

LES SYSTÈMES TRIPLES DE JORDAN
SIMPLES EXCEPTIONNELS

par
Ziad Rached, B.Sc.
Mai 1996

Thèse présentée
à l'École des Études Supérieures
de l'Université d'Ottawa
pour l'obtention de la maîtrise ès sciences
en mathématiques*

©Copyright 1996
par Ziad Rached, Ottawa, Canada

* Le programme de maîtrise est un programme conjoint avec l'université Carleton, administré par l'institut Ottawa-Carleton en mathématiques et statistiques.



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services Branch

395 Wellington Street
Ottawa, Ontario
K1A 0N4

Bibliothèque nationale
du Canada

Direction des acquisitions et
des services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa (Ontario)
K1A 0N4

Your file *Votre référence*

Our file *Notre référence*

The author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

L'auteur a accordé une licence irrévocable et non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de sa thèse de quelque manière et sous quelque forme que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

The author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-612-20012-4

Canada



UNIVERSITÉ D'OTTAWA
UNIVERSITY OF OTTAWA

Remerciements

J'aimerais exprimer ma gratitude à Monsieur Michel Racine qui m'a inspiré et guidé tout le long de la préparation de cette thèse. Son effort et sa patience sont grandement appréciés.

Je remercie aussi Monsieur Erhard Neher pour ses précieux conseils.

Mes remerciements au Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada et au département de mathématique à l'université d'Ottawa pour leur soutien financier.

Enfin, merci à Monsieur Kevin McCrimmon d'avoir posé la question qui a inspiré ce travail.

Table des matières

0	Introduction	1
1	Préliminaires	3
1.1	Les algèbres à composition	3
1.2	Les algèbres de Jordan	6
1.3	Les systèmes triples de Jordan	8
1.4	Quelques familles de systèmes triples de Jordan	13
2	Les identités polynomiales	16
2.1	Quelques faits généraux	16
2.2	Argument de densité	17
2.3	Argument de différence de dimension	19
2.4	Systèmes spéciaux et systèmes exceptionnels	20
3	Séparation des systèmes de Cayley de ceux d'Albert à l'aide d'identités polynomiales	22
3.1	Les polynômes $f(x, y, u)$ et $g(w, x, y, z, u)$	22
3.2	Le polynôme $h(w, x, y, u)$	28
4	Séparation des systèmes de Cayley à l'aide d'identités polynomiales	30
4.1	Le polynôme $\kappa(x_1, x_2, x_3, y)$	30
4.2	Le polynôme $w(x, y)$	31
5	Séparation des systèmes d'Albert à l'aide d'identités polynomiales	33
5.1	Les systèmes triples de Lie associés aux systèmes d'Albert	33
5.2	Variations sur les polynômes de Capelli	35
	Conclusion	44
	Bibliographie	46

Introduction

Les identités et non-identités polynomiales jouent un rôle important dans la théorie de structure de Jordan.

Dans leur classification des algèbres de Jordan quadratiques premières non-dégénérées, McCrimmon et Zelmanov [13] ont tout d'abord distingué les algèbres de type d'Albert des algèbres i-spéciales à l'aide de l'identité G_8 de Glennie. Ensuite le polynôme de Zelmanov Z_{48} sépare les algèbres de type hermitien de ceux de type clifford. Pour ces dernières, Jacobson [21] avait remarqué que le polynôme de Wagner

$$[x, y]^2 = V_x U_y x - U_y x^2 - U_x y^2$$

est un polynôme central. Plus tôt, Zelmanov [27] avait donné une classification complète des systèmes triples de Jordan linéaires premiers non-dégénérés, encore une fois basée sur les identités et non-identités polynomiales.

D'Amour et McCrimmon [1,2,3,4] ont par la suite généralisé ces résultats aux systèmes triples quadratiques de Jordan. Loos et McCrimmon ont introduit une version de l'identité de Glennie, pour les systèmes triples ([11, p. 1075]). Ce polynôme, de degré 11, qu'on note G_{11} ,

$$\begin{aligned} & \{P_x z, w, P_{x,y} P_z P_y w\} - P_x P_z P_{x,y} P_w P_y z \\ & - \{P_y z, w, P_{y,x} P_z P_x w\} + P_y P_z P_{y,x} P_w P_x z \end{aligned}$$

sépare les systèmes triples de Jordan simples spéciaux de ceux qui sont exceptionnels.

McCrimmon a posé quelques questions en [14] concernant les systèmes triples de Jordan. Pour les systèmes triples de Jordan simples exceptionnels, il demande entre autre :

'Question # 1: Quelles identités séparent les systèmes d'Albert de ceux de Cayley. En plus, quelles identités séparent les différents types du système d'Albert et ceux de Cayley'?

Dans ce travail, il est montré d'une façon constructive que les systèmes triples de Jordan simples exceptionnels de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique non 2 sont déterminés à isomorphie près par leur idéal d'identités polynomiales . Des résultats similaires ont été obtenus dans [24] mais les démonstrations n'étaient pas constructives.

En général, les propositions de la forme “ f est une identité polynomiale pour un système triple \mathcal{A} ” sont valides sur les entiers relatifs et sur des corps de caractéristiques arbitraires, mais, les propositions négatives, “ f n'est pas une identité polynomiale pour \mathcal{A} ”, se démontrent sous la condition que la caractéristique est non 2. De plus, les identités polynomiales ne distinguent pas “d'habitude” entre des formes non-isomorphes d'un système triple donné. C'est certainement le cas pour les polynômes multilinéaires.

On suppose connus les résultats de classification des systèmes triples de Jordan simples exceptionnels de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique non 2 d'après la Table 1 [16, p. 60–61] due à Loos [9].

Les deux premiers chapitres rappellent quelques définitions et résultats concernant les systèmes triples de Jordan et les identités polynomiales. Les chapitres 3 et 4 contiennent quelques résultats de [20]. Dans le dernier chapitre, il est montré que les systèmes d'Albert peuvent être séparés à l'aide d'identités polynomiales.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Les algèbres à composition

Définition 1.1.1 Soit K un corps commutatif et V un espace vectoriel sur K . Une application $q : V \rightarrow K$ est une *forme quadratique* si les conditions suivantes sont satisfaites:

- (1) $q(\alpha v) = \alpha^2 q(v)$ pour tout $\alpha \in K$, $v \in V$
- (2) $q(v, w) := q(v + w) - q(v) - q(w)$ est une forme bilinéaire sur V .

Une forme quadratique q est *non-dégénérée* si $q(v) = 0$ et $q(v, w) = 0$ pour tout w dans V entraîne $v = 0$.

Définition 1.1.2 Soit Φ un anneau associatif commutatif unitaire. Une Φ -algèbre A est un Φ -module, muni d'une loi de composition, et, satisfaisant les conditions suivantes:

- (1) $(a + b)c = ac + bc$, $a(b + c) = ab + ac$ pour tout a, b, c dans A ;
- (2) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$ pour tout α dans Φ , a, b dans A .

Une algèbre A est dite *associative* si

- (3) $(ab)c = a(bc)$ pour tout a, b, c dans A .

Une algèbre A est dite *commutative* si

- (4) $ab = ba$ pour tout a, b dans A .

Une algèbre A est dite *alternative* si

- (5) $a^2 b = a(ab)$ pour tout a, b dans A , et
- (6) $ba^2 = (ba)a$ pour tout a, b dans A .

Définition 1.1.3 Une *involution* $a \rightarrow \bar{a}$ d'une algèbre A est un antiautomorphisme de période deux, c'est-à-dire,

- (7) $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$, $\overline{\bar{a}} = a$ pour tout $a, b \in A$.

Définition 1.1.4 Une *algèbre à composition* C sur un corps K est une algèbre unitaire ($1 \in C$) munie d'une forme quadratique non-dégénérée n , la *norme*, telle que

- (1) $n(ab) = n(a)n(b)$ pour tout $a, b \in C$,
- (2) $n(1) = 1$.

Par le processus de Cayley–Dickson [25, p. 45] on obtient toutes les algèbres à composition sur un corps K de caractéristique non 2 qui sont:

- (1) Le corps lui-même, $K1$, de dimension 1,
- (2) Les *algèbres quadratiques*, de dimension 2,
- (3) Les *algèbres de quaternions* \mathcal{Q} , de dimension 4,
- (4) Les *algèbres d’octonions* \mathcal{O} , de dimension 8.

Toutes ces algèbres sont alternatives.

Théorème 1.1.1 ([8, p. 169]) *Soit C une algèbre à composition sur un corps K de caractéristique non 2 et n la norme de C . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (a) $n(x) = 0$, pour au moins un $x \neq 0$ dans C ,
- (b) C a des diviseurs de 0. ($xy = 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$),
- (c) C n’est pas une algèbre de division,
- (d) C contient un idempotent $\neq 1$. □

Les algèbres à composition satisfaisant les conditions du théorème ci-dessus sont appelées *déployées*. En dimension 2 une telle algèbre est une somme directe de deux copies de K avec l’involution qui échange les deux composantes. En dimension 4 elle est isomorphe à $M_{2 \times 2}(K)$, l’algèbre des matrices 2×2 à coefficients dans K , munie de l’involution symplectique

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

En dimension 8, une telle algèbre est isomorphe à l’algèbre des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in K$, $a, b \in K^3$, dites octonions déployés, avec l’involution

$$\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \beta & -a \\ -b & \alpha \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.5 Soit u un élément inversible de A , une algèbre alternative unitaire. Le *u -isotope à droite* de A , $A^{(u)}$, est l’algèbre obtenue en prenant le produit $a^u b := a(ub)$ [12].

Remarque 1.1.1 L'isotope à droite $A^{(u)}$ est une algèbre alternative unitaire ($1^{(u)} = u^{-1}$); $A^{(u)}$ est isomorphe à A si A est associative ou une algèbre d'octonion [12].

Nous aurons aussi l'occasion d'employer les identités de Moufang.

Lemme 1.1.1 ([25, p. 28]) *Dans une algèbre alternative A*

$$(xax)y = x[a(xy)],$$

$$y(xax) = [(yx)a]x,$$

$$(xy)(ax) = x(ya)x.$$

pour tout $x, y, a \in A$. □

Théorème 1.1.2 (Artin) ([25, p. 29]) *Une algèbre est alternative si et seulement si toute sous-algèbre engendrée par deux éléments est associative.* □

D'une importance particulière sont les octonions déployés \mathcal{O} .

Définition 1.1.6 Un élément c d'une algèbre d'octonion \mathcal{O} est un *idempotent* si $c^2 = c \neq 0$.

Définition 1.1.7 Deux idempotents de \mathcal{O} , c_1 et c_2 , sont *orthogonaux* si $c_1c_2 = c_2c_1 = 0$.

Définition 1.1.8 Un idempotent c de \mathcal{O} est *primitif* s'il n'existe pas des idempotents orthogonaux c_1 et c_2 tel que $c = c_1 + c_2$.

Rappelons la décomposition de Peirce dans les octonions [15, p. 201].

Définition 1.1.9 Soit c un idempotent de \mathcal{O} . La *décomposition de Peirce* de \mathcal{O} par rapport à un idempotent c est

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{11} \oplus \mathcal{O}_{10} \oplus \mathcal{O}_{01} \oplus \mathcal{O}_{00}$$

où

$$\mathcal{O}_{ij} = \{x_{ij} \in \mathcal{O}, cx_{ij} = ix_{ij}, x_{ij}c = jx_{ij}; i, j \in \{0, 1\}\}.$$

La décomposition de Peirce d'un élément x en ses composantes de Peirce est

$$x = cxc + (cx - cxc) + (xc - cxc) + (x - cx - cx + cxc).$$

Lemme 1.1.2 ([25, p. 32]) *Voici quelques règles de multiplication dans la décomposition de Peirce*

$$\mathcal{O}_{ij}\mathcal{O}_{jk} \subset \mathcal{O}_{ik}, \quad i, j, k = 0, 1$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{ij}\mathcal{O}_{ij} &\subset \mathcal{O}_{ji}, & i \neq j \\ x_{ij}^2 &= 0. \end{aligned}$$

□

On choisit la base standard suivante pour les octonions déployés: $x_i, y_i, 0 \leq i \leq 3$, où $1 = x_0 + y_0$, x_0, y_0 , des idempotents primitifs; d'après la décomposition de Peirce, $x_0\mathcal{O}y_0 = \sum_{i=1}^3 Kx_i, y_0\mathcal{O}x_0 = \sum_{i=1}^3 Ky_i$; de plus $x_i x_{i+1} = y_{i+2}, y_i y_{i+1} = x_{i+2}, x_i y_i = -x_0, y_i x_i = -y_0, 1 \leq i \leq 3$, où les indices sont calculés modulo 3. Tous les autres produits sont 0 ou découlent des propriétés de la décomposition de Peirce. L'involution canonique est donnée par $\overline{x_0} = y_0, \overline{y_0} = x_0, \overline{x_i} = -x_i$ et $\overline{y_i} = -y_i, 1 \leq i \leq 3$. Une réflexion dans une sous-algèbre de quaternions, τ , joue un rôle important, et, elle est donnée par: $x_0^\tau = x_0, x_1^\tau = x_1, y_0^\tau = y_0, y_1^\tau = y_1, x_2^\tau = -x_2, x_3^\tau = -x_3, y_2^\tau = -y_2, y_3^\tau = -y_3$.

1.2 Les algèbres de Jordan

Définition 1.2.1 Une algèbre de Jordan linéaire J sur un corps K , de caractéristique non 2, est une algèbre sur K munie d'un produit $a.b$ satisfaisant

- (1) $a \cdot b = b \cdot a$
 - (2) $(a^2 \cdot b) \cdot a = a^2 \cdot (b \cdot a) \quad \forall a, b \in J$
- (où a^2 signifie en fait $a \cdot a$).

