctions symétriques avec $f_n^{'} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ pour chaque n tel que $F = \mathrm{E}(F) + \sum\limits_{n\geq 1} I_n(f_n^{'})$. Alors $\sum\limits_{n\geq 1} I_n(f_n - f_n^{'}) = 0$ et donc $\sum\limits_{n\geq 1}\mathrm{E}|I_n(f_n - f_n^{'})|^2 = \sum\limits_{n\geq 1} n!||f_n - f_n^{'}||^2_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}} = 0$. Il s'ensuit que $f_n = f_n^{'}$ dans $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ pour tout $n \geq 1$.

$\square$

Exemple 6.1.7. *(Décomposition en chaos de $L_T^2(B)$)* On se rappelle que la représentation d'Itô de $F = L_T^2(B)$ est donnée par (3.6.5) (voir Exemple 3.6.2), où $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ est fixé. En utilisant cette formule de manière récursive, on obtient :

$$\begin{aligned}
L_T^2(B) &= T\,|B|\,v + \int_0^T\int_B\int_{\mathbb{R}_0}(2\,L_{t_1-}(B) + z_1)\,z_1\,\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1)\\
&= T\,|B|\,v + \int_0^T\int_B\int_{\mathbb{R}_0}\left(2\int_0^{t_1-}\int_B\int_{\mathbb{R}_0} z_2\widehat{N}(dt_2,dx_2,dz_2) + z_1\right)\\
&\quad z_1\,\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1)\\
&= \mathrm{E}[L_T^2(B)] + \int_0^T\int_B\int_{\mathbb{R}_0} z_1^2\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1)\\
&+ 2\int_0^T\int_B\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_0^{t_1-}\int_B\int_{\mathbb{R}_0} z_1\,z_2\widehat{N}(dt_2,dx_2,dz_2)\right)\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1)\\
&= \mathrm{E}[L_T^2(B)] + \int_0^T\int_B\int_{\mathbb{R}_0} z_1^2\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1)\\
&+ \int_0^t\int_B\int_{\mathbb{R}_0}\int_0^t\int_B\int_{\mathbb{R}_0} z_1\,z_2\widehat{N}(dt_2,dx_2,dz_2)\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1).
\end{aligned}$$

Ceci montre que la variable $L_T^2(B)$ a la décomposition en chaos $L_T^2(B) = \sum\limits_{n=0}^{2} I_n(f_n)$

avec,

$$\begin{cases} f_0 := \mathrm{E}[L_T^2(B)] \\ f_1(t_1,x_1,z_1) := 1_B(x_1)\, z_1^2 \\ f_2(t_1,x_1,z_1,t_2,x_2,z_2) := 1_B(x_1)\, z_1\, 1_B(x_2)\, z_2. \end{cases} \tag{6.1.16}$$

Exemple 6.1.8. *(Décomposition en chaos de $Z(T) = e^{Y(T)}$)* On se rappelle que la représentation d'Itô de la variable $Z = e^{Y(T)}$ est donnée par (3.6.8) (voir Exemple 3.6.3). Dans cet exemple on suppose que h satisfait (3.6.6) et de plus que :

$$\int_0^T \int_B \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{h(t,x)z} - 1\right)^2 \nu(dz)\, dx\, dt < \infty. \tag{6.1.17}$$

Alors,

$$\begin{aligned} Z(T) = 1 + &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} Z(t_1-)(e^{h(t_1,x_1)\, z_1} - 1)\, \widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1) \\ = \;& 1 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \left(1 + \int_0^{t_1-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} Z(t_2-)(e^{h(t_2,x_2)\, z_2} - 1)\widehat{N}(dt_2,dx_2,dz_2)\right) \\ & (e^{h(t_1,x_1)\, z_1} - 1)\, \widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1) \\ = \;& 1 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} (e^{h(t_1,x_1)\, z_1} - 1)\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \int_0^{t_1-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \\ & Z(t_2-)(e^{h(t_2,x_2)\, z_2} - 1)\,(e^{h(t_1,x_1)\, z_1} - 1)\widehat{N}(dt_2,dx_2,dz_2)\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1). \end{aligned}$$

En répétant ce procédé, on obtient après k étapes :

$$\begin{aligned} Z(T) \;=\; & S_{k-1} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \cdots \int_0^{t_2-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} Z(t_1-) \\ & \prod_{i=1}^k (e^{h(t_i,x_i)\, z_i} - 1)\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1) \ldots \widehat{N}(dt_k,dx_k,dz_k), \end{aligned}$$

avec $S_{k-1} = \sum_{n=0}^{k-1} I_n(f_n)$, où $f_0 = 1$ et pour chaque $n \geq 1$

$$\begin{aligned} f_n(t_1,x_1,z_1,\ldots,t_n,x_n,z_n) \;:=\; & \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^k (e^{h(t_i,x_i)\, z_i} - 1) \\ =\; & \frac{1}{n!}(e^{h(t,x)\, z} - 1)^{\otimes n}(t_1,x_1,z_1,\ldots,t_n,x_n,z_n). \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

On va montrer que $Z(T) = \sum_{n\geq 0} I_n(f_n)$ dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}|S_{k-1} - Z(T)|^2 = 0. \tag{6.1.19}$$

Pour cela il suffit de montrer que :

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} \cdots \int_0^{t_2-} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} Z(t_1-)(e^{h(t,x)\,z}-1)^{\otimes n}\widehat{N}^{\otimes n}(dt,dx,dz)\right|^2 = 0.$$

En utilisant l'isométrie de l'intégrale cela revient à montrer que :

$$\begin{aligned}\Delta_k \ &:= \ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} \cdots \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} \mathrm{E}[Z^2(t_1-)]\prod_{i=1}^k (e^{h(t_i,x_i)\,z_i}-1)^2 \\ &\quad\ dt_1dx_1\nu(dz_1)\dots dt_kdx_k\nu(dz_k)\end{aligned}$$

converge vers 0 quand $k\to\infty$. Par la relation (3.6.7), pour chaque $t\in[0,T]$, on a :

$$Z(t-) = 1 + \int_0^{t-}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} Z(s-)(e^{h(s,x)\,z}-1)\widehat{N}(ds,dx,dz),$$

et donc

$$\mathrm{E}|Z(t-)|^2 = 1 + \int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} \mathrm{E}|Z(s-)|^2|e^{h(s,x)\,z}-1|^2\nu(dz)dxds,$$

Par le Lemme de Gronwall, on déduit que pour chaque $t\in[0,T]$

$$\mathrm{E}|Z(t-)|^2 \le \exp\left(\int_0^{T}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} |e^{h(t,x)\,z}-1|^2\nu(dz)dxdt\right) := C_T < \infty.$$

Par conséquent,

$$\Delta_k \le C_T\frac{1}{k!}\left(\int_0^{T}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} (e^{h(t,x)\,z}-1)^2\nu(dz)dxdt\right)^k \to 0$$

quand $k\to\infty$. Ceci prouve (6.1.19).

6.2 Intégrale de Skorohod

Nous allons utiliser la décomposition en chaos donnée dans la Section 6.1 pour définir l'intégrale de Skorohod. On suit la présentation donnée dans le chapitre 11 de [10], mais dans notre cas le processus X à intégrer dépend de $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ et $z\in\mathbb{R}_0$.

On fixe $T>0$. Soit $X=\{X(t,x,z);\, t\ge 0,\, x\in\mathbb{R}^d,\, z\in\mathbb{R}_0\}$ un processus tel que pour tout (t,x,z), $X(t,x,z)$ est $\mathcal{F}_T^L$ -mesurable et $\mathrm{E}|X(t,x,z)|^2<\infty$. On considère la décomposition en chaos de $X(t,x,z)$ donnée par :

$$X(t,x,z) = \sum_{n\ge 0} I_n(f_n(\cdot,t,x,z)), \tag{6.2.1}$$

où $f_n(\cdot, t, x, z) \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ est une fonction symétrique. Soit $\widetilde{f}_n$ la symétrisation de f_n dans les $n+1$ variables :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}_n(u_1, \ldots, u_n, u)\\
&= \frac{1}{n+1}\left[f_n(u_1, \ldots, u_n, u) + \sum_{i\geq 1}^{n} f_n(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n, u_i)\right]\\
&= \frac{1}{n+1}\left[f_n(u_1, \ldots, u_n, u) + \sum_{i=1}^{n} f_n(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n, u, u_i)\right],
\end{aligned}$$

où $u_i = (t_i, x_i, z_i)$ et $u = (t, x, z)$. On note $\widetilde{f}_0(t, x, z) = f_0(t, x, z)$.

Définition 6.2.1. On dit que le processus X avec la décomposition en chaos (6.2.1) est *intégrable au sens de Skorohod* par rapport à $\widehat{N}$ si

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{E}|I_{n+1}(\widetilde{f}_n)|^2 = \sum_{n\geq 0}(n+1)!\, ||\widetilde{f}_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} < \infty.$$

Dans ce cas, on définit *l'intégrale de Skorohod* de X (par rapport à $\widehat{N}$) par :

$$\delta(X) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} X(t, x, z)\widehat{N}(\delta t, \delta x, \delta z) = \sum_{n\geq 0} I_{n+1}(\widetilde{f}_n),$$

où la série converge dans $L^2(\Omega)$, on écrit $X \in Dom(\delta)$.

Remarque 6.2.2. Cette définition a été donnée par Kabanov (voir [18]). On note que :

$$\mathrm{E}|\delta(X)|^2 = \sum_{n\geq 0}(n+1)!\ ||\widetilde{f}_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} < \infty.$$

De plus on a les propriétés suivantes :

1. δ est un opérateur linéaire c'est-à-dire $\delta(aX + bY) = a\,\delta(X) + b\,\delta(Y)$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $X, Y \in Dom(\delta)$,
2. si $X \in Dom(\delta)$, alors pour chaque $t \in [0, T]$ fixé, alors $1_{[0,t]}X$, $1_{[t,T]}X \in Dom(\delta)$ et $\delta(X) = \delta(1_{[0,t]}X) + \delta(1_{[t,T]}X)$.

Lemme 6.2.3. *Si $X \in Dom(\delta)$, alors* $\mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} |X(t, x, z)|^2 \nu(dz) ds dt < \infty$.

Démonstration. On rappelle que $X(t, x, z) = \sum_{n\geq 0} I_n(f_n(\cdot, t, x, z))$, donc

$$\mathrm{E}|X(t, x, z)|^2 = \sum_{n\geq 0}\mathrm{E}|I_n(f_n(\cdot, t, x, z))|^2 = \sum_{n\geq 0} n!\, ||\widetilde{f}_n(\cdot, t, x, z)||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \mathrm{E}|X(t,x,z)|^2 \nu(dz)dxdt \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} n! \, ||f_n(\cdot,t,x,z)||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} \nu(dz)dxdt \\
&= \sum_{n\geq 0} (n+1)! \, \frac{1}{(n+1)} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} ||f_n(\cdot,t,x,z)||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} \nu(dz)dxdt \\
&\leq \sum_{n\geq 0} (n+1)! \, ||\widetilde{f}_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} < \infty.
\end{aligned}$$

□

Lemme 6.2.4. *Pour chaque $X \in Dom(\delta)$ on a* $\mathrm{E}[\delta(X)] = 0$.

Démonstration. Puisque $\mathrm{E}[I_k(f_k)] = 0$ pour chaque k, on a :

$$\begin{aligned}
0 \leq \ & |\mathrm{E}[\delta(X)]| = \left| \mathrm{E}[\delta(X)] - \mathrm{E}\left[\sum_{k=0}^{n} I_k(f_k) \right] \right| \\
= \ & \left| \mathrm{E}\left[\delta(X) - \sum_{k=0}^{n} I_k(f_k) \right] \right| \leq \left\{ \mathrm{E}\left| \delta(X) - \sum_{k=0}^{n} I_k(f_k) \right|^2 \right\}^{1/2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,.
\end{aligned}$$

□

On énonce maintenant un résultat qui montre que dans le cas d'un processus X adapté, l'intégrale de Skorohod coïncide avec l'intégrale d'Itô. Pour cela, on a besoin d'un résultat préliminaire. On rappelle que la définition de la filtration $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}$ est donnée par (2.2.4).

Lemme 6.2.5. *Soit $X = \{X(t,x,z);\, t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^d,\, z \in \mathbb{R}_0\}$ tel que pour chaque (t,x,z), $X(t,x,z)$ est $\mathcal{F}_T^L$-mesurable et $\mathrm{E}|X(t,x,z|^2 < \infty$. On considère la décomposition en chaos de $X(t,x,z)$ donnée par (6.2.1). Alors pour chaque (t,x,z), $X(t,x,z)$ est $\mathcal{F}_t^N$-mesurable si et seulement si*

$$f_n(t_1,x_1,z_1,\ldots,t_n,x_n,z_n,t,x,z) = 0 \quad \textit{lorsque} \qquad t \leq \max_{1\leq i\leq n} t_i \tag{6.2.2}$$

Démonstration. On suit les lignes de la preuve du Lemme 2.8 ([10]) pour le cas de l'intégrale par rapport à un mouvement Brownien. On rappelle que pour tout processus prévisible X tel que $\mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |X(t,x,z)|^2 \nu(dz)\, dx\, dt < \infty$ pour chaque

$t > 0$, le processus $\{M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} X(t,x,z)\widehat{N}(ds,dx,dz), t \geq 0\}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}$ (voir Lemme 2.2.5). Alors, pour toute fonction symétrique $g \in \mathcal{H}^{\otimes n}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[I_n(g)|\mathcal{F}_t^N] = n!\mathrm{E}[J_n(g)|\mathcal{F}_t^N] = n!\,\mathrm{E}\Bigg[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\int_0^{t_n-}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\cdots\int_0^{t_2-} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} g(t_1,x_1,z_1,\dots,t_n,x_n,z_n)\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1)\dots\widehat{N}(dt_n,dx_n,dz_n)\Big|\mathcal{F}_t^N\Bigg] \\
&= n!\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\int_0^{t_n-}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\cdots\int_0^{t_2-} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} g(t_1,x_1,z_1,\dots,t_n,x_n,z_n)\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1)\dots\widehat{N}(dt_n,dx_n,dz_n) \\
&= n!\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\int_0^{t_n-}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\cdots\int_0^{t_2-} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} g(t_1,x_1,z_1,\dots,t_n,x_n,z_n)\,1_{\{\max\limits_{i\leq n} t_i<t\}}\,\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1)\dots\widehat{N}(dt_n,dx_n,dz_n) \\
&= n!J_n(g\,\phi(\cdot,t)),\ \text{où}\ \phi(t_1,\dots,t_n,t) = 1_{\{\max\limits_{i\leq n} t_i<t\}} \\
&= I_n(g\,\phi(\cdot,t)), \qquad (6.2.3)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $g\,\phi(\cdot,t)$ est une fonction symétrique pour la dernière égalité. L'hypothèse que $X(t,x,z)$ est $\mathcal{F}_t^N$ -mesurable est équivalent à dire que :

$$\mathrm{E}[X(t,x,z)|\mathcal{F}_t^N] = X(t,x,z). \qquad (6.2.4)$$

Dans le membre de gauche de (6.2.3), on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X(t,x,z)|\mathcal{F}_t^N] &= \mathrm{E}\left[\sum_{n\geq 0} I_n(f_n(\cdot,t,x,z))\Big|\mathcal{F}_t^N\right] \\
&= \sum_{n\geq 0}\mathrm{E}[I_n(f_n(\cdot,t,x,z))\Big|\mathcal{F}_t^N] = \sum_{n\geq 0} I_n(f_n(\cdot,t,x,z)\phi(\cdot,t)),
\end{aligned}$$

où pour la dernière égalité, on a utilisé (6.2.3) avec $g = f_n(\cdot,t,x,z)$. Dans le membre de droite de (6.2.4), on a :

$$X(t,x,z) = \sum_{n\geq 0} I_n(f_n(\cdot,t,x,z)).$$

Par unicité de la décomposition en chaos, on obtient :

$$f_n(t_1,x_1,z_1,\dots,t_n,x_n,z_n)\phi(t_1,\dots,t_n) = f_n(t_1,x_1,z_1,\dots,t_n,x_n,z_n).$$

Donc $f_n(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_n, x_n, z_n)(1-\phi(t_1, \ldots, t_n)) = 0$, ce qui est équivalent à dire que

$$f_n(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_n, x_n, z_n)\, 1_{\{\max\limits_{i\leq n} t_i \geq t\}} = 0.$$

Cette dernière relation est équivalente à dire que $f_n(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_n, x_n, z_n) = 0$ si $\max\limits_{i\leq n} t_i \geq t$.

