

Complexité topologique

Gabrielle Poirier

Thèse soumise à la
Faculté des études supérieures et postdoctorales
dans le cadre des exigences
du programme de maîtrise

Département de mathématiques et statistique
Faculté des Sciences
Université d'Ottawa

© Gabrielle Poirier, Ottawa, Canada, 2014

Résumé

Il y a seulement une dizaine d'années que l'invariant de la complexité topologique a été défini. Il y a encore beaucoup de travail à y consacrer. Ici nous comparons algébriquement les deux invariants $TC(X_{\mathbb{Q}})$ et $\mathbf{tc}(X)$. En fait, ce qui nous motive, c'est la conjecture de leur égalité. Dans le but d'appuyer cette conjecture, nous regardons les bornes inférieures et supérieures de chacun, pour resserrer l'intervalle dans lequel ils se trouvent. Ceci nous a permis de trouver un nouveau résultat : la borne supérieure $2 \cdot \mathit{cat}_0(X)$ de $TC(X_{\mathbb{Q}})$ est aussi une borne supérieure de $\mathbf{tc}(X)$. Ensuite, pour trois espaces nous avons calculé l'intervalle dans lequel se trouvent $TC(X_{\mathbb{Q}})$ et $\mathbf{tc}(X)$. Tous nos résultats nous incitent à dire que ces deux invariants se comportent bien de la même façon.

Table des matières

1	Introduction	6
2	Préliminaires en topologie	10
2.1	Homotopie	10
2.2	Rationalisation	11
2.3	Cohomologie	11
2.3.1	Trois théorèmes importants	12
2.3.2	Produit Cup	12
2.4	Fibrations et Cofibrations	13
2.4.1	Rappels des définitions	13
2.4.2	Fibres et cofibres homotopiques	14
2.5	Joint	16
3	De la topologie à l'algèbre	18
3.1	Algèbres et cohomologie d'une algèbre	18
3.2	Modèles de Sullivan	19
3.3	Modèles relatifs de Sullivan	23
3.3.1	Fibrations et longue suite exacte	24
3.4	Extensions semifree et modèle algébrique du joint	29
3.5	Types d'espaces	31
3.5.1	Espaces formels	31
3.5.2	Espaces elliptiques	32
3.5.3	Espaces homogènes et modèles purs	33
4	LS-catégorie	35
4.1	Définitions géométriques	35

4.2	La LS-catégorie pour des algèbres de Sullivan	36
4.2.1	Théorème de Hess	40
5	Autres invariants homotopiques	44
5.1	Longueur cup	44
5.2	Longueur en cône	45
5.3	Invariant de Toomer	46
5.4	Complexité Topologique	47
6	Relations entre invariants	51
6.1	La catégorie sectionnelle et la LS-catégorie	51
6.2	Complexité topologique	52
6.3	Analyse des modèles	54
6.3.1	Types d'éléments primaires dans W	54
7	Un théorème et des exemples	56
7.1	Borne supérieure pour \mathbf{tc}	56
7.2	Modèle pur formel avec une puissance 4 à la différentielle	57
7.2.1	Algèbre ${}^{\Lambda Q}/_{d_{\gamma}P}$ et cohomologie de X_{γ}	57
7.2.2	LS-catégorie de X_{γ}	60
7.2.3	$\text{nil ker } \cup_{\mathbb{Q}}$	61
7.2.4	$TC(X_{\gamma})$ et $\mathbf{tc}(X_{\gamma})$	61
7.3	Modèle de $X = SU(2)^3/T^2$, espace non-formel	61
7.3.1	Cohomologie de X	62
7.3.2	LS-catégorie de X	63
7.3.3	$\text{nil ker } \mu_N$	63
7.3.4	$\text{nil ker } \cup_{\mathbb{Q}}$	64
7.3.5	$\mathbf{tc}(X)$	64
7.3.6	Complexité topologique : $TC(X_{\mathbb{Q}})$	76
7.4	Modèle pur avec des degrés pairs différents	77
7.4.1	Algèbre ${}^{\Lambda Q}/_{dP}$	77
7.4.2	Cohomologie de X	77
7.4.3	LS-catégorie de X	81
7.4.4	$\text{nil ker } \mu_N$	81

Complexité topologique

7.4.5	nil ker $\cup_{\mathbb{Q}}$	82
7.4.6	$\mathbf{tc}(X)$ et $TC(X)$	82
8	Conclusion	83
	Appendices	84
A	Table de multiplication de $H^*(X_\gamma)$	85
B	Matrices des coefficients	87

Chapitre 1

Introduction

La théorie de l'homotopie rationnelle étudie les types d'homotopie des espaces topologiques. À cette fin, nous voulons trouver le plus grand nombre d'invariants homotopiques possibles pour faire avancer le sujet. Dans ce travail, lorsque nous parlerons d'un espace X , il sera connexe par arcs, simplement connexe, de même type d'homotopie qu'un CW-complexe et de type-fini, c'est-à-dire qu'en chaque degré, la cohomologie est de rang fini.

En particulier, nous étudierons deux invariants homotopiques, $TC(X)$ et $\mathbf{tc}(X)$, introduit respectivement par M. Farber ([5]) et B. Jessup, A. Murillo, P.-E. Parent ([19]). Il est conjecturé que $TC(X_{\mathbb{Q}}) = \mathbf{tc}(X)$, mais à ce jour, seulement l'inégalité $TC(X_{\mathbb{Q}}) \leq \mathbf{tc}(X)$ a été prouvée ([19]). De plus, M. Farber a montré que $cat(X) \leq TC(X) \leq 2 \cdot cat(X)$. À la section 7.1, nous montrerons que $\mathbf{tc}(X)$ se comporte de la même façon :

Théorème 1.1. $cat(X_{\mathbb{Q}}) \leq \mathbf{tc}(X) \leq 2 \cdot cat(X_{\mathbb{Q}})$

Aussi, nous calculerons ces invariants sur trois espaces elliptiques, pour obtenir les résultats suivants :

	Section	Type d'espace	cat	TC, \mathbf{tc}
X	7.2	formel	5	10
Y	7.3	homogène non-formel	3	4 ou 5
Z	7.4	non-formel pur	4	7 ou 8

Voici maintenant le contexte dans lequel cette conjecture se situe. Rappelons tout d'abord que deux espaces X et Y ont le même type d'homotopie ($X \simeq Y$) s'il existe deux applications $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $f \circ g \simeq Id$ et $g \circ f \simeq Id$. Aussi, ils ont le même type d'homotopie faible ($X \sim Y$) s'il existe des espaces $X = X(0), X(1), \dots, X(n) = Y$ et des flèches (où l'orientation n'importe pas)

$$X = X(0) \xrightarrow{f_0} X(1) \xleftarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X(n) = Y$$

telles que pour tout $k \geq 0$, les applications $\pi_k(f_i)$ sont des isomorphismes.

En 2003, une nouvelle notion fut apportée par Michael Farber ([5]) à partir des travaux de Smale et Vassiliev. En effet, la *complexité topologique* est un nouveau concept sur lequel nous travaillons

Complexité topologique

depuis seulement une dizaine d'années, et donc, il y a une grande possibilité d'avancement. Mais que signifie-t-elle exactement ? Et pourquoi est-elle intéressante ?

Pour un espace X , nous notons X^I l'ensemble des chemins continus dans X muni de la topologie compacte ouverte. Considérons l'application évaluation $\pi : X^I \rightarrow X \times X$ définie par $\sigma \mapsto (\sigma(0), \sigma(1))$. Puisque X est connexe par arc, l'axiome du choix nous fournit une section $s : X \times X \rightarrow X^I$ à π , c'est-à-dire une application s telle que $\pi \circ s = Id_{X \times X}$. Cependant, à quel moment cette section est-elle continue ?

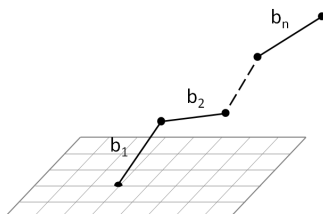
Définition 1.2. Nous appelons la complexité topologique d'un espace X le plus petit entier m tel qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_1, U_2, \dots, U_{m+1}\}$ de $X \times X$ et des applications continues $s_i : U_i \rightarrow X^I$ telles que $\pi \circ s_i = Id_{U_i}$ pour tout $i = 1, \dots, m+1$. Nous notons $TC(X) = m$. Si un tel entier n'existe pas, nous notons $TC(X) = \infty$.

Attention ! Dans son article, Farber définit cet invariant comme étant la *complexité topologique de la planification du mouvement* dans X , et il utilise un index légèrement différent. Il impose en fait que le recouvrement soit composé de n ouverts au lieu de $n+1$. Nous adapterons ses propositions et théorèmes à notre convention.

Par la nature de la topologie compacte ouverte, nous avons ([5]) :

Proposition 1.3. $TC(X) = 0$ si et seulement si X est contractile.

Farber applique entre autre la complexité topologique sur les bras mécaniques, par exemple dans une chaîne de montages en trois dimensions. Supposons que nous avons un bras mécanique fixé au sol et composé de n avant-bras.



L'espace des configurations du bras est équivalent au produit cartésien itéré

$$\underbrace{S^2 \times S^2 \times \dots \times S^2}_{n\text{-fois}}$$

où S^2 est la sphère dans \mathbb{R}^3 . Farber montre que la complexité topologique de ce bras est $2n$. Plus généralement, il montre le résultat suivant ([5]) :

Théorème 1.4. Soit $X = \underbrace{S^m \times S^m \times \dots \times S^m}_{n\text{-fois}}$, où S^m est la sphère dans \mathbb{R}^{m+1} . Alors

$$TC(X) = \begin{cases} n & \text{si } m \text{ est impair} \\ 2n & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases}$$

La complexité topologique peut être assez difficile et longue à calculer si nous n'avons aucune idée dans quel intervalle elle se situe. Notre but est donc de cerner et cibler celle-ci le plus précisément possible. Cette tactique a été appliquée avec grand succès dans le cas d'un autre invariant homotopique : la *LS-catégorie*, introduite en 1934 par L. Lusternik et L. Schnirelmann ([22]).

Définition 1.5. *Pour un espace X , nous appelons la LS-catégorie de X le plus petit entier m tel qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_1, U_2, \dots, U_{m+1}\}$ de X , où tout U_i est contractile dans X . Nous notons $\text{cat}(X) = m$. Si un tel entier n'existe pas, nous notons $\text{cat}(X) = \infty$.*

Tout espace contractile a donc une LS-catégorie de 0. Regardons les sphères de dimension n , pour $n \geq 1$.

Exemple 1.6. *Puisqu'aucune sphère S^n n'est contractile, nous avons $\text{cat}(S^n) \geq 1$. Soient x et y deux pôles opposés de la sphère, et prenons les ouverts contractiles $U_1 = S^n \setminus \{x\}$ et $U_2 = S^n \setminus \{y\}$. Le recouvrement ouvert $\{U_1, U_2\}$ de S^n implique $\text{cat}(S^n) = 1$.*

La LS-catégorie et la complexité topologique sont des cas particuliers de la catégorie sectionnelle :

Définition 1.7. *La catégorie sectionnelle d'une fibration $p : E \rightarrow B$ est le plus petit entier m tel qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_1, U_2, \dots, U_{m+1}\}$ de B ainsi que des applications continues $s_i : U_i \rightarrow E$ respectant $p \circ s_i = \text{Id}_{U_i}$, pour tout $1 \leq i \leq m+1$. Nous notons $\text{secat } p = m$.*

Pour un espace X nous notons X^I l'ensemble des chemins continus dans X . Pour un espace pointé (X, x_0) , nous notons PX l'ensemble des chemins continus dans X démarrant à x_0 , muni de la topologie compacte ouverte.