Exemple 1.2.1 Si A est une algèbre associative sur K , le produit $a.b := 1/2(ab+ba)$ induit une structure d'algèbre de Jordan sur A , que l'on note A^+ .

Définition 1.2.2 Une algèbre de Jordan J est dite spéciale si J est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre A^+ (où A est une algèbre associative). Autrement l'algèbre J est dite exceptionnelle.

Définition 1.2.3 La représentation quadratique U d'une algèbre de Jordan J est une application quadratique $U : \rightarrow \text{End}J$, $x \rightarrow U(x)$, définie par

$$U(x) := 2L(x)^2 - L(x^2), \quad x \in J.$$

où $L(x)$ est la multiplication à gauche par x ($L(x)y = x.y$).

Exemple 1.2.2 Si A est une algèbre associative, alors la représentation quadratique de A^+ est donnée par $U(x)y = xyx$.

Définition 1.2.4 Soient $U : \mathcal{J} \rightarrow \text{End } \mathcal{J}$ et $\cdot^2 : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$, $x \rightarrow x^2$, des applications quadratiques. On définit: $V(x)y = x \circ y := (x + y)^2 - x^2 - y^2$, $V(x, y)z = \{xyz\} := U(x, z)y$ où $U(x, z) := U(x + z) - U(x) - U(z)$ est bilinéaire en x et z . Un triplet $(\mathcal{J}, U, \cdot^2)$ où \mathcal{J} est un Φ -module unitaire est appelé une algèbre quadratique de Jordan, si

- (1) $V(x, x) = V(x^2)$
- (2) $U(x)V(x) = V(x)U(x)$
- (3) $U(x)x^2 = (x^2)^2$
- (4) $U(x)U(y)x^2 = (U(x)y)^2$
- (5) $U(x^2) = U(x)^2$
- (6) $U(U(x)y) = U(x)U(y)U(x)$

sont satisfaites dans \mathcal{J} et dans toutes ses extensions $\mathcal{J}_\Omega = \mathcal{J} \otimes_\Phi \Omega$ où Ω est une extension de Φ .

Définition 1.2.5 Un élément $e \in \mathcal{J}$ est appelé un élément unité de \mathcal{J} , si

$$U(e) = id \quad \text{et} \quad U(x)e = x^2 \quad \forall x \in \mathcal{J}.$$

Définition 1.2.6 Un élément $x \in \mathcal{J}$ est appelé inversible, s'il existe un élément $y \in \mathcal{J}$ tel que

$$U(x)y = x \quad \text{et} \quad U(x)y^2 = e.$$

L'élément y est appelé l'inverse de x .

Définition 1.2.7 Un élément $c \in \mathcal{J}$ est un idempotent si $c^2 = c$.

Définition 1.2.8 Soit $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini de variables; on définit le monoïde $M(X_n)$ comme étant l'ensemble de tous les mots finis (associatifs) en x_1, x_2, \dots, x_n , avec un élément unité 1, où la multiplication est la juxtaposition. Alors l'algèbre associative libre unitaire $K[X_n]$ est l'espace vectoriel sur K qui a pour base $M(X_n)$, muni de la multiplication induite:

$$\left(\sum_i a_i w_i\right)\left(\sum_j b_j w_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j w_i w_j.$$

Définition 1.2.9 Soit $K[X_n]$ l'algèbre associative libre sur K . Alors l'algèbre de Jordan spéciale libre, notée $FSJ[X_n]$ est la sous-algèbre de $K[X_n]^+$ engendrée par 1 et X_n .

1.3 Les systèmes triples de Jordan

Définition 1.3.1 Un Φ -module F muni d'une application trilinéaire $F \times F \times F \rightarrow F$ $(x, y, z) \mapsto \langle xyz \rangle$ est appelé un système triple.

Définition 1.3.2 Pour des sous-modules $U, V, W \subseteq F$, on note par $\langle UVW \rangle$ le sous-module de F engendré par les produits triples $\langle uvw \rangle, u \in U, v \in V, w \in W$. Un sous-module U est un sous-système si $\langle UUU \rangle \subseteq U$, un idéal, si $\langle UFF \rangle + \langle FUF \rangle + \langle FFU \rangle \subseteq U$.

Définition 1.3.3 Un système triple F est simple si $\langle FFF \rangle \neq \{0\}$ et F n'a pas d'idéaux autres que $\{0\}$ et F .

Définition 1.3.4 Soient \mathcal{A} un Φ -module unitaire et $P : \mathcal{A} \rightarrow \text{End } \mathcal{A}$ une application quadratique. L'application P induit une application bilinéaire

$L : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \text{End } \mathcal{A}, (x, y) \rightarrow L(x, y)$, donnée par $L(x, y)z = \langle xyz \rangle = P(x, z)y$ où $P(x, y) := P(x + y) - P(x) - P(y)$ est bilinéaire en x et y . La paire (\mathcal{A}, P) est appelée un système triple de Jordan, si

- (a) $L(x, y)P(x) = P(x)L(y, x)$
- (b) $L(P(x)y, y) = L(x, P(y)x)$
- (c) $P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x)$

sont valides dans \mathcal{A} et dans toutes ses extensions $\mathcal{A}_\Omega = \mathcal{A} \otimes_\Phi \Omega$ où Ω est une extension de Φ . Si on linéarise (b) en y on obtient

$$(b') \quad L(P(x)u, y) + L(P(x)y, u) = L(x, P(u, y)x).$$

Remarque 1.3.1 Toute algèbre de Jordan peut être considérée comme un système triple de Jordan, le produit triple étant défini par $\{xyz\} = 2(x(yz) - y(xz) + (xy)z)$, mais non réciproquement. Par exemple, $M_{p \times q}(K)$, le système triple de Jordan des matrices $p \times q$ sur K muni du produit triple $P(x)y = xy^t x$, où, y^t est la transposée de y , n'est pas associé à une algèbre de Jordan si $p \neq q$

Définition 1.3.5 Un système triple de Jordan est appelé *spécial* s'il est isomorphe à un sous-système triple de A^+ . Autrement il est dit *exceptionnel*.

Définition 1.3.6 Soit $K[X_n]$ l'algèbre associative libre sur K . Alors le système triple de Jordan spécial libre, noté $FSTJ[X_n]$ est le sous-système de $K[X_n]^+$ engendrée par X_n .

Définition 1.3.7 Soient \mathcal{A} un système triple de Jordan de dimension finie sur un corps algébriquement clos K de caractéristique non 2, et, $k \subset K$ un sous-corps de K . Un k -sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}$ est appelé une k -structure sur \mathcal{A} si

- (i) L'application $\mathcal{A}_k \otimes_k K \rightarrow \mathcal{A}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et,
- (ii) $\{\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_k\} \subset \mathcal{A}_k$.

Théorème 1.3.1 ([15, p. 94]) Soit (\mathcal{A}, P) un système triple de Jordan et $u \in \mathcal{A}$. Définissons $P_u(x) := P(x)P(u)$, et, $x^{(2,u)} := P(x)u$ Alors $(\mathcal{A}, P_u, (2,u))$ est une algèbre de Jordan quadratique. \square

On note $\mathcal{A}^{(u)} = (\mathcal{A}, P_u, (2,u))$, et on l'appelle le u -homotope de \mathcal{A} .

Définition 1.3.8 ([9, p. 24]) Soit $R = K[\mathcal{A} \times \mathcal{A}]$, où, $K[\mathcal{A}]$ note l'anneau des fonctions polynomiales sur \mathcal{A} , et, $M = K(\mathcal{A} \times \mathcal{A})$, le corps quotient de R . Si $f(t) = \sum f_i t^i \in M[t]$ et $f_i(x, y)$ est définie pour chaque i , alors on écrit: $f_{x,y}(t) = \sum f_i(x, y) t^i \in M[t]$. Considérons l'ensemble T de tous les $f(t) \in M[t]$ sans terme constant et tel que $\sum f_i(x, y) x^{(i,y)} = 0 \forall (x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ où $x^{(i,y)}$ dénote la i ème-puissance de x dans $\mathcal{A}^{(y)}$. Alors, $T \neq \{0\}$ puisque $p_{x,y}(t) = t \det(\text{id} - 1/2L(x, y))$

définit un élément $p(t)$ de T , si l'on suppose $1/2 \in K$. Notons que $p(t) \in R[t]$. T est un idéal de $M[t]$, donc principal, et engendré par un unique polynôme monique

$$m(t) = \sum_{i=0}^r (-1)^i m_i t^{r+1-i}$$

où $m_i \in M$ et $m_0 = 1$. On appelle $m(t)$ le *polynôme minimal générique* de \mathcal{A} et son degré, le *degré générique* de \mathcal{A} .

Définition 1.3.9 Un élément $c \in \mathcal{A}$ est appelé un *tripotent*, si $c = P(c)c$; ou, d'une façon équivalente, si c est un idempotent dans l'algèbre de Jordan $\mathcal{A}^{(c)}$.

Définition 1.3.10 Soient \mathcal{A} un Φ -module unitaire et $P : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}\mathcal{A}$ une application quadratique. L'application P induit une application bilinéaire

$$L : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \text{End}\mathcal{A}, \quad (x, y) \rightarrow L(x, y),$$

donnée par

$$L(x, y)z = \{xyz\} = P(x, z)y$$

où $(P(x, y) := P(x + y) - P(x) - P(y))$ est bilinéaire en x et y . Si on pose, $E_1 = P(c)P(c)$; $E_0 = Id - L(c, c) + P(c)P(c)$; $E_{1/2} = L(c, c) - 2P(c)P(c)$, et $\mathcal{A}_i(c) = E_i\mathcal{A}$, $i = 0, 1/2, 1$, alors

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_{1/2} \oplus \mathcal{A}_1$$

qui est la *décomposition de Peirce* de \mathcal{A} par rapport à c .

Exemple 1.3.2 Soit K un corps et $\mathcal{A} = M_{m \times n}(K)$, ($m \leq n$) le système triple de Jordan des matrices $m \times n$ sur K (le produit étant $P(x)y = xy^t x$, où y^t dénote la transposée de y). La matrice $c_k = \begin{pmatrix} e_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où e_k est la matrice unité $k \times k$, est un tripotent dans $M_{m \times n}(K)$. Il est facile de vérifier que

- (1) $\mathcal{A}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in M_{k \times k}(K) \right\}$,
- (2) $\mathcal{A}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, b \in M_{(m-k) \times (n-k)}(K) \right\}$, et

$$(3) \mathcal{A}_{1/2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix}; u \in M_{k \times (n-k)}(K), v \in M_{(m-k) \times k}(K) \right\}.$$

Il est évident que, dans un certain sens, c_m est maximal et que la décomposition de Peirce par rapport à c_m est: $\mathcal{A}_1 \cong M_{m \times m}(K)$, $\mathcal{A}_{1/2} \cong M_{m \times (n-m)}(K)$ et $\mathcal{A}_0 = \{0\}$.

Voici quelques règles importantes dans la décomposition de Peirce [15].

Théorème 1.3.2 ([15, p. 165])

- a) $P(\mathcal{A}_i)\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_i$, $i = 0, 1, 1/2$.
- b) $P(\mathcal{A}_{1/2})\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_{1-i}$, $i = 0, 1$.
- c) $\{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_{1/2}\mathcal{A}_0\} \subset \mathcal{A}_{1/2}$.
- d) $\{\mathcal{A}_i\mathcal{A}_i\mathcal{A}_{1/2}\} \subset \mathcal{A}_{1/2}$, $i = 0, 1$.
- e) $\{\mathcal{A}_{1/2}\mathcal{A}_{1/2}\mathcal{A}_i\} \subset \mathcal{A}_i$, $i = 0, 1$.
- f) $P(c)\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$. □

La décomposition de Peirce par rapport à un tripotent maximal est particulièrement importante.

Définition 1.3.11 Un tripotent $c \in \mathcal{A}$ est appelé *maximal*, si $\mathcal{A}_0(c) = \{0\}$. Dans ce cas

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1(c) \oplus \mathcal{A}_{1/2}(c).$$

Remarque 1.3.2 Les composantes de Peirce, \mathcal{A}_i , sont des systèmes triples de Jordan (comme sous-systèmes de \mathcal{A}). (\mathcal{A}_1, P_c, c) peut être considéré comme une algèbre de Jordan.

Définition 1.3.12 Soient $c, d \in \mathcal{A}$ des tripotents. Le tripotent c est *orthogonal* à d ($c \perp d$) si $d \in \mathcal{A}_0(c)$.

Définition 1.3.13 Des tripotents c_1, \dots, c_r sont appelés *orthogonaux*, si $c_i \perp c_j$ ($i \neq j$).

Remarque 1.3.3 Si c, d, e sont des tripotents orthogonaux alors c est orthogonal à $d \pm e$, ce qui implique que pour des tripotents orthogonaux c_1, c_2, \dots, c_r , la somme $c = \sum c_i$ (et, en général, $\sum \epsilon_i c_i$, $\epsilon_i = \pm 1$) est un tripotent de \mathcal{A} .

Définition 1.3.14 Un tripotent est appelé *primitif*, s'il n'a pas une décomposition nontriviale en somme de tripotents orthogonaux.