□

Théorème 6.2.6. *Soit $X = \{X(t,x,z);\, t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}^d,\, z \in \mathbb{R}_0\}$ un processus prévisible tel que pour chaque $(t,x,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$,*

$$\mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |X(t,x,z)|^2 \nu(dz)dxdt < \infty.$$

Alors $X \in Dom(\delta)$ et l'intégrale de Skorohod de X par rapport à $\widehat{N}$ coïncide avec son intégrale d'Itô par rapport à $\widehat{N}$, c'est-à-dire

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} X(t,x,z)\widehat{N}(\delta t, \delta x, \delta z) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} X(t,x,z)\widehat{N}(dt, dx, dz). \qquad (6.2.5)$$

Démonstration. On suit les mêmes lignes de la preuve du Théorème 2.9 ([10]) pour le cas de l'intégrale par rapport à un mouvement Brownien. Soit $X(t,x,z) = \sum\limits_{n\geq 0} I_n(f_n(\cdot, t, x, z))$ la décomposition en chaos de $X(t,x,z)$, avec $f_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ pour $n \geq 1$ et $f_0(t,x,z) = \mathrm{E}[X(t,x,z)]$. Soit la symétrisation de f_n dans les $n+1$ variables :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}_n(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_n, x_n, z_n, t_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1}\Big[f_n(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_n, x_n, z_n, t_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1}) + \sum_{i=1}^n f_n(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_{i-1}, \\
&\quad x_{i-1}, z_{i-1}, t_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1}, t_{i+1}, x_{i+1}, z_{i+1}, \ldots, t_i, x_i, z_i)\Big]. \qquad (6.2.6)
\end{aligned}$$

Soit $t_j = \max\limits_{1\leq i\leq n} t_i$. Alors $t_j \geq t_i$ pour tout $i = 1 \ldots n+1$ et donc pour tout $i \neq j$ on a $\max\{t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{n+1}, t_{i+1}, \ldots, t_n\} = t_j \geq t_i$. On observe que $X(t,x,z)$ est $\mathcal{F}_t^N$-mesurable par le Lemme 2.2.4. Par le Lemme 6.2.5 tous les termes du membre de droite de (6.2.6) sont nuls sauf le terme qui correspond à $i = j$. Donc

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}_n(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_n, x_n, z_n, t_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} f_n(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_{j-1}, x_{j-1}, z_{j-1}, t_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1}, t_{j+1}, x_{j+1}, z_{j+1}, \ldots, \\
&\quad t_n, x_n, z_n, t_j, x_j, z_j) = \frac{1}{n+1} f_n(t_1, x_1, z_1, \ldots, t_{j-1}, x_{j-1}, z_{j-1}, t_{j+1}, x_{j+1}, z_{j+1}, \ldots,
\end{aligned}$$

$$t_n, x_n, z_n, t_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1}, t_j, x_j, z_j), \tag{6.2.7}$$

où pour la dernière égalité on a utilisé le fait que f_n est symétrique dans les premiers n variables. On s'intéresse au cas particulier quand $j = n+1$. Ainsi, on obtient si $t_{n+1} = \max_{1 \le i \le n+1} t_i$:

$$\widetilde{f}_n(t_1, x_1, z_1, \dots, t_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1}) = \frac{1}{n+1} f_n(t_1, x_1, z_1, \dots, t_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1}). \tag{6.2.8}$$

Dans le calcul suivant, les points $(t_i)_{i=1,\dots,n+1}$ sont ordonnés ($t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$), et on a :

$$\begin{aligned}
||\widetilde{f}_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |\widetilde{f}_n(t_1, x_1, z_1, \dots, t_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1})|^2 \\
&\quad \nu(dz_1)\, dx_1\, dt_1 \dots \nu(dz_{n+1})\, dx_{n+1}\, dt_{n+1} \\
&= (n+1)! \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^{t_{n+1}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |\widetilde{f}_n(t_1, x_1, z_1, \dots, \\
&\quad t_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1})|^2 \nu(dz_1)\, dx_1\, dt_1 \dots \nu(dz_{n+1})\, dx_{n+1}\, dt_{n+1} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^{t_{n+1}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |f_n(t_1, x_1, z_1, \dots, \\
&\quad t_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1})|^2 \nu(dz_1)\, dx_1\, dt_1 \dots \nu(dz_{n+1})\, dx_{n+1}\, dt_{n+1} \\
&= \frac{n!}{n+1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^{t} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |f_n(t_1, x_1, z_1, \dots, \\
&\quad t_n, x_n, z_n, t, x, z)|^2 \nu(dz_1)\, dx_1\, dt_1 \dots \nu(dz_n)\, dx_n\, dt_n \nu(dz)\, dx\, dt \\
&= \frac{n!}{n+1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^{T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} |f_n(t_1, x_1, z_1, \dots, \\
&\quad t_n, x_n, z_n, t, x, z)|^2 \nu(dz_1)\, dx_1\, dt_1 \dots \nu(dz_n)\, dx_n\, dt_n \nu(dz)\, dx\, dt,
\end{aligned}$$

où on a utilisé le Lemme 6.2.5 pour la dernière égalité : $f_n(t_1, x_1, z_1, \dots, t_n, x_n, z_n, t, x, z) = 0$ si $t_n = \max_{1 \le i \le n} t_i \ge t$ (c'est-à-dire $t_n \in [t, T]$). Ainsi, puisque $f_n(\cdot, t, x, z)$ est symétrique, on obtient :

$$||\widetilde{f}_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} = \frac{1}{n+1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} ||f_n(\cdot, t, x, z)||^2_{\mathcal{H}^{\otimes(n)}} \nu(dz)\, dx\, dt.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n \ge 0} (n+1)!\, ||\widetilde{f}_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} = \sum_{n \ge 0} \frac{(n+1)!}{n+1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} ||f_n(\cdot, t, x, z)||^2\, \nu(dz)\, dx\, dt$$

$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \sum_{n\geq 0} n! ||\widetilde{f}_n(\cdot,t,x,z)||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}\, \nu(dz)\, dx\, dt$$
$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \mathrm{E}|X(t,x,z)|^2 \nu(dz)\, dx\, dt < \infty,$$

ce qui prouve que $X \in Dom(\delta)$. Il reste à prouver l'égalité (6.2.5). On a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} X(t,x,z)\widehat{N}(dt,dx,dz) \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \sum_{n\geq 0} I_n(f_n(\cdot,t,x,z))\widehat{N}(dt,dx,dz) \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} I_n(f_n(\cdot,t,x,z))\widehat{N}(dt,dx,dz) \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} n! \int_0^{t-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \int_0^{t_n-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^{t_2-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} f_n(t_1,x_1,z_1,\dots, \\
&\qquad t_n,x_n,z_n,t,x,z)\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1)\dots\widehat{N}(dt_n,dx_n,dz_n)\widehat{N}(dt,dx,dz).
\end{aligned}$$

En utilisant de nouveau (6.2.8), on observe que cette dernière somme est égale à :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0} n! \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \int_0^{t-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \int_0^{t_n-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^{t_2-} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} (n+1)\widetilde{f}_n(t_1,x_1, \\
&\quad z_1,\dots,t_n,x_n,z_n,t,x,z)\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1)\dots\widehat{N}(dt_n,dx_n,dz_n)\widehat{N}(dt,dx,dz) \\
&= \sum_{n\geq 0}(n+1)! J_{n+1}(\widetilde{f}_n) = \sum_{n\geq 0} I_{n+1}(\widetilde{f}_n) = \delta(X).
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve.

□

Finalement, on donne la définition de l'intégrale de Skorohod par rapport à L.

Définition 6.2.7. Soit $Y = \{Y(t,x); t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d\}$ un processus tel que pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, $Y(t,x)$ est $\mathcal{F}_T^L$ -mesurable et $\mathrm{E}|Y(t,x)|^2 < \infty$. On dit que Y est *intégrable au sens de Skorohod par rapport à* L si le processus $X = \{X(t,x,z) = Y(t,x)\, z; t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}^d,\, z \in \mathbb{R}_0\}$ est intégrable au sens de Skorohod par rapport à $\widehat{N}$. Dans ce cas, on définit l'intégrale de Skorohod de Y par rapport à L par

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} Y(t,x)L(\delta t,\delta x) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} Y(t,x) z \widehat{N}(\delta t,\delta x,\delta z), \tag{6.2.9}$$

et on écrit $Y \in Dom(\delta^L)$.

Le résultat suivant est une conséquence directe du Théorème 6.2.6.

Corollaire 6.2.8. *Soit* $Y = \{Y(t,x); t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d\}$ *un processus prévisible tel que :*

$$\mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |Y(t,x)|^2 dx dt < \infty.$$

Alors $Y \in Dom(\delta^L)$ *et l'intégrale de Skorohod de* Y *par rapport à* L *coïncide avec son intégrale d'Itô par rapport à* L*, c'est-à-dire*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} Y(t,x) L(\delta t, \delta x) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} Y(t,x) L(dt, dx). \tag{6.2.10}$$

6.3 Dérivée de Malliavin

Dans cette section, on introduit la dérivée de Malliavin par rapport à $\widehat{N}$ et on présente ses propriétés. On suit l'approche du Chapitre 12 de [10]. La différence est que dans notre cas, $\widehat{N}$ est une mesure aléatoire de Poisson sur l'espace $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$ (au lieu de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_0$).

Définition 6.3.1. Soit $F \in L^2(\Omega)$ qui est $\mathcal{F}_t^L$ -mesurable avec sa décomposition en chaos donnée par $F = \sum_{n\geq 0} I_n(f_n)$, où $f_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ est symétrique. On dit que F est *différentiable au sens de Malliavin* par rapport à $\widehat{N}$ (et on écrit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$) si

$$\sum_{n\geq 0} n\, n!\, ||f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} < \infty.$$

Dans ce cas, on définit *la dérivée Malliavin* de F (par rapport à $\widehat{N}$) par :

$$D_{t,x,z}F = \sum_{n\geq 1} n\, I_{n-1}(f_n(\cdot, t, x, z)). \tag{6.3.1}$$

Remarque 6.3.2. La série donnée par (6.3.1) est convergente dans $L^2(\Omega)$ pour presque tout $(t,x,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$ fixé . En effet on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}|D_{t,x,z}F|^2 &= \mathrm{E}\left|\sum_{n\geq 1} n\, I_{n-1}(f_n(\cdot,t,x,z))\right|^2 = \sum_{n\geq 1} n^2 \mathrm{E}|I_{n-1}(f_n(\cdot,t,x,z))|^2 \\ &= \sum_{n\geq 1} n^2 (n-1)!\, ||f_n(\cdot,t,x,z)||^2_{\mathcal{H}^{\otimes(n-1)}} \\ &= \sum_{n\geq 1} n\, n!\, ||f_n(\cdot,t,x,z)||^2_{\mathcal{H}^{\otimes(n-1)}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \mathrm{E}|D_{t,x,z}F|^2 \nu(dz)\, dx\, dt \\
&= \sum_{n\geq 1} n\, n! \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} ||f_n(\cdot,t,x,z)||^2_{\mathcal{H}^{\otimes(n-1)}} \nu(dz)\, dx\, dt = \sum_{n\geq 1} n\, n!\, ||f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} < \infty.
\end{aligned}$$

Donc ceci montre que

$$\mathrm{E}||DF||^2_{\mathcal{H}} = \sum_{n\geq 1} n\, n!\, ||f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} < \infty,$$

c'est-à-dire $DF \in L^2(\Omega;\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est donné par (6.1.2).

Remarque 6.3.3. L'opérateur $D : \mathbb{D}^{1,2} \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega;\mathcal{H})$ est un opérateur linéaire, c'est-à-dire $D(aF+bG) = aD\,F + bD\,G$ pour chaque $a,b \in \mathbb{R}$ et $F,G \in \mathbb{D}^{1,2}$.

Exemple 6.3.4. Soit $F = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} f(t,x,z)\widehat{N}(dt,dx,dz)$, où $f \in \mathcal{H}$. Donc $F = I_1(f)$ et $D_{t,x,z}F = I_0(f(t,x,z)) = f(t,x,z)$. En particulier, on considère $F = L_T(B)$, c'est-à-dire

$$F = L_T(B) = \int_0^T \int_B \int_{\mathbb{R}_0} z\widehat{N}(dt,dx,dz) = \int_0^T \int_B \int_{\mathbb{R}_0} 1_B(x)\, z\widehat{N}(dt,dx,dz),$$

avec $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$. Dans ce cas $f(t,x,z) = 1_B(x)\, z$ et donc

$$D_{t,x,z}L_T(B) = 1_B(x)\, z. \tag{6.3.2}$$

Exemple 6.3.5. Dans l'exemple 6.1.7, nous avons montré que $F = L_t^2(B)$ $= \sum_{n=0}^{2} I_n(f_n)$, où f_0, f_1 et f_2 sont données par (6.1.16). Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
D_{t,x,z}\, L_T^2(B) &= \sum_{n=1}^{2} n\, I_{n-1}(f_n(\cdot,t,x,z)) = I_0(f_1(\cdot,t,x,z)) + 2I_1(f_2(\cdot,t,x,z)) \\
&= f_1(\cdot,t,x,z) + 2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} f_2(t_1,x_1,z_1,t,x,z)\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1) \\
&= 1_B(x)\, z^2 + 2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} 1_B(x_1)\, z_1\, 1_B(x)\, z\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1) \\
&= 1_B(x)\, z^2 + 2\, 1_B(x)\, z \int_0^T \int_B \int_{\mathbb{R}_0} z_1\widehat{N}(dt_1,dx_1,dz_1) \\
&= 1_B(x)\, z^2 + 2\, 1_B(x)\, z\, L_T(B) = 1_B(x)(z^2 + 2\, z\, L_T(B)).
\end{aligned}$$

En utilisant (6.3.2), on observe que :

$$\begin{aligned} D_{t,x,z}\, L_T^2(B) &= 1_B(x)\, z^2 + 2\, 1_B(x)\, z\, L_T(B) \\ &= [D_{t,x,z} L_T(B)]^2 + 2L_T(B) D_{t,x,z} L_T(B) + L_T(B)^2 - L_T(B)^2 \\ &= [L_T(B) + D_{t,x,z} L_T(B)]^2 - L_T(B)^2. \end{aligned}$$

Ceci montre que la dérivée de Malliavin est un opérateur de type différence, et pas un opérateur différentiel (comme dans le cas du mouvement Brownien).