Lemme 1.8. *Soient les deux fibrations ev_1 et π définies comme suit :*

$$\begin{array}{ll} ev_1 : PX \longrightarrow X & \pi : X^I \longrightarrow X \times X \\ \alpha \longmapsto \alpha(1) & \alpha \longmapsto (\alpha(0), \alpha(1)). \end{array}$$

Alors $\text{cat}(X) = \text{secat}(ev_1)$ et $TC(X) = \text{secat}(\pi)$.

Ceci nous permet en fait d'évaluer le lien entre la LS-catégorie et la complexité topologique dans le théorème suivant, que nous prouverons plus tard (théorème 6.6).

Théorème 1.9. *Pour un espace X simplement connexe, $\text{cat}(X) \leq TC(X) \leq 2 \cdot \text{cat}(X)$.*

Les définitions ci-dessus traitent l'aspect géométrique des espaces. Notons que tout espace topologique possède, en caractéristique 0, un modèle algébrique, c'est-à-dire une algèbre différentielle graduée commutative ayant en particulier la même cohomologie que l'espace en question. Il serait donc intéressant de pouvoir calculer les invariants homotopiques sur ces modèles. Fasso Velenik, L. Lechuga et A. Murillo ([6] et [20]) ont défini la complexité topologique de façon algébrique.

Soit $(\Lambda V, d)$ le modèle de Sullivan d'un espace X (introduit à la section 3.2). Pour alléger l'écriture, notons $A = (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda V, d)$ et $K := \ker \mu$, où $\mu : \Lambda V \otimes \Lambda V \rightarrow \Lambda V$ est la multiplication $u \otimes v \mapsto uv$. Considérons la multiplication itérée $M : A^{\otimes m} \rightarrow A$ définie par $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_m \mapsto \alpha_1 \cdots \alpha_m$, ainsi que la projection canonique $P_m : A^{\otimes m+1} \rightarrow A^{\otimes m+1} / K^{\otimes m+1}$.

Définition 1.10. La complexité algébrique de $(\Lambda V, d)$ est le plus petit entier m tel que, pour le modèle ι_m de P_m

$$\begin{array}{ccc}
 A^{\otimes m+1} & \xrightarrow{P_m} & A^{\otimes m+1} / K^{\otimes m+1} \\
 \downarrow M & \searrow \iota_m & \uparrow \simeq \psi_m \\
 A & \xleftarrow{r} & A^{\otimes m+1} \otimes \Lambda W
 \end{array}$$

il existe une application d'algèbres différentielles graduées commutatives (adgc) $r : A^{\otimes m+1} \otimes \Lambda W \rightarrow A$ telle que $r \circ \iota_m = M$. Nous notons $TC(\Lambda V, d) = m$. Si un tel entier n'existe pas, nous notons $TC(\Lambda V, d) = \infty$.

Afin d'estimer cet invariant, nous cherchons des bornes inférieures et supérieures. C'est ici que le travail de B. Jessup, A. Murillo et P.-E. Parent ([19]) prend son importance. Nous comparons le diagramme commutatif de la définition ci-dessus au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{p_m} & A / K^{m+1} \\
 \searrow r & \searrow \iota_m & \uparrow \simeq \phi_m \\
 & & A \otimes \Lambda W
 \end{array}$$

où $K^{m+1} := M(K^{\otimes m+1})$, avec p_m la projection canonique et ι_m l'inclusion canonique.

Définition 1.11. Nous écrivons $tc(\Lambda V, d) := m$, où m est le plus petit entier tel qu'il existe une rétraction r à ι_m , c'est-à-dire $r \circ \iota_m = Id_A$. Si un tel entier n'existe pas, nous notons $tc(\Lambda V, d) := \infty$.

Remerciements

Je dois un énorme merci à mon superviseur M. Paul-Eugène Parent pour son support et son aide grandiose au courant de mes deux années de maîtrise. Son efficacité et son organisation m'ont beaucoup appris. Je remercie aussi le département de mathématiques et statistique et la faculté des études supérieures de l'université d'Ottawa pour avoir permis la réalisation de ce projet.

Chapitre 2

Préliminaires en topologie

Cette section explique les bases de la topologie que nous utiliserons tout au long de ce travail. Nous parlerons donc d'homotopie, de rationalisation, de cohomologie et de fibrations pour ensuite expliquer ce qu'est le joint d'espaces topologiques.

Nous connaissons déjà les diverses définitions de connexité : connexe, connexe par arc, simplement connexe. Rappelons cependant la définition suivante :

Définition 2.1. Nous disons qu'un espace non-vide X est n -connexe si $\pi_i(X) = 0$ pour tout $i \leq n$. Aussi, nous notons $\text{conn}(X)$ le plus grand entier n tel que X est n -connexe.

Rappelons que

Définition 2.2. Un espace X est normal si pour tout $A, B \subseteq X$ fermés et disjoints, il existe des voisinages ouverts U et V de A et B respectivement tels que $U \cap V = \emptyset$.

2.1 Homotopie

Commençons par un rappel de notation :

Notation 2.3. Pour deux applications homotopes $f, g : X \rightarrow Y$, nous écrivons $f \simeq g$. Pour deux espaces topologiques X et Y , nous écrivons $X \cong Y$ s'ils sont homéomorphes.

Définition 2.4. X et Y ont le même type d'homotopie s'il existe deux applications $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $f \circ g \simeq \text{Id}$ et $g \circ f \simeq \text{Id}$. Nous notons alors $X \simeq Y$. Nous disons que X et Y ont le même type d'homotopie faible s'il existe des espaces $X = X(0), X(1), \dots, X(n) = Y$ et des flèches (où l'orientation n'importe pas)

$$X = X(0) \xrightarrow{f_0} X(1) \xleftarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X(n) = Y$$

tels que pour tout $k \geq 0$, les applications $\pi_k(f_i)$ sont des isomorphismes. Dans ce cas, nous notons $X \sim Y$.

Remarquons alors que $X \cong Y \implies X \simeq Y \implies X \sim Y$. De plus, nous avons le théorème de Whitehead ([33]) :

Théorème 2.5. Si X et Y ont chacun le type d'homotopie d'un CW-complexe, alors $X \simeq Y \iff X \sim Y$.

2.2 Rationalisation

À partir de ce point, nous travaillons rationnellement, à moins d'avis contraire. Il est donc important de bien comprendre ce qu'est une rationalisation, ainsi que quelques autres définitions rationnelles.

Définition 2.6. *Un espace X simplement connexe est dit rationnel si tous ses groupes d'homotopie sont des \mathbb{Q} -espaces vectoriels.*

Définition 2.7. *Une rationalisation d'un espace X est une application continue $f : X \rightarrow X_{\mathbb{Q}}$ où*

- (i) $X_{\mathbb{Q}}$ est un espace rationnel,
- (ii) $\pi_n(f) \otimes \mathbb{Q}$ est un isomorphisme, pour tout $n > 0$.

Définition 2.8. *Deux espaces X et Y ont le même type d'homotopie rationnel s'il existe des espaces $X(0), X(1), \dots, X(n)$ et des flèches f_1, \dots, f_n entre ces espaces (peu importe l'orientation) :*

$$X(0) = X \xrightarrow{f_1} X(1) \xleftarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} X(n) = Y$$

et telles que $\pi_k(f_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sont des isomorphismes, pour tout $k \geq 2$ et $i \in \{1, \dots, n\}$. Dans ce cas, nous écrivons $X \simeq_{\mathbb{Q}} Y$.

Remarquons que le groupe fondamental d'un espace n'est pas nécessairement abélien, et donc n'est en général pas un \mathbb{Z} -module. Le produit tensoriel du π_1 avec \mathbb{Q} n'étant pas nécessairement possible, nous évaluons seulement pour $k \geq 2$ dans la définition 2.8.

2.3 Cohomologie

La cohomologie est une des notions fondamentales de ce travail. Étant le dual de l'homologie, elle est importante à maîtriser.

Soit X un espace topologique, \mathbb{K} un corps, et notons $C_n = C_n(X; \mathbb{K})$ l'ensemble des n -simplexes dans X muni de l'opérateur bord ∂ :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} 0$$

Nous notons ensuite $C^n = \text{Hom}(C_n, \mathbb{K})$ et donc nous avons

$$\dots \xleftarrow{d^{n+1}} C^n \xleftarrow{d^n} C^{n-1} \xleftarrow{d^{n-1}} \dots \xleftarrow{d^3} C^2 \xleftarrow{d^2} C^1 \xleftarrow{d^1} 0$$

où les d^n sont définis dans [8], p. 65, par $d^n(\sigma) = -(-1)^{n-1} \sigma \circ \partial_n$, pour tout $\sigma \in C^{n-1}$.

Définition 2.9. *L'homologie de la dernière suite est appelée la cohomologie de X , que nous notons $H^n(X, \mathbb{K})$. Alors*

$$H^n(X, \mathbb{K}) := \ker d^{n+1} / \text{Im } d^n .$$

Notons aussi que toute application $f : X \rightarrow Y$ induit une application en cohomologie $H^*(f) : H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$. Nous notons $f^* = H^*(f)$.

2.3.1 Trois théorèmes importants

Nous avons les trois résultats suivants ([23], pages 77, 166, 239.).

Théorème 2.10. [Théorème de Eilenberg-Zilber] *Soient X et Y des espaces topologiques. Alors il y a une équivalence d'homotopie*

$$C_*(X) \otimes C_*(Y) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} C_*(X \times Y)$$

En d'autres mots, $H_*(C_*(X) \otimes C_*(Y)) \cong H_*(X \times Y)$.

Théorème 2.11. [Théorème des coefficients universels] *Pour tout espace topologique X et \mathbb{Z} -module A (groupe abélien), nous avons les deux courtes suites exactes naturelles*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes A & \xrightarrow{j} & H_n(X, A) & \longrightarrow & \text{Tor}(H_{n-1}(X, \mathbb{Z}), A) \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), A) & \longrightarrow & H^n(X, A) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}(H_n(X, \mathbb{Z}), A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Notons que, si $A = \mathbb{K}$ est un corps, $\text{Ext}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), \mathbb{K}) = 0$ et donc $H^n(X, \mathbb{K}) \cong \text{Hom}(H_n(X, \mathbb{Z}), \mathbb{K})$.

Aussi, en travaillant sur un corps \mathbb{K} , nous avons

Théorème 2.12. [Formule de Künneth] *Pour des espaces X et Y , il y a un isomorphisme*

$$H^n(X \times Y) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(X) \otimes H^q(Y).$$

2.3.2 Produit Cup

Le produit cup d'un espace X est une application $\cup_{\mathbb{K}} : H^*(X, \mathbb{K}) \otimes H^*(X, \mathbb{K}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{K})$. Puisqu'ici nous travaillons rationnellement, nous noterons $\cup := \cup_{\mathbb{Q}}$. Pour le définir, nous utilisons tout d'abord la diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times X$ définie par $\Delta(x) = (x, x)$.