Théorème 1.3.3 ([15, p. 179]) Soient \mathcal{A} un système triple de Jordan, et, c_1, \dots, c_r un ensemble de tripotents orthogonaux dans \mathcal{A} . Posons $c := \sum c_i$. On définit:

$$E_{ii} := P(c_i)P(c), \quad E_{ji} = E_{ij} := P(c_i, c_j)P(c), \quad (i \neq j; i, j \neq 0)$$

$$E_{00} := id - L(c, c) + P(c)P(c)$$

$$E_{i0} = E_{0i} := L(c_i, c) - P(c_i, c)P(c), \quad (i \neq 0)$$

Alors

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{0 \leq i \leq j \leq r} \mathcal{A}_{ij}, \quad \text{où } \mathcal{A}_{ij} = E_{ij}\mathcal{A}.$$

Ce qui implique

$$\mathcal{A}_1(c) = \bigoplus_{1 \leq i, j \leq r} \mathcal{A}_{ij}, \quad \mathcal{A}_0(c) = \mathcal{A}_{00}, \quad \mathcal{A}_{1/2}(c) = \bigoplus_{1 \leq i} \mathcal{A}_{i0}.$$

□

Lemme 1.3.1 ([15, p. 179])

- a) $\mathcal{A}_1(c_i) = \mathcal{A}_{ii}$.
- b) $\mathcal{A}_0(c_i) = \bigoplus_{k, j \neq i} \mathcal{A}_{kj}$.
- c) $\mathcal{A}_{1/2}(c_i) = \bigoplus_{k \neq i} \mathcal{A}_{ik}$.
- d) $\mathcal{A}_{0i} = \mathcal{A}_{1/2}(c) \cap \mathcal{A}_{1/2}(c_i)$.
- e) $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{1/2}(c_i) \cap \mathcal{A}_{1/2}(c_j)$, $i \neq j$, $i, j \neq 0$.

et les règles suivantes sont valides (i, j, k, l distincts)

- 1) $P(\mathcal{A}_{ii})\mathcal{A}_{ii} \subset \mathcal{A}_{ii}$.
- 2) $\{\mathcal{A}_{ii}\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{jk}\} \subset \mathcal{A}_{ik}$.
- 3) $\{\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{jk}\mathcal{A}_{kl}\} \subset \mathcal{A}_{il}$.

□

1.4 Quelques familles de systèmes triples de Jordan

Soit Φ un anneau associatif commutatif unitaire, \mathcal{D} une algèbre à composition associative sur Φ munie de l'involution standard $\bar{\cdot}$. Notons $H_n(\mathcal{D}) = \{a \in \mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \mid a^* = a\}$, où $*$ = $\bar{\cdot}^t$, la conjuguée transposée. Notons aussi $H_n(\mathcal{D})$ la structure de système triple de Jordan donné par $P_x y := xyx$.

Si $Q : V \rightarrow K$ est une forme quadratique sur le K -espace vectoriel V notons par $\mathcal{J}(Q, 1)$ l'algèbre de Jordan de la forme quadratique Q , $K1 + V$ avec produit $(\alpha 1 + u) \cdot (\beta 1 + v) = Q(u, v)1 + \alpha v + \beta u$.

Les bisystèmes de Cayley: Soit A une algèbre alternative sur Φ avec involution $\bar{\cdot}$, $\mathcal{M}_{1, 2}(A)$ a une structure de système triple donné par $P_x y := x(\bar{y}^t x)$. En particulier on a; $\mathcal{M}_{1, 2}(\mathcal{O})$, \mathcal{O} une algèbre d'octonions, $\bar{\cdot}$ l'involution standard, $\mathcal{M}_{1, 2}(\mathcal{O}, \tau)$, τ une réflexion dans une algèbre de quaternions, $\bar{\cdot}$ est τ composée avec l'involution standard, et, $\mathcal{M}_{1, 2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{op})$, \mathcal{O}^{op} l'algèbre opposée, avec $\bar{\cdot}$ l'involution échange.

L'algèbre d'Albert: On note l'algèbre d'Albert

$$H_3(\mathcal{O}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha 1 & a & \bar{b} \\ \bar{a} & \beta 1 & d \\ b & \bar{d} & \gamma 1 \end{pmatrix} \right\},$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in K$, et, $1, a, b, d \in \mathcal{O}$, une algèbre d'octonion sur un corps K de caractéristique non 2. Pour deux éléments x et y dans $H_3(\mathcal{O})$, on définit leur produit comme étant: $x \cdot y = 1/2(xy + yx)$. Cette algèbre de Jordan est simple et exceptionnelle.

Soient, $e_k = 1[kk]$, $1 \leq k \leq 3$ les idempotents le long de la diagonale dans $H_3(\mathcal{O})$. La base standard pour $H_3(\mathcal{O})$, que nous emploierons plus tard, est la base dont les éléments sont: $x_i[12], y_i[12], x_i[13], y_i[13], x_i[23], y_i[23]$, où $0 \leq i \leq 3$, et, e_i , où $1 \leq i \leq 3$. Un élément arbitraire $m[ij]$ de $H_3(\mathcal{O})$, $i \neq j$, a tous ses coefficients nuls sauf le coefficient ij (i -ème ligne et j -ème colonne) qui est m et le coefficient ji qui est \bar{m} . Rappelons que x_i, y_j où $0 \leq i, j \leq 3$ est la base standard pour \mathcal{O} . Voir page 6.

Le produit triple dans $H_3(\mathcal{O})$ considéré comme un système triple de Jordan est

$$\{xyz\} = x \cdot (y \cdot z) + z \cdot (y \cdot x) - y \cdot (x \cdot z).$$

Voici quelques règles importantes de calcul [7, 5.12] dans $H_3(\mathcal{O})$

- (1) $U_{\alpha[ii]}\beta[ii] = \alpha(\beta\alpha)[ii]$
- (2) $U_{a[ij]}\alpha[ii] = \bar{a}(\alpha a)[jj]$
- (3) $U_{a[ij]}b[ij] = a(\bar{b}a)[ij]$
- (4) $\{\alpha[ii] a[ij] b[ji]\} = ((\alpha a)b + \overline{(\alpha a)b})[ii]$
- (5) $\{\alpha[ii] \beta[ii] a[ij]\} = \alpha(\beta a)[ij]$
- (6) $\{\alpha[ii] a[ij] \beta[jj]\} = (\alpha a)\beta[ij]$
- (7) $\{\alpha[ii] a[ij] b[jk]\} = (\alpha a)b[ik]$
- (8) $\{a[ij] \alpha[jj] b[jk]\} = (a\alpha)b[ik]$
- (9) $\{a[ij] b[ji] d[ik]\} = a(bd)[ik]$
- (10) $\{a[ij] b[jk] d[ki]\} = ((ab)d + \overline{(ab)d})[ii]$

Les systèmes d'Albert: Finalement notons $H_3(\mathcal{O})$ la structure de système triple sur l'algèbre d'Albert $H_3(\mathcal{O})$ avec $P_{xy} = U_{xy}$, $H_3(\mathcal{O}, \tau)$ la structure de système triple ayant le même module et $P_{xy} := U_{x\bar{y}}$, où $\bar{}$ est induite par la réflexion τ dans une algèbre de quaternions, et, $H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})$ le système triple avec $P_{xy} = U_{x\bar{y}}$, où $\bar{}$ est l'involution échange.

Les résultats de la classification de Loos des systèmes triples de Jordan simples sur un corps algébriquement clos de caractéristique non 2 sont donnés dans la table 1 [17, p. 60–61]. Comme nous nous intéressons qu'aux systèmes exceptionnels dans ce travail, la table suivante énumère les six systèmes triples de Jordan simples exceptionnels de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique non 2. On inclut pour référence future $\mathcal{A}_1(c)$ la composante-1 de Peirce du système triple \mathcal{A} , pour c un tripotent maximal de \mathcal{A} (voir la section 2 du chapitre 2).

TABLE 1.

\mathcal{A}	$\mathcal{A}_1(c)$
$\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O})$	$[K, 8, 8]$
$\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau)$	$[K, 8, 4]$
$\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{op})$	$[K \oplus K, 8]$
$H_3(\mathcal{O})$	$H_3(\mathcal{O})$
$H_3(\mathcal{O}, \tau)$	$H_3(\mathcal{O}, \tau)$
$H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})$	$H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})$

Les systèmes $[K, 8, 8]$, $[K, 8, 4]$, et, $[K \oplus K, 8]$ sont introduits dans la première section du chapitre 3. Notre but est de construire explicitement des polynômes qui séparent ces systèmes exceptionnels.

Chapitre 2

Les identités polynomiales

Après quelques rappels, nous développons deux types d'arguments, l'un à base de la densité de Zariski, l'autre distinguant les dimensions, que nous appliquerons par la suite.

2.1 Quelques faits généraux

Définition 2.1.1 Soient \mathcal{J} une algèbre de Jordan et $FSJ[X_n]$ l'algèbre de Jordan spéciale libre. S'il existe un polynôme non-nul $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in FSJ[X_n]$ tel que $f(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0$ pour toute substitution $r_i, 1 \leq i \leq n, \in \mathcal{J}$, alors $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une *identité polynomiale* de \mathcal{J} .

Exemple 2.1.1 Toute algèbre commutative vérifie $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$.

Définition 2.1.2 Un polynôme $f(\dots, x_i, \dots) \in FSJ[X_n]$ est *linéaire* en x_i si

$$\begin{aligned} f(\dots, x_i + y_i, \dots) &= f(\dots, x_i, \dots) + f(\dots, y_i, \dots), \\ f(\dots, \alpha x_i, \dots) &= \alpha f(\dots, x_i, \dots). \end{aligned}$$

Un polynôme $f \in FSJ[X_n]$ est *multilinéaire* s'il est linéaire en toutes ses variables.

Définition 2.1.3 Le *polynôme standard* de degré n est défini par:

$$S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{\sigma \in \text{Sym}_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$$

où $(-1)^\sigma$ est le signe de la permutation σ . S_n est un polynôme multilinéaire alterné de degré n .

Exemple 2.1.2 (Amitsur-Levitzki) Les $n \times n$ matrices vérifient le polynôme standard de degré $2n$.

Définition 2.1.4 Soit A une algèbre sur K . Un *polynôme central* f pour A est un polynôme $\in K[X_n]$ tel que pour tout $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ on a

$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in Z(A)$, le centre de A . Aussi on exige que f soit non-trivial, c'est-à-dire f prend au moins deux valeurs différentes dans $Z(A)$.

Proposition 2.1.1 Soit $E = \mathcal{M}_{2 \times 2}(A)$, où A est une K -algèbre commutative unitale. Alors $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]^2$ est un polynôme central pour E .

Démonstration Soit $a \in E$ et supposons $\text{trace } a = 0$. Alors a satisfait son polynôme caractéristique

$$t^2 - (\text{trace } a)t + \det a = 0$$

et donc $a^2 = -(\det a).I \in Z(E)$. Soient $a_1, a_2 \in E$, $a = [a_1, a_2]$ a une trace nulle. Donc f applique E sur son centre. f est non-trivial car il prend la valeur 0 et pour les matrices unités usuelles $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ on a:

$$f(e_{11}, e_{12} - e_{21}) = [e_{11}, e_{12} - e_{21}]^2 = (e_{12} - e_{21})^2 = 1.$$

□

Définition 2.1.5 Supposons que \mathcal{A} est un système triple de Jordan et soit $FSJT[X_n]$ le système triple de Jordan spécial libre. S'il existe un polynôme non-nul $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in FSJT[X_n]$ tel que $f(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0$ pour toute substitution $r_i, 1 \leq i \leq n, \in \mathcal{A}$, alors $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une *identité polynomiale* de \mathcal{A} .

2.2 Argument de densité

Définition 2.2.1 Soient K un corps infini de caractéristique quelconque et $V = K^n$ l'espace vectoriel de dimension n sur K . Soit $K[T] = K[T_1, \dots, T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables. Si I est un idéal dans $K[T]$, soit $F[I] = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in V \mid f(x) = 0 \ \forall f \in I\}$. On introduit une topologie sur V en prenant comme ensembles fermés les ensembles $F[I]$. Cette topologie sur V s'appelle la *topologie de Zariski*.

Remarque 2.2.1 Tout ensemble non-vide ouvert par rapport à la topologie de Zariski est dense.

Lemme 2.2.1 Si f est une fonction polynomiale qui s'annule sur un ensemble S , dense dans V par rapport à la topologie de Zariski, alors elle s'annule sur V .

Démonstration Puisque $\{0\}$, étant fini, est un ensemble fermé, $f^{-1}(0)$ est aussi fermé car f est continue. L'ensemble $f^{-1}(0)$ contient S , et donc la fermeture de S c'est-à-dire, V , d'où $f^{-1}(0) = V$. Donc f s'annule sur V . \square

Remarque 2.2.2 Si on veut démontrer qu'une fonction polynomiale s'annule sur V , il suffit de montrer qu'elle s'annule sur un ensemble dense de V par rapport à la topologie de Zariski.

Rappelons quelques définitions et résultats de [16].

Définition 2.2.2 Un élément x d'un système triple de Jordan de dimension finie \mathcal{A} sur un corps K est *triagonal* s'il peut s'écrire sous la forme $x = \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_r c_r$ où c_1, \dots, c_r sont des tripotents orthogonaux. On peut supposer que les α 's sont non-nuls. Dans ce cas, le degré de cet élément triagonal x est $r = \dim K\{x\}$, où $K\{x\}$ est le système triple de Jordan engendré par x sur K ; x est de *degré maximal* si son degré est égal au degré générique de \mathcal{A} .

Théorème 2.2.1 ([16, 1.4]) *Soit \mathcal{A} un système triple de Jordan semisimple, de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque. L'ensemble X des éléments triagonaux de degré maximal est non-vide et ouvert par rapport à la topologie de Zariski. Donc X est dense dans \mathcal{A} .* \square

D'après [16, 1.2], x est triagonal de degré maximal si

$$x = \sum_{i=1}^r \alpha_i c_i,$$

où

- 1) $\alpha_i \neq 0 \quad \forall i$ et $\alpha_i \neq \pm \alpha_j, \quad i \neq j$, et,
- 2) (c_1, \dots, c_r) est un système orthogonal de longueur maximale.

Alors, $c = c_1 + \dots + c_r$ est un tripotent maximal, donc la composante-0 de Peirce de \mathcal{A} est $\{0\}$, $\mathcal{A}_0(c) = \{0\}$.