Exemple 6.3.6. On considère la variable $F = Z(T)$ donnée dans l'exemple 3.6.3. Dans l' exemple 6.1.8, nous avons montré que $Z(T) = \sum_{n\geq 0} I_n(f_n)$, où f_n est donnée par (6.1.18) et $f_0 = 1$. On suppose que h satisfait (3.6.6) et (6.1.17). La dérivée de Malliavin de $Z(T)$ est

$$\begin{aligned} D_{t,x,z}\, Z(T) &= \sum_{n\geq 1} n\, I_{n-1}(f_n(\cdot, t, x, z)) \\ &= \sum_{n\geq 1} n \frac{1}{n!} \left(e^{h(t,x)\, z} - 1\right) I_{n-1}\left(\left(e^{h(t,x)\, z} - 1\right)^{\otimes(n-1)}\right) \\ &= \left(e^{h(t,x)\, z} - 1\right) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} I_{n-1}\left(\left(e^{h(t,x)\, z} - 1\right)^{\otimes(n-1)}\right) \\ &= \left(e^{h(t,x)\, z} - 1\right) Z(T). \end{aligned}$$

Le résultat suivant est l'analogue du Théorème 12.6 de [10].

Théorème 6.3.7. *Soit $F \in L^2(\Omega)$ et $(F_k)_{k\geq 1} \in \mathbb{D}^{1,2}$ telle que $F_k \to F$ dans $L^2(\Omega)$ et $(DF_k)_{k\geq 1}$ converge dans $L^2(\Omega; \mathcal{H})$. Alors $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $DF_k \to DF$ dans $L^2(\Omega; \mathcal{H})$.*

Démonstration. Ou utilise le raisonnement que dans le cas du mouvement Brownien (voir par exemple Théorème 3.3 de [10]). On suppose qu'on a les décompositions chaos suivantes :

$$F = \sum_{n\geq 0} I_n(f_n) \quad \text{ et } F_k = \sum_{n\geq 0} I_n(f_n^{(k)}),$$

où $f_n, f_n^{(k)} \in f_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ sont des fonctions symétriques. Alors par la linéarité de l'intégrale multiple, on a :

$$F_k - F = \sum_{n\geq 0} I_n(f_n^{(k)} - f_n),$$

et donc

$$\mathrm{E}|F_k - F|^2 = \sum_{n\geq 0} n!\, ||f_n^{(k)} - f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}.$$

Puisque $F_k \to F$ dans $L^2(\Omega)$ quand $k \to \infty$, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n\geq 0} n!\,||f_n^{(k)} - f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} = 0.$$

En particulier, pour chaque $n \geq 0$ on a :

$$\lim_{k\to\infty} ||f_n^{(k)} - f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} = 0. \tag{6.3.3}$$

Par la Remarque 6.3.2, on note que :

$$\mathrm{E}||DF_k - DF_j||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} = \sum_{n\geq 1} n\,n!\,||f_n^{(k)} - f_n^{(j)}||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}.$$

Puisque $(DF_k)_{k\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega;\mathcal{H})$, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{j\to\infty}\sum_{n\geq 1} n\,n!\,||f_n^{(k)} - f_n^{(j)}||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} = 0. \tag{6.3.4}$$

Pour chaque $k \geq 1$ fixé, par (6.3.3) et le lemme de Fatou, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} n\,n!\,||f_n^{(k)} - f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} &= \sum_{n\geq 1} n\,n!\lim_{j\to\infty} ||f_n^{(k)} - f_n^{(j)}||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} \\ &\leq \varliminf_{j\to\infty}\sum_{n\geq 1} n\,n!\,||f_n^{(k)} - f_n^{(j)}||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}.\end{aligned}$$

On prend maintenant $\varlimsup\limits_{k\to\infty}$ et on obtient par (6.3.4),

$$\varlimsup_{k\to\infty}\sum_{n\geq 1} n\,n!\,||f_n^{(k)} - f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} \leq \varlimsup_{k\to\infty}\varlimsup_{j\to\infty}\sum_{n\geq 1} n\,n!\,||f_n^{(k)} - f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} = 0. \tag{6.3.5}$$

On observe que, par l'inégalité de Minkowski et l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$:

$$\begin{aligned}||f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} &\leq \left(||f_n - f_n^{(k)}||_{\mathcal{H}^{\otimes n}} + ||f_n^{(k)}||_{\mathcal{H}^{\otimes n}}\right)^2 \\ &\leq 2\left(||f_n - f_n^{(k)}||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} + ||f_n^{(k)}||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}\right),\end{aligned}$$

pour chaque $n \geq 1$. Donc

$$\sum_{n\geq 1} n\,n!||f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} \leq 2\sum_{n\geq 1} n\,n!||f_n - f_n^{(k)}||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} + 2\sum_{n\geq 1} n\,n!||f_n^{(k)}||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Par l'inégalité (6.3.5), il existe $k_\varepsilon \geq 1$ telle que pour tout $k \geq k_\varepsilon$, $\sum\limits_{n\geq 1} n\,n!||f_n^{(k)} - f_n||^2 < \frac{\varepsilon}{2}$. On fixe $k \geq k_\varepsilon$. Puisque $F_k \in \mathbb{D}^{1,2}$, c'est-à-dire

$\sum\limits_{n\geq 1} n\, n!||f_n^{(k)}||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} < \infty$, on déduit que $\sum\limits_{n\geq 1} n\, n!||f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} < \infty$. Ceci montre que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Finalement par la Remarque 6.3.2 et (6.3.5), on conclut que :

$$\mathrm{E}||DF_k - DF||^2_{\mathcal{H}} = \sum_{n\geq 1} n\, n!||f_n^{(k)} - f_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} \to 0, \text{ quand } k \to \infty.$$

$\square$

On introduit maintenant les variables exponentielles.

Lemme 6.3.8. *Soit G une variable aléatoire de la forme $G = e^{L(h)}$ pour un certain $h \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ qui est continue à gauche en t, où $L(h) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} h(t,x)L(dt,dx)$. Alors*

$$D_{t,x,z}G = (e^{h(t,x)\,z} - 1)G.$$

Démonstration. On considère la variable aléatoire $Z(T)$ définie dans l'exemple 3.6.3. On observe que $G = aZ(T)$, où a est une constante donnée par :

$$a = \exp\{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} [e^{h(t,x)z} - 1 - h(t,x)z]\nu(dz)\, dx\, dt\}.$$

Alors en utilisant la relation $D_{t,x,z}\, Z(T) = \left(e^{h(t,x)\,z} - 1\right) Z(T)$ de l'exemple 6.3.6, on obtient :

$$D_{t,x,z}G = aD_{t,x,z}Z(T) = aZ(T)(e^{h(t,x)z} - 1) = G(e^{h(t,x)z} - 1).$$

$\square$

On considère maintenant $\mathbb{D}^{1,2}_\varepsilon$ l'ensemble des combinaisons linéaires de variables aléatoires de la forme $e^{L(h)}$ avec $h \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ continue à gauche en t, c'est-à-dire :

$$\mathbb{D}^{1,2}_\varepsilon = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i e^{L(h_i)}; a_i \in \mathbb{R}, h_i \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d) \quad \text{continue à gauche en} \quad t \right\}.$$

Remarque 6.3.9. En utilisant le même raisonnement que dans le lemme 3.5.4, on peut montrer que l'ensemble $\{e^{L(h)}; h \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)\}$ est total dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}^L_T, P)$ et donc $\mathbb{D}^{1,2}_\varepsilon$ est dense dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}^L_T, P)$.

Lemme 6.3.10. *Pour toute variable aléatoire $F, G \in \mathbb{D}^{1,2}_\varepsilon$, on a :*

$$D_{t,x,z}(FG) = F(D_{t,x,z}G) + G(D_{t,x,z}F) + (D_{t,x,z}G)(D_{t,x,z}F). \tag{6.3.6}$$

Démonstration. Par la linéarité de la dérivée de Malliavin, il suffit de montrer le résultat pour $F = e^{L(h_1)}$ et $G = e^{L(h_2)}$. Pour deux fonctions $h_1, h_2 \in L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ continues à gauche en t. On a :

$$\begin{aligned}
D_{t,x,z}(FG) &= D_{t,x,z}(e^{L(h_1)}e^{L(h_2)}) = D_{t,x,z}(e^{L(h_1)+L(h_2)}) = D_{t,x,z}(e^{L(h_1+h_2)}) \\
&= (e^{(h_1+h_2)(t,x)\,z} - 1)e^{L(h_1+h_2)} = (e^{h_1(t,x)\,z}e^{h_2(t,x)\,z} - 1)e^{L(h_1)}e^{L(h_2)} \\
&= Fe^{h_1(t,x)\,z} \cdot Ge^{h_2(t,x)\,z} - FG \\
&= \left[F + F\left(e^{h_1(t,x)\,z} - 1\right)\right]\left[G + G\left(e^{h_2(t,x)\,z} - 1\right)\right] - FG \\
&= (F + D_{t,x,z}F)(G + D_{t,x,z}G) - FG \\
&= F(D_{t,x,z}G) + G(D_{t,x,z}F) + (D_{t,x,z}G)(D_{t,x,z}F)
\end{aligned}$$

□

Lemme 6.3.11. *Pour toute variable aléatoire $F \in \mathbb{D}_\varepsilon^{1,2}$ et pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$D_{t,x,z}(F^n) = (F + D_{t,x,z}F)^n - F^n. \tag{6.3.7}$$

Démonstration. On utilise un raisonnement par récurrence. Le résultat est vrai pour $n = 2$ d'après le Lemme 6.3.10. Supposons qu'il est vrai à l'ordre n. On a :

$$\begin{aligned}
D_{t,x,z}(F^{n+1}) &= D_{t,x,z}(F^nF) = F^n(D_{t,x,z}F) + F(D_{t,x,z}F^n) + (D_{t,x,z}F)(D_{t,x,z}F^n) \\
&= F^n(D_{t,x,z}F) + F\left[(F + D_{t,x,z}F)^n - F^n\right] + D_{t,x,z}F\left[(F + D_{t,x,z}F)^n - F^n\right] \\
&= (F + D_{t,x,z}F)^n(F + D_{t,x,z}F) - F^{n+1} = (F + D_{t,x,z}F)^{n+1} - F^{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Le résultat suivant est l'analogue du Corollaire 3.13 de [10].

Proposition 6.3.12. *Soit $X = \{X(s,y,\xi); s \in [0,T], y \in \mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{R}_0\}$ un processus tel que pour tout (s,y,ξ), $X(s,y,\xi)$ est $\mathcal{F}_s^L$−mesurable et $X(s,y,\xi) \in \mathbb{D}^{1,2}$. Alors :*

1. *$D_{t,x,z}X(s,y,\xi)$ est $\mathcal{F}_s^L$ mesurable pour tout $(t,x,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$,*
2. *$D_{t,x,z}X(s,y,\xi) = 0$ pour chaque $t > s$ et pour tout $(x,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$.*

Nous donnons maintenant la règle de chaîne pour la dérivée de Malliavin pour rapport à $\widehat{N}$, qui est l'analogue du Théorème 12.8 de [10] (voir Théorème 12.8).

Théorème 6.3.13. *(Règle de chaîne) Si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\varphi(F) \in L^2(\Omega)$ et $\varphi(F + DF) - \varphi(F) \in L^2(\Omega; \mathcal{H})$, alors $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et*

$$D_{t,x,z}[\varphi(F)] = \varphi(F + D_{t,x,z}F) - \varphi(F).$$

On introduit maintenant le théorème de dualité entre l'intégrale de Skorohod et la dérivée de Malliavin.

Théorème 6.3.14. *Soit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $X \in Dom(\delta)$. Alors :*

$$\mathrm{E}\left[F \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} X(t,x,z) \widehat{N}(\delta t, \delta x, \delta z)\right] = \mathrm{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} X(t,x,z)\, D_{t,x,z} F \,\nu(z)\, dx\, dt\right]. \tag{6.3.8}$$

Démonstration. On suit le même raisonnement que dans le cas de l'intégrale par rapport au mouvement Brownien (voir Théorème 3.14 de [10]).

Soit $F = \sum_{n\geq 0} I_n(f_n)$ la décomposition en chaos de F, avec $f_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ symétrique et $X(t,x,z) = \sum_{k\geq 0} I_k(g_k(\cdot,t,x,z))$ la décomposition en chaos de $X(t,x,z)$ avec $g_k(\cdot,t,x,z) \in \mathcal{H}^{\otimes k}$ symétrique. On se rappelle que $\delta(X) = \sum_{k\geq 0} I_{k+1}(\widetilde{g}_k)$, où $\widetilde{g}_k$ est la symétrisation de g_k dans toutes les $k+1$ variables. Alors par l'orthogonalité des intégrales multiples, le membre de gauche de (6.3.8) devient :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[F\delta(X)] &= \mathrm{E}\left[\left(\sum_{n\geq 0} I_n(f_n)\right)\left(\sum_{k\geq 0} I_{k+1}(\widetilde{g}_k)\right)\right] = \sum_{k\geq 0} \mathrm{E}\left[I_{k+1}(f_{k+1}) I_{k+1}(\widetilde{g}_k)\right] \\ &= \sum_{k\geq 0} (k+1)! \int_{\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0\right)^{k+1}} f_{k+1}(t_1,x_1,z_1,\ldots,t_{k+1},x_{k+1},z_{k+1}) \\ &\quad \widetilde{g}_k(t_1,x_1,z_1,\ldots,t_{k+1},x_{k+1},z_{k+1}) \nu(dz_1) dx_1 dt_1 \ldots \nu(dz_{k+1}) dx_{k+1} dt_{k+1}. \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

Pour le membre de droite de (6.3.8), on observe que $D_{t,x,z}F = \sum_{n\geq 1} n I_{n-1}(f_n(\cdot,t,x,z))$, et donc ce membre devient :

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \left(\sum_{k\geq 0} I_k(g_k(\cdot,t,x,z))\right)\left(\sum_{n\geq 1} n I_{n-1}(f_n(\cdot,t,x,z))\right) \nu(z)\, dx\, dt\right] \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \mathrm{E}\left[(k+1)\, I_k(g_k(\cdot,t,x,z))\, I_k(f_{k+1}(\cdot,t,x,z))\right] \nu(z)\, dx\, dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} (k+1)k! \int_{\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0\right)^k} f_{k+1}(t_1,x_1,z_1,\ldots,t_k,x_k,z_k) \\ &\quad \widetilde{g}_k(t_1,x_1,z_1,\ldots,t_k,x_k,z_k)\, \nu(dz_1) dx_1 dt_1 \ldots \nu(dz_k) dx_k dt_k\, \nu(dz) dx dt. \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

On remarque que (6.3.9) et (6.3.10) sont égales et ceci termine la preuve.

□

Théorème 6.3.15. *Soit* $(X_n)_{n\geq 1} \subset Dom(\delta)$ *telle que* $X_n \to 0$ *dans* $L^2(\Omega;\mathcal{H})$ *et* $\{\delta(X_n)\}_{n\geq 0}$ *converge dans* $L^2(\Omega)$. *Alors* $\delta(X_n) \to 0$ *dans* $L^2(\Omega)$.