Le théorème d'Eilenberg-Zilber (2.10) nous donne un isomorphisme $f : H_*(X \times X) \rightarrow H_*(X) \otimes H_*(X)$. En prenant le dual de la suite

$$H_*(X) \xrightarrow{H_*(\Delta)} H_*(X \times X) \xrightarrow{f} H_*(X) \otimes H_*(X),$$

nous obtenons

$$\begin{array}{ccccc} \text{hom}(H_*(X), \mathbb{K}) & \xleftarrow{H^*(\Delta)} & \text{hom}(H_*(X \times X), \mathbb{K}) & \xleftarrow{f^*} & \text{hom}(H_*(X) \otimes H_*(X), \mathbb{K}) \\ g_1 \uparrow \cong & & g_2 \uparrow \cong & & g_3 \uparrow \cong \\ H^*(X, \mathbb{K}) & & H^*(X \times X, \mathbb{K}) & & H^*(X, \mathbb{K}) \otimes H^*(X, \mathbb{K}) \end{array}$$

où les isomorphismes verticaux proviennent du théorème des coefficients universels (théorème 2.11) sur un corps. Nous définissons alors le *produit cup*

$$\cup : H^*(X, \mathbb{K}) \otimes H^*(X, \mathbb{K}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{K})$$

par la composition $\cup = g_1^{-1} \circ H^*(\Delta) \circ f^* \circ g_3$.

Une définition explicite du produit cup se trouve dans [8] p.65.

2.4 Fibrations et Cofibrations

2.4.1 Rappels des définitions

Rappelons qu'une *fibration* (ou *fibration de Hurewicz*) est une application continue $p : E \rightarrow B$ telle que pour tout diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{array}{ccc} Y \times 0 & \xrightarrow{f_1} & E \\ j_0 \downarrow & \nearrow f & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{f_2} & B \end{array}$$

où j_0 est l'inclusion, il existe une application continue $f : Y \times I \rightarrow E$ telle que les deux triangles commutent. Par exemple, tout revêtement $p : E \rightarrow B$ est une fibration.

Exemple 2.13. Soit X un espace. Nous notons X^I l'ensemble des chemins continus en X . Pour un espace pointé (X, x_0) , nous notons PX l'espace des chemins dans X d'origine x_0 , et ΩX l'espace des lacets d'origine x_0 . Alors les deux applications suivantes sont des fibrations :

$$\begin{array}{ll} p : X^I \longrightarrow X \times X & p' : PX \longrightarrow X \\ \alpha \longmapsto (\alpha(0), \alpha(1)) & \alpha \longmapsto \alpha(1). \end{array}$$

La fibre de p' au point de base x_0 est ΩX .

Dualement, une cofibration est une application continue $i : A \rightarrow X$ où pour tout espace topologique Z quelconque et pour tout diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j_A \times 0} & A \times I \\ i \downarrow & \nearrow g & \downarrow i \times Id_I \\ X & \xrightarrow{j_X \times 0} & X \times I \\ & \nearrow h & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

où j_A et j_X sont les inclusions, il existe une application continue $f : X \times I \rightarrow Z$ telle que tous les triangles commutent.

Une cofibration peut aussi être définie comme une application $i : A \rightarrow X$ tel que pour tout espace Z quelconque et pour tout diagramme commutatif solide suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Z^I \\ i \downarrow & \nearrow f & \downarrow ev_0 \\ X & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

il existe une fonction $f : X \rightarrow Z^I$ faisant commuter les deux triangles. Par exemple, les inclusions de CW-complexes sont des cofibrations.

2.4.2 Fibres et cofibres homotopiques

Dans cette section nous montrerons que toute application est équivalente à homotopie près à une fibration ainsi qu'à une cofibration. Nous parlerons ensuite de fibre et cofibre.

Soit deux applications $p : E \rightarrow B$ et $f : B' \rightarrow B$, et prenons leur *produit fibré standard*, c'est-à-dire

$$E' = B' \times_B E := \{(a, e) \in B' \times E \mid f(a) = p(e)\}$$

Alors nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

où p' et f' sont définies par $p'(a, e) = a$ et $f'(a, e) = e$ pour tout $(a, e) \in E'$.

Notation 2.14. Le signe dans le coin supérieur gauche du diagramme ci-dessus signifie qu'il s'agit d'un produit fibré.

La proposition suivante provient de ([28], p.98).

Proposition 2.15. Si p est injective (resp. surjective), alors p' l'est aussi. En particulier, si p est une fibration, p' l'est aussi, et dans ce cas, p' est appelée la fibration induite de p par f .

Remarquons que les fibrations induites sont uniques à homotopie près.

Pour le théorème suivant, nous devons d'abord définir quelques applications. Pour $f : X \rightarrow Y$ une application quelconque, prenons $ev_0 : PY \rightarrow Y$ la fibration définie par $ev_0(\alpha) = \alpha(0)$ et prenons le produit fibré de X et PY :

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y PY & \xrightarrow{f'} & PY \\ p \downarrow & & \downarrow ev_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

où $f'(x, \alpha) = \alpha$ et $p(x, \alpha) = x$ pour tout $(x, \alpha) \in X \times_Y PY$. Notons aussi que p est la fibration induite de ev_0 par f . En notant $c_{f(x)}$ le chemin constant de $f(x)$ dans Y , nous définissons les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{ll} s : X \longrightarrow X \times_Y PY & p_1 : X \times_Y PY \longrightarrow Y \\ x \longmapsto (x, c_{f(x)}) & (x, \alpha) \longmapsto \alpha(1) \end{array}$$

Notons alors que s est une section de p , c'est-à-dire $p \circ s = Id_X$. En résumé, nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y PY & \xrightarrow{f'} & PY \\ s \nearrow \downarrow p & & \downarrow ev_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

(une flèche pointillée p_1 relie $X \times_Y PY$ à Y)

Lemme 2.16. p_1 est une fibration.

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 2.17. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & X \times_Y PY \\ & \searrow f & \swarrow p_1 \\ & & Y \end{array}$$

De plus, $Id_{X \times_Y PY} \simeq_p s \circ p$.

La preuve du lemme et du théorème précédent sont présentées dans [28], p.99-100.

Définition 2.18. La fibration p_1 construite au théorème précédent est appelée la fibration homotopique de f , et sa fibre est la fibre homotopique de f .

Exemple 2.19. Soient un espace X connexe par arcs ainsi que la diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times X$ définie par $x \mapsto (x, x)$. En suivant la construction du théorème précédent et puisque $P(X \times X) \cong PX \times PX$, nous avons l'application $ev_0 : PX \times PX \rightarrow X \times X$ définie par $ev_0(\alpha, \beta) = (\alpha(0), \beta(0))$. Prenons ensuite le produit fibré

$$\begin{aligned} PF &:= X \times_{X \times X} (PX \times PX) = \{(x, \alpha, \beta) \mid \alpha(0) = x = \beta(0)\} \\ &\cong PX \end{aligned}$$

où l'isomorphisme associe (x, α, β) au chemin $\bar{\alpha}.\beta$. La fibration homotope à Δ est donc $p_1 : PF \rightarrow X \times X$ définie par $p_1(x, \alpha, \beta) = (\alpha(1), \beta(1))$, où, par l'isomorphisme, nous transformons en $p_1 : PX \rightarrow X \times X$ avec $\gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1))$. Puisque $X \times X$ est connexe par arcs, toute fibre a le même type d'homotopie et donc la fibre homotopique de Δ est bien ΩX , la fibre de p_1 .

Par construction de p_1 , nous savons qu'il s'agit d'une fibration. De même façon, nous pourrions prouver que, pour un espace pointé (X, x_0) , l'application $ev_1 : P(X, x_0) \rightarrow X$ définie par $ev_1(\alpha) = \alpha(1)$ est une fibration.

Nous pouvons aussi travailler dualement, c'est-à-dire avec les cofibrations. Soit deux applications $f_1 : X \rightarrow X_1$ et $f_2 : X \rightarrow X_2$ pour des espaces X, X_1 et X_2 . Prenons la somme amalgamée X' , c'est-à-dire l'espace quotient formé par $X_1 \vee X_2$ où l'on identifie $f_1(x)$ et $f_2(x)$ pour tout $x \in X$. Alors nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{i_2} & X_2 \\ \uparrow i_1 & & \uparrow f_2 \\ X_1 & \xleftarrow{f_1} & X \end{array} \quad \lrcorner$$

où i_1 et i_2 sont les projections canoniques. Notons que le signe dans le coin inférieur droit du diagramme ci-dessus signifie qu'il s'agit d'une somme amalgamée.

Proposition 2.20. Si f_1 est une cofibration, alors i_2 l'est aussi, et nous l'appelons la cofibration induite de f_1 par f_2 .

Pour obtenir la cofibration homotopique, il nous faut connaître la construction cylindre d'une application.

Définition 2.21. Pour une application quelconque $f : X \rightarrow Y$, nous appelons la construction cylindre de f l'espace

$$Z_f = (X \times I) \sqcup Y /_{(x,1) \sim f(x)}$$

Nous avons alors deux cofibrations $i_X : X \rightarrow Z_f$ et $i_Y : Y \rightarrow Z_f$ définies par $i_X(x) = [x, 0]$ et $i_Y(y) = [y]$, ainsi qu'une application $r : Z_f \rightarrow Y$ où $r([x, t]) = f(x)$ et $r([y]) = y$ pour tout $(x, t) \in X \times I$, $y \in Y$. Alors, ([28], p.32)

Théorème 2.22. Pour toute application $f : X \rightarrow Y$, il existe une cofibration i_X et une application r de sorte que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{r} & Z_f \\ & \searrow f & \nearrow i_X \\ & X & \end{array}$$

et que $Id_{Z_f} \simeq (i_Y \circ r)$ rel Y .

Notons que l'homotopie peut être prouvée à l'aide de l'application $H : Z_f \times I \rightarrow Z_f$ définie par $H([x, t], s) = [x, (1-s)t + s]$ et $H([y], s) = [y]$.

Définition 2.23. La cofibration i_X du théorème précédent est appelée la cofibration homotopique de f , et sa cofibre est la cofibre homotopique de f .

2.5 Joint

Nous pouvons maintenant regarder la version topologique du joint, qui sera utilisé plus tard dans le calcul de la catégorie sectionnelle.