Lemme 2.2.2 *Si $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i c_i \in X$ alors $P_x \mathcal{A} = P_c \mathcal{A}$, où $c = c_1 + \dots + c_r$ est un tripotent maximal.*

Démonstration Tous les $c_i \in \mathcal{A}_1(c)$, donc $P_x \mathcal{A} \subseteq P_c \mathcal{A} = \mathcal{A}_1(c)$ par les règles de

multiplication de Peirce. Mais x est inversible dans $\mathcal{A}_1(c)$, donc $P_x\mathcal{A} \supseteq P_x\mathcal{A}_1(c) = \mathcal{A}_1(c)$. Donc $P_x\mathcal{A} = P_c\mathcal{A}$. \square

La proposition suivante nous permet de passer des identités de $\mathcal{A}_1(c)$ à celles de \mathcal{A} .

Proposition 2.2.1 *Si $q(x_1, \dots, x_n)$ est un polynôme qui s'annule sur $\mathcal{A}_1(c)$, alors*

$$q^P(x_1, \dots, x_n; v) := q(P_v x_1, \dots, P_v x_n),$$

où v est distinct des x_i , $1 \leq i \leq n$, s'annule sur \mathcal{A} . On suppose que la caractéristique de K est non 2.

Démonstration D'après le théorème précédent, pour montrer que $q^P(x_1, \dots, x_n; v)$ est une identité pour un système triple \mathcal{A} il suffit de montrer qu'il s'annule pour toutes les substitutions où v est triangonal et x_1, x_2, \dots, x_n sont des éléments arbitraires de \mathcal{A} . Par le Lemme précédent et puisque n'importe quels tripotents maximaux sont conjugués par rapport au groupe d'automorphisme de \mathcal{A} [17, 2.15], c'est équivalent à montrer que $q(x_1, \dots, x_n)$ s'annule sur $\mathcal{A}_1(c) = P_c\mathcal{A}$, pour c un tripotent maximal. \square

2.3 Argument de différence de dimension

Proposition 2.3.1 *Soit \mathcal{A} un système triple de dimension $n - 1$. Alors tout polynôme qui est multilinéaire et alterné en n de ses variables est une identité pour \mathcal{A} . On suppose que la caractéristique de K est non 2.*

Démonstration Supposons que $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ est un polynôme multilinéaire alterné en $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$. Pour montrer que f est une identité pour \mathcal{A} , il suffit de montrer que f s'annule pour toutes les substitutions où les x_i proviennent d'une base fixe (mais quelconque). Fixons $B = \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$ une base quelconque de \mathcal{A} . Pour toutes les substitutions des x_i par des éléments de cette base on aura toujours $x_i = b_k = x_j$, $i \neq j$ pour au moins un $b_k \in B$. Remarquons que:

$$f(\dots, b_i, \dots, b_i, \dots, y_1, \dots, y_m) = 0.$$

En effet:

$$f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots, y_1, \dots, y_m) = -f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots, y_1, \dots, y_m), \quad (i \neq j).$$

car ils diffèrent par une transposition. Donc chaque monôme dans f apparaît deux fois, une fois avec un signe $-$ et une autre avec un signe $+$. Ce qui donne un résultat final nul. On déduit que le polynôme f est une identité pour \mathcal{A} . \square

Exemple 2.3.1 Le polynôme standard

$$S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \text{Sym}_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$$

et, le polynôme intérieur de Capelli

$$\begin{aligned} IC_{2n+1}(x_0, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) \\ := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \{ \{ \dots \{ x_0, y_{\sigma(1)}, x_1 \}, y_{\sigma(2)}, x_2 \}, \dots \} y_{\sigma(n)}, x_n \end{aligned}$$

sont des polynômes multilinéaires alternés.

Remarque 2.3.1 Le polynôme IC_{2n+1} va être utilisé au dernier chapitre pour séparer les systèmes d'Albert.

2.4 Systèmes spéciaux et systèmes exceptionnels

Dans ce travail nous ne nous intéressons qu'aux systèmes triples de Jordan simples exceptionnels. Loos et McCrimmon [11] ont obtenu un polynôme de Glennie,

$$\begin{aligned} G_{11}(x, y, z, w) := \{P_x z, w, P_{x,y} P_z P_y w\} - P_x P_z P_{x,y} P_w P_y z \\ - \{P_y z, w, P_{y,x} P_z P_x w\} + P_y P_z P_{y,x} P_w P_x z. \end{aligned}$$

Ce polynôme est une identité pour tout système de Jordan spécial mais n'est pas une identité pour les systèmes de Jordan simples exceptionnels de dimension finie sur un corps de caractéristique non 2. Si le corps de base est algébriquement clos il y a six systèmes de Jordan simples exceptionnels de dimension finie non isomorphes, les systèmes de Cayley:

$$\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}), \quad \mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau), \quad \mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{op})$$

et les systèmes d'Albert:

$$H_3(\mathcal{O}), \quad H_3(\mathcal{O}, \tau), \quad H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O}),$$

où \mathcal{O} est une algèbre d'octonion déployée. Dans les chapitres suivants nous montrerons comment à l'aide d'identités et de non identités polynomiales nous pouvons distinguer entre ces systèmes.

Chapitre 3

Séparation des systèmes de Cayley de ceux d'Albert à l'aide d'identités polynomiales

Nous montrons comment à l'aide d'identités et de non-identités polynomiales on peut séparer les systèmes de Cayley qui sont de degré 2 de ceux d'Albert qui sont de degré 3.

3.1 Les polynômes $f(x, y, u)$ et $g(w, x, y, z, u)$

Dans le cas d'algèbre de Jordan, pour transformer le polynôme de Wagner

$$[x, y]^2 = V_x U_y x - U_y x^2 - U_x y^2 \quad (1)$$

en une identité d'algèbre de type Clifford [13,21], on passe au polynôme

$$\{z, [x, y]^2, w\} - \{[x, y]^2, z, w\} \quad (2)$$

qui est une identité pour les algèbres de Jordan $\mathcal{J}(Q, 1)$. Rappelons que pour $x, y \in J$, l'application $D_{x,y} : J \rightarrow J$ définie par

$$D_{x,y}z := \{x, y, z\} - \{y, x, z\}$$

est une dérivation intérieure de J . Donc (2) peut être exprimée comme

$$D_z, [x, y]^2 w. \quad (2')$$

Puisque (2) est de degré 6, ce polynôme ne peut pas être un élément du système triple de Jordan libre car tous ses éléments sont de degré impair. Pour remédier à la situation, considérons (1) dans chaque u -homotope.

$$f(x, y, u) := \{P_x P_u y, u, y\} - P_x P_u P_y u - P_y P_u P_x u. \quad (3)$$

Les deux derniers termes sont symétriques par rapport à x et y , et de même le premier puisqu'il est égal à $\{x, P_u \{xuy\}, y\} - \{P_x u, u, P_y u\}$. En effet, en remplaçant y par $P_u(y)$ dans l'équation (b') de la page 9, on obtient:

$$L(P_x P_u y, u) + L(P_x u, P_u y) = L(x, P(P_u y, u)x).$$

Puisque $L(x, y)z = P(x, z)y = \{xyz\}$ et $L(x, y)P(x) = P(x)L(y, x)$ alors

$$L(x, P(P_u y, u)x) = L(x, \{P_u y, x, u\}) = L(x, P_u\{xuy\})$$

et donc

$$L(P_x P_u y, u) + L(P_x u, P_u y) = L(x, P_u\{xuy\})$$

qui en l'appliquant à y donne

$$L(P_x P_u y, u)y + L(P_x u, P_u y)y = L(x, \{P_u y, x, u\})y$$

mais

$$L(P_x u, P_u y)y = L(y, P_u y)P_x u = L(P_y u, u)P_x u$$

d'où

$$\{P_x P_u y, u, y\} = \{x, P_u\{xuy\}, y\} - \{P_x u, u, P_y u\}.$$

Ce qui donne

$$f(x, y, u) = \{x, P_u\{xuy\}, y\} - \{P_x u, u, P_y u\} - P_x P_u P_y u - P_y P_u P_x u. \quad (3')$$

Encore une fois en passant au u -homotope, (2) devient

$$g(w, x, y, z, u) := \{z, P_u f(x, y, u), w\} - \{f(x, y, u), P_u z, w\}. \quad (4)$$

Etudions tout d'abord f et g dans un système triple induit par une forme quadratique $[\Gamma, \bar{\cdot}, V, q, S]$ sur K dont la définition suit [19, Exemple 1.6]: soit Γ une algèbre associative commutative unitaire sur K , avec un automorphisme K -linéaire $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ de période 2, V , un Γ -module, $q : V \rightarrow \Gamma$, une forme quadratique $S : V \rightarrow V$, une application K -linéaire telle que $S^2 = \text{id}$, vérifiant

$$S(\gamma v) = \bar{\gamma} S(v) \quad (5)$$

pour $\gamma \in \Gamma, v \in V$ et

$$q(Sv) = \overline{q(v)}. \quad (6)$$

Si $q(x, y)$ est la bilinéarisation de q alors cette dernière équation implique

$$q(x, Sy) = \overline{q(Sx, y)}. \quad (7)$$

L'opérateur

$$P_x y := q(x, Sy)x - q(x)Sy, \quad (8)$$

induit une structure triple de Jordan sur V pour laquelle

$$\{xyz\} = q(x, Sy)z + q(z, Sy)x - q(x, z)Sy. \quad (9)$$

Lemme 3.1.1

$$S(P_x y) = P_{Sx} Sy \quad (10)$$

et

$$q(P_x y, z) = q(Sy, P_x Sz). \quad (11)$$

Démonstration

(i) Montrons tout d'abord (10).

$$\begin{aligned} S(P_{Sx} Sy) &= S(q(Sx, y)Sx - q(Sx)y), \text{ par (8),} \\ &= \overline{q(Sx, y)x} - \overline{q(Sx)Sy}, \text{ par (5),} \\ &= q(x, Sy)x - q(x)Sy, \text{ par (6) et (7),} \\ &= P_x y \text{ par (8).} \end{aligned}$$

On déduit que $S(P_{Sx} Sy) = P_x y$. En appliquant S à cette égalité on obtient (10) car $S^2 = id$.

(ii) Montrons (11).

$$\begin{aligned}
\overline{q(P_x y, z)} &= \overline{q(q(x, Sy)x - q(x)Sy, z)}, \text{ par (8),} \\
&= \overline{q(q(x, Sy)x, S^2 z) - q(q(x)Sy, S^2 z)}, \text{ par linéarité} \\
&= q(S(q(x, Sy)x), Sz) - q(S(q(x)Sy), Sz), \text{ par (7),} \\
&= q(\overline{q(x, Sy)Sx}, Sz) - q(\overline{q(x)y}, Sz), \text{ par (5),} \\
&= \overline{q(x, Sy)q(Sx, Sz)} - \overline{q(x)q(y, Sz)}, \text{ par linéarité} \\
&= q(y, Sx)q(Sx, Sz) - q(Sx)q(y, Sz), \text{ par (7),} \\
&= q(y, q(Sx, Sz)Sx - q(Sx)Sz), \text{ par linéarité} \\
&= q(y, P_x Sz), \text{ par (8),} \\
&= \overline{q(Sy, P_x Sz)}, \text{ par (7).}
\end{aligned}$$

On déduit que $\overline{q(P_x y, z)} = \overline{q(Sy, P_x Sz)}$. En appliquant $\bar{}$ on obtient (11). \square

Le système triple de Jordan d'une algèbre de Jordan d'une forme quadratique $\mathcal{J}(Q, 1)$ est un cas spécial d'un système triple induit par une forme quadratique. On note $[K, n, j]$ le système triple $[K, id, V, q, S]$ sur K , où $V = \bigoplus_{i=1}^n K v_i$, v_i satisfait

$$q(v_i) = 1, \quad q(v_i, v_\ell) = 0, \quad \text{pour } i \neq \ell, \quad (12)$$

et $Sv_i = v_i$, $i \leq j$, $Sv_i = -v_i$, $i > j$; par $[K \oplus K, n]$ on veut dire $[\Gamma, \bar{}, V, q, S]$ sur K , où $\Gamma = K \oplus K$, $\bar{}$ est l'involution échange, $V = \bigoplus_{i=1}^n \Gamma v_i$, les v_i satisfont (12) et $S(\sum_{i=1}^n \gamma v_i) = \sum_{i=1}^n \bar{\gamma} v_i$. Les bases ci-dessus sont les *bases standards* de $[K, n, j]$ et $[K \oplus K, n]$.

Proposition 3.1.1 Soit \mathcal{A} le système triple $[\Gamma, \bar{}, V, q, S]$. Alors

$$f(x, y, u) \in \Gamma S u, \quad \forall x, y, u \in \mathcal{A},$$

et $g(w, x, y, z, u)$ est une identité polynomiale pour \mathcal{A} .