Démonstration. Par le théorème de dualité (Théorème 6.3.14), pour chaque $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $n \geq 1$, on a :

$$\mathrm{E}[F\delta(X_n)] = \mathrm{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} X_n(t,x,z)\, D_{t,x,z}F\, \nu(dz)\, dx\, dt\right]. \tag{6.3.11}$$

On observe que le membre de droite de (6.3.11) converge vers 0, car par l'inégalité de Caucy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} X_n(t,x,z)\, D_{t,x,z}F\, \nu(dz)\, dx\, dt\right| \\
&\leq \ \mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} |X_n(t,x,z)\, D_{t,x,z}F|\, \nu(dz)\, dx\, dt \\
&\leq \ \left(\mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} |X_n(t,x,z)|^2 \nu(dz)dxdt\right)^{1/2}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} |D_{t,x,z}F|^2 \nu(dz)dxdt\right)^{1/2} \\
&= \ ||X_n||_{L^2(\Omega;\mathcal{H})}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} |D_{t,x,z}F|^2\, \nu(dz)\, dx\, dt\right)^{1/2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{E}[F\delta(X_n)] \to 0$ pour chaque $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, c'est-à-dire $\delta(X_n) \longrightarrow 0$ faiblement dans $L^2(\Omega)$. Mais $\{\delta(X_n)\}_{n\geq 1}$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers une variable aléatoire Y, ce qui implique que $\{\delta(X_n)\}_{n\geq 1}$ converge faiblement vers Y dans $L^2(\Omega)$. Par l'unicité de la limite, $Y = 0$. Ceci termine la preuve.

□

Nous allons énoncer le résultat du théorème fondamental de calcul pour $\widehat{N}$ qui est l'analogue du Théorème 12.15 de [10], sauf qu'ici nous sommes dans le cas d'une mesure aléatoire sur l'espace $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$.

Théorème 6.3.16. *(Théorème fondamental de calcul pour l'intégrale de Skorohod par rapport à* $\widehat{N}$*) Soit* $X = \{X(s,y,\xi); s \in [0,T], y \in \mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{R}_0\}$ *un processus qui vérifie les hypothèses suivantes :*

i) $X(s,y,\xi) \in \mathbb{D}^{1,2}$ *pour chaque* $(s,y,\xi) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0$ *;*

ii) $\mathrm{E}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} |X(s,y,\xi)|^2\, \nu(dz)\, dy\, ds < \infty$ *;*

iii) $\{D_{t,x,z}X(s,y,\xi); s \in [0,T], y \in \mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{R}_0\} \in Dom(\delta)$ *pour chaque* $(t,x,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0$ *;*

iv) $\{\delta(D_{t,x,z}X(\cdot)); (t,x,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0\} \in L^2(\Omega;\mathcal{H})$ *c'est-à-dire*

$$\mathrm{E}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0}\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_0} D_{t,x,z}X(s,y,\xi)\widehat{N}(\delta s,\delta y,\delta\xi)\right|^2 \nu(dz)\, dx\, dt < \infty.$$

Alors $X \in Dom(\delta)$, $\delta(X) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et l'égalité suivante a lieu dans $L^2(\Omega;\mathcal{H})$:

$$D_{t,x,z}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} X(s,y,\xi)\widehat{N}(\delta s,\delta y,\delta\xi)\right) =$$
$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} D_{t,x,z}X(s,y,\xi)\widehat{N}(\delta s,\delta y,\delta\xi) + X(t,x,z).$$

Démonstration. La démonstration est presque similaire à celle du Théorème 3.18 de [10]. On omet la preuve.

□

Le résultat suivant est une conséquence du Théorème 6.3.16.

Corollaire 6.3.17. *(Théorème fondamental de calcul pour l'intégrale de Skorohod par rapport à L) Soit $Y = \{Y(s,y); s \in [0,T], y \in \mathbb{R}^d\}$ un processus qui vérifie les hypothèses suivantes :*

i) $Y(s,y) \in \mathbb{D}^{1,2}$ *pour chaque* $(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ *;*

ii) $\mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |Y(s,y)|^2\,dy\,ds < \infty$ *;*

iii) $\{D_{t,x,z}Y(s,y); s \in [0,T], y \in \mathbb{R}^d\} \in Dom(\delta^L)$ *pour chaque* $(t,x,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0$ *;*

iv) $\mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0} \left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} D_{t,x,z}Y(s,y)L(\delta s,\delta y)\right|^2 \nu(dz)\,dx\,dt < \infty.$

Alors $X \in Dom(\delta^L)$, $\delta(X) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et l'égalité suivante a lieu dans $L^2(\Omega;\mathcal{H})$:

$$D_{t,x,z}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} Y(s,y)L(\delta s,\delta y)\right) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} D_{t,x,z}Y(s,y)L(\delta s,\delta y) + Y(t,x)z.$$

6.4 Différentielle de la solution au sens de Malliavin

Dans cette section, on suppose que $d = 1$ et $\widehat{N}$ est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$ d'intensité $dt\,dx\,\nu(dz)$ comme dans le Chapitre 4. On considère l'équation suivante :

$$\mathcal{L}u(t,x) = \sigma(u(t,x))\,\dot{L}(t,x), \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}, \tag{6.4.1}$$

avec conditions initiales déterministe, où $\mathcal{L}$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre deux à coefficients constants, σ est une fonction réelle sur $\mathbb{R}$ et L est le bruit blanc de Lévy introduit dans le Chapitre 2. Dans le Chapitre 4, nous avons montré que, sous certaines conditions (voir hypothèses (H_1) et (H_2) du Chapitre 4), cette équation a une unique solution. On suppose que ces hypothèses sont satisfaites.

Le résultat suivant est l'analogue des Lemmes 7.2 et 7.3 de [29] pour le bruit blanc de Lévy.

Lemme 6.4.1. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *la suite des itérations de Picard pour l'équation* (6.4.1) *donnée par* (4.1.9) *avec* $b \equiv 0$. *Alors*

a) $u_n(t,x) \in \mathbb{D}^{1,2}$ *pour tout* $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}$ *et*

$$A_n := \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}||Du_n(t,x)||^2_{\mathcal{H}} < \infty,$$

b) $\sup_{n\geq 1} A_n < \infty$.

Démonstration. *a*) On se rappelle que $(u_n)_{n\geq 1}$ est donnée par :

$$u_{n+1}(t,x) = w(t,x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\ \sigma(u_n(s,y))\ L(ds,\, dy),$$

et $K_n := \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(t,x)|^2 < \infty$. Ici w est la solution de l'équation déterministe $\mathcal{L}u = 0$ avec les même conditions initiales que (6.4.1). Nous allons montrer le résultat par récurrence. Pour $n = 0$, $u_0(t,x) = w(t,x)$ est déterministe, donc $u_0(t,x) \in \mathbb{D}^{1,2}$. On suppose que le résultat est vrai à l'ordre n et on va montrer que pour tout $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_{n+1}(t,x) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $A_{n+1} < \infty$. Puisque u_n est prévisible, par le Corollaire 6.2.8, l'intégrale de Skorohod coïncide avec l'intégrale d'Itô, d'où :

$$u_{n+1}(t,x) = w(t,x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\ \sigma(u_n(s,y))\ L(\delta s,\, \delta y).$$

On fixe $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On va appliquer le théorème fondamental de calcul (Corollaire 6.3.17) au processus $Y = \{Y(s,y) = 1_{[0,t]}(s) G_{t-s}(x-y)\ \sigma(u_n(s,y)); s \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$. Pour cela, on doit montrer que le processus Y satisfait les conditions du Corollaire 6.3.17.

Pour *i*), on doit montrer que pour chaque $s > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $Y(s,y) \in \mathbb{D}^{1,2}$. Pour ceci, on va appliquer la règle de chaîne (Théorème 6.3.13) à la variable aléatoire $F = u_n(s,y)$ et la fonction $\varphi = \sigma$. On vérifie d'abord que les hypothèses du Théorème 6.3.13 sont satisfaites. Puisque σ est une fonction Lipschitzienne, on a :

$$\mathrm{E}|\sigma(u_n(s,y))|^2 \leq D^2_\sigma(1 + \mathrm{E}|u_n(s,y)|^2) \leq D^2_\sigma(1 + K_n) < \infty, \tag{6.4.2}$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_0} |\sigma[u_n(s,y) + D_{r,\xi,z}u_n(s,y)] - \sigma(u_n(s,y))|^2 \nu(dz)d\xi dr \\
\leq\ & C^2_\sigma\, \mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_0} |D_{r,\xi,z}u_n(s,y)|^2 \nu(dz)d\xi dr \\
=\ & C^2_\sigma\, \mathrm{E}||Du_n(s,y)||^2_{\mathcal{H}} \leq C^2_\sigma A_n < \infty \ \text{ par l'hypothèse de récurrence.}
\end{aligned}$$

Donc par le Théorème 6.3.13, $\sigma(u_n(s,y)) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D_{r,\xi,z}[\sigma(u_n(s,y))] = \sigma[u_n(s,y) + D_{r,\xi,z}u_n(s,y)] - \sigma(u_n(s,y)).$$

Puisque $1_{[0,t]}(s)G_{t-s}(x-y)$ est une fonction déterministe, on en déduit que : $Y(s,y) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D_{r,\xi,z}[Y(s,y)] = 1_{[0,t]}(s)G_{t-s}(x-y)\left[\sigma(u_n(s,y) + D_{r,\xi,z}u_n(s,y)) - \sigma(u_n(s,y))\right]. \quad (6.4.3)$$

Pour la condition $ii)$, en utilisant (6.4.2) et la condition $a)$ de l'hypothèse (H_2) du chapitre 4, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |Y(s,y)|^2 dyds &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\mathrm{E}|\sigma(u_n(s,y))|^2 dyds \\ &\leq D^2_\sigma(1+K_n)\nu_t < \infty. \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

Pour la condition $iii)$, par la Proposition 6.3.12, on a $D_{r,\xi,z}u_n(s,y)$ est $\mathcal{F}^L_s-$ mesurable pour tout (r,ξ,z) et de plus, $D_{r,\xi,z}u_n(s,y) = 0$ si $r > s$. Alors, $\{D_{r,\xi,z}u_n(s,y); s \in [0,T], y \in \mathbb{R}\}$ est un processus prévisible, et donc, par la relation (6.3.1), on obtient $\{D_{r,\xi,z}Y(s,y); s \in [0,T], y \in \mathbb{R}\}$ est aussi un processus prévisible. En utilisant le résultat du Corollaire 6.2.8 sur la coïncidence entre l'intégrale de Skorohod et d'Itô, on déduit qu'il suffit de montrer que $\{D_{r,\xi,z}Y(s,y); s \in [0,T], y \in \mathbb{R}\}$ est intégrable au sens d'Itô par rapport à L, c'est-à-dire

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |D_{r,\xi,z}Y(s,y)|^2 dyds < \infty. \quad (6.4.5)$$

Par (6.4.3) et le fait que σ est une fonction lipschitzienne, on obtient :

$$|D_{r,\xi,z}Y(s,y)|^2 \leq 1_{[0,t]}(s)G^2_{t-s}(x-y)C^2_\sigma|D_{r,\xi,z}u_n(s,y))|^2.$$

Alors

$$\mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |D_{r,\xi,z}Y(s,y)|^2 dyds \leq C^2_\sigma \mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)|D_{r,\xi,z}u_n(s,y))|^2 dyds,$$

pour tout (r,ξ,z). En intégrant maintenant par rapport à $drd\xi\nu(dz)$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0$ et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_0} \left(\mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |D_{r,\xi,z}Y(s,y)|^2 dyds\right) \nu(dz)d\xi dr \\ &\leq C^2_\sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\mathrm{E}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_0} |D_{r,\xi,z}u_n(s,y)|^2 \nu(dz)\, d\xi\, dr\right) dy\, ds \end{aligned}$$

$$= \quad C_\sigma^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\mathrm{E}||Du_n(s,y)||_{\mathcal{H}}^2 dyds \leq C_\sigma^2 \nu_t A_n < \infty. \qquad (6.4.6)$$

Ce dernier résultat signifie que (6.4.5) a lieu pour presque tout (r,ξ,z) par rapport à la mesure $drd\xi\nu(dz)$. En conclusion $\{D_{r,\xi,z}Y(s,y); s \in [0,T], y \in \mathbb{R}\}$ est aussi intégrable au sens de Skorohod et

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} D_{r,\xi,z}Y(s,y)L(ds,dy) \quad = \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}} D_{r,\xi,z}Y(s,y)L(\delta s,\delta y), \qquad (6.4.7)$$

et la condition $iv)$ découle de (6.4.6) et (6.4.7).

Puisque les conditions du Corollaire 6.3.17 sont satisfaites, par application de ce dernier, on obtient que $u_{n+1}(t,x) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$\begin{aligned} D_{r,\xi,z}u_{n+1}(t,x) &= G_{t-r}(x-\xi)\sigma(u_n(r,\xi))z \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)D_{r,\xi,z}[\sigma(u_n(s,y))]L(ds,dy) \\ &= G_{t-r}(x-\xi)\,\sigma(u_n(r,\xi))\,z + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\,[\sigma(u_n(s,y) \\ &+ D_{r,\xi,z}u_n(s,y)) - \sigma(u_n(s,y))]\,L(ds,dy). \qquad (6.4.8) \end{aligned}$$

En utilisant l'isométrie d'Itô, l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ et le fait que σ est Lipschitzienne, on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}|D_{r,\xi,z}u_{n+1}(t,x)|^2 \leq 2\,G_{t-r}^2(x-\xi)\,\mathrm{E}|\sigma(u_n(r,\xi))|^2\,z^2 + \\ &\quad 2v\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\mathrm{E}|\sigma(u_n(s,y) + D_{r,\xi,z}u_n(s,y)) - \sigma(u_n(s,y))|^2 dy\,ds \\ &\leq \quad 2\,D_\sigma^2\,(1+K_n)\,G_{t-r}^2(x-\xi)\,z^2 + \\ &\quad 2\,C_\sigma^2\,v\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\,\mathrm{E}|D_{r,\xi,z}u_n(s,y)|^2 dy\,ds. \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant l'intégrale par rapport à $dr\,d\xi\,\nu(dz)$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0$, on déduit que :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}||Du_{n+1}(t,x)||_{\mathcal{H}}^2 &= \mathrm{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_0} |D_{r,\xi,z}u_{n+1}(t,x)|^2 \nu(dz)\,d\xi\,dr \\ &\leq 2\,v\,D_\sigma^2(1+K_n)\int_0^T \int_{\mathbb{R}} G_{t-r}^2(x-\xi)d\xi dr \\ &+ 2\,v\,C_\sigma^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}^2(x-y)\mathrm{E}||Du_n(s,y)||_{\mathcal{H}}^2 dyds \qquad (6.4.9) \\ &\leq 2\,v\,D_\sigma^2(1+K_n)\,\nu_T + 2\,v\,C_\sigma^2\,\nu_T\,A_n. \end{aligned}$$

En prenant la borne supérieure pour tout $(t,x) \in [0,T]$, on obtient :

$$A_{n+1} \leq 2\,v\,D_\sigma^2(1+K_n)\,\nu_T + 2\,v\,C_\sigma^2\,\nu_T\,A_n < \infty,$$

par hypothèse.
b) Il nous reste à montrer que $\sup\limits_{n\geq 1} A_n < \infty$. Soit $J_n(s) = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}} \mathrm{E}||Du_n(s,y)||^2_{\mathcal{H}}$. En utilisant (6.4.9), on a :

$$\mathrm{E}||Du_{n+1}(t,x)||^2_{\mathcal{H}} \quad \leq \quad 2\,v\,D_\sigma^2\,(1+K_n)\,\nu_T + 2\,v\,C_\sigma^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\,J_n(s)\,dy\,ds.$$

Maintenant, on prend la borne supérieure pour $x \in \mathbb{R}$ et on obtient :

$$\begin{aligned} J_{n+1}(t) \quad &\leq \quad 2\,v\,D_\sigma^2\,(1+K_n)\,\nu_T + 2\,v\,C_\sigma^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\,J_n(s)\,dy\,ds \\ &\leq \quad 2\,v\,D_\sigma^2\,(1+K_n)\,\nu_T + \int_0^t J_n(s)\rho(t-s)\,dy\,ds, \end{aligned}$$

où

$$\rho(t) = 2\,v\,C_\sigma^2 \int_{\mathbb{R}} G_t^2(x)\,dx. \tag{6.4.10}$$

En appliquant le Lemme B.4.1 (voir Annexe B) avec $C_n = 2\,v\,D_\sigma^2\,(1+K_n)\,\nu_T$, nous déduisons que $\sup\limits_{n\geq 0}\sup\limits_{t\in[0,T]} J_n(t) < \infty$, c'est-à-dire $\sup\limits_{n\geq 1} A_n(t) < \infty$.
Ceci termine la preuve.