Définition 2.24. Soient deux applications $f : X \rightarrow Z$ et $g : Y \rightarrow Z$. Nous avons le produit fibré homotopique standard

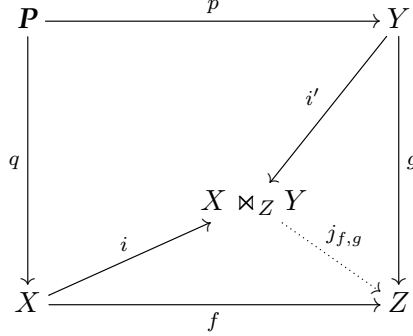
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} & \xrightarrow{p} & Y \\ q \downarrow & & \swarrow \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

défini par $\mathbf{P} = \{(x, \theta, y) \in X \times Z^I \times Y \mid \theta(0) = f(x) \text{ et } \theta(1) = g(y)\}$ et où p et q sont les projections canoniques. Nous appelons le joint $X \bowtie_Z Y$ de X et Y au dessus de Z la somme amalgamée homotopique de p et q , c'est-à-dire

$$X \bowtie_Z Y := (\mathbf{P} \times I) \sqcup X \sqcup Y /_{\sim}, \text{ où } \sim \text{ est telle que } (x, \theta, y, 0) \sim x \text{ et } (x, \theta, y, 1) \sim y$$

Complexité topologique

L'application joint de f et g est l'application induite $j_{f,g} : X \rtimes_Z Y \rightarrow Z$ définie par $j_{f,g}([x, \theta, y, t]) = \theta(t)$ pour tout $(x, \theta, y, t) \in \mathbf{P}$. Alors $j_{f,g}([x]) = f(x)$ et $j_{f,g}([y]) = g(y)$, pour tout $x \in X, y \in Y$. Nous avons donc le diagramme commutatif



où i et i' sont les inclusions canoniques.

Nous définissons récursivement $\rtimes_Z^n X$, le n^e joint de f , par

$$\rtimes_Z^0 X = X \quad \text{et} \quad \rtimes_Z^n X = (\rtimes_Z^{n-1} X) \rtimes_Z X,$$

ainsi que $j^0 f = f$ et $j^n f = j_{j^{n-1} f, f}$, ou $j^n f : \rtimes_Z^n X \rightarrow Z$ est la n^e application joint.

Remarque 2.25. Par construction du joint, si f et g sont des fibrations, $j_{f,g}$ est aussi une fibration.

Maintenant, nous utilisons le joint pour borner notre invariant *secat*, à l'aide du théorème suivant ([29], théorème 2.2).

Théorème 2.26. Soit une fibration $p : E \rightarrow B$, où B est un espace normal. Alors *secat*(p) est le plus petit entier n tel que $j^n p$ admet une section.

Chapitre 3

De la topologie à l'algèbre

Dans cette section, nous montrons comment passer du côté topologique au point de vue algébrique, à l'aide du foncteur de Sullivan. Avant de discuter de ce foncteur, nous regardons les bases algébriques qui nous seront nécessaires.

3.1 Algèbres et cohomologie d'une algèbre

Nous construisons ici la catégorie des algèbres différentielles graduées commutatives.

Définition 3.1. Une algèbre graduée commutative (agc) sur un corps \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel gradué $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A^i$ muni d'une application bilinéaire $\cdot : A \times A \rightarrow A$ respectant

$$(1) A^n \cdot A^m \subseteq A^{n+m}$$

$$(2) x \cdot y = (-1)^{|x||y|} y \cdot x$$

où pour un élément $x \in A^n$, nous notons $|x| = n$ son degré. Nous imposons $\mathbb{K} \subseteq A^0$.

Définition 3.2. Une algèbre différentielle graduée commutative (adgc) sur un corps \mathbb{K} est une agc A munie d'une application linéaire $d : A^n \rightarrow A^{n+1}$ appelée différentielle, de sorte que

$$d(xy) = (dx)y + (-1)^{|x|} x(dy) \quad \text{et} \quad d^2 = 0$$

pour tout $x, y \in A$.

Maintenant que nous avons défini les algèbres nécessaires, nous introduisons les applications entre elles.

Définition 3.3. Soient (A, d_A) , (B, d_B) et $f : (A, d) \rightarrow (B, \delta)$ une application. Nous disons que f est un morphisme d'adgc s'il s'agit d'un morphisme homogène de degré 0 entre algèbres et respectant $f(d_A(x)) = d_B(f(x))$ pour tout $x \in A$.

Nous pouvons ainsi calculer la cohomologie d'une adgc (A, d) .

Définition 3.4. Un cocycle de (A, d) est un élément $\alpha \in A$ tel que $d\alpha = 0$. Nous notons Z_A l'ensemble des cocycles. Un cobord de (A, d) est un élément $\alpha \in A$ tel qu'il existe $\beta \in A$ de sorte que $d\beta = \alpha$. Nous notons B_A l'ensemble des cobords.

Puisque $d^2 = 0$, nous avons $B_A \subseteq Z_A$.

Définition 3.5. La cohomologie de (A, d) est l'algèbre définie par l'espace quotient

$$H^*(A, d) := Z^A / B_A$$

muni de la graduation induite.

Regardons comment les cocycles et cobords se comportent dans un produit tensoriel. Soient deux adgc (E, d_E) et (F, d_F) , ainsi que le produit tensoriel $(E \otimes F, d)$. Il est vrai qu'un monôme $z \in Z_{E \otimes F}$ respecte $z \in Z_E \otimes Z_F$. Cependant, que se passe-t-il lorsque $z \in Z_{E \otimes F}$ est une combinaison linéaire d'éléments de $E \otimes F$? En fait, nous avons la relation suivante ([12], section 2.10).

Lemme 3.6. $Z_{E \otimes F} = Z_E \otimes Z_F + B_{E \otimes F}$.

La définition algébrique du type d'homotopie rationnelle est aussi différente de la version topologique. En effet, dans la définition 2.8 nous utilisons l'homotopie, tandis qu'en algèbre, nous utilisons la cohomologie. Nous nécessitons tout d'abord la définition suivante.

Définition 3.7. Un quasi-isomorphisme $f : (A, d) \xrightarrow{\simeq} (B, d)$ est une application induisant un isomorphisme en cohomologie, c'est-à-dire telle que

$$\begin{aligned} f^* := H^*(f) : H^*(A, d) &\longrightarrow H^*(B, d) \\ [\alpha] &\longmapsto [f(\alpha)] \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Définition 3.8. Deux adgc (A, d) et (B, d) sont de même type d'homotopie rationnelle s'il existe une suite de quasi-isomorphismes les reliant.

3.2 Modèles de Sullivan

Regardons maintenant comment modéliser les espaces. C'est ici que le foncteur de Sullivan prend son importance. Dans cette section, nous observerons comment passer d'un espace topologique à une adgc. Nous en apprendrons davantage sur un type d'adgc : les algèbres de Sullivan.

Soient **Top** la catégorie des espaces topologiques, et **ADGC** celle des adgc. Nous avons le foncteur contravariant

$$A_{PL} : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{ADGC}$$

que nous appelons le *foncteur de Sullivan*. Sa principale propriété est que $H^*(A_{PL}(X)) \cong H^*(X)$ lorsque nous travaillons sur un corps de caractéristique 0. Aussi, nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.9. $A_{PL}(X \times Y) \simeq A_{PL}(X) \otimes A_{PL}(Y)$.

Bien que le foncteur de Sullivan soit le point central de l'homotopie rationnelle, nous ne le définissons pas explicitement, puisqu'il est défini dans [8], chapitre 9. Pour un espace X , nous rappelons ici une algèbre plus «petite» que $A_{PL}(X)$, mais qui conserve toutes ses propriétés homotopiques.

Soit $V = \{V^i\}_{i \geq 2}$ et considérons l'algèbre tensorielle $TV = \mathbb{Q} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \dots$. Notons I l'idéal bilatère de TV engendré par $\{ab - (-1)^{|a||b|}ba \mid a, b \in V\}$, et posons l'espace quotient

$$\Lambda V := TV/I$$

que nous appelons *l'algèbre commutative graduée engendrée par V* . Remarquons que pour tout $a \in V$, nous avons $a^2 - (-1)^{|a|^2}a^2 = 0$ et donc, si $|a|$ est impair, $a^2 = 0$. Ceci est vrai sur n'importe quel corps de caractéristique $\neq 2$.

Définition 3.10. Une algèbre de Sullivan est une adgc $(\Lambda V, d)$ où

- (i) $V = \{V^p\}_{p \geq 1}$ et ΛV représente l'algèbre graduée commutative engendrée par V .
- (ii) d est une différentielle nilpotente, c'est-à-dire que nous pouvons écrire V comme une union de sous-espaces gradués $\bigcup_{k=0}^{\infty} V(k)$ où $V(0) \subset V(1) \subset \dots$ et telle que $d(V(0)) = 0$ et $d(V(k)) \subseteq \Lambda V(k-1)$ pour tout $k \geq 1$.

Nous utiliserons aussi l'identification naturelle $(\Lambda V, d) \otimes (\Lambda W, d) \cong (\Lambda(V \oplus W), d)$.

Notation 3.11. La différence entre les indices et les exposants utilisés sur les algèbres de Sullivan est très importante. Par exemple, $\Lambda^k V$ représente les mots de longueur k dans ΛV , tandis que $(\Lambda V)^k$ est l'ensemble des mots de degrés k dans ΛV . Nous pouvons aussi retrouver $(\Lambda^k V)^l$, c'est-à-dire l'ensemble des mots de longueur k et de degré l . Pour alléger la notation, nous écrivons le degré d'un élément en indice de celui-ci lorsqu'on l'introduit.

Définition 3.12. Soit (A, d) une adgc. Un modèle de Sullivan de (A, d) est un quasi-isomorphisme $m : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (A, d)$, où $(\Lambda V, d)$ est une algèbre de Sullivan.

Un modèle de Sullivan d'un espace X est un modèle de Sullivan de $A_{PL}(X)$.

Une algèbre de Sullivan est dite minimale si $dV \subset \Lambda^{\geq 2}V$.

Nous avons le théorème d'existence suivant ([8], propositions 12.1 et 12.2).

Proposition 3.13. Soit (A, d) une adgc telle que $H^0(A) \cong \mathbb{Q}$. Alors (A, d) possède un modèle de Sullivan.

De plus, si $H^1(A) = 0$, (A, d) possède un modèle minimal de Sullivan, et celui-ci est unique à isomorphisme près.

Proposition 3.14. Soit X un espace simplement connexe de type fini et $(\Lambda V, d)$ son modèle minimal. Alors

$$V^i \cong \text{Hom}(\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}, \mathbb{Q}), \quad \text{pour tout } i \geq 0$$

Une conséquence de ce résultat est que $V^1 = 0$.

Les modèles de Sullivan nous permettent aussi de modéliser un morphisme d'adgc en un morphisme entre algèbre de Sullivan ([8], p.148).

Proposition 3.15. Soient des adgc (A, d) et (B, d) , et des modèles de Sullivan $m_A : (\Lambda V_A, d) \xrightarrow{\simeq} (A, d)$ et $m_B : (\Lambda V_B, d) \xrightarrow{\simeq} (B, d)$. Soit $\phi : (A, d) \rightarrow (B, d)$ un morphisme d'adgc. Si m_B est surjectif, alors il existe un morphisme ω tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (A, d) & \xrightarrow{\phi} & (B, d) \\ m_A \uparrow \simeq & & \simeq \uparrow m_B \\ (\Lambda V_A, d) & \xrightarrow{\omega} & (\Lambda V_B, d) \end{array}$$

Complexité topologique

Exemple 3.16. Essayons de trouver un modèle minimal de Sullivan pour les sphères S^n . Rappelons deux points :

$$(1) H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(2) La construction du modèle d'un espace nécessite la construction de deux ingrédients : une adgc $(\Lambda V, d)$ ainsi qu'un quasi-isomorphisme $\phi : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X)$.