Démonstration En utilisant les équations 9), 8) et 5),

$$\{P_x P_u y, u, y\} = q(P_x P_u y, S u) y + q(y, S u) P_x P_u y - q(P_x P_u y, y) S u$$

$$\begin{aligned}
&= q(P_x P_u y, Su)y + q(y, Su)q(x, S(P_u y))x \\
&\quad - q(y, Su)q(x)S(P_u y) - q(P_x P_u y, y)Su \\
&= q(P_x P_u y, Su)y + q(y, Su)q(x, S(P_u y))x \\
&\quad - q(y, Su)q(x)\overline{q(u, Sy)}Su + q(y, Su)q(x)\overline{q(u)}y \\
&\quad - q(P_x P_u y, y)Su.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_x P_u P_y u &= q(x, S(P_u P_y u))x - q(x)S(P_u P_y u) \\
&= q(x, S(P_u P_y u))x - q(x)\overline{q(u, S(P_y u))}Su \\
&\quad + q(x)\overline{q(u)}q(y, Su)y - q(x)\overline{q(u)}q(y)Su,
\end{aligned}$$

et, par symétrie,

$$\begin{aligned}
P_y P_u P_x u &= q(y, S(P_u P_x u))y - q(y)\overline{q(u, S(P_x u))}Su \\
&\quad + q(y)\overline{q(u)}q(x, Su)x - q(y)\overline{q(u)}q(x)Su.
\end{aligned}$$

Donc le coefficient de y dans $f(x, y, u)$ sera

$$\begin{aligned}
&q(P_x P_u y, Su) + q(y, Su)q(x)\overline{q(u)} - q(x)\overline{q(u)}q(y, Su) - q(y, S(P_u P_x u)) \\
&= q(P_x P_u y, Su) - q(y, S(P_u P_x u)).
\end{aligned}$$

Mais, par 11) et 10),

$$\begin{aligned}
q(P_x P_u y, Su) &= q(S(P_u y), P_x u) \\
&= q(P_{Su} S y, P_x u) \\
&= q(y, P_{Su} S(P_x u)) \\
&= q(y, S(P_u P_x u))
\end{aligned}$$

donc le coefficient de y dans $f(x, y, u)$ est 0.

Puisque $f(x, y, u)$ est $x - y$ symétrique, le coefficient de x dans $f(x, y, u)$ est aussi 0. Donc $f(x, y, u) \in \Gamma Su$ quand $x, y, u \in \mathcal{T}$.

Pour montrer que $g(w, x, y, z, u)$ est une identité pour \mathcal{A} , on peut supposer que $f(x, y, u) = \gamma Su$ pour un $\gamma \in \Gamma$. Dans ce cas,

$$P_u f(x, y, u) = P_u(\gamma Su) = q(u, \bar{\gamma}u)u - q(u)\bar{\gamma}u = \bar{\gamma}q(u)u.$$

D'où

$$\{z, P_u f(x, y, u), w\} = q(z, \overline{\gamma q(u) Su})w + q(w, \overline{\gamma q(u) Su})z - q(z, w)\overline{\gamma q(u) Su}$$

et

$$\begin{aligned} \{f(x, y, u), P_u z, w\} &= q(\gamma Su, \overline{q(u, Sz) Su - \overline{q(u)z}})w \\ &\quad + q(w, \overline{q(u, Sz) Su - \overline{q(u)z}})\gamma Su \\ &\quad - q(w, \gamma Su)(\overline{q(u, Sz) Su - \overline{q(u)z}}). \end{aligned}$$

En ramassant les termes, le coefficient de z dans g est 0; le coefficient de w est

$$\begin{aligned} &= \overline{\gamma q(u)q(z, Su)} - \overline{\gamma q(u, Sz)q(Su, Su)} + \gamma q(Su, z)\overline{q(u)} \\ &= 0, \end{aligned} \quad \text{par 7) et 6)}$$

et le coefficient de Su

$$\begin{aligned} &= -\overline{\gamma q(u)q(w, z)} - \overline{\gamma q(u, Sz)q(w, Su)} \\ &\quad + \overline{\gamma q(u)q(w, z)} + \gamma q(w, Su)\overline{q(u, Sz)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $g(w, x, y, z, u)$ est une identité de \mathcal{A} . □

Proposition 3.1.2 *Le polynôme $g^P(w, x, y, z, u)$ est une identité pour les systèmes de Cayley.*

Démonstration Les $V_1(c)$ homotopes respectifs des systèmes $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O})$, $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau)$, et $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{op})$ sont $[k, 8, 8]$, $[k, 8, 4]$, et $[k \oplus k, 8]$ (Table 1 [16, p. 60–61]). Par la proposition précédente le polynôme $g(w, x, y, z, u)$ s'annule sur ces derniers, et donc par l'argument de densité, le polynôme $g^P(w, x, y, z, u)$ s'annule sur les systèmes de Cayley. □

Proposition 3.1.3 *Le polynôme $g^P(w, x, y, z, u)$ ne s'annule pas sur les systèmes d'Albert.*

Démonstration Les systèmes d'Albert contiennent clairement une copie isomorphe de $H_3(k)$. Donc il suffit de montrer que $g(w, x, y, z, u)$ ne s'annule pas sur $H_3(k)$.

Mais ceci découle du fait que le polynôme de Wagner n'est pas central pour $H_3(k)$.
Ce qui complète la preuve. \square

Voici un autre polynôme qui sépare le système d'Albert de celui de Cayley.

3.2 Le polynôme $h(w, x, y, u)$

Soit

$$\begin{aligned} h(w, x, y, u) &:= \{u, P_u P_u f(x, y, u), w\} - \{P_u f(x, y, u), P_u u, w\} \\ &= D_{u, P_u f(x, y, u)}^{(u)} w, \end{aligned} \quad (13)$$

où $D^{(u)}$ indique que la dérivation est dans le u -homotope.

Proposition 3.2.1 *Le polynôme $h(w, x, y, u)$ ne s'annule pas sur les systèmes d'Albert.*

Démonstration Les systèmes d'Albert contiennent clairement une copie isomorphe de $H_3(k)$. Donc il suffit de montrer que $h(w, x, y, u)$ ne s'annule pas sur $H_3(k)$. Ceci découle du fait que le polynôme de Wagner n'est pas central pour $H_3(k)$. Ce qui complète la preuve. \square

Proposition 3.2.2 *Le polynôme $h(w, x, y, u)$ est une identité pour les systèmes de Cayley.*

Démonstration Soit $\mathcal{A} = \mathcal{M}_{1,2}(A)$, A une algèbre unitaire alternative munie d'une involution $\bar{}$, le système triple défini par $P_x y = x(\bar{y}^t x)$. Soit $u = (0, u_2)$, u_2 un élément inversible de A , $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, des éléments arbitraires de $\mathcal{M}_{1,2}(A)$. \mathcal{A} peut s'écrire de la façon suivante: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$. Rappelons que

$$f(x, y, u) := \{P_x P_u y, u, y\} - P_x P_u P_y u - P_y P_u P_x u$$

Appliquons l'opérateur P_u à $f(x, y, u)$ ce qui donne

$$P_u f(x, y, u) = \{u, P_x P_u y, P_u y\} - P(P_u x) P_y u - P(P_u y) P_x u$$

mais,

$$(P_x P_u y)_2 = P_{x_2} P_u y_2$$

et,

$$(P_y u)_2 = P_{y_2} u_2$$

d'où

$$P_u f(x, y, u) = P_u f(x_2, y_2, u)$$

Par la proposition 3.1.1: $f(x_2, y_2, u) \in \Gamma S u$, donc $P_u f(x_2, y_2, u) \in \Gamma u$. On déduit que

$$h(w, x, y, u) := D_{u, P_u f(x, y, u)}^{(u)} w = 0$$

Puisque les éléments triangonaux maximaux sont conjugués à des éléments de la forme u [16], h est une identité pour $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O})$ et $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{op})$ par l'argument de densité. Le plongement d'algèbres alternatives

$$(\mathcal{O}, \bar{\cdot}) \rightarrow (\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{op}, \sigma) \text{ donné par } c \mapsto (c, \bar{c}),$$

où σ est l'involution échange et $\bar{\cdot}$ l'involution obtenue en composant l'involution standard avec τ , s'étend à un plongement de système triple de $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau)$ dans $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{op})$. Donc h est aussi une identité pour $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau)$. □

Chapitre 4

Séparation des systèmes de Cayley à l'aide d'identités polynomiales

Nous montrons comment à l'aide d'identités et de non-identités polynomiales on peut séparer les trois systèmes de Cayley

$$\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}), \quad \mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau), \quad \mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{op}).$$

4.1 Le polynôme $\kappa(x_1, x_2, x_3, y)$

Racine a montré en [22] que les algèbres de Jordan de degré 2 vérifient l'identité

$$\begin{aligned} \kappa(x_1, x_2, x_3, y) := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} (-1)^\sigma (& \{\{y \ y \ x_{\sigma(1)}\} \ x_{\sigma(2)} \ x_{\sigma(3)}\} \\ & - \{\{y \ x_{\sigma(1)} \ x_{\sigma(2)}\} \ x_{\sigma(3)} \ y\} \\ & - \{x_{\sigma(1)} \ \{y \ x_{\sigma(2)} \ x_{\sigma(3)}\} \ y\}). \end{aligned} \quad (12)$$

Le polynôme κ dans [22] est exprimé en termes de produits linéaires mais il est facile de voir que l'expression ci-dessus est équivalente. On suppose dans ce chapitre que K est un corps de caractéristique non 2.

Proposition 4.1.1 *Le polynôme $\kappa(x_1, x_2, x_3, y)$ est une identité pour $[K, n, j]$ mais pas pour $[K \oplus K, n]$, $n \geq 3$.*

Démonstration Il est démontré dans [5] que $[K, n, j]$ vérifie κ . Donc il suffit de montrer que $[K \oplus K, 3]$ ne vérifie pas κ . Le système $[K \oplus K, n]$ a une $K \oplus K$ -base standard w_i et une K -base $u_i = (1, 0)w_i$, $v_i = (0, 1)w_i$, $1 \leq i \leq n$. Soit V^- le K -sous-espace engendré par les u_i et V^+ le K -sous-espace engendré par les v_i . Alors $[K \oplus K, n]$ est le système triple associé à la paire de Jordan (V^-, V^+) et $\{u_i, v_j, u_\ell\} = \delta_{ij}u_\ell + \delta_{\ell j}u_i - \delta_{i\ell}u_j$. Il est vérifié dans [5] que $\kappa(u_1, v_1, u_2; v_3) = -2v_2$. Donc κ n'est pas une identité polynomiale pour $[K \oplus K, 3] \subseteq [K \oplus K, n]$, $n \geq 3$. \square

Proposition 4.1.2 *Le polynôme $\kappa^P(x_1, x_2, x_3, y)$ est une identité pour $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O})$ et $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau)$ mais pas pour $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{op})$. Donc le polynôme $\kappa^P(x_1, x_2, x_3, y)$ sépare les systèmes $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O})$, et $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau)$ de leur version polarisée $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{op})$,*

Démonstration Les $V_1(c)$ homotopes respectifs des systèmes $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O})$, $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau)$, et $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{op})$ sont $[K, 8, 8]$, $[K, 8, 4]$, et $[K \oplus K, 8]$ (Table 1 [16, p. 60-61]). Par la proposition précédente le polynôme $\kappa(x_1, x_2, x_3, y)$ s'annule sur $[K, 8, 8]$ et $[K, 8, 4]$ mais pas sur $[K \oplus K, 8]$, et donc par l'argument de densité le polynôme $\kappa^P(x_1, x_2, x_3, y)$ s'annule sur les systèmes $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O})$, et $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau)$, mais pas sur leur version polarisée $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{op})$. \square

4.2 Le polynôme $w(x, y)$

Proposition 4.2.1 *Le polynôme*

$$w(x, y) = \{\{x, x, y\}, x, y\} - \{\{x, y, x\}, x, y\}$$

est une identité pour $[K, n, n]$ mais non pour $[K, n, j]$, $1 < j < n$, $n > 2$.

Démonstration Dans $[K, n, j]$,

$$\{x, x, y\} = q(x, Sx)y + q(y, Sx)x - q(x, y)Sx$$

$$\{x, y, x\} = 2q(x, Sy)x - 2q(x)Sy$$

et, en ramassant les termes,

$$\begin{aligned} \{\{x, x, y\}, x, y\} - \{\{x, y, x\}, x, y\} &= (q(x, Sx)q(y, Sy) - q(x, y)q(Sx, Sy))x \\ &\quad + (q(x, y)q(x, Sy) - 2q(x)q(y, Sy))Sx \\ &\quad + (2q(x))q(Sx, Sy) - q(x, Sx)q(x, Sy)y. \end{aligned}$$

Si $j = n$ alors S est l'identité et $w(x, y) = 0$.

Pour montrer la deuxième partie de la proposition il suffit de trouver une substitution dans $[K, 3, 2]$ pour laquelle le polynôme ne s'annule pas. Pour v_i , $1 \leq i \leq 3$ une base standard avec $Sv_i = v_i$, $i = 1$ ou 2 , et $Sv_3 = -v_3$, soit $x = v_2 + v_3$ et $y = v_1$. Dans ce cas $\{x, x, y\} = 0$, $\{x, y, x\} = -4v_1$ et $\{\{x, x, y\}, x, y\} - \{\{x, y, x\}, x, y\} = -\{\{x, y, x\}, x, y\} = -8(v_2 - v_3)$. \square

Proposition 4.2.2 *Le polynôme $w^P(x, y)$ sépare les systèmes $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O})$ et $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau)$, c'est-à-dire, $w^P(x, y)$ est une identité pour $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O})$ mais pas pour $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau)$.*

Démonstration Les $V_1(c)$ homotopes respectifs des systèmes $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O})$, et $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau)$ sont $[K, 8, 8]$, et $[K, 8, 4]$. Par la proposition précédente le polynôme $w(x, y)$ s'annule sur $[K, 8, 8]$ mais pas sur $[K, 8, 4]$ et donc par l'argument de densité le polynôme $w^P(x, y)$ s'annule sur $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O})$, mais pas sur $\mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{O}, \tau)$. \square

Chapitre 5

Séparation des systèmes d'Albert à l'aide d'identités polynomiales

Nous montrons comment à l'aide d'identités et de non-identités polynomiales on peut séparer les trois systèmes d'Albert

$$H_3(\mathcal{O}), \quad H_3(\mathcal{O}, \tau), \quad H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O}).$$

5.1 Les systèmes triples de Lie associés aux systèmes d'Albert

Introduisons tout d'abord quelques résultats de [17].