□

Le dernier résultat montre que la solution de l'équation (6.4.1) est différentiable au sens de Malliavin et sa dérivée de Malliavin vérifie une équation intégrale. Pour ce théorème, on suppose que σ est une fonction affine.

Théorème 6.4.2. *On suppose que $\sigma(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, pour chaque $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $u(t,x) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $\sup\limits_{n\geq 1} \mathrm{E}||Du_n(t,x) - Du(t,x)||^2_{\mathcal{H}} \to 0$ quand $n \to \infty$. De plus on a :*

$$\begin{aligned} D_{r,\xi,z}u(t,x) \quad &= \quad G_{t-r}(x-\xi)\sigma(u(r,\xi))z \\ &+ \quad a \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y) D_{r,\xi,z}u(s,y) L(ds,dy), \end{aligned}$$

dans $L^2(\Omega;\mathcal{H})$.

Démonstration. On va appliquer le Théorème 6.3.7 avec $F_n = u_n(t,x)$ et $F = u(t,x)$. Pour cela, on fixe $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et on doit montrer que $\{Du_n(t,x)\}_{n\geq 1}$ converge dans $L^2(\Omega;\mathcal{H})$. Soit $M_n(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{E}||Du_{n+1}(s,y) - Du_n(s,y)||^2_{\mathcal{H}}$. En écrivant la relation (6.4.8) pour Du_{n+1} et Du_n, et en prenant la différence entre les deux équations obtenues, on obtient :

$$\begin{aligned} D_{r,\xi,z}u_{n+1}(t,x) - D_{r,\xi,z}u_n(t,x) &= G_{t-r}(x-\xi)[\sigma(u_n(r,\xi)) - \sigma(u_{n-1}(r,\xi))]\, z \\ + & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\{[\sigma(u_n(s,y) + D_{r,\xi,z}u_n(s,y)) - \sigma(u_n(s,y))] \\ - & [\sigma(u_{n-1}(s,y) + D_{r,\xi,z}u_{n-1}(s,y)) - \sigma(u_{n-1}(s,y))]\}L(ds,dy). \end{aligned}$$

En utilisant l'isométrie d'Itô (2.2.3) et l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}|D_{r,\xi,z}u_{n+1}(t,x) - D_{r,\xi,z}u_n(t,x)|^2 &\leq 2\,a^2\,G^2_{t-r}(x-\xi)\mathrm{E}|u_n(r,\xi) - u_{n-1}(r,\xi)|^2\, z^2 \\ + \;\; 2\,a^2\,v & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\mathrm{E}|D_{r,\xi,z}u_n(s,y) - D_{r,\xi,z}u_{n-1}(s,y)|^2 dyds. \end{aligned}$$

Soit $b_n^2 := \sup_{(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(s,y) - u_{n-1}(s,y)|^2$. On note que par (4.1.20), $\sum_{n\geq 1} b_n < \infty$. Il résulte de l'intégration par rapport à $\nu(dz)d\xi dr$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0$ que :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}||D_{r,\xi,z}u_{n+1}(t,x) - D_{r,\xi,z}u_n(t,x)||^2_{\mathcal{H}} &\leq 2\,a^2\,v\,\nu_T\,b_n^2 \\ + \;\; & 2\,a^2\,v \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\mathrm{E}||Du_n(s,y) - Du_{n-1}(s,y)||^2_{\mathcal{H}} dyds \\ \leq \;\; & 2\,a^2\,v\,\nu_T\,b_n^2 + 2\,a^2\,v \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\,M_n(s)\,dyds \\ \leq \;\; & 2\,a^2\,v\,\nu_T\,b_n^2 + \frac{a^2}{C_\sigma^2} \int_0^t \rho(t-s)\,M_n(s)\,ds, \end{aligned}$$

où ρ est donnée par (6.4.10). Maintenant, en prenant la borne supérieure pour $x \in \mathbb{R}$, on déduit que :

$$M_{n+1}(t) \leq 2\,a^2\,v\,\nu_T\,b_n^2 + \frac{a^2}{C_\sigma^2} \int_0^t \rho(t-s)\,M_n(s)\,ds.$$

En appliquant le Lemme B.4.1 (voir Annexe B) avec $p = 2$, nous déduisons que :

$$\sum_{n\geq 0} \sup_{t\leq T}\, [M_n(t)]^{1/2} < \infty.$$

Par conséquent, $\{Du_n(t,x)\}_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega;\mathcal{H})$. On conclut qu'il existe une variable $U(t,x) \in L^2(\Omega;\mathcal{H})$ telle que $\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}||Du_n(t,x) - U(t,x)||^2_{\mathcal{H}} \to$

0 quand $n \to \infty$. Il découle du Théorème 6.3.7 que $u(t,x) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $Du_n(t,x) \to Du(t,x)$ dans $L^2(\Omega; \mathcal{H})$. Par unicité de la limite, on déduit que : $U(t,x) = Du(t,x)$ presque sûrement et donc,

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}||Du_n(t,x) - Du(t,x)||^2_{\mathcal{H}} \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty. \tag{6.4.11}$$

En utilisant (6.4.8) et le fait que $\sigma(x) = ax + b$, on obtient :

$$\begin{aligned} D_{r,\xi,z}u_{n+1}(t,x) &= G_{t-r}(x-\xi)\,\sigma(u_n(r,\xi))\,z \\ &+ a\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)D_{r,\xi,z}u_n(s,y))L(ds,dy). \end{aligned} \tag{6.4.12}$$

On passe à la limite dans $L^2(\Omega; \mathcal{H})$ dans (6.4.12). Le membre de gauche tend vers $D_{r,\xi,z}u(t,x)$ par (6.4.11). Pour le premier terme du membre de droite on a :

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_0} G^2_{t-r}(x-\xi)|\sigma(u_n(r,\xi)) - \sigma(u(r,\xi))|^2 z^2\,\nu(dz)\,d\xi\,dr \\ &= v\,a^2\int_0^T\int_{\mathbb{R}} G^2_{t-r}(x-\xi)\mathrm{E}|\sigma(u_n(r,\xi)) - \sigma(u(r,\xi))|^2 d\xi\,dr \\ &\leq v\,a^2\,\nu_T \sup_{(r,\xi)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}|u_n(r,\xi) - u(r,\xi)|^2 \to 0 \text{ par } \quad (4.1.21). \end{aligned}$$

Pour le second terme du membre de droite, on a :

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_0} \mathrm{E}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)[D_{r,\xi,z}u_n(s,y) - D_{r,\xi,z}u(s,y)]L(ds,dy)\right|^2 \nu(dz)d\xi dr \\ &= v\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_0}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\mathrm{E}|D_{r,\xi,z}u_n(s,y) - D_{r,\xi,z}u(s,y)|^2 dyds\nu(dz)d\xi dr \\ &= v\int_0^t\int_{\mathbb{R}} G^2_{t-s}(x-y)\mathrm{E}||Du_n(s,y) - Du(s,y)||^2_{\mathcal{H}}\,dy\,ds \\ &\leq v\,\nu_T \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{E}||Du_n(s,y) - Du(s,y)||^2_{\mathcal{H}} \to 0 \text{ par } \quad (6.4.11). \end{aligned}$$

On conclut que le second terme du membre de droite converge dans $L^2(\Omega; \mathcal{H})$ vers 0 quand n tend vers l'infini.

$\square$

Conclusion

L'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS) nécessite certaines notions de calcul stochastique. Dans cette thèse, après avoir fait une étude détaillée sur la construction du bruit blanc de Lévy introduite dans [2], on met en place les outils qui sont nécessaires pour développer le calcul stochastique par rapport à ce bruit. Ces outils se basent sur la théorie de Walsh et c'est ce qui permet d'utiliser l'approche des champs aléatoires. Nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution d'une EDPS générale avec ce bruit. Ensuite, sous certaines conditions, nous montrons que la solution de l'équation des ondes est faiblement intermittent en utilisant une version de l'inégalité de Rosenthal pour l'intégrale stochastique. Un problème ouvert est l'étude de l'équation de la chaleur avec ce bruit, puisque, dans ce cas cette approche ne fonctionne pas. Dans la dernière partie, on introduit les éléments de base du calcul de Malliavin par rapport à ce bruit. On montre que la solution d'une EDPS avec ce bruit est différentiable au sens de Malliavin et, sous certaines conditions, sa dérivée de Malliavin satisfait une équation intégrale.

Annexe A

Processus de Lévy

Rappelons d'abord la définition d'un processus de Lévy.

Définition A.0.1. Un processus $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ s'appelle un *processus de Lévy* s'il satisfait les propriétés suivantes :

i) $X(0) = 0$ presque sûrement ;

ii) $X(t_1)$, $X(t_2) - X(t_1)$, $\ldots$, $X(t_n) - X(t_{n-1})$ sont indépendantes pour chaque $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$;

iii) la loi de $X(t) - X(s)$ dépend seulement de $t - s$, pour chaque $0 \leq s < t$;

iv) $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ est continue en probabilité, c'est-à-dire $X(t_n) \xrightarrow{P} X(t)$ si $t_n \longrightarrow t$.

Si $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy, on peut montrer que la fonction caractéristique de $X(t)$ est donnée par :

$$\mathrm{E}\left(e^{i\,u\,X(t)}\right) = \exp\left(t\left\{i\,u\,a - \frac{u^2\,\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}_0}\left(e^{i\,u\,z} - 1 - i\,u\,z\,1_{\{|z|\leq 1\}}\right)\,\nu(dz)\right\}\right),\quad u \in \mathbb{R}; \tag{A.0.1}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ et ν est une mesure sur $\mathbb{R}$ qui satisfait : $\nu(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}_0}(1 \wedge z^2)\,\nu(dz) < \infty$. (voir Théorème 1.3.3 de [1]). La mesure ν s'appelle *la mesure de Lévy*. Si $\nu = 0$ et $\sigma^2 > 0$, alors le processus $W = \{W(t) = X(t) - a\,t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien. Si $\sigma^2 = 0$ alors X s'appelle un *processus de Lévy à sauts purs*.

Dans ce travail, on s'intéresse seulement aux processus de Lévy à sauts purs. On va en donner deux exemples.

A.1 Processus de Poisson composé

Dans cette section, nous allons introduire le processus de Poisson composé. On commence d'abord avec la définition d'une variable aléatoire de loi de Poisson composée.

Définition A.1.1. Soit ν une mesure finie sur $\mathbb{R}$ avec $\nu(\{0\}) = 0$. Une variable aléatoire X suit *une loi de Poisson composée* d'intensité ν si la fonction caractéristique de X est donnée par :

$$\varphi_X(u) = \mathrm{E}(e^{iuX}) = \exp\left\{\int_{\mathbb{R}_0} \left(e^{iuz} - 1\right) \nu(dz)\right\}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{A.1.1}$$

Remarque A.1.2. Si on note $\lambda = \nu(\mathbb{R})$ et $F = \nu/\lambda$, alors (A.1.1) peut être écrite comme :

$$\varphi_X(u) = \exp\{\lambda \int_{\mathbb{R}_0} (e^{iuz} - 1) F(dz)\}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{A.1.2}$$

Le résultat suivant donne une représentation d'une variable aléatoire avec une loi de Poisson composée.

Proposition A.1.3. *Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de moyenne λ. Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{R}$, de loi F, d'espérance μ et de variance σ^2. De plus, on suppose que N et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes. Alors*

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

est une variable aléatoire de loi de Poisson composée d'intensité $\nu = \lambda F$, avec :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \lambda\mu = \lambda \int_{\mathbb{R}} z\, F(dz) = \int_{\mathbb{R}} z\, \nu(dz), \\ \mathrm{Var}(X) &= \lambda(\sigma^2 + \mu^2) = \lambda \int_{\mathbb{R}} z^2\, F(dz) = \int_{\mathbb{R}} z^2\, \nu(dz). \end{aligned}$$

Démonstration. Pour la démonstration de la première propriété, on utilise un conditionnement sur N. On a $\mathrm{E}(X|N=n) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i | N=n\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i | N=n\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\mu$. Donc $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X|N)] = \mathrm{E}(N\mu) = \lambda\,\mu$. La deuxième propriété est démontrée de la même manière. On observe que :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2|N=n) &= \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2 \middle| N=n\right] = \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \middle| N=n\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \left[\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]^2 \\ &= n\,\sigma^2 + (n\mu)^2, \end{aligned}$$

et donc $\mathrm{E}(X^2|N) = N\,\sigma^2 + (N\mu)^2$. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= \mathrm{E}[\mathrm{E}(X^2|N)] = \mathrm{E}(N\,\sigma^2 + N^2\,\mu^2) \\ &= \sigma^2\,\mathrm{E}(N) + \mu^2\,\mathrm{E}(N^2) = \sigma^2\,\lambda + \mu^2(\lambda+\lambda^2), \end{aligned}$$

et $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \sigma^2\,\lambda + \mu^2\,(\lambda+\lambda^2) - (\lambda\,\mu)^2 = \sigma^2\,\lambda + \mu^2\,\lambda$. Pour la fonction caractéristique, on a :

$$\varphi_X(u) = \mathrm{E}(e^{i\,u\cdot X}) = \mathrm{E}\left(e^{i\,u\cdot\sum_{j=1}^N X_j}\right) = E\left[\mathrm{E}\left[e^{i\,u\cdot\sum_{j=1}^N X_j}|N\right]\right],$$

et du fait que N et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[e^{i\,u\cdot\sum_{j=1}^N X_j}|N=n\right] &= \mathrm{E}\left[e^{i\,u\cdot\sum_{j=1}^n X_j}|N=n\right] = \mathrm{E}\left[e^{i\,u\cdot\sum_{j=1}^n X_j}\right] \\ &= \prod_{j=1}^n \mathrm{E}(e^{i\,u\,X_1}) = \{\mathrm{E}\left(e^{i\,u\,X_1}\right)\}^n := \varphi_{X_1}(u)^n. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \varphi_X(u) &= \mathrm{E}\left[\varphi_{X_1}(u)^N\right] = \sum_{n\geq}\{\varphi_{X_1}(u)\}^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^u}{u!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda\,\varphi_{X_1}(u)} = \exp\left\{\lambda\int_{\mathbb{R}_0}(e^{i\,u\,z}-1)F(dz)\right\}. \end{aligned}$$

□

On présente maintenant une inégalité pour le moment d'ordre p d'une variable aléatoire de Poisson composée.