Nous construisons les deux simultanément par induction sur le degré.

Commençons par S^2 . En degré 0, posons $\phi(1) = 1$. Comme $H^1(S^2) = 0$, posons $V^1 = 0$ et $\phi \equiv 0$ en degré 1. En degré 2, il existe une classe non-nulle $[x] \in H^2(S^2)$ avec $x \in A_{PL}(S^2)$. Nous introduisons alors $\alpha \in V^2$ avec $\phi(\alpha) = x$. De plus, en posant $d\alpha = 0$, nous assurons la commutativité de ϕ et d . Nous avons, du degré 0 au degré 2,

$$\phi : (\Lambda\alpha, 0) \longrightarrow A_{PL}(S^2)$$

En degré 3, ϕ demeure un quasi-isomorphisme. Cependant en degré 4, nous avons $\phi(\alpha^2) = x^2$, où $[\alpha^2] \in H^4(\Lambda\alpha, d)$ est non-nulle, mais $[x^2] \in H^4(A_{PL}(S^2)) \cong 0$ est nulle. Il existe donc un $y \in A_{PL}^3(S^2)$ tel que $dy = x^2$. Introduisons donc un générateur $\beta \in V^3$ tel que $\phi(\beta) = y$ et $d\beta = \alpha^2$. De cette façon, ϕ est un quasi-isomorphisme jusqu'en degré 4. On remarque $H^{>4}(S^2) = 0$, mais qu'en est-il de $H^{>4}(\Lambda(\alpha, \beta), d)$? En degré supérieur à 4, nous avons les générateurs

- (1) α^n pour $n > 2$
- (2) $\alpha^k \beta$ pour $k > 0$

Le premier cas est un cocycle, mais aussi un cobord : $\alpha^n = d(\alpha^{n-2}\beta)$. Le deuxième cas n'est pas un cocycle. N'ayant pas de cohomologie en degré supérieur à 4, nous concluons que ϕ est un quasi-isomorphisme et le modèle minimal de S^2 est

$$(\Lambda(\alpha_2, \beta_3), d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(S^2).$$

Construisons maintenant le modèle de S^3 . De la même façon, en degré 0 nous posons $\phi(1) = 1$. Comme $H^1(S^3) = H^2(S^3) = 0$, posons $V^1 = V^2 = 0$ et $\phi \equiv 0$ en degré 1 et 2. En degré 3, il existe une classe non-nulle $[x] \in H^3(S^3)$ avec $x \in A_{PL}(S^3)$. Nous introduisons alors $\alpha \in V^3$ avec $\phi(\alpha) = x$. Pour faire commuter la différentielle nous imposons $d\alpha = 0$. Du degré 0 au degré 3, ϕ est un quasi-isomorphisme. Ensuite, $H^{>3}(S^3) = 0$. Puisque α est de degré impair, nous avons $V^{>3} = 0$, et donc aussi $H^{>3}(\Lambda\alpha, d) = 0$. Nous concluons que ϕ est un quasi-isomorphisme, et le modèle minimal de S^3 est

$$(\Lambda(\alpha_3), 0) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(S^3)$$

En faisant de même, nous obtenons les modèles minimaux de Sullivan

$$\begin{aligned} (\Lambda(\alpha_{2n}, \beta_{4n-1}), d) &\xrightarrow{\simeq} A_{PL}(S^{2n}) && \text{où } d(\alpha) = 0 \text{ et } d(\beta) = \alpha^2 \\ (\Lambda(\alpha_{2n+1}), 0) &\xrightarrow{\simeq} A_{PL}(S^{2n+1}) \end{aligned}$$

Exemple 3.17. Essayons maintenant de trouver le modèle minimal de Sullivan $(\Lambda V, d)$ de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, en connaissant

$$H^k(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } k = 0, 2, 4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous voulons construire une adgc $(\Lambda V, d)$ ainsi qu'un quasi-isomorphisme $\phi : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$.

Complexité topologique

En degré 0, posons $\phi(1) = 1$, et en degré 1, posons $V^1 = 0$ et $\phi \equiv 0$. En degré 2, il existe un générateur $[x] \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$ avec $x \in A_{PL}^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$. Introduisons $\alpha \in V^2$ tel que $\phi(\alpha) = x$ et $d\alpha = 0$. En degré 3 il n'y a pas de cohomologie dans aucun de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et $(\Lambda\alpha, d)$. Posons alors $V^3 = 0$. En degré 4, ϕ demeure un quasi-isomorphisme, car nous avons les classes non-nulles $[\alpha^2] \in H^4(\Lambda\alpha, d)$ et $[x^2] \in H^4(A_{PL}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2))$, avec $\phi(\alpha^2) = x^2$. En degré 5, nous posons encore $V^5 = 0$. En degré 6, nous avons $\phi(\alpha^3) = x^3$, où $[\alpha^3] \in H^6(\Lambda\alpha, d)$ est non-nulle, mais où $H^4(A_{PL}(S^2)) \cong 0$ impose $[x^2] = 0$. Il existe donc un $y \in A_{PL}^5(S^2)$ tel que $dy = x^3$. Introduisons donc un générateur $\beta \in V^5$ tel que $\phi(\beta) = y$ et, par commutativité de d , $d\beta = \alpha^3$. De cette façon, ϕ est un quasi-isomorphisme jusqu'en degré 6. Notons que $H^{>6}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = 0$. En degré supérieur à 6, les cocycles de $(\Lambda(\alpha, \beta), d)$ sont engendrés par les éléments de la forme α^k , pour $k > 3$. Ceux-ci sont aussi des cobords : $d(\alpha^{k-3}\beta) = \alpha^k$. Alors $H^{>6}(\Lambda(\alpha, \beta), d) = 0$. En conclusion, ϕ est un quasi-isomorphisme et le modèle minimal de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ est

$$(\Lambda(\alpha_2, \beta_5), d) \xrightarrow{\cong} A_{PL}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$$

avec $d(\beta) = \alpha^3$.

Exemple 3.18. Calculons plus généralement le modèle minimal de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, connaissant la cohomologie :

$$H^k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } k \text{ est pair et } 0 \leq k \leq 2n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous voulons construire une adgc $(\Lambda V, d)$ ainsi qu'un quasi-isomorphisme $\phi : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\cong} A_{PL}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$.

En degré 0, posons $\phi(1) = 1$. En degré 2, En degré 2, il existe un générateur $[x] \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$ avec $x \in A_{PL}^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$. Introduisons $\alpha \in V^2$ tel que $\phi(\alpha) = x$ et $d\alpha = 0$. Nous obtenons

$$\begin{array}{rclcl} & (\Lambda\alpha, d) & \xrightarrow{\cong} & A_{PL}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) & \\ 2 : & \alpha & \mapsto & x & \\ 4 : & \alpha^2 & \mapsto & x^2 & \\ & & \dots & & \\ 2n : & \alpha^n & \mapsto & x^n & \\ 2n+2 : & \alpha^{n+1} & \mapsto & x^{n+1} & \\ & & \dots & & \end{array}$$

où toute classe $[\alpha^k] \in H^{2k}(\Lambda\alpha, d)$ est non-nulle. Du côté droit, les classes $[x^k] \in H^{2k}(A_{PL}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n), d)$ sont non-nulles pour $0 \leq k \leq 2n$, et elles sont nulles pour $k > 2n$. Il existe donc un élément $y \in A_{PL}^{2n+1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ avec $dy = x^{n+1}$. Introduisons $\beta \in V^{2n+1}$ avec $\phi(\beta) = y$ et $d\beta = \alpha^{n+1}$. L'élément y est suffisant pour éliminer les classes de tout x^k , $k > n$, puisque $d(x^{n+k-1}y) = x^{2n+k}$. Les cocycles de $(\Lambda(\alpha, \beta), d)$ en degré supérieur à $2n$ sont engendrés par les puissances α^k , $k > n$, qui sont aussi des cobords : $d(\alpha^{n+k-1}\beta) = \alpha^{2n+k}$. Alors $H^{>2n}(\Lambda(\alpha, \beta), d) = H^{>2n}(A_{PL}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)) = 0$. Alors ϕ est un quasi-isomorphisme et le modèle minimal de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ est

$$(\Lambda(\alpha_2, \beta_{2n+1}), d) \xrightarrow{\cong} A_{PL}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$$

avec $d\alpha = 0$ et $d(\beta) = \alpha^{n+1}$.

Exemple 3.19. Voici un exemple d'algèbre de la forme $(\Lambda V, d)$ mais qui n'est pas une algèbre de Sullivan :

$$M = (\Lambda(a_1, b_1, c_1), d),$$

où $da = bc$, $db = ac$ et $dc = ab$. Évaluons sa cohomologie. Nous avons $H^0(M) = \mathbb{Q}$. En degré 1, l'absence de cocycle implique $H^1(M) = 0$. Le degré 2 étant engendré par $d(\{a, b, c\})$, tout élément est un cocycle et un cobord, et donc $H^2(M) = 0$. Le degré 3 est engendré par le cocycle abc , qui n'est pas un cobord. Donc $H^3(M) = \mathbb{Q}$. N'ayant pas d'élément de degré plus élevé que 4, tous les autres groupes de cohomologie de M sont nuls.

Nous avons donc un quasi-isomorphisme $(\Lambda(\alpha_3), 0) \xrightarrow{\cong} (\Lambda(a_1, b_1, c_1), d)$ qui n'est pas un isomorphisme. Puisque $(\Lambda(\alpha_3), 0)$ est un modèle de Sullivan de S^3 , l'unicité de la proposition 3.13 implique que M n'est pas un modèle de Sullivan.

3.3 Modèles relatifs de Sullivan

Pour modéliser les applications, nous nécessitons les modèles relatifs de Sullivan.

Définition 3.20. Une algèbre relative de Sullivan est une adgc de la forme $(B \otimes \Lambda V, d)$ telle que

- (1) $(B \otimes 1, d)$ est une sous-algèbre et $H^0(B \otimes 1) = \mathbb{Q}$
- (2) $1 \otimes V = \{V^p\}_{p \geq 1}$
- (3) $V = \bigcup_{k=0}^{\infty} V(k)$, où les $V(k)$ sont des sous-espaces gradués tels que $V(0) \subset V(1) \subset \dots$ et de sorte que $d(V(0)) \subseteq B$ et $d(V(k)) \subseteq B \otimes \Lambda V(k-1)$ pour tout $k \geq 1$.

Nous disons alors qu'il s'agit d'une algèbre relative de Sullivan de base B .

Encore une fois, la troisième partie est la condition de nilpotence. Pour alléger l'écriture, nous utiliserons $B = B \otimes 1$ et $\Lambda V = 1 \otimes \Lambda V$. Remarquons aussi qu'une algèbre de Sullivan est une algèbre relative de Sullivan de base \mathbb{Q} .

Définition 3.21. Une algèbre relative de Sullivan $(B \otimes \Lambda V, d)$ est dite minimale si $\text{Im } d \subseteq (B^+ \otimes \Lambda V) + (B \otimes \Lambda^{\geq 2} V)$.

Définissons maintenant comment modéliser un morphisme d'adgc ou d'espaces topologiques à l'aide de ces modèles.