Théorème 5.1.1 ([17, p. 7]) *Si $(\mathcal{A}, \{ \cdot \cdot \cdot \})$ est un système triple de Jordan, alors $(\mathcal{A}, [\cdot \cdot \cdot])$ muni du produit triple*

$$[xyz] := \{xyz\} - \{yxz\}$$

est un système triple de Lie que l'on note \mathcal{A}^- . □

Théorème 5.1.2 ([17, p. 43]) *Soit \mathcal{J} une algèbre de Jordan simple sur K avec élément unité e et supposons que la caractéristique de K est zéro ou ne divise pas le degré de \mathcal{J} . Alors*

$$\mathcal{J} = Ke \oplus \mathcal{J}_0$$

où $\mathcal{J}_0 = [\mathcal{J}\mathcal{J}\mathcal{J}]$ est le noyau de la "trace réduite" de \mathcal{J} . □

D'après ce théorème on a le résultat suivant.

Corollaire 5.1.1 *Si la caractéristique de K n'est pas 3,*

$$[H_3(\mathcal{O}), H_3(\mathcal{O}), H_3(\mathcal{O})] = H_3(\mathcal{O})_0,$$

un sous-espace de dimension 26.

Démonstration La dimension de $H_3(\mathcal{O})$ est 27, et, $H_3(\mathcal{O})$ est une algèbre de Jordan simple de degré 3. Donc, d'après le théorème précédent,

$$[H_3(\mathcal{O}), H_3(\mathcal{O}), H_3(\mathcal{O})] = H_3(\mathcal{O})_0,$$

un sous-espace de dimension 26. □

Proposition 5.1.1 *Si la caractéristique de K n'est pas 2,*

$$[H_3(\mathcal{O}, \tau), H_3(\mathcal{O}, \tau), H_3(\mathcal{O}, \tau)] = H_3(\mathcal{O}, \tau),$$

un espace de dimension 27.

Démonstration Remarquons d'abord que le théorème précédent ne s'applique pas dans ce cas puisque $H_3(\mathcal{O}, \tau)$ n'est pas un système triple associé à une algèbre de Jordan. D'après le Théorème 5.4 13) de [17], $H_3(\mathcal{O}, \tau)^- \cong H_4(\mathcal{Q})_0^-$, où \mathcal{Q} est l'algèbre de quaternions déployée sur K . Comme $H_4(\mathcal{Q})$ est une algèbre de Jordan simple de degré 4 et que la caractéristique n'est pas 2, le théorème 5.2 s'applique et $[H_4(\mathcal{Q}), H_4(\mathcal{Q}), H_4(\mathcal{Q})] = H_4(\mathcal{Q})_0$ un sous-espace de dimension $28 - 1 = 27$ la dimension de $H_3(\mathcal{O}, \tau)$. □

Nous aurions pu démontrer la proposition précédente par un calcul direct. C'est d'ailleurs ce que nous ferons pour la proposition suivante.

Proposition 5.1.2 *L'espace*

$$[H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O}), H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O}), H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})] = H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})$$

et donc est de dimension 54.

Démonstration Soit $J = H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})$. Pour $(a, b), (c, d), (e, f) \in J$,

$$\begin{aligned} [(a, b), (c, d), (e, f)] &= \{(a, b), (c, d), (e, f)\} - \{(c, d), (a, b), (e, f)\} \\ &= (\{ade\}, \{bcf\}) - (\{cbe\}, \{daf\}) \\ &= (\{ade\} - \{cbe\}, \{bcf\} - \{daf\}). \end{aligned}$$

Si l'on pose $a = d = e = 1[ii]$, $b = c = 1[jj]$ et $f = 1[kk]$, où $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, on obtient

$$(\{ade\} - \{cbe\}, \{bcf\} - \{daf\}) = (1[ii], 0).$$

Si l'on pose $a = d = 1[ii]$, $e = v[ij]$, $b = c = 1[kk]$ et $f = 1[jj]$, où $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, on obtient

$$(\{ade\} - \{cbe\}, \{bcf\} - \{daf\}) = (v[ij], 0).$$

Donc $(H_3(\mathcal{O}), \{0\}) \subset [H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O}), H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O}), H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})]$ et, par symétrie, $[H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O}), H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O}), H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})] = H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})$. \square

5.2 Variations sur les polynômes de Capelli

Des variantes du polynôme de Capelli intérieur (remarque 2.3.1) nous serviront à différencier les trois systèmes d'Albert.

Proposition 5.2.1 *Le polynôme*

$$IC_{(2.27)+1}(z_1, \dots, z_{28}; y_1, \dots, y_{27}) \\ := \sum_{\sigma \in S_{27}} (-1)^\sigma \{ \{ \dots \{ z_1, y_{\sigma(1)}, z_2 \}, y_{\sigma(2)}, z_3 \}, \dots, \} y_{\sigma(27)}, z_{28} \}$$

n'est pas une identité des systèmes d'Albert .

Démonstration Remarquons tout d'abord que $IC_{55} = 0$ pour $H_3(\mathcal{O})_0$. Montrons qu' IC_{55} n'est pas une identité de $H_3(\mathcal{O})$. L'idéal serait d'avoir une substitution telle qu'un seul monôme d' IC_{55} soit non-nul. Malheureusement nous n'avons pas trouvé une telle substitution, et, il semble peu probable qu'il en existe. Nous présenterons donc une substitution où les valeurs de z_1, z_2, \dots, z_{28} et y_1, y_2, \dots, y_{27} sont telles que tout monôme non-nul d' IC_{55} doit nécessairement commencer par

$$\{ \{ \dots \{ z_1 y_1 z_2 \} y_2 z_3 \} \dots \} y_{18} z_{19} \}. \quad (13)$$

Puis nous évaluerons les monômes non nuls commençant par (13). Pour ce faire, nous ferons appels à la décomposition de Peirce dans \mathcal{O} (Lemme 1.1.2) et aux règles de calcul dans $H_3(\mathcal{O})$ (section 1.4).

Comme les variables y_1, y_2, \dots, y_{27} sont linéaires et alternées, alors, s'il existe une substitution où IC_{55} ne s'annule pas, il en existe une où y_1, \dots, y_{27} sont remplacées par les éléments d'une base. On choisit la base standard.

Supposons pour commencer la substitution qu'on choisit $z_1 = z_2 = 1[11]$. Alors le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11]*1[11]\} \neq 0$, est $* = 1[11]$, et, $\{1[11]1[11]1[11]\} = 1[11]$ d'après la règle (1). Si on pose $z_3 = y_0[21]$, alors le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11]*y_0[21]\} \neq 0$, est $* = y_0[12]$, et, $\{1[11]y_0[12]y_0[21]\} = 1[11]$ par (4). Si on pose

$z_4 = x_1[21]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11] * x_1[21]\} \neq 0$, est $* = y_1[12]$, et, $\{1[11]y_1[12]x_1[21]\} = 1[11]$ par (4). Si on pose $z_5 = x_2[21]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11] * x_2[21]\} \neq 0$, est $* = y_2[12]$, et, $\{1[11]y_2[12]x_2[21]\} = 1[11]$ par (4). Si on pose $z_6 = x_3[21]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11] * x_3[21]\} \neq 0$, est $* = y_3[12]$, et, $\{1[11]y_3[12]x_3[21]\} = 1[11]$ par (4). Si on pose $z_7 = y_1[21]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11] * y_1[21]\} \neq 0$, est $* = x_1[12]$, et, $\{1[11]x_1[12]y_1[21]\} = 1[11]$ par (4). Si on pose $z_8 = y_2[21]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11] * y_2[21]\} \neq 0$, est $* = x_2[12]$, et, $\{1[11]x_2[12]y_2[21]\} = 1[11]$ par (4). Si on pose $z_9 = y_3[21]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11] * y_3[21]\} \neq 0$, est $* = x_3[12]$, et, $\{1[11]x_3[12]y_3[21]\} = 1[11]$ par (4). Jusqu'à maintenant, on a utilisé le tripotent $1[11]$, et tous les éléments de la base standard dans la position $[12]$ sauf l'élément $x_0[12]$. Donc , jusqu'à maintenant, on obtient seulement le polynôme non-nul,

$$\begin{aligned} & \{ \dots \{1[11]1[11]1[11]\}y_0[12]y_0[21]\}y_1[12]x_1[21]\}y_2[12]x_2[21]\} \\ & y_3[12]x_3[21]\}x_1[12]y_1[21]\}x_2[12]y_2[21]\}x_3[12]y_3[21]\} \end{aligned}$$

qui est égal à $1[11]$. Donc, il suffit de continuer la substitution avec $1[11]$.

Si on pose $z_{10} = y_0[31]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11] * y_0[31]\} \neq 0$, est $* = y_0[13]$, et, $\{1[11]y_0[13]y_0[31]\} = 1[11]$ par (4). Si on pose $z_{11} = x_1[31]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11] * x_1[31]\} \neq 0$ est $* = y_1[13]$, et, $\{1[11]y_1[13]x_1[31]\} = 1[11]$ par (4). Si on pose $z_{12} = x_2[31]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{e_1 * x_2[31]\} \neq 0$, est $* = y_2[13]$, et, $\{1[11]y_2[13]x_2[31]\} = 1[11]$ par (4). Si on pose $z_{13} = x_3[31]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11] * x_3[31]\} \neq 0$, est $* = y_3[13]$, et, $\{1[11]y_3[13]x_3[31]\} = 1[11]$ par (4). Si on pose $z_{14} = x_0[31]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11] * x_0[31]\} \neq 0$, est $* = x_0[13]$, et, $\{1[11]x_0[13]x_0[31]\} = 1[11]$ par (4). Si on pose $z_{15} = y_1[31]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11] * y_1[31]\} \neq 0$, est $* = x_1[13]$, et, $\{1[11]x_1[13]y_1[31]\} = 1[11]$ par (4). Si on pose $z_{16} = y_2[31]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11] * y_2[31]\} \neq 0$, est $* = x_2[13]$, et, $\{1[11]x_2[13]y_2[31]\} = 1[11]$ par (4). Si on pose $z_{17} = y_3[31]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11] * y_3[31]\} \neq 0$, est $* = x_3[13]$, et, $\{1[11]x_3[13]y_3[31]\} = 1[11]$ par (4). Jusqu'à maintenant, on a utilisé $1[11]$, et,

tous les éléments de la base standard dans les positions [12] et [13] sauf l'élément $x_0[12]$. Donc , jusqu'à maintenant, on obtient seulement le polynôme non-nul,

$$\begin{aligned} & \{ \dots \{1[11]1[11]1[11]\} y_0[12]y_0[21]\} y_1[12]x_1[21]\} y_2[12]x_2[21]\} \\ & \quad y_3[12]x_3[21]\} x_1[12]y_1[21]\} x_2[12]y_2[21]\} x_3[12]y_3[21]\} \\ & \quad y_0[13]y_0[31]\} y_1[13]x_1[31]\} y_2[13]x_2[31]\} y_3[13]x_3[31]\} \\ & \quad x_0[13]x_0[31]\} x_1[13]y_1[31]\} x_2[13]y_2[31]\} x_3[13]y_3[31]\} \end{aligned}$$

qui est égal à $1[11]$. Donc, il suffit de continuer la substitution avec $1[11]$.

Si on pose $z_{18} = 1[22]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{1[11]*1[22]\} \neq 0$, est $* = x_0[12]$ car tous les éléments de la base standard de type $a[12]$ ont déjà été utilisés, et, $\{1[11]x_0[12]1[22]\} = x_0[12]$ par (6). Si on pose $z_{19} = 1[22]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{x_0[12]*1[22]\} \neq 0$, est $* = 1[22]$, et, $\{x_0[12]1[22]1[22]\} = x_0[12]$ par (5).

Donc , jusqu'à maintenant, on obtient seulement le polynôme non-nul,

$$\begin{aligned} & \{ \dots \{1[11]1[11]1[11]\} y_0[12]y_0[21]\} y_1[12]x_1[21]\} y_2[12]x_2[21]\} \\ & \quad y_3[12]x_3[21]\} x_1[12]y_1[21]\} x_2[12]y_2[21]\} x_3[12]y_3[21]\} \\ & \quad y_0[13]y_0[31]\} y_1[13]x_1[31]\} y_2[13]x_2[31]\} \\ & \quad y_3[13]x_3[31]\} x_0[13]x_0[31]\} x_1[13]y_1[31]\} x_2[13]y_2[31]\} \\ & \quad x_3[13]y_3[31]\} x_0[12]1[22]\} 1[22]1[22]\} \end{aligned}$$

qui est égal à $x_0[12]$. Donc, il suffit de continuer la substitution avec $x_0[12]$.