Lemme A.1.4. *Soit X une variable aléatoire avec une loi de Poisson composée d'intensité $\nu = \lambda\,F$, où $\lambda = \nu(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} z\,\nu(dz) = 0$ et*

$$\int_{\{|z|\geq 1\}} |z|^p\,\nu(dz) < \infty, \qquad \text{(A.1.3)}$$

pour un certain $p \geq 2$. Alors,

$$\mathrm{E}|X|^p \leq C_p\left(\lambda^{p/2} + \lambda\right),$$

où C_p est une constante qui dépend de p.

Démonstration. On considère Y une variable aléatoire donnée par la Proposition A.1.3, c'est à dire $Y = \sum_{i=1}^N Y_i$ avec $(Y_i)_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi F et N est une variable aléatoire de Poisson de moyenne λ, indépendante de $(Y_i)_{i\geq 1}$. Dans ce cas, $\mathrm{E}(Y_i) = \int_{\mathbb{R}_0} z\,F(dz) = 0$ et $\mathrm{E}|Y_i|^p = \int_{\mathbb{R}_0} |z|^p\,F(dz) < \infty$.

On remarque que $\int_{\{|z|\leq 1\}} |z|^p \,\nu(dz) \leq \int_{\{|z|\leq 1\}} |z|^2 \,\nu(dz) < \infty$. On note $m_2 = \mathrm{E}|Y_i|^2$, $m_p = \mathrm{E}|Y_i|^p$. On a

$$\mathrm{E}|Y|^p = \mathrm{E}\left|\sum_{i=1}^{N} Y_i\right|^p = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{N} Y_i\right|^p \Big| N\right)\right].$$

Notons que :

$$\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{N} Y_i\right|^p \Big| N=n\right) = \mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right|^p \Big| N=n\right) = \mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right|^p\right).$$

En utilisant l'inégalité de Rosenthal (voir la relation (B.2.2), Annexe B), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right|^p &\leq c_p\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(Y_i^2)\right)^{p/2} + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}|Y_i|^p\right\} \\
&= c_p\left\{(n\, m_2)^{p/2} + n\, m_p\right\}, \quad \text{pour tout} \quad n.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right|^p \Big| N\right) \leq c_p\left\{(N\, m_2)^{p/2} + N\, m_p\right\}.$$

Ainsi

$$\mathrm{E}|Y|^p \leq C_p'\left\{E(N^{p/2}) + \mathrm{E}(N)\right\},$$

où $C_p' = c_p \max\{m_2^{p/2}, m_p\}$. En utilisant le fait que $\mathrm{E}(N) = \lambda$ et l'inégalité $\mathrm{E}(N^{p/2}) \leq C_p''(\lambda + \lambda^{p/2})$ pour une certaine constante $C_p'' > 0$ (voir page 95 de [31]), nous obtenons :

$$\mathrm{E}|Y|^p \leq C_p\left(\lambda^{p/2} + \lambda\right),$$

où $C_p = C_p'\,(C_p''+1)$. On conclut en utilisant le fait que Y est égale à X en distribution. □

Définition A.1.5. Soit ν une mesure finie sur $\mathbb{R}$. Un processus de Lévy $P = \{P(t)\}_{t\geq 0}$ pour lequel $P(t) - P(s)$ suit une loi de Poisson composée d'intensité $(t-s)\,\nu$ pour chaque $0 \leq s \leq t$, s'appelle un *processus de Poisson composé* sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité ν.

Remarque A.1.6. Si $P = \{P(t)\}_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson composé d'intensité ν, alors la fonction caractéristique de $P(t)$ est donnée par :

$$\mathrm{E}\left(e^{i\,u\,P(t)}\right) = \exp\left\{t\int_{\mathbb{R}} (e^{i\,u\,z} - 1)\,\nu(dz)\right\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Donc P est un processus de Lévy à sauts purs, ν est sa mesure de Lévy et la constante a dans (A.0.1) est donnée par $a = \int_{\{|z|\leq 1\}} z\,\nu(dz)$.

Remarque A.1.7. Si la mesure ν satisfait $\int_{\mathbb{R}} |z|\, \nu(dz) < \infty$, alors on a $\mathrm{E}(P(t)) = t \int_{\mathbb{R}} z\, \nu(dz)$ et le processus $L(t) = P(t) - \mathrm{E}(P(t))$ a la fonction caractéristique

$$\mathrm{E}\left(e^{i\,u\,L(t)}\right) = \exp\left\{t \int_{\mathbb{R}} (e^{i\,u\,z} - 1 - i\,u\,z)\, \nu(dz)\right\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Si la mesure ν satisfait $\int_{\mathbb{R}_0} z^2 \nu(dz) < \infty$, alors $\mathrm{Var}(P(t)) = \mathrm{E}|L(t)|^2 = t \int_{\mathbb{R}_0} z^2 \nu(dz)$.

Lemme A.1.8. *Soit $P = \{P(t)\}_{t \geq 0}$ un processus de Poisson composé d'intensité ν. Si $I = (a, b]$ avec $0 \leq a < b$, alors on note $P(I) = P(b) - P(a)$. Si ν satisfait* (A.1.3) *pour un certain $p \geq 2$, alors*

$$\mathrm{E}|P(I)|^p \leq C_p \left\{|I|^{p/2} + |I|\right\}, \tag{A.1.4}$$

où C_p est une constante dépendant de p et $|I| = b - a$ est la mesure de Lebesgue de I.

Démonstration. La fonction caractéristique de $P(I)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(e^{i\,u\,P(I)}\right) &= \exp\left\{|I| \int_{\mathbb{R}_0} \left(e^{i\,u\,z} - 1\right)\, \nu(dz)\right\} \\ &= \exp\left\{\lambda \int_{\mathbb{R}_0} \left(e^{i\,u\,z} - 1\right)\, F(dz)\right\}, \end{aligned}$$

où $\lambda = |I|\, \nu(\mathbb{R}_0)$ et $F(dz) = \dfrac{\nu(dz)}{\nu(\mathbb{R}_0)}$ En appliquant le Lemme A.1.4, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}|P(I)|^p &\leq C_p\, (\lambda^{p/2} + \lambda) = C_p \left\{(|I|\, \nu(\mathbb{R}_0))^{p/2} + |I|\, \nu(\mathbb{R}_0)\right\} \\ &\leq C_p' \left\{|I|^{p/2} + |I|\right\}, \end{aligned}$$

où $C_p' = \max\{\nu(\mathbb{R}_0)^{p/2}, \nu(\mathbb{R}_0)\}$.

□

A.2 Processus Gamma

Dans cette section nous allons introduire le processus Gamma.

Définition A.2.1. Une variable aléatoire X suit *une loi Gamma* de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ si sa fonction densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} e^{-\beta\, x},\ x > 0.$$

Dans ce cas, on écrit $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha,\, \beta)$.

Remarque A.2.2. Si $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$, alors $\mathrm{E}(X) = \alpha/\beta$, $\mathrm{Var}(X) = \alpha/\beta^2$ et $\mathrm{E}(e^{i\,u\,X}) = \left(1 - \frac{i\,u}{\beta}\right)^{-\alpha}$, $u \in \mathbb{R}$. De plus, $\mathrm{E}(X^p) = \frac{\Gamma(\alpha+p)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^p}$, pour chaque $p > -\alpha$.

Définition A.2.3. Un *processus de Gamma* de paramètre $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ est un processus de Lévy $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ pour lequel $X(t) - X(s) \sim \mathrm{Gamma}\,(\alpha(t-s), \beta)$ pour chaque $0 \leq s < t$.

Remarque A.2.4. Si $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ est un processus de Gamma de paramètre $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors la fonction caractéristique de $X(t)$ est donnée par :

$$\mathrm{E}\left(e^{i\,u\,X(t)}\right) = \left(1 - \frac{i\,u}{\beta}\right)^{-\alpha\,t}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Lemme A.2.5. *Si $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ est un processus de Gamma de paramètre $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors la fonction caractéristique de $X(t)$ est donnée par*

$$\mathrm{E}\left(e^{i\,u\,X(t)}\right) = \exp\left\{t \int_0^\infty \left(e^{i\,u\,z} - 1\right)\, \nu(dz)\right\}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{A.2.1}$$

où $\nu(dz) = \dfrac{\alpha}{z}\, e^{-\beta\,z}\, 1_{\{z>0\}}\, dz$. Donc X est un processus de Lévy à sauts purs, ν est sa mesure de Lévy et la constante a dans (A.0.1) *est donnée par $a = \alpha \int_0^1 e^{-\beta z}\, dz = \alpha(1 - e^{-\beta})/\beta$.*

Démonstration. On observe que $\mathrm{E}\left(e^{i\,u\,X(t)}\right) = \exp(t\,\psi(u))$, où $\psi(u) = -\alpha\,\log(1 - i\,u/\beta)$, $u \in \mathbb{R}$. On a :

$$\psi^{'}(u) = \frac{i\,\alpha}{\beta}\, \frac{1}{1 - \dfrac{i\,u}{\beta}} = \frac{i\,\alpha}{\beta}\, \varphi(u),$$

où φ désigne la fonction caractéristique de $Y(1)$ et $Y = \{Y(t)\}_{t \geq 0}$ est un processus de Gamma de paramètres $\alpha = 1$ et β. En utilisant la définition de la fonction caractéristique de $Y(1)$, on peut écrire :

$$\psi^{'}(u) = \frac{i\,\alpha}{\beta} \int_0^\infty e^{i\,u\,z}\, \beta\, e^{-\beta\,z}\, dz = i\,\alpha \int_0^\infty e^{i\,u\,z}\, e^{-\beta\,z}\, dz.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \int_0^u \psi^{'}(s)\, ds = \int_0^u \left(i\,\alpha \int_0^\infty e^{i\,s\,z}\, e^{-\beta\,z}\, dz\right) ds \\
&= i\,\alpha \int_0^\infty \left(\int_0^u e^{i\,s\,z}\, ds\right) e^{-\beta\,z}\, dz \\
&= \alpha \int_0^\infty \frac{e^{i\,u\,z} - 1}{z}\, e^{-\beta\,z}\, dz.
\end{aligned}$$

□

Définition A.2.6. Le *processus Gamma centré* est défini par

$$L(t) = X(t) - \mathrm{E}(X(t)) = X(t) - \alpha\, t/\beta,$$

où $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ est un processus de Gamma de paramètres $\alpha > 0$ et β.

Lemme A.2.7. *Si $L = \{L(t)\}_{t\geq 0}$ est un processus de Gamma centré, alors la fonction caractéristique de $L(t)$ est donnée par :*

$$\mathrm{E}\left(e^{i\,u\,L(t)}\right) = \int_0^\infty \left(e^{i\,u\,z} - 1 - i\,u\,z\right)\nu(dz), \quad u \in \mathbb{R}; \tag{A.2.2}$$

où $\nu(dz) = \alpha\, z^{-1}\, e^{-\beta\, z}\, 1_{\{z>0\}}\, dz$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(e^{i\,u\,L(t)}\right) &= \mathrm{E}\left[\exp\left(i\,u\,X(t) - i\,u\,\alpha\, t/\beta\right)\right] = \exp\left(-i\,u\,\alpha\, t/\beta\right)\, \mathrm{E}\left[e^{i\,u\,X(t)}\right] \\
&= \exp\left(-i\,u\,\alpha\, t/\beta\right)\, \exp\left\{t \int_0^\infty \left(e^{i\,u\,z} - 1\right)\nu(dz)\right\} \\
&= \exp\left\{t\left[\int_0^\infty \left(e^{i\,u\,z} - 1\right)\nu(dz) - i\,u\,\alpha/\beta\right]\right\}.
\end{aligned}$$

En remarquant que $\alpha/\beta = \int_0^\infty z\,\nu(dz)$ on obtient (A.2.2).

$\square$

Annexe B

Résultats de la théorie des probabilités

B.1 Résultats élémentaires

Théorème B.1.1. *Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive ou bornée, alors*

$$\mathrm{E}\left[h(X,Y)\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}\left[h(x,Y)\right] P_X(dx),$$

où P_X est la loi de X.

Démonstration. Par le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[h(X,Y)\right] &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y) P_{X,Y}(dx,dy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y) P_Y(dy) \right) P_X(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}\left[h(x,Y)\right] P_X(dx)
\end{aligned}$$

□

On se rappelle qu'une fonction $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dite fonction càdlàg si elle est continue à droite et a des limites à gauche. On note par $D[0,T]$ l'ensemble des fonctions càdlàg définies sur $[0,T]$.

Lemme B.1.2. *Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions dans $D[0,T]$ et $x \in D[0,T]$ telle que :*

$$\sup_{t \leq T} |x_n(t) - x(t)| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Alors

$$\sup_{t \leq T} |x_n(t-) - x(t-)| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Alors il existe un N_ε tel que pour chaque $n \geq N_\varepsilon$, on ait $|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$, pour tout $t \in [0,T]$. Soit $t \in [0,T]$ arbitraire et $(t_k)_k$ une suite dans $[0,T]$ telle que $t_k \uparrow t$. Alors $|x_n(t-) - x(t-)| = \lim_{k\to\infty} |x_n(t_k) - x(t_k)| \leq \varepsilon$ pour chaque $n \geq N_\varepsilon$.

□

Le résultat suivant est une variante de l'inégalité de Hölder.

Théorème B.1.3. *Si $(X, \mathcal{X}, \mu)$ est un espace de mesure et $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables, alors, pour tout $p \geq 1$ on a :*

$$\left| \int_X f(x)\, g(x)\, \mu(dx) \right|^p \leq \int_X |f(x)|^p\, |g(x)|\, \mu(dx) \left(\int_X |g(x)|\ \mu(dx) \right)^{p-1}. \tag{B.1.1}$$

B.2 Inégalité de Rosenthal

Nous présentons premièrement l'inégalité de Rosenthal pour une martingale à temps discret.

Théorème B.2.1 (Théorème 2.12 de [15])**.** *Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une martingale de carré intégrable telle que $S_0 = 0$, et soit $X_i = S_i - S_{i-1}, i \geq 1$. Alors pour chaque $p \geq 2$,*

$$\begin{aligned} A_p^{-1} \left\{ \left[\mathrm{E} \left(\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) \right)^{p/2} \right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^n \mathrm{E}|X_i|^p \right]^{1/p} \right\} &\leq (\mathrm{E}|S_n|^p)^{1/p} \\ \leq \ B_p \left\{ \left[\mathrm{E} \left(\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) \right)^{p/2} \right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^n \mathrm{E}|X_i|^p \right]^{1/p} \right\}&, \end{aligned} \tag{B.2.1}$$

où A_p et B_p sont des constantes positives qui dépendent de p. En particulier, si $(X_i)_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes de moyenne 0, de carré intégrable et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, alors pour chaque $p \geq 2$,

$$\mathrm{E}|S_n|^p \leq c_p \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i^2) \right)^{p/2} + \sum_{i=1}^n \mathrm{E}|X_i|^p \right\}, \tag{B.2.2}$$

où $c_p = 2^{p-1} B_p$.

On présente maintenant l'inégalité de Rosenthal pour une martingale à temps continu. On note par $||\cdot||_p$ la norme dans $L^p(\Omega)$.