Définition 3.22. (1) Soit $\phi : (B, d) \rightarrow (C, d)$ un morphisme d'adgc tel que $H^0(B) = \mathbb{Q}$. Alors un modèle de Sullivan pour ϕ est un quasi-isomorphisme $m : (B \otimes \Lambda V, d) \xrightarrow{\cong} (C, d)$ où $(B \otimes \Lambda V, d)$ est une algèbre relative de Sullivan de base B et tel que $m|_B = \phi$. Il s'agit d'un modèle minimal de Sullivan pour ϕ si $(B \otimes \Lambda V, d)$ est minimal.

- (2) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre espaces topologiques. Alors un modèle de Sullivan pour f est un modèle de Sullivan pour $A_{PL}(f) : A_{PL}(Y) \rightarrow A_{PL}(X)$.

Notons que nous considérons parfois seulement $(B \otimes \Lambda V, d)$ comme modèle de Sullivan de ϕ .

À ce point, une question nous revient à l'esprit. Est-ce que tout morphisme d'adgc possède un modèle de Sullivan ? Nous avons une version relative de la proposition 3.13 ([8], proposition 14.3 et corollaire 14.12).

Proposition 3.23. Soit $\phi : (B, d) \rightarrow (C, d)$ un morphisme d'adgc tel que $H^0(B) = H^0(C) = \mathbb{Q}$ et tel que $H^1(\phi)$ est injective. Alors ϕ possède un modèle de Sullivan.

Plus précisément, ϕ possède un modèle minimal de Sullivan $m : (B \otimes \Lambda V, d) \xrightarrow{\cong} (C, d)$, unique à isomorphisme près.

De plus, nous avons le lemme suivant, tiré de [8], lemme 14.4.

Lemme 3.24. [Lemme de relèvement]. *Soit le diagramme commutatif d'adgc suivant*

$$\begin{array}{ccc} (B, d) & \xrightarrow{f} & (A, d) \\ \downarrow \iota & \nearrow r & \downarrow \simeq \phi \\ (B \otimes \Lambda V, d) & \xrightarrow{g} & (C, d), \end{array}$$

où ι est l'inclusion canonique, et ϕ est un quasi-isomorphisme surjectif. Alors il existe un morphisme d'adgc $r : (B \otimes \Lambda V, d) \rightarrow (A, d)$ faisant commuter les triangles ci-dessus.

3.3.1 Fibrations et longue suite exacte

Avant de donner des exemples sur les modèles relatifs, donnons plus de précision lorsque nous travaillons avec les fibrations.

Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration et soit $j : F \rightarrow E$ l'inclusion de la fibre F du point de base $b_0 \in B$. Le foncteur de Sullivan nous donne

$$A_{PL}(B) \xrightarrow{A_{PL}(p)} A_{PL}(E) \xrightarrow{A_{PL}(j)} A_{PL}(F).$$

Soit $\iota : b_0 \rightarrow B$ l'inclusion du point de base. Par définition du foncteur de Sullivan, nous avons $A_{PL}(b_0) \cong \mathbb{Q}$. Nous définissons donc $\varepsilon := A_{PL}(\iota) : A_{PL}(B) \rightarrow \mathbb{Q}$ l'augmentation à b_0 .

La proposition 3.13 nous fournit le modèle minimal de B ,

$$m_B : (\Lambda V_B, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(B).$$

Définissons le modèle de $A_{PL}(p) \circ m_B$, dont l'existence vient de la proposition 3.23 :

$$m : (\Lambda V_B \otimes \Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(E).$$

Nous modélisons la fibre comme suit ([8], p.196) :

Définition 3.25. *L'algèbre quotient de Sullivan $(\Lambda V, \bar{d}) := \mathbb{Q} \otimes_{A_{PL}(B)} (A_{PL}(B) \otimes \Lambda V, d)$, définie par ε , est appelée la fibre du modèle à $b_0 \in B$.*

Sous certaines conditions, la fibre du modèle est un modèle de la fibre ([8], théorème 15.3).

Théorème 3.26. *Supposons que B est simplement connexe et que un de $H^*(B)$ ou $H^*(F)$ est de type fini. Alors il existe un quasi-isomorphisme $\bar{m} : (\Lambda V, \bar{d}) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(F)$, faisant commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} A_{PL}(B) & \xrightarrow{A_{PL}(p)} & A_{PL}(E) & \xrightarrow{A_{PL}(j)} & A_{PL}(F) \\ m_B \uparrow \simeq & & m \uparrow \simeq & & \bar{m} \uparrow \simeq \\ (\Lambda V_B, d) & \xrightarrow{i} & (\Lambda V_B \otimes \Lambda V, d) & \xrightarrow{\varepsilon \cdot Id} & (\Lambda V, \bar{d}) \end{array}$$

Complexité topologique

Regardons seulement la partie linéaire du diagramme ci-dessus. Notons d_0 la différentielle sur $V_B \oplus V$ définie par $d_0x = dx$ si $dx \in V_B \oplus V$ et $d_0x = 0$ sinon, pour tout $x \in V_B \oplus V$. Alors nous pouvons prouver l'existence de la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow (V_B, 0) \xrightarrow{i} (V_B \oplus V, d_0) \xrightarrow{\varepsilon \cdot Id} (V, 0) \longrightarrow 0$$

Nous prenons alors le dual de la suite exacte longue en homologie ([10], théorème 5.8) :

$$\dots \longrightarrow H^k(V_B, 0) \longrightarrow H^k(V_B \oplus V, d_0) \longrightarrow H^k(V, 0) \longrightarrow H^{k+1}(V_B, 0) \longrightarrow \dots$$

Théorème 3.27. *Si E et F sont simplement connexes, nous pouvons identifier la suite ci-dessus au dual de la suite longue en homotopie de p , c'est-à-dire*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H^k(V_B, 0) & \longrightarrow & H^k(V_B \oplus V, d_0) & \longrightarrow & H^k(V, 0) & \longrightarrow & H^{k+1}(V_B, 0) & \longrightarrow & \dots \\ & & \cong \Big| & & \cong \Big| & & \cong \Big| & & \cong \Big| & & \\ \dots & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(\pi_k(B), \mathbb{Q}) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(\pi_k(E), \mathbb{Q}) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(\pi_k(F), \mathbb{Q}) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(\pi_{k+1}(B), \mathbb{Q}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

La preuve se retrouve dans [8], proposition 15.13. Ce dernier théorème nous aidera à vérifier nos calculs dans les exemples suivants, où nous cherchons les modèles minimaux relatifs.

Exemple 3.28. *Trouvons le modèle minimal de Sullivan de la fibration de Hopf $\eta : S^3 \rightarrow S^2$. Par la proposition 3.15, nous avons le diagramme homotopiquement commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(S^2) & \xrightarrow{A_{PL}(\eta)} & A_{PL}(S^3) \\ m \uparrow \simeq & & \simeq \uparrow n \\ (\Lambda(a_2, b_3), d) & \xrightarrow{\omega} & (\Lambda(c_3), 0) \end{array}$$

où m et n sont des modèles de Sullivan, avec $da = 0$ et $db = a^2$. Les degrés des éléments imposent la définition suivante pour ω :

$$\begin{aligned} a &\longmapsto 0 \\ b &\longmapsto \alpha c, \end{aligned}$$

avec $\alpha \in \mathbb{Q}$. Ceci commute bien avec la différentielle. Trouvons donc α . Nous savons que la fibration de Hopf donne l'isomorphisme $\pi_3(S^2) \cong \pi_3(S^3)$. Cet isomorphisme envoie alors le générateur de $\pi_3(S^2)$ sur le générateur de $\pi_3(S^3)$. Dans nos modèles, ceci implique que $\alpha = 1$, et donc $\omega(b) = c$.

Nous cherchons ϕ et V de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda(a, b), d) & \xrightarrow{\omega} & (\Lambda(c), 0) \\ & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\ & & (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda V, D) \end{array}$$

Complexité topologique

où $\iota(a) = a \otimes 1$ et $\iota(b) = b \otimes 1$. Pour alléger la notation, nous écrivons les éléments sans tenseurs, et donc $\iota(a) = a$, $\iota(b) = b$. Par commutativité, nous avons $\phi(a) = 0$. Puisque ϕ est un quasi-isomorphisme et que la classe d'homologie de a dans $(\Lambda(a, b), d)$ est non nulle, il existe un $x \in V^1$ tel que $D(x) = a$. Posons $\phi(x) = 0$. En degré 3, nous avons une classe non-nulle dans $(\Lambda(c), 0)$: la classe de c . Il existe donc un cocycle de degré 3 dans $(\Lambda(a, b) \otimes \Lambda V, D)$ dont $H(\phi)$ envoie sa classe sur $[c]$. Cet élément existe déjà : $b - ax$. Il s'agit bien d'un cocycle, car

$$D(b - ax) = db - D(ax) = a^2 - d(a)x - aD(x) = a^2 - a^2 = 0.$$

De plus, $[\phi(b - ax)] = [\phi(b)] - [\phi(ax)] = [c]$.

Nous avons alors tous nos éléments pour créer notre quasi-isomorphisme jusqu'en degré 3. Utilisons la longue suite en homotopie pour vérifier que nous n'avons pas d'éléments dans $V^{>3}$. Par [10], théorème 7.14, nous avons la longue suite exacte rationnelle

$$\dots \longrightarrow \pi_{n+1}(S_{\mathbb{Q}}^2) \longrightarrow \pi_n(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \pi_n(S_{\mathbb{Q}}^3) \longrightarrow \pi_n(S_{\mathbb{Q}}^2) \longrightarrow \pi_{n-1}(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \dots$$

où F est la fibre de η . Cependant, puisque $\pi_{n+1}(S_{\mathbb{Q}}^2) = \pi_n(S_{\mathbb{Q}}^3) = 0$ pour tout $n > 3$, nous avons la suite exacte $0 \longrightarrow \pi_n(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow 0$ et donc $\pi_n(F_{\mathbb{Q}}) = 0$ pour tout $n > 3$. Par le théorème 3.27, nous identifions $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_n(F_{\mathbb{Q}}), \mathbb{Q}) = 0$ à la cohomologie de V . Nous n'avons donc pas d'éléments dans V de degré supérieur à 3.

À l'aide de cette suite, nous pouvons aussi vérifier nos résultats en degré inférieur ou égal à 3. Pour S^3 , nous avons $\pi_n(S_{\mathbb{Q}}^3)$ isomorphe à \mathbb{Q} en degré $n = 3$ et nul pour les autres degrés, tandis que pour S^2 , nous avons \mathbb{Q} en degré 2 et 3, et nul pour les autres degrés. Nous avons alors les suites exactes

$$0 \longrightarrow \pi_3(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_2(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_1(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \pi_0(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow 0$$

La première suite nous donne la condition $\pi_3(F_{\mathbb{Q}}) = \pi_2(F_{\mathbb{Q}})$, qui est soit nul, soit \mathbb{Q} . Par construction de V , il n'il y a pas de cohomologie en degré 2 dans la fibre, et donc

$$\pi_3(F_{\mathbb{Q}}) = \pi_2(F_{\mathbb{Q}}) = 0.$$

Aussi, les deux autres suites impliquent $\pi_1(F_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}$ et $\pi_0(F_{\mathbb{Q}}) = 0$. Le théorème 3.27 vérifie alors qu'il n'y a qu'un seul élément de V et qu'il est de degré 1.