Il reste à utiliser $1[33]$, $x_i[32]$, et, $y_i[32]$, $0 \leq i \leq 3$. Si on pose $z_{20} = x_0[23]$, alors, les choix de $*$ pour lesquels $\{x_0[12]*x_0[23]\} \neq 0$, sont $* = x_i[32]$, $1 \leq i \leq 3$, et, $\{x_0[12]x_i[32]x_0[23]\} = x_i[21]$, $1 \leq i \leq 3$ par (9). Considérons chaque cas à part.

a) Pour $i = 1$, $\{x_0[12]x_1[32]x_0[23]\} = x_1[21]$. Si on pose $z_{21} = y_1[23]$, alors, les choix de $*$ pour lesquels $\{x_1[21]*y_1[23]\} \neq 0$, sont $* = x_0[32]$, $x_2[32]$, $x_3[32]$, et,

$$\begin{aligned} \{x_1[21]x_0[32]y_1[23]\} &= -y_0[21], \\ \{x_1[21]x_2[32]y_1[23]\} &= x_2[21], \\ \{x_1[21]x_3[32]y_1[23]\} &= x_3[21], \end{aligned}$$

par (9). Considérons chaque cas à part.

a1) Si $*$ = $x_0[32]$, $\{x_1[21]x_0[32]y_1[23]\} = -y_0[21]$. Si on pose $z_{22} = y_2[23]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{y_0[21] * y_2[23]\} \neq 0$, est $*$ = $x_2[32]$, et, $\{y_0[21]x_2[32]y_2[23]\} = y_0[21]$ par (9). Si on pose $z_{23} = y_3[23]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{y_0[21] * y_3[23]\} \neq 0$, est $*$ = $x_3[32]$, et, $\{y_0[21]x_3[32]y_3[23]\} = -y_0[21]$ par (9).

a2) Si $*$ = $x_2[32]$, $\{x_1[21]x_2[32]y_1[23]\} = x_2[21]$. Les choix de \circ pour lesquels $\{x_2[21] \circ y_2[23]\} \neq 0$, sont $\circ = x_0[32]$, $x_3[32]$, car, $x_1[32]$ est déjà utilisé, et, $\{x_2[21]x_0[32]y_2[23]\} = -y_0[21]$, et, $\{x_2[21]x_3[32]y_2[23]\} = x_3[21]$ par (9).

a2i) Si $\circ = x_0[32]$, $\{x_2[21]x_0[32]y_2[23]\} = -y_0[21]$. Le seul choix de $*$ pour lequel $\{-y_0[21] * y_3[23]\} \neq 0$, est $*$ = $x_3[32]$, et, $\{-y_0[21]x_3[32]y_3[23]\} = y_0[21]$ par (9).

a2ii) Si $\circ = x_3[32]$, $\{x_2[21]x_3[32]y_2[23]\} = x_3[21]$. Le seul choix de $*$ pour lequel $\{x_3[21] * y_3[23]\} \neq 0$, est $*$ = $x_0[32]$, car $x_1[32]$ et $x_2[32]$ sont déjà utilisés, et, $\{x_3[21]x_0[32]y_3[23]\} = -y_0[21]$ par (9).

a3) Si $*$ = $x_3[32]$, $\{x_0[12]x_3[32]x_0[23]\} = x_3[21]$. Le seul choix de $*$ pour lequel $\{x_3[21] * y_2[23]\} \neq 0$, est $*$ = $x_2[32]$, et, $\{x_3[21]x_2[32]y_2[23]\} = -x_3[21]$ par (9). Le seul choix de $*$ pour lequel $\{-x_3[21] * y_3[23]\} \neq 0$, est $*$ = $x_0[32]$, et, $\{-x_3[23]x_0[32]y_3[23]\} = y_0[21]$ par (9).

b) Pour $i = 2$, $\{x_0[12]x_2[32]x_0[23]\} = x_2[21]$. Le seul choix de $*$ pour lequel $\{x_2[21] * y_1[23]\} \neq 0$, est $*$ = $x_1[32]$, et, $\{x_2[21]x_1[32]y_1[23]\} = -x_2[21]$ par (9). Les choix de $*$ pour lesquels $\{-x_2[21] * y_2[23]\} \neq 0$, sont $*$ = $x_0[32]$, $*$ = $x_3[32]$, car, $x_1[32]$ est déjà utilisé, et, $\{-x_2[21]x_0[32]y_2[23]\} = y_0[21]$, $\{-x_2[21]x_3[32]y_2[23]\} = -x_3[21]$ par (9). Considérons chacun de ces deux cas à part.

b1) Si $*$ = $x_0[32]$, $\{-x_2[21]x_0[32]y_2[23]\} = y_0[21]$. Le seul choix de $*$ pour lequel $\{y_0[21] * y_3[23]\} \neq 0$, est $*$ = $x_3[32]$, et, $\{y_0[21]x_3[32]y_3[23]\} = -y_0[21]$ par (9).

b2) Si $*$ = $x_3[32]$, $\{-x_2[21]x_3[32]y_2[23]\} = -x_3[21]$. Le seul choix de $*$ pour lequel $\{-x_3[21]*y_3[23]\} \neq 0$, est $*$ = $x_0[32]$, et, $\{-x_3[21]x_0[32]y_3[23]\} = y_0[21]$ par (9).

c) Pour $i = 3$, $\{x_0[12]x_3[32]x_0[23]\} = x_3[21]$. Le seul choix de $*$ pour lequel $\{x_3[21]*y_1[23]\} \neq 0$, est $*$ = $x_1[32]$, et, $\{x_3[21]x_1[32]y_1[23]\} = -x_3[21]$ par (9). Le seul choix de $*$ pour lequel $\{-x_3[21]*y_2[23]\} \neq 0$, est $*$ = $x_2[32]$, et, $\{-x_3[21]x_2[32]y_2[23]\} = x_3[21]$ par (9). Le seul choix de $*$ pour lequel $\{x_3[21]*y_3[23]\} \neq 0$, est $*$ = $x_0[32]$, et, $\{x_3[21]x_0[32]y_3[23]\} = -y_0[21]$ par (9).

Il reste à utiliser $y_i[32]$, $0 \leq i \leq 3$, et le tripotent $1[33]$. D'après ce qui précède on obtient 7 monômes non-nuls,

$$\begin{aligned} & \{ \{ \{ \{ x_0[12]x_1[32]x_0[23] \} x_0[32]y_1[23] \} x_2[32]y_2[23] \} x_3[32]y_3[23] \} \\ & \{ \{ \{ \{ x_0[12]x_1[32]x_0[23] \} x_2[32]y_1[23] \} x_0[32]y_2[23] \} x_3[32]y_3[23] \} \\ & \{ \{ \{ \{ x_0[12]x_1[32]x_0[23] \} x_2[32]y_1[23] \} x_3[32]y_2[23] \} x_0[32]y_3[23] \} \\ & \{ \{ \{ \{ x_0[12]x_1[32]x_0[23] \} x_3[32]y_1[23] \} x_2[32]y_2[23] \} x_0[32]y_3[23] \} \\ & \{ \{ \{ \{ x_0[12]x_2[32]x_0[23] \} x_1[32]y_1[23] \} x_0[32]y_2[23] \} x_3[32]y_3[23] \} \\ & \{ \{ \{ \{ x_0[12]x_2[32]x_0[23] \} x_1[32]y_1[23] \} x_3[32]y_2[23] \} x_0[32]y_3[23] \} \\ & \{ \{ \{ \{ x_0[12]x_3[32]x_0[23] \} x_1[32]y_1[23] \} x_2[32]y_2[23] \} x_0[32]y_3[23] \} \end{aligned}$$

chacun égal à $y_0[21]$ à signe près. Donc il suffit de continuer la substitution avec $y_0[21]$.

Si on pose $z_{24} = x_1[23]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{y_0[21]*x_1[23]\} \neq 0$, est $*$ = $y_0[32]$, et, $\{y_0[21]y_0[32]x_1[23]\} = x_1[21]$ par (9). Si on pose $z_{25} = x_2[23]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{x_1[21]*x_2[23]\} \neq 0$ est $*$ = $y_1[32]$, et, $\{x_1[21]y_1[32]x_2[23]\} = -x_2[21]$ par (9). Si on pose $z_{26} = x_3[23]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{-x_2[21]*x_3[23]\} \neq 0$, est $*$ = $y_2[32]$, et, $\{-x_2[21]y_2[32]x_3[23]\} = x_3[21]$ par (9). Si on pose $z_{27} = 1[33]$, alors, le seul choix de $*$ pour lequel $\{x_3[21]*e_3\} \neq 0$, est $*$ = $y_3[32]$, et, $\{x_3[21]y_3[32]1[33]\} = -y_0[31]$ par (9). Il reste seulement à utiliser $1[33]$. Si on pose $z_{28} = 1[33]$, alors, $\{y_0[31]1[33]1[33]\} = y_0[31]$ par (5).

Donc finalement on obtient 7 monômes différents de 0

$$\begin{aligned}
& \{ \dots \{ 1[11]1[11]1[11] \} y_0[12]y_0[21] \} y_1[12]x_1[21] \} y_2[12]x_2[21] \} \\
& \quad y_3[12]x_3[21] \} x_1[12]y_1[21] \} x_2[12]y_2[21] \} x_3[12]y_3[21] \} \\
& \quad y_0[13]y_0[31] \} y_1[13]x_1[31] \} y_2[13]x_2[31] \} y_3[13]x_3[31] \} \\
& \quad x_0[13]x_0[31] \} x_1[13]y_1[31] \} x_2[13]y_2[31] \} x_3[13]y_3[31] \} \\
& \quad x_0[12]1[22] \} 1[22]1[22] \} x_1[32]x_0[23] \} x_0[32]y_1[23] \} \\
& \quad x_2[32]y_2[23] \} x_3[32]y_3[23] \} y_0[32]x_1[23] \} y_1[32]x_2[23] \} \\
& \quad y_2[32]x_3[23] \} y_3[32]1[33] \} 1[33]1[33] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \dots \{ 1[11]1[11]1[11] \} y_0[12]y_0[21] \} y_1[12]x_1[21] \} y_2[12]x_2[21] \} \\
& \quad y_3[12]x_3[21] \} x_1[12]y_1[21] \} x_2[12]y_2[21] \} x_3[12]y_3[21] \} \\
& \quad y_0[13]y_0[31] \} y_1[13]x_1[31] \} y_2[13]x_2[31] \} y_3[13]x_3[31] \} \\
& \quad x_0[13]x_0[31] \} x_1[13]y_1[31] \} x_2[13]y_2[31] \} x_3[13]y_3[31] \} \\
& \quad x_0[12]1[22] \} 1[22]1[22] \} x_1[32]x_0[23] \} x_2[32]y_1[23] \} \\
& \quad x_0[32]y_2[23] \} x_3[32]y_3[23] \} y_0[32]x_1[23] \} y_1[32]x_2[23] \} \\
& \quad y_2[32]x_3[23] \} y_3[32]1[33] \} 1[33]1[33] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \dots \{ 1[11]1[11]1[11] \} y_0[12]y_0[21] \} y_1[12]x_1[21] \} y_2[12]x_2[21] \} \\
& \quad y_3[12]x_3[21] \} x_1[12]y_1[21] \} x_2[12]y_2[21] \} x_3[12]y_3[21] \} \\
& \quad y_0[13]y_0[31] \} y_1[13]x_1[31] \} y_2[13]x_2[31] \} y_3[13]x_3[31] \} \\
& \quad x_0[13]x_0[31] \} x_1[13]y_1[31] \} x_2[13]y_2[31] \} x_3[13]y_3[31] \} \\
& \quad x_0[12]1[22] \} 1[22]1[22] \} x_1[32]x_0[23] \} x_2[32]y_1[23] \} \\
& \quad x_3[32]y_2[23] \} x_0[32]y_3[23] \} y_0[32]x_1[23] \} y_1[32]x_2[23] \} \\
& \quad y_2[32]x_3[23] \} y_3[32]1[33] \} 1[33]1[33] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \dots \{1[11]1[11]1[11]\} y_0[12]y_0[21]\} y_1[12]x_1[21]\} y_2[12]x_2[21]\} \\
& \quad y_3[12]x_3[21]\} x_1[12]y_1[21]\} x_2[12]y_2[21]\} x_3[12]y_3[21]\} \\
& \quad y_0[13]y_0[31]\} y_1[13]x_1[31]\} y_2[13]x_2[31]\} y_3[13]x_3[31]\} \\
& \quad x_0[13]x_0[31]\} x_1[13]y_1[31]\} x_2[13]y_2[31]\} x_3[13]y_3[31]\} \\
& \quad x_0[12]1[22]\} 1[22]1[22]\} x_1[32]x_0[23]\} x_3[32]y_1[23]\} \\
& \quad x_2[32]y_2[23]\} x_0[32]y_3[23]\} y_0[32]x_1[23]\} y_1[32]x_2[23]\} \\
& \quad y_2[32]x_3[23]\} y_3[32]1[33]\} 1[33]1[33]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \dots \{1[11]1[11]1[11]\} y_0[12]y_0[21]\} y_1[12]x_1[21]\} y_2[12]x_2[21]\} \\
& \quad y_3[12]x_3[21]\} x_1[12]y_1[21]\} x_2[12]y_2[21]\} x_3[12]y_3[21]\} \\
& \quad y_0[13]y_0[31]\} y_1[13]x_1[31]\} y_2[13]x_2[31]\} y_3[13]x_3[31]\} \\
& \quad x_0[13]x_0[31]\} x_1[13]y_1[31]\} x_2[13]y_2[31]\} x_3[13]y_3[31]\} \\
& \quad x_0[12]1[22]\} 1[22]1[22]\} x_2[32]x_0[23]\} x_1[32]y_1[23]\} \\
& \quad x_0[32]y_2[23]\} x_3[32]y_3[23]\} y_0[32]x_1[23]\} y_1[32]x_2[23]\} \\
& \quad y_2[32]x_3[23]\} y_3[32]1[33]\} 1[33]1[33]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \dots \{1[11]1[11]1[11]\} y_0[12]y_0[21]\} y_1[12]x_1[21]\} y_2[12]x_2[21]\} \\
& \quad y_3[12]x_3[21]\} x_1[12]y_1[21]\} x_2[12]y_2[21]\} x_3[12]y_3[21]\} \\
& \quad y_0[13]y_0[31]\} y_1[13]x_1[31]\} y_2[13]x_2[31]\} y_3[13]x_3[31]\} \\
& \quad x_0[13]x_0[31]\} x_1[13]y_1[31]\} x_2[13]y_2[31]\} x_3[13]y_3[31]\} \\
& \quad x_0[12]1[22]\} 1[22]1[22]\} x_2[32]x_0[23]\} x_1[32]y_1[23]\} \\
& \quad x_3[32]y_2[23]\} x_0[32]y_3[23]\} y_0[32]x_1[23]\} y_1[32]x_2[23]\} \\
& \quad y_2[32]x_3[23]\} y_3[32]1[33]\} 1[33]1[33]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \dots \{ 1[11]1[11]1[11] \} y_0[12]y_0[21] \} y_1[12]x_1[21] \} y_2[12]x_2[21] \} \\
& \quad y_3[12]x_3[21] \} x_1[12]y_1[21] \} x_2[12]y_2[21] \} x_3[12]y_3[21] \} \\
& \quad y_0[13]y_0[31] \} y_1[13]x_1[31] \} y_2[13]x_2[31] \} y_3[13]x_3[31] \} \\
& \quad x_0[13]x_0[31] \} x_1[13]y_1[31] \} x_2[13]y_2[31] \} x_3[13]y_3[31] \} \\
& \quad x_0[12]1[22] \} 1[22]1[22] \} x_3[32]x_0[23] \} x_1[32]y_1[23] \} \\
& \quad x_2[32]y_2[23] \} x_0[32]y_3[23] \} y_0[32]x_1[23] \} y_1[32]x_2[23] \} \\
& \quad y_2[32]x_3[23] \} y_3[32]1[33] \} 1[33]1[33] \}
\end{aligned}$$

et chacun égale $y_0[31]$ à signe près. Donc la somme est non nulle quelles que soient les signatures des permutations.