Théorème B.2.2 (Lemme 2.1 de [11])**.** *Soit $M = \{M(t)\}_{t\geq 0}$ une martingale càdlàg de carré intégrable avec $M(0) = 0$. On note par $\langle M\rangle = \{\langle M\rangle_t\}_{t\geq 0}$ la variation quadratique prévisible de M et $\Delta M(t) = M(t) - M(t-)$, le saut de M au temps t. Alors, pour chaque $p \geq 2$, ils existent deux constantes $A_p > 0$ et $B_p > 0$ telles que pour chaque $T > 0$,*

$$\begin{aligned} A_p^{-1} & \left\{ \left\| \langle M\rangle(t)^{1/2} \right\|_p + \left\| \sup_{t\leq T} |(\Delta M)(t)| \right\|_p \right\} \leq \left\| \sup_{t\leq T} |M(t)| \right\|_p \\ \leq \; & B_p \left\{ \left\| \langle M\rangle(t)^{1/2} \right\|_p + \left\| \sup_{t\leq T} |\, (\Delta M)(t)\, | \right\|_p \right\}. \end{aligned} \tag{B.2.3}$$

Remarque B.2.3. L'ordre de grandeur des constantes A_p et B_p dans le Théorème B.2.2 a été trouvé par Ren et Tian dans [27]. Plus précisément, ces auteurs ont montré que :

$$A_p = O\left(\sqrt{p}\right) \quad \text{et} \quad B_p = O\left(\frac{p}{\ln p}\right).$$

(Dans le cas de martingales à temps discret, l'ordre de grandeur des constantes A_p et B_p a été donnée dans [16]).

B.3 Mesure aléatoire de Poisson

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(E, \mathcal{E}, \nu)$ un espace mesuré. On note par $\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{A},\, \nu(A) < \infty\}$. On commence par rappeler des résultats connus sur la mesure aléatoire de Poisson.

Définition B.3.1. Soit $N = \{N(A); A \in \mathcal{E}_0\}$ une collection de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que N est une *mesure aléatoire de Poisson* d'intensité ν si :

i) pour $A \in \mathcal{E}_0$, $N(A)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\nu(A)$,

ii) pour $A_1, \cdots A_n \in \mathcal{E}_0$ disjoints, $N(A_1), \cdots, N(A_n)$ sont indépendants et

$$N\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n N(A_i) \text{ presque sûrement.}$$

On peut montrer qu'une mesure aléatoire de Poisson admet la représentation

$$N = \sum_{i\geq 1} \delta_{X_i},$$

où les $(X_i)_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires dans E et δ_a est la mesure de Dirac en a.

Le résultat suivant donne une construction directe de N dans le cas où $(E, \mathcal{E}, \nu)$ est un espace mesuré fini.

Proposition B.3.2. *Soit $(E, \mathcal{E}, \nu)$ un espace de mesure fini. Soient τ une variable aléatoire de Poisson de moyenne $\nu(E)$ et $(\xi_i)_{i\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mu = \nu/\nu(E)$ et indépendantes de τ. On définit*

$$N(A) = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{\xi_i}(A), \; A \in \mathcal{E}_0. \tag{B.3.1}$$

Alors le processus $N = \{N(A), A \in \mathcal{E}_0\}$ est une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $\nu(A)$.

Démonstration. Voir page 134 de [28]. □

Pour définir l'intégrale stochastique $\int f\, dN$, on commence par définir cette dernière pour une fonction f simple du type $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \, 1_{A_i}$ avec $c_i \in \mathbb{R}$ et $A_i \in \mathcal{E}_0$. Dans ce cas on définit :

$$N(f) := \int_E f\, dN = \sum_{i=1}^{n} c_i \, N(A_i).$$

On note que $\mathrm{E}|N(f)|^2 = \int_E |f|^2 d\nu$. Si f est une fonction mesurable quelconque, alors du Théorème 13.5 de [6], il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions simples qui converge vers f ν-presque partout. Ainsi, si $\int_E |f|^2 d\nu < \infty$, on définit $N(f)$ comme la limite dans $L^2(\Omega)$ de $\{N(f_n)\}_{n\geq 1}$.

Pour une fonction mesurable $f : E \to [0, \infty)$, on peut définir $N(f) = \sum\limits_{i\geq 1} f(X_i)$ si $N = \sum\limits_{i\geq 1} \delta_{X_i}$. Notons que $\mathrm{E}[N(f)] = \int_E f(x)\nu(dx)$ et $\mathrm{E}|N(f)|^2 = \int_E |f|^2 \, d\nu$. Pour une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $\int_E |f| d\nu < \infty$, on définit :

$$N(f) = N(f^+) - N(f^-).$$

On observe que $\mathrm{E}[N(f^+)] = \int_E f^+ d\nu < \infty$, $\mathrm{E}[N(f^-)] = \int_E f^- d\nu < \infty$, donc $N(f^+) < \infty$ presque sûrement et $N(f^-) < \infty$ presque sûrement.

Définition B.3.3. Soit N une mesure aléatoire de Poisson sur E. On définit *la fonctionnelle de Laplace* de N par :

$$\Psi_N(f) = \mathrm{E}\left(e^{-N(f)}\right),$$

pour toute fonction $f : E \longrightarrow [0, \infty)$ mesurable.

Théorème B.3.4. *(Théorème 5.1 de [28]) Si N est une mesure aléatoire de Poisson d'intensité ν alors sa fonctionnelle de Laplace est donnée par :*

$$\Psi_N(f) = \exp\left\{ - \int_E \left(1 - e^{-f(x)}\right) \, \nu(dx) \right\}, \tag{B.3.2}$$

pour toute fonction $f : E \longrightarrow [0, \infty)$ mesurable.

Définition B.3.5. On définit $\widehat{N}$, la *mesure compensée de Poisson* associée à N, par $\widehat{N}(A) = N(A) - \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{E}_0$. On note pour toute fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $\int_E |f| d\nu < \infty$, on a :

$$\int_E f d\widehat{N} = \int_E f dN - \int_E f d\nu,$$

et donc $\mathrm{E}\left(\int_E f d\widehat{N}\right) = 0$.

B.4 Extension du lemme de Gronwall

Nous présentons une extension du Lemme 15 de [9].

Lemme B.4.1. *Soient $g : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ une fonction à valeurs réelles positives telle que $\int_0^T g(s)ds < \infty$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives sur $[0,T]$ telle que $M = \sup\limits_{t\in[0,T]} f_0(t) < \infty$ et*

$$f_n(t) \leq C_n + \int_0^t f_{n-1}(s)\, g(t-s)\, ds \quad \forall t \in [0,T], \forall n \geq 0,$$

pour une suite $(C_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels positifs. Alors, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels positifs avec $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^{1/p} < \infty$ pour tout $p > 0$ telle que :

$$f_n(t) \leq C_n + \sum_{j=1}^{n-1} C_j\, a_{n-j} + C_0\, a_n\, M \quad \forall t \in [0,T], \forall n \geq 0. \tag{B.4.1}$$

En particulier, si $\sum\limits_{n\geq 0} C_n^{1/p} < \infty$ pour un certain $p > 1$, alors

$$\sum_{n\geq 1} \sup_{t\in[0,T]} f_n(t)^{1/p} < \infty.$$

Démonstration. On suit les lignes de la démonstration du Lemme 15 de [9]. Soient $G(t) = \int_0^t g(s)ds$, $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur $[0,T]$ de loi $\dfrac{g(t)}{G(T)}$ et $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Alors, par un changement de variable, on obtient :

$$f_n(t) \quad \leq \quad C_n + G(T) \int_0^t f_{n-1}(t-s)\, \frac{g(s)}{G(T)} ds$$

$$
\begin{aligned}
&= C_n + G(T) \int_0^t f_{n-1}(t-s)\,(P \circ X_1^{-1})(s) \\
&= C_n + G(T)\,\mathrm{E}[f_{n-1}(t-X_1) 1_{(0,t]}(X_1)] \\
&= C_n + G(T) \int_\Omega 1_{\{X_1(\omega_1) \leq t\}}\, f_{n-1}(t - X_1(\omega_1))\, dP(\omega_1). \qquad \text{(B.4.2)}
\end{aligned}
$$

On utilise maintenant (B.4.2) pour $f_{n-1}(t - X_1(\omega_1))$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
& f_{n-1}(t - X_1(\omega_1)) \leq C_{n-1} + G(T) \\
& \qquad \int_\Omega 1_{\{X_2(\omega_2) \leq t - X_1(\omega_1)\}}\, f_{n-2}(t - X_1(\omega_1) - X_2(\omega_2))\, dP(\omega_2). \qquad \text{(B.4.3)}
\end{aligned}
$$

En utilisant les inégalités (B.4.2) et (B.4.3), on déduit que :

$$
\begin{aligned}
f_n(t) &\leq C_n + G(T) \int_\Omega 1_{\{X_1(\omega_1) \leq t\}} \Big[C_{n-1} + G(T) \\
&\quad \int_\Omega 1_{\{X_2(\omega_2) \leq t - X_1(\omega_1)\}}\, f_{n-2}(t - X_1(\omega_1) - X_2(\omega_2))\, dP(\omega_2) \Big] dP(\omega_1). \\
&= C_n + C_{n-1}\, G(T)\, P(X_1 \leq t) + G^2(T) \\
&\quad \int_\Omega \int_\Omega 1_{\{X_1(\omega_1) + X_2(\omega_2) \leq t\}}\, f_{n-2}(t - X_1(\omega_1) - X_2(\omega_2))\, dP(\omega_2) dP(\omega_1). \text{(B.4.4)}
\end{aligned}
$$

En utilisant (B.4.2) pour $f_{n-2}(t - X_1(\omega_1) - X_2(\omega_2))$, on a :

$$
\begin{aligned}
& f_{n-2}(t - X_1(\omega_1) - X_2(\omega_2)) \leq C_{n-2} + G(T) \\
& \quad \int_\Omega 1_{\{X_3(\omega_3) \leq t - X_1(\omega_1) - X_2(\omega_2)\}}\, f_{n-3}(t - X_1(\omega_1) - X_2(\omega_2) - X_3(\omega_3))\, dP(\omega_3).
\end{aligned}
\qquad \text{(B.4.5)}
$$

Maintenant, on insère (B.4.5) dans (B.4.4) pour obtenir :

$$
\begin{aligned}
f_n(t) &\leq C_n + C_{n-1}\, G(T)\, P(X_1 \leq t) + G^2(T) \int_\Omega \int_\Omega 1_{\{X_1(\omega_1) + X_2(\omega_2) \leq t\}} \Big[C_{n-2} + G(T) \\
&\quad \int_\Omega 1_{\{X_3(\omega_3) \leq t - X_1(\omega_1) - X_2(\omega_2)\}} f_{n-3}(t - X_1(\omega_1) - X_2(\omega_2) - X_3(\omega_3))\, dP(\omega_3) \Big] \\
&\quad dP(\omega_2) dP(\omega_1) \\
&= C_n + C_{n-1}\, G(T)\, P(X_1 \leq t) + C_{n-2}\, G^2(T)\, P(X_1 + X_2 \leq t) + G^3(T) \\
&\quad \int_\Omega \int_\Omega \int_\Omega 1_{\{X_1(\omega_1) + X_2(\omega_2) - X_3(\omega_3) \leq t\}} f_{n-3}(t - X_1(\omega_1) - X_2(\omega_2) - X_3(\omega_3)) \\
&\quad dP(\omega_3) dP(\omega_2) dP(\omega_1).
\end{aligned}
$$

En répétant cette procédure, on obtient à la dernière étape :

$$
f_n(t) \quad \leq \quad C_n + C_{n-1}\, G(T)\, P(S_1 \leq t) + \ldots + C_1\, G^{n-1}(T)\, P(S_{n-1} \leq t)
$$

$$+ \quad C_0\, G^n(T) E[1_{\{S_n \leq t\}} f_0(t - S_n)]$$

Du fait que $f_0(t - S_n) \leq M$ et en notant $a_k = G^k(T) P(S_k \leq t)$, il résulte que :

$$f_n(t) \quad \leq \quad C_n + C_{n-1}\, a_1 + \ldots + C_1\, a_{n-1} + C_0\, M\, a_n.$$

Cette dernière inégalité montre (B.4.1).

On suppose maintenant que $\sum\limits_{n \geq 0} C_n^{1/p} < \infty$ pour un certain $p \geq 1$ et on définit $a_0 = 1$. Soit $M_1 = \max(M, a_0)$. Alors $f_n(t) \leq M_1 \sum\limits_{j=1}^{n} C_j a_{n-j}$, donc $[f_n(t)]^{1/p} \leq M_1^{1/p} \sum\limits_{j=1}^{n} C_j^{1/p} a_{n-j}^{1/p}$. Ainsi, en prenant la borne supérieure pour $t \in [0, T]$, on déduit que : $\sup\limits_{t \in [0,T]} [f_n(t)]^{1/p} \leq M_1^{1/p} \sum\limits_{j=1}^{n} C_j^{1/p} a_{n-j}^{1/p}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sup_{t \in [0,T]} [f_k(t)]^{1/p} \quad &\leq \quad M_1^{1/p} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} C_j^{1/p} a_{k-j}^{1/p} \\
&= \quad M_1^{1/p} \sum_{j=0}^{n} C_j^{1/p} \sum_{k=j}^{n} a_{k-j}^{1/p} = M_1^{1/p} \sum_{j=0}^{n} C_j^{1/p} \sum_{l=0}^{n-j} a_l^{1/p} \\
&\leq \quad M_1^{1/p} \left(\sum_{j=0}^{n} C_j^{1/p} \right) \left(\sum_{l=0}^{n} a_l^{1/p} \right) \leq C,
\end{aligned}$$

car la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ vérifie l'hypothèse $\sum\limits_{n \geq 0} a_n^{1/p} < \infty$, pour tout $p > 0$ (ce qui a été montré dans la preuve du Lemme 15 de [9]).

□

Annexe C

Mesure martingale

Dans cette section, nous allons introduire la mesure martingale au sens de Walsh et donner ses propriétés. Nous suivons [32] et [19].

C.1 Définitions

Soient $\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ la classe des ensembles boréliens bornés de $\mathbb{R}^d$ et $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ la classe des ensembles boréliens de $\mathbb{R}^d$.

Définition C.1.1. Un processus *simple* sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ est une combinaison linéaire de processus élémentaire sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Un processus *élémentaire* sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ est de la forme $X(\omega, t) = Y(\omega)\, 1_{(a,b]}$, où $0 \leq a < b$, et Y est est une variable aléatoire bornée, $\mathcal{F}_a$-mesurable.

Définition C.1.2. Un processus $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est dit *prévisible* par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si l'application $(\omega; t) \mapsto X(\omega; t)$ est $\mathscr{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+}$-mesurable, où $\mathscr{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+}$ est la σ-algèbre engendrée par les processus simples sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$.

Définition C.1.3. Un processus sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ est dit *élémentaire* s'il est de la forme :

$$g(\omega; s, x) = 1_{(a,b]}(s)\ 1_A(x)\ X(\omega), \tag{C.1.1}$$

où $0 \leq a < b$, $A \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ et X est une variable aléatoire bornée, $\mathcal{F}_a$-mesurable. Un processus *simple* sur $\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ est une combinaison linéaire de processus élémentaire sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$.

Définition C.1.4. Soit $\mathscr{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d}$, la σ-algèbre engendrée par les processus simples sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$. Un processus $g = \{g(t, x)\}_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ est dit *prévisible* si l'application $(\omega; t, x) \mapsto g(\omega; t, x)$ est $\mathscr{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d}$-mesurable.

Remarque C.1.5. $\mathscr{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} \subset \mathscr{P}_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

Le résultat suivant est une extension aux champs aléatoires de la Proposition 3.21 de [23].

Proposition C.1.6. Soit $X = \{X(t,x);\, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\}$ un processus qui est continu en probabilité (c'est-à-dire $X(t_n,\, x_n) \xrightarrow{P} X(t,\, x)$ si $t_n \to t$ et $x_n \to x$) tel que $X(t,\, x)$ est $\mathcal{F}_t-$ mesurable pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Alors X a une modification prévisible.