Nous avons alors notre modèle minimal de Sullivan pour η :

$$(\Lambda(a_2, b_3) \otimes \Lambda(x_1), d) \xrightarrow[\simeq]{\phi} (\Lambda(c_3), 0)$$

avec $dx = a$.

En prenant le quotient $(\Lambda V, \bar{d})$, modèle de la fibre F , nous obtenons $(\Lambda(x_1), 0)$, qui est en fait le modèle minimal de S^1 . Nous concluons que, rationnellement, F est isomorphe à S^1 .

Exemple 3.29. Reprenons la fibration de Hopf ainsi que l'inclusion de la cofibre $S^3 \xrightarrow{\eta} S^2 \xrightarrow{\eta'} \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et cherchons le modèle de Sullivan de η' . Nous avons le diagramme homotopiquement commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) & \xrightarrow{A_{PL}(\eta')} & A_{PL}(S^2) \\ m \uparrow \simeq & & \simeq \uparrow n \\ (\Lambda(\lambda_2, \gamma_5), d) & \xrightarrow{\omega} & (\Lambda(a_2, b_3), d) \end{array}$$

où m et n sont des modèles de Sullivan, avec $d\lambda = 0$, $d\gamma = \lambda^3$ et $da = 0$, $db = a^2$. Les degrés et la différentielle nous imposent la définition de ω suivante :

$$\begin{aligned} \lambda &\longmapsto ka \\ \gamma &\longmapsto k^3 ab \end{aligned}$$

pour un certain $k \in \mathbb{Q}$. Puisque $\pi_2(\eta')$ induit l'isomorphisme $\pi_2(S^2) \cong \pi_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$, nous devons envoyer le générateur de l'un sur le générateur de l'autre, et donc nous avons $k = 1$.

Nous cherchons ϕ et V de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda(\lambda, \gamma), d) & \xrightarrow{\omega} & (\Lambda(a, b), d) \\ & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\ & & (\Lambda(\lambda, \gamma) \otimes \Lambda V, D) \end{array}$$

En degré 2, la cohomologie coincide déjà avec $\phi(\lambda) = a$. Les prochains cocycles se trouvent en degré 4. Nous avons a^2 et λ^2 avec $\phi(\lambda^2) = a^2$, mais seulement a^2 est un cobord : $d(b) = a^2$. Il existe donc un élément $x \in V^3$ tel que $Dx = \lambda^2$, et donc $\phi(x) = b$. En degré 5, nous avons les trois éléments

$$\begin{aligned} ab &\xrightarrow{d} a^3 \\ \gamma &\xrightarrow{D} \lambda^3 \\ \lambda x &\xrightarrow{D} \lambda^3. \end{aligned}$$

et donc il a le cocycle $\gamma - \lambda x$, avec $\phi(\gamma - \lambda x) = ab - ab = 0$. Pour annuler la classe de ce cocycle, nous posons $y \in V^4$ avec $D(y) = \gamma - \lambda x$ et $\phi(y) = 0$. De plus, y ne crée pas plus de cohomologie en degré 4.

Jusqu'à présent, nous avons un quasi-isomorphisme jusqu'en degré 5. Vérifions, à l'aide de la longue suite exacte rationnelle, s'il y a des éléments en degré supérieur à 5.

$$\dots \longrightarrow \pi_n(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \pi_n(S_{\mathbb{Q}}^2) \longrightarrow \pi_n(\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2) \longrightarrow \pi_{n-1}(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \dots$$

où F est la fibre de η' .

Nous connaissons

$$\pi_n(S_{\mathbb{Q}}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 2, 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \pi_n(\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 2, 5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Complexité topologique

Nous avons alors les suites exactes

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow \pi_n(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow 0 \quad \text{pour tout } n \geq 5 \\
 0 &\longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_4(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow 0 \\
 0 &\longrightarrow \pi_3(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow 0 \\
 0 &\longrightarrow \pi_2(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_1(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow 0 \\
 0 &\longrightarrow \pi_0(F_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

Ceci implique $\pi_n(F_{\mathbb{Q}}) = 0$ pour tout $n \geq 5$, $\pi_4(F_{\mathbb{Q}}) = \pi_3(F_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}$ et $\pi_0(F_{\mathbb{Q}}) = 0$. La quatrième suite nous dit $\pi_2(F_{\mathbb{Q}}) = \pi_1(F_{\mathbb{Q}}) = 0$ ou \mathbb{Q} . Par construction de V , il n'y a pas de cohomologie en degré 1 dans la fibre, et donc

$$\pi_2(F_{\mathbb{Q}}) = \pi_1(F_{\mathbb{Q}}) = 0$$

Alors V n'a que deux éléments : un de degré 3 et un autre de degré 4.

Remarquons aussi que la partie linéaire

$$\omega_0 : (\{\lambda_2, \gamma_5\}, d) \longrightarrow (\{a_2, b_3\}, d)$$

de ω est définie par $\omega_0(\lambda) = a$ et $\omega_0(\gamma) = 0$. Cela correspond bien avec notre longue suite exacte car la flèche $\pi_5(S_{\mathbb{Q}}^2) \longrightarrow \pi_5(\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2)$ est l'application nulle.

Nous avons alors notre modèle de Sullivan pour η' :

$$\phi : (\Lambda(\lambda_2, \gamma_3) \otimes \Lambda(x_3, y_4), d) \xrightarrow{\cong} (\Lambda(a_2, b_3), d)$$

avec $d(x) = \lambda^2$ et $d(y) = \gamma - \lambda x$.

Trouvons maintenant la fibre $F_{\mathbb{Q}}$, à l'aide du modèle

$$(\Lambda V, \bar{d}) \cong (\Lambda(x_3, y_4), 0) \cong (\Lambda(x_3), 0) \otimes (\Lambda(y_4), 0).$$

Nous savons déjà que $(\Lambda(x_3), 0)$ est le modèle minimal de S^1 . Il ne nous reste qu'à trouver l'espace ayant $(\Lambda(y_4), 0)$ comme modèle.

Soit (X, x_0) un espace pointé. Prenons la fibration $ev_1 : PX \rightarrow X$ ainsi que l'inclusion de la fibre $j : \Omega X \rightarrow PX$ (défini à l'exemple 2.13). Puisque PX a le même type d'homotopie qu'un point, $\pi_n(PX) = 0$ pour tout n . La suite exacte longue en homotopie nous donne donc

$$0 \longrightarrow \pi_{n+1}(X) \longrightarrow \pi_n(\Omega X) \longrightarrow 0$$

pour tout $n \geq 0$. Alors $\pi_{n+1}(X) \cong \pi_n(\Omega X)$. En prenant $X = S^5$, nous avons

$$\pi_n(\Omega S_{\mathbb{Q}}^5) \cong \pi_{n+1}(S_{\mathbb{Q}}^5) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc par le théorème 3.27, $(\Lambda(y_4), 0)$ est le modèle minimal pour ΩS^5 .

En utilisant la propriété $A_{PL}(X \times Y) \simeq A_{PL}(X) \otimes A_{PL}(Y)$, nous avons que $(\Lambda(x_3), 0) \otimes (\Lambda(y_4), 0)$ est le modèle de $S^3 \times \Omega S^5$. Alors $F_{\mathbb{Q}} \cong S_{\mathbb{Q}}^3 \times \Omega S_{\mathbb{Q}}^5$.

3.4 Extensions semifree et modèle algébrique du joint

En parallèle avec le joint défini au chapitre 2.5, nous définissons le modèle algébrique de celui-ci.

En travaillant sur une algèbre, parfois seule sa structure de module sous-jacente est suffisante. Tout comme les modèles de Sullivan modélisent les adgc , nous voulons une façon de modéliser leur structure de module. Nous introduisons donc la notion de A -module semifree ([29], p.124).

Définition 3.30. Soit (A, d) une adgc et soit (M, d) un (A, d) -module. Une extension semifree de (M, d) est un (A, d) -module de la forme $(M \oplus (A \otimes X), d)$, pour un espace vectoriel gradué X muni d'une décomposition $X = \bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i$ telle que $d(X_0) \subseteq M$ et $d(X_n) \subseteq M \oplus (A \otimes (\bigoplus_{i=0}^{n-1} X_i))$ pour tout $n \geq 1$. Notons aussi que la différentielle restreinte à M est la même que celle de (M, d) .

Un (A, d) -module semifree est une extension semifree du (A, d) -module 0 , c'est-à-dire un module de la forme $(A \otimes X, d)$.

Pour définir le joint, il ne nous manque que la notation suivante.

Définition 3.31. Pour un espace vectoriel gradué V , nous notons $s^{-1}V$ l'espace vectoriel gradué tel que $(s^{-1}V)^i = V^{i-1}$. Nous appelons cet espace la suspension de V .

Maintenant nous avons tout le matériel pour définir le modèle du joint.

Définition 3.32. Soient deux extensions semifree $(M, d) = (A \oplus (A \otimes X), d)$ et $(N, d) = (A \oplus (A \otimes Y), d)$. Le joint algébrique de (M, d) et (N, d) est l'extension semifree

$$(M, d) \bowtie_{(A,d)} (N, d) := (A \oplus (A \otimes s^{-1}X \otimes Y), d)$$

Pour définir la différentielle sur $(M, d) \bowtie_{(A,d)} (N, d)$, nous nous basons sur le travail de [29], p. 124-125.

Un élément de (M, d) est de la forme $m = (a_1 \oplus a_2 \otimes x)$. En appliquant la différentielle, nous avons alors une partie dans A et une autre dans $A \otimes X$. Nous écrivons alors

$$dm = d_0m + d_+m$$

où $d_0m \in A$ est la différentielle de A et $d_+m \in A \otimes X$. Nous faisons de même pour l'extension (N, d) . Soient $x \in X$ et $y \in Y$ et écrivons

$$d_+x = \sum_i a_i \otimes x_i \quad \text{et} \quad d_+y = \sum_i b_i \otimes y_i$$

En définissant la différentielle sur $s^{-1}x \otimes y \in (M, d) \bowtie_{(A,d)} (N, d)$ par

$$\begin{aligned} d(s^{-1}x \otimes y) &= (-1)^{|x|} (d_0x)(d_0y) + \sum_i (-1)^{|a_i|+1} a_i \otimes s^{-1}x_i \otimes y \\ &\quad + \sum_j (-1)^{(|x|+1)(|b_j|+1)} b_j \otimes s^{-1}x \otimes y_j, \end{aligned}$$

nous étendons par

$$d(a \otimes s^{-1}x \otimes y) = (da \otimes s^{-1}x \otimes y) + ((-1)^{|a|} a \cdot d(s^{-1}x \otimes y))$$

Proposition 3.33. $d^2(s^{-1}x \otimes y) = 0$.

La preuve se trouve à la proposition 3.2, [29]. Il en découle le corollaire suivant.