Comme le produit dans $H_3(\mathcal{O}, \tau)$ est le même que celui de $H_3(\mathcal{O})$, à signe près, encore une fois, quels que soient les signes, la somme de sept termes tous égaux à signe près ne peut être 0 et IC_{55} n'est pas une identité polynomiale de $H_3(\mathcal{O}, \tau)$.

Comme $H_3(\mathcal{O})$ est isomorphe à la diagonale de $H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})$,

$$H_3(\mathcal{O}) \rightarrow H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O}) \quad a \mapsto (a, a),$$

IC_{55} ne peut être une identité de $H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})$. □

Corollaire 5.2.1 Le polynôme

$$\begin{aligned}
& LC_{(4.27)+1}(z_1, \dots, z_{28}; a_1, \dots, a_{27}, b_1, \dots, b_{27}, c_1, \dots, c_{27}) \\
& \quad := IC_{(2.27)+1}(z_1, \dots, z_{28}; [a_1 b_1 c_1]_1, \dots, [a_{27} b_{27} c_{27}]_{27}) \\
& \quad = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{27}} (-1)^\sigma \{ \{ \dots \{ z_1, [a_1 b_1 c_1]_{\sigma(1)}, z_2 \}, \dots, \} [a_{27} b_{27} c_{27}]_{\sigma(27)}, z_{28} \}
\end{aligned}$$

est une identité de $H_3(\mathcal{O})$ et mais pas de $H_3(\mathcal{O}, \tau)$ ni de $H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})$.

Démonstration Le polynôme LC est une variante du polynôme IC où on remplace les variables à permuter par les produits triples de Lie $[a_i b_i c_i]$ de variables a_i, b_i, c_i . On a 27 de ces produits à permuter donc ce polynôme s'annule sur $H_3(\mathcal{O})$, car dans ce cas ils sont linéairement dépendants, quelle que soit la substitution, puisque la

dimension de $[H_3(\mathcal{O}), H_3(\mathcal{O}), H_3(\mathcal{O})]$ est 26. Donc LC_{109} est une identité de $H_3(\mathcal{O})$. Comme le système $H_3(\mathcal{O}, \tau) = [H_3(\mathcal{O}, \tau), H_3(\mathcal{O}, \tau), H_3(\mathcal{O}, \tau)]$, la substitution du théorème précédent montre que LC_{109} n'est pas une identité polynomiale pour $H_3(\mathcal{O}, \tau)$. Donc le polynôme LC sépare les systèmes $H_3(\mathcal{O})$ et $H_3(\mathcal{O}, \tau)$.

Pour montrer que LC_{109} n'est pas une identité de $H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})$, il suffit de modifier la substitution de la Proposition 5.2.1 en substituant pour les z_i des éléments dans la première copie de $H_3(\mathcal{O})$ et pour les $[a_i b_i c_i]$ des éléments dans la deuxième copie tels qu'il correspondent à la substitution des y_i . La Proposition 5.1.2 nous permet de faire ce dernier choix. \square

Remarque 5.2.1 Il n'est pas clair qu'il y a un choix de a_i, b_i, c_i tel que $[a_i, b_i, c_i] = y_i$, $1 \leq i \leq 27$.

Mais d'après la proposition 5.1.1, il y a a_i, b_i, c_i tel que $(d_i := [a_i, b_i, c_i])$ forment une base. Soit A la matrice tel que $d_i = Ay_i$ ($1 \leq i \leq 27$). Alors,

$$IC(z, d_1, \dots, d_{27}) = \det(A)IC(z, y_1, \dots, y_{27}) \neq 0.$$

Conclusion

D'après ce qui précède on a le résultat suivant:

Théorème *Les systèmes triples de Jordan simples exceptionnels de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique non 2 sont déterminés à isomorphie près par leur idéal d'identités polynomiales, sauf peut-être $H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})$ et $H_3(\mathcal{O}, \tau)$.* \square

Malheureusement, il nous manque un polynôme qui sépare $H_3(\mathcal{O}) \oplus H_3(\mathcal{O})$ de $H_3(\mathcal{O}, \tau)$.

Voici un résumé des polynômes utilisés:

$$f(x, y, u) = \{x, P_u\{xuy\}, y\} - \{P_x u, u, P_y u\} - P_x P_u P_y u - P_y P_u P_x u$$

$$g(w, x, y, z, u) := \{z, P_u f(x, y, u), w\} - \{f(x, y, u), P_u z, w\}$$

$$h(w, x, y, u) := \{u, P_u P_u f(x, y, u), w\} - \{P_u f(x, y, u), P_u u, w\}$$

$$\begin{aligned} \kappa(x_1, x_2, x_3, y) := & \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} (-1)^\sigma (\{ \{y y x_{\sigma(1)}\} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} \} \\ & - \{ \{y x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)}\} x_{\sigma(3)} y \} \\ & - \{ x_{\sigma(1)} \{y x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}\} y \}) \end{aligned}$$

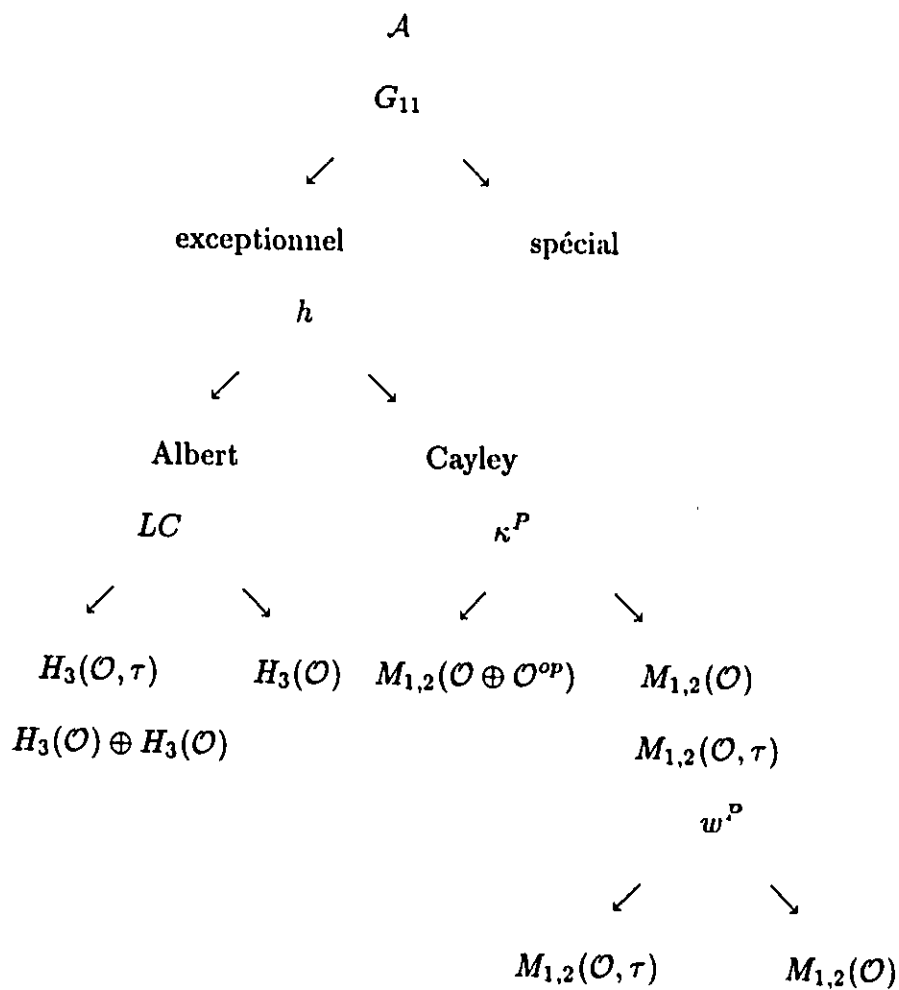
$$w(x, y) = \{ \{x, x, y\}, x, y \} - \{ \{x, y, x\}, x, y \}$$

$$\begin{aligned} IC_{(2.27)+1}(z_1, \dots, z_{28}; y_1, \dots, y_{27}) \\ := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{27}} (-1)^\sigma \{ \{ \dots \{z_1, y_{\sigma(1)}, z_2\}, y_{\sigma(2)}, z_3, \dots, \} y_{\sigma(27)}, z_{28} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LC_{(4.27)+1}(z_1, \dots, z_{28}; [a_1 b_1 c_1]_1, \dots, [a_{27} b_{27} c_{27}]_{27}) \\ := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{27}} (-1)^\sigma \{ \{ \dots \{z_1, [a_1 b_1 c_1]_{\sigma(1)}, z_2\}, \dots, \} [a_{27} b_{27} c_{27}]_{\sigma(27)}, z_{28} \} \end{aligned}$$

A la page suivante se trouve une table qui résume ce travail.

Table 2.



où les systèmes sous la branche droite satisfont le polynôme ci dessus, et, les systèmes sous la branche gauche ne le sont pas.

Bibliographie

- [1] D'Amour, A. , *Zel'manov polynomials in quadratic Jordan triple systems*, J. Algebra, **140** (1991) 160–183.
- [2] D'Amour, A. , *Quadratic Jordan triple systems of hermitian type*, J. Algebra, **149** (1992) 197–233.
- [3] D'Amour, A. and McCrimmon, K. , *The local algebras of Jordan systems*, J. Algebra.
- [4] D'Amour, A. and McCrimmon, K. , *Prime Jordan systems of Clifford type*, à paraître.
- [5] D'Amour, A. and Racine M. L., **-Polynomial identities of matrices with involution, the low degrees*, version préliminaire.
- [6] Humphreys, J. E., *Introduction to lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag.
- [7] Jacobson, N., *Structure theory of Jordan algebras*. Lecture Notes, University of Arkansas, Fayetteville, 1981.
- [8] Jacobson, N., *Structure and Representations of Jordan Algebras*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. XXXIX, Providence R. I., 1968.
- [9] Loos, O., *Lectures on Jordan Triples*, Lecture Notes, UBC, Vancouver, 1971.
- [10] Loos, O., and McCrimmon, K. *Speciality of Jordan triple systems*, Comm. Algebra, **5** (1977), 1057–1082.
- [11] Loos, O., and McCrimmon, K., *Communications in Algebra*, **5**(10), 1057–1082 (1977).
- [12] McCrimmon, K. *Homotopes of alternative algebras*, Math. Ann. **191** (1971), 253–262.
- [13] McCrimmon, K., and Zel'manov, E., *The structure of strongly prime quadratic Jordan algebras*, Adv. in Math. **69** (1988), 133–222.
- [14] McCrimmon, K., *Jordan triple systems: Insights and ignorance*, Contemp. Math. **131** (1992), 625–637.
- [15] Meyberg, K., *Lectures on Algebras and Triple Systems*. Lecture Notes, University of Virginia, Charlottesville, 1972.

- [16] Neher, Erhard, *On triangular elements and centralizers in Jordan triple systems*, J. Algebra **90** (1984), 18–36.
- [17] Neher, E., *On the Classification of Lie and Jordan Triple Systems*, Habilitationsschrift Universität Münster 1983, 118pp.
- [18] Neher, E., *On the classification of Lie and Jordan triple systems*, Comm. Algebra, **13** (1985), 2615–2667.
- [19] Neher, E., *Jordan Triple Systems by the Grid Approach*, Lec. Notes in Mathematics, vol. 1280, Springer-Verlag, Heidelberg 1987.
- [20] Rached, Z. and Racine M.L., *Jordan triple systems of degree at most 2*, communications in algebra, **24**(3), 963–1001 (1996).
- [21] Racine, M. L., *Central polynomials for Jordan algebras. I*, J. Algebra **41** (1976), 224–237.
- [22] Racine, M. L., *Minimal identities for Jordan algebras of degree 2*, Communications in Algebra, **13** (1985), 2493–2506.
- [23] Racine, M. L., *Minimal identities of octonion algebras*, J. Algebra, **98** (1988), 251–260.
- [24] Razmyslov, Yu. P., *Identities of Algebras and their Representations*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 138, Amer. Math. Soc. Providence R. I., 1994, 318pp.
- [25] Schafer, R. D., *An introduction to Non-Associative Algebras*, Academic Press, 1966.
- [26] Vassilovski, S. Yu., *The base of identities of Jordan algebras of bilinear forms*, Proc. of the Inst. of Math. of the Siberian Branch of the Academy of the USSR, **16** (1989), 5–37.
- [27] Zel'manov, E., *On prime Jordan triple systems I; II; III*, Siberian Math. J. **24** (1983), 23–67; **25** (1984), 42–49; **26** (1985), 71–82. .