Démonstration. On omet la preuve. □

Définition C.1.7. *([32], p 289)* Une collection $\{M_t(A), t \geq 0, A \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)\}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ est une *mesure martingale* par rapport à une filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ continue à droite (c'est-à-dire $\mathscr{F}_t = (\mathscr{F}_{t^+}) := \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$, pour chaque t) si :

i) $M_0(A) = 0$.

ii) Pour chaque $t \geq 0$, $\{M_t(A); A \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)\}$ est une mesure σ-finie dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire elle satisfait les propriétés suivantes :

   a) $M_t(A \cup B) = M_t(A) + M_t(B)$ presque sûrement pour tout $A, B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ avec $A \cap B = \emptyset$,

   b) il existe une suite $(E_k)_k \subset \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ avec $E_k \subset E_{k+1}, \forall k$ et $\bigcup_k E_k = \mathbb{R}^d$ telle que pour chaque $k \geq 1$ fixé :
   — $\sup_{A\in\mathscr{B}_k} \mathrm{E}|M_t(A)|^2 < \infty$, où $\mathscr{B}_k = \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d); A \subset E_k\}$,
   — si $(A_n)_n \subset \mathscr{B}_k$ avec $A_n \downarrow \emptyset$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}|M_t(A_n)|^2 = 0$.

iii) Pour chaque $A \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $\{M_t(A),\, \mathscr{F}_t,\, t \geq 0\}$ est une martingale.

C.2 Mesure martingale "worthy"

Nous allons maintenant, définir la notion de mesure martingale "worthy".

Définition C.2.1. *([32], p 289)* Soit $M = \{M_t(A), t \geq 0, A \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)\}$ une mesure martingale. La *covariance fonctionnelle* de M est définie par :

$$Q_t(A, B) = \langle M(A), M(B)\rangle_t.$$

où $\langle \cdot, \cdot\rangle$ désigne la variation quadratique prévisible. Dans le cas où il s'agit d'un ensemble de la forme $(s,t] \times A \times B \subset \mathbb{R}_+ \times \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d) \times \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$ (appelé rectangle), la covariance fonctionnelle est définie par :

$$Q((s,t] \times A \times B) = Q_t(A, B) - Q_s(A, B).$$

Cette dernière, par additivité s'étend aux ensembles de la forme $\cup_{i=1}^n (s_i, t_i] \times A \times B$.

Définition C.2.2. Une mesure signée $K(dt,\, dx,\, dy)$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ est *définie positive* si pour chaque fonction bornée pour la quelle l'intégrale a un sens, nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x,t)\, f(y,t) K(dt,\, dx,\, dy) \geq 0.$$

Définition C.2.3. Une mesure martingale M de covariance Q est dite *worthy* s'il existe une fonction $K : \Omega\times\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\times\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes :

a) pour chaque $\omega \in \Omega$, $K(\omega, \cdot)$ est une mesure définie positive telle que $K(\omega, [0,t] \times A \times B) = K(\omega, [0,t] \times B \times A)$, pour chaque $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$,

b) pour A et B fixé, $\{K((0,t] \times A \times B), t \geq 0\}$ est prévisible ;

c) pour tout n, $\mathrm{E}\{K((0,T] \times E_n \times E_n), t \geq 0\} < \infty$, où $(E_n)_n$ est la suite de la Définition C.1.7 ;

d) pour tout rectangle Γ, $|Q(\Gamma)| \leq K(\Gamma)$.

Dans ce cas K s'appelle la *mesure dominante* de M.

Si g est un processus élémentaire sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ donné par (C.1.1), on définit :

$$(g \cdot M)_t(B) := Y(M_{t\wedge b}(A \cap B) - M_{t\wedge a}(A \cap B)). \tag{C.2.1}$$

Cette définition s'étend par linéarité aux processus simples. On utilise la notation

$$(g \cdot M)_t(B) = \int_0^t \int_B g(s,x)\, M(ds,\, dx).$$

Remarque C.2.4. Si g_1 et g_2 sont des processus simples et $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_B (a\, g_1(s,x) + b\, g_2(s,x))\, M(ds,\, dx) \;&=\; a\int_0^t \int_B g_1(s,x)\, M(ds,\, dx)\\ &+\; b\int_0^t \int_B g_2(s,x)\, M(ds,\, dx).\end{aligned}$$

Proposition C.2.5. *(Proposition 5.18 de [19]) Si g est un processus simple sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, alors :*

$$\mathrm{E}|(g \cdot M)_t(B)|^2 \;=\; \mathrm{E}\left(\int_0^t \int_B \int_B g(s,x)\; g(s,y)\; Q_M(dx\; dy\; ds)\right), \tag{C.2.2}$$

où Q_M est la covariance fonctionnelle de M.

Proposition C.2.6. *(Proposition 5.23 de [19]) Si g est un processus simple sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, alors :*

a) $g \cdot M = \{(g \cdot M)_t(B), t \geq 0, B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)\}$ *est une mesure martingale worthy de covariance fonctionnelle*

$$Q_{g\cdot M}((0,t] \times B \times C) = \int_0^t \int_B \int_C g(s,x)\, g(s,y)\, Q_M(dx\, dy\, ds),$$

b) *la mesure dominante de* $g \cdot M$*, notée* K_M *est donnée par :*

$$K_{g\cdot M}(0,t] \times B \times C) \ = \ \int_0^t \int_B \int_C |g(s,x)\, g(s,y)|\, K_M(dx\, dy\, ds).$$

Soit maintenant $\mathscr{P}_M^*$ l'ensemble des processus prévisibles $g = \{g(t,x); t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\}$ tels que : pour chaque $T > 0$ et $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$:

$$||g||^2_{T,B} \ = \ \mathrm{E} \int_0^t \int_B \int_B |g(s,x)\, g(s,y)|\, K_M(dx\, dy\, ds) < \infty.$$

On définit pour $g \in \mathscr{P}_M^*$ la norme de g par :

$$||g||_M \ = \ \sum_{k\geq 1} \frac{1 \wedge ||g||_{k,E_k}}{2^k},$$

où $(E_k)_{k\geq 1}$ est une suite dans $\mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)\}$ avec $E_k \subset E_{k+1}$ pour chaque k et $\bigcup_{k\geq 1} E_k = \mathbb{R}^d$.
Le théorème d'approximation suivant joue un rôle important dans la construction de l'intégrale stochastique par rapport à M.

Théorème C.2.7. *(Proposition 5.25 de [19]) On suppose que pour chaque* ω *:*

$$K_M(\omega;\, dt,\, dx,\, dy) = \mu_M^1(\omega;\, dt) \cdot \mu_M^2(\omega;\, dx,\, dy),$$

où $\mu_M^1(\omega; dt)$ *est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors pour chaque processus* $g \in \mathscr{P}_M^*$*, il existe une suite* $(g_n)_{n\geq 0}$ *de processus simples telle que* $||g_n - g||_M \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow \infty$.

C.3 Intégrale stochastique

Soit $M = \{M_t(A); t \geq 0, A \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)\}$ une mesure martingale worthy. Dans cette section, nous allons construire une intégrale stochastique par rapport à M et donner ses propriétés. Nous suivons de nouveau [32] et [19]. On commence avec la construction de l'intégrale. Si $g \in \mathscr{P}_M^*$, alors par le Théorème C.2.7, il existe une suite $(g_n)_n$ de processus simples telle que $||g_n - g||_M \longrightarrow 0$ quand $n, m \longrightarrow \infty$. Nous en déduisons que $||g_n - g_m||_{T,B} \longrightarrow 0$ quand $n, m \longrightarrow \infty$ pour tout $T > 0$ et $B \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$.

En utilisant la linéarité de l'intégrale et l'équation (C.2.2) (voir Remarque C.2.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left|(g_n \cdot M)_t(B) - (g_m \cdot M)_t(B)\right|^2 &= \mathrm{E}\left|((g_n - g_m) \cdot M)_t(B)\right|^2 \\
= \;& \mathrm{E}\int_0^t \int_B \int_B (g_n - g_m)(s,x)\,(g_n - g_m)(s,y)\,Q_M(dx\,dy\,ds) \\
\leq \;& ||g_n - g_m||_{T,B} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n,m \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent la suite $\{(g_n \cdot M)_t(B)\}_n$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et on note par $\{(g \cdot M)_T(B)\}$ sa limite dans cet espace.

Soit $\mathscr{P}_M$ l'ensemble des processus $g \in \mathscr{P}_M^*$ qui satisfont la condition :

$$\mathrm{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |g(s,x)\,g(s,y)|\,K_M(dx\,dy\,ds) < \infty. \tag{C.3.1}$$

On étend la définition sur $\mathbb{R}^d$ par $(g \cdot M)_t(\mathbb{R}^d) = \lim_{k\to\infty}(g \cdot M)_t(\mathrm{E}_k)$ dans $L^2(\Omega)$. Pour cela on remarque que pour $k > l$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left|(g \cdot M)_t(E_k) - (g \cdot M)_t(E_l)\right|^2 &= \mathrm{E}\left|(g \cdot M)_t(E_k \backslash E_l)\right|^2 \\
\leq \;& ||g||_{T,E_k\backslash E_l} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } k,l \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Remarque C.3.1. Proposition C.2.5 et Proposition C.2.6 restent vraies pour $g \in \mathscr{P}_M^*$.

Théorème C.3.2. *Pour chaque $g \in \mathscr{P}_M$,*

a) le processus $\{(g \cdot M)_t(\mathbb{R}^d)\}_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathscr{F}_t)_t$,

b) pour chaque $t > 0$:

$$\mathrm{E}|(g \cdot M)_t(\mathbb{R}^d)|^2 \;=\; \mathrm{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(s,x)\,g(s,y)\,Q_M(dx\,dy\,ds)\right). \tag{C.3.2}$$

Démonstration. Notons qu'on a par définition $(g \cdot M)_t(\mathbb{R}^d) = \lim_{k\to\infty}(g \cdot M)_t(\mathrm{E}_k)$ dans $L^2(\Omega)$.

a) Puisque par construction $\{(g \cdot M)_t(\mathrm{E}_k)\}_{t\geq 0}$ est une martingale pour chaque $k \geq 1$, la limite dans $L^2(\Omega)$ d'une suite de martingales bornées est une martingale, on en déduit que $\{(g \cdot M)_t(\mathbb{R}^d)\}_{t\geq 0}$ est aussi une martingale.

b) Par application de la Proposition C.2.5 aux ensembles E_k, nous obtenons :

$$\mathrm{E}|(g \cdot M)_t(E_k)|^2 = \mathrm{E}\left(\int_0^t \int_{E_k} \int_{E_k} g(s,x)\,g(s,y)\,Q_M(dx\,dy\,ds)\right).$$

Le résultat découle en passant à la limite quand $k \to \infty$.

□

Bibliographie

[1] APPLEBAUM, D. (2009). Lévy processes and stochastic calculus, Second edition. *Cambridge University Press, Cambridge.*

[2] BALAN, R. M. (2015). Integration with respect to Lévy colored noise, with application to SPDEs : *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes* , 87, 363-381.

[3] BALAN, R. M. and NDONGO, C. B. (2015). Itô Formula for Integral Processes Related to Space-Time Lévy Noise. *Applied Mathematics* (Special Issue on Stochastic Processes), **6**, 1755-1768.

[4] BALAN, R. M. and NDONGO C. B. (2015). Intermittency for the wave equation with Lévy white noise. *Statistics and Probability Letters*, **109**, 214 - 223.

[5] BALAN, R. M. and NDONGO C. B. (2016). Malliavin differentiability of solutions to SDDEs with Lévy white noise. Prépublication disponible sur-arxiv :1605.02665. Soumis à *Annales mathématiques du Québec*, 19 pages.

[6] BILLINGSLEY, P. (1995). Probability and measure. Third edition. *Wiley and Sons, New York.*

[7] BURRILL, C. W. (1972). Measure, integration, and probability. *McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg.*

[8] DALANG, R. C., FRANGOS, N. E. (1998). The stochastic wave equation in two spatial dimensions. *The Annals of Probability,* **26**, 187–212.

[9] DALANG, R. C. (1999). Extending martingale measure stochastic integral with applications to spatially homogeneous s.p.d.e's. *Electronic Journal of Probability,* **4**, 1-29.

[10] DI NUNNO, G., ØKSENDAL, B. and PROSKE, F. (2009). Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance. *Springer, New York.*

[11] DZHAPARIDZE, K. and VALKEILA, E. (1990). On the Hellinger type distances for filtered experiments. *Probability Theory and Related Fields,* **85**, 105-117.

[12] EVANS, L. C. (1998). Partial differential equations. **Vol 19**, *Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.*

[13] Feller, W. (1971). An introduction to probability theory and its applications. **Vol 2**, Second edition *John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney.*

[14] Foodun, M. and Khoshnevisan, D. (2008). Intermittence and nonlinear parabolic stochastic partial differential equations. *Electronic Journal of Probability.* **Vol 21**, 548-568.

[15] Hall, D. and Heyde, C. C. (1980). Martingale limit theory and its application. *Academic Press, Inc, New York-London.*

[16] Hitczenko, P. (1990). Best constants in martingale version of Rosenthal's inequality. *The Annals of Probability*, **18**, 1656–1668.

[17] Holden, H., Øksendal, B., Ubøe, J. and Zhang, T. (1996). Stochastic partial differential equations. *Birkhäuser, Berlin.*

[18] Kabanov, Ju. M. (1975). Extended stochastic integrals. *Teor. Verojatnost. Primenen*, **20**, 725–737.

[19] Khoshnevisan, D. (2014). A primer on stochastic partial differential equations. *A minicourse on stochastic partial differential equations*, 1–38. Springer, Berlin.

[20] Khoshnevisan, D. (2014). Analysis of stochastic partial differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics **Vol 119**. *American Mathematical Society.*

[21] Luchko, Y. (2013). Fractional wave equation and damped waves. *Journal of Mathematical Physics*, **54**.

[22] Ouvrard, J. Y. (2004). Probabilités, **Vol 2**. *Cassini, Paris.*

[23] Peszat, S. and Zabczyk, J. (2007). Stochastic partial differential equations with Lévy noise. *Cambridge University Press, Cambridge.*

[24] Rajput, b. S. and Rosinski, J. (1989). Spectral representations of infinitely divisible processes. *Probability theory and related fields*, **82** , 451–487.

[25] Rao, M. M. (2004). Real and Stochastic Analysis. *Birkhäuser, Berlin.*

[26] Rao, M. M. and Swift, R. J. (2006). Probability Theory with Applications. *Mathematics and Its Applications*, **582** Springer-Verlag.

[27] Ren, Y. F. and Tian, F. J. (2003). On the Rosenthal's inequality for locally square integrable martingales. *Stochastic Processes and their Applications,* **104**, 107–116.

[28] Resnick, S. I. (2007). Heavy-tail phenomena. *Springer, New York.*

[29] Sanz-Solé, M. (2005). Malliavin Calculus with applications to stochastic partial differential equations. First edition. *EPFL Press.*

[30] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. S.(1994). Stable non-Gaussian random processes. *Chapmann and Hall, CRC.*

[31] Samorodnitsky, G. and Grigoriu, M.(2003). Tails of solutions of certain nonlinear stochastic differential equations driven by heavy tailed Lévy motions. *Stochastic Processes and their Applications,* **105**, 69 – 97.

[32] Walsh, J. B.(1986). An introduction to stochastic partial differential equations. *École d'été de probabilités de Saint-Flour*, 265–439. Springer, Berlin.