Corollaire 3.34. *L'opérateur d défini ci-haut sur le joint est bien une différentielle, c'est-à-dire $d^2(a \otimes s^{-1}x \otimes y) = 0$.*

Preuve : Soit $a \otimes s^{-1}x \otimes y \in (M, d) \bowtie_{(A,d)} (N, d)$. Alors la proposition précédente nous donne $d^2(s^{-1}x \otimes y) = 0$, en plus de savoir que $d^2(a) = 0$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} d^2(a \otimes s^{-1}x \otimes y) &= d(da \otimes s^{-1}x \otimes y) + (-1)^{|a|} d(a \cdot d(s^{-1}x \otimes y)) \\ &= d(da \otimes s^{-1}x \otimes y) + (-1)^{|a|} [da \cdot d(s^{-1}x \otimes y) + (-1)^{|a|} a \cdot d^2(s^{-1}x \otimes y)] \\ &= d(da \otimes s^{-1}x \otimes y) + (-1)^{|a|} da \cdot d(s^{-1}x \otimes y) \\ &= d^2a \otimes s^{-1}x \otimes y + (-1)^{|da|} da \cdot d(s^{-1}x \otimes y) + (-1)^{|a|} da \cdot d(s^{-1}x \otimes y) \\ &= (-1)^{|a|+1} da \cdot d(s^{-1}x \otimes y) + (-1)^{|a|} da \cdot d(s^{-1}x \otimes y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Le joint que nous avons défini ci-haut est en fait le 1^{er} joint. Le n^e joint est défini récursivement :

Définition 3.35. *Le n^e joint d' d'une extension semifree (M, d) de (A, d) est*

$$\bowtie_{(A,d)}^n (M, d) := \begin{cases} (M, d) & \text{si } n = 0 \\ (\bowtie_{(A,d)}^{n-1} (M, d)) \bowtie_{(A,d)} (M, d) & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Notons que la catégorie des (A, d) -modules, pour une adgc (A, d) , est une catégorie modèle propre, en prenant les quasi-isomorphismes comme équivalences faibles, les morphismes surjectifs comme fibrations et les rétractes d'inclusions d'extensions semifree comme cofibrations.

Le théorème suivant ([29], théorème 4.2) explique que le joint algébrique défini en 3.35 est un modèle du joint sur les espaces, défini en 2.24. Introduisons tout d'abord le contenu nécessaire pour en arriver au théorème.

Soient deux fibrations $p : E \rightarrow B$ et $p' : E' \rightarrow B$. Prenons ensuite un modèle $\alpha : (A, d) \xrightarrow{\sim} A_{PL}(B)$ pour une adgc (A, d) . Aussi, prenons des modèles $(M, d) \xrightarrow{\sim} A_{PL}(E)$ et $(N, d) \xrightarrow{\sim} A_{PL}(E')$ où $(M, d) = (A \oplus (A \otimes X), d)$ et $(N, d) = (A \oplus (A \otimes Y), d)$ sont des extensions semifree de (A, d) .

Théorème 3.36. *Il existe un quasi-isomorphisme de (A, d) -modules $\phi : (M, d) \bowtie_{(A,d)} (N, d) \xrightarrow{\sim} A_{PL}(E \bowtie_B E')$ faisant commuter*

$$\begin{array}{ccc} (A, d) & \xrightarrow{A_{PL}(j_{p,p'}) \circ \alpha} & A_{PL}(E \bowtie_B E') \\ & \searrow \text{incl.} & \uparrow \simeq \phi \\ & & (M, d) \bowtie_{(A,d)} (N, d). \end{array}$$

Plus généralement, il existe un quasi-isomorphisme ϕ_n tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 (A, d) & \xrightarrow{APL(j^n p) \circ \alpha} & A_{PL}(\boxtimes_B^n E) \\
 & \searrow \text{incl.} & \uparrow \simeq \phi_n \\
 & & \boxtimes_{(A,d)}^n (M, d).
 \end{array}$$

La preuve du 1^{er} joint est démontrée dans [29] au théorème 4.2, tandis que la preuve du n^e joint se fait par induction, en se basant sur le 1^{er}.

3.5 Types d'espaces

Lorsque nous savons sur quel type d'espace nous travaillons, nous connaissons quelques propriétés supplémentaires, spécifique à chaque type. Nous discuteront ici des espaces formels, des espaces elliptiques et des espaces homogènes.

3.5.1 Espaces formels

Définition 3.37. Une *adgc* $(\Lambda V, d)$ est dite formelle s'il existe un quasi-isomorphisme

$$(\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (H^*(\Lambda V, d), 0).$$

Un espace X est formel si son modèle minimal de Sullivan $(\Lambda V, d)$ est formel.

Exemple 3.38. La sphère S^2 est formelle. Rappelons que son modèle minimal de Sullivan est $(\Lambda(\alpha_2, \beta_3), d)$, avec $d\alpha = 0$, $d\beta = \alpha^2$. Puisque $H^*(S^2, \mathbb{Q}) \cong (\Lambda^{\langle \alpha_2 \rangle} / \langle \alpha^2 \rangle)$, le quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccc}
 \phi : (\Lambda(\alpha_2, \beta_3), d) & \xrightarrow{\simeq} & (\Lambda^{\langle \lambda_2 \rangle} / \langle \lambda^2 \rangle, 0) \\
 \alpha & \mapsto & \lambda \\
 \beta & \mapsto & 0
 \end{array}$$

nous montre la formalité de S^2 .

Exemple 3.39. Considérons l'*adgc* $(\Lambda V, d) = (\Lambda(a_2, b_2, x_3, y_3, z_3), d)$, où a et b sont des cocycles, et $dx = a^2$, $dy = b^2$, $dz = ab$. Alors

$$H^*(\Lambda V, d) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[a] \oplus \mathbb{Q}[b] \oplus \mathbb{Q}[bx - az] \oplus \mathbb{Q}[ay - bz] \oplus \mathbb{Q}[a^2y - abz].$$

En construisant le modèle minimal $(\Lambda W, d)$ de $H^*(\Lambda V, d)$, nous obtenons $W = \{\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \sigma, \omega, \dots\}$ tel que

$$\begin{array}{ccccccc}
 (H^*(\Lambda V, d), 0) & \xleftarrow{\simeq} & & & & & (\Lambda W, d) \\
 & & a & \longleftarrow & \alpha & \xrightarrow{d} & 0 \\
 & & b & \longleftarrow & \beta & \longmapsto & 0 \\
 & & 0 & \longleftarrow & \gamma & \longmapsto & \alpha^2 \\
 & & 0 & \longleftarrow & \lambda & \longmapsto & \beta^2 \\
 & & 0 & \longleftarrow & \sigma & \longmapsto & \alpha\beta \\
 & & bx - az & \longleftarrow & \omega & & \\
 & & & & \dots & &
 \end{array}$$

Puisque $(\Lambda W, d)$ n'est pas isomorphe à $(\Lambda V, d)$, nous concluons que $(\Lambda V, d)$ n'est pas formel.

3.5.2 Espaces elliptiques

Nous travaillons ici sur un autre type d'espace : les espaces elliptiques ([8], section 32).

Définition 3.40. *Un espace X simplement connexe est dit rationnellement elliptique si les deux espaces vectoriels $H^*(X; \mathbb{Q})$ et $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ sont de dimension finie.*

Cependant nous utiliserons davantage la définition algébrique.

Définition 3.41. *Une adgc $(\Lambda V, d)$ est dite elliptique si $H^*(\Lambda V, d)$ et V sont de dimension finie.*

Remarquons que X est rationnellement elliptique si et seulement si son modèle de Sullivan $(\Lambda V, d)$ est elliptique. Par exemple, les espaces S^n et $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ sont des espaces rationnellement elliptiques.

Exemple 3.42. *Soit l'espace rationnel X ayant comme modèle $(\Lambda V, d) = (\Lambda(a_2, b_4, x_3))$, où a et b sont des cocycles, et $dx = a^2 - b$. Alors V est de dimension finie. Cependant, puisque $H^k(X, \mathbb{Q})$ est engendré par $\{[a^n] \mid n \in \mathbb{N}\}$, nous avons*

$$H^k(X, \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de dimension infinie. Donc $(\Lambda V, d)$ n'est pas elliptique.

Pour les espaces elliptiques, nous utiliserons principalement le théorème suivant, provenant de S. Halperin ([16]).

Théorème 3.43. *Soit une algèbre de Sullivan minimale et elliptique $(\Lambda V, d)$. Considérons les bases respectives $\{x_1, \dots, x_p\}$ et $\{y_1, \dots, y_q\}$ de V^{pair} et V^{impair} . Alors le plus grand entier n tel que $H^n(\Lambda V, d) \neq 0$ est donné par*

$$n = \sum_{i=1}^q |y_i| - \sum_{i=1}^p (|x_i| - 1)$$

3.5.3 Espaces homogènes et modèles purs

Nous travaillerons beaucoup avec des modèles homogènes, et donc des modèles purs. De plus, nous définirons le *sous-espace de Samelson*, qui nous permettra de déterminer si un modèle pur est formel ou non.

Commençons alors par les deux définitions de base :

Définition 3.44. *Un espace homogène X est un espace quotient $G/H = \{gH \mid g \in G\}$, où G est un groupe de Lie topologique et H est un sous groupe de Lie fermé de G .*

Remarquons que H n'est pas nécessairement distingué, et donc G/H n'est pas nécessairement un groupe.

Définition 3.45. *Un modèle pur est un modèle de la forme $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$ où Q contient les éléments de degré pair, P de degré impair et tel que $dQ = 0$ et $dP \subseteq \Lambda Q$.*

Les théorèmes et propositions suivants proviennent de [15], chapitre 11, où l'on y retrouve aussi les preuves.

Proposition 3.46. *Le modèle minimal de Sullivan d'un espace homogène X est un modèle pur.*

Notons aussi que si $\dim Q > \dim P$, alors la cohomologie est de dimension infinie, car les éléments de P ne seront pas capables d'annuler toutes les classes créées par Q , comme dans l'exemple 3.42. De plus, nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.47. *Soit X un espace ayant un modèle pur $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$. Alors*

$$\dim H(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) < \infty \iff \dim (\Lambda Q / d(P)) < \infty$$

Afin de définir le sous-espace de Samelson, introduisons le morphisme d'adgc

$$K : (\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) \longrightarrow (\Lambda P, 0)$$

défini par $K(Q) = 0$ et $K|_P = Id_P$. Notons alors $K^\#$ le morphisme résultant en cohomologie :

$$K^\# : H^*(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) \xrightarrow{H^*(K)} H^*(\Lambda P, 0) \xrightarrow{\cong} \Lambda P$$

Définition 3.48. *Le sous-espace de Samelson est le sous-espace $\hat{P} := \text{Im } K^\# \cap P$ de P . Les éléments de \hat{P} sont caractérisés par*

$$\omega \in \hat{P} \iff \omega \in P \text{ et } d\omega \in \Lambda^+ Q \cdot dP$$

Théorème 3.49. *Si la cohomologie de X est de dimension finie, alors $\dim P \geq \dim \hat{P} + \dim Q$*

Et donc le théorème suivant ([15]) nous permet de reconnaître un espace homogène qui est formel.

Théorème 3.50. *Les énoncés suivants sont équivalents, pour un espace X ayant une cohomologie de dimension finie :*

- (a) $\dim P = \dim \hat{P} + \dim Q$
- (b) $H^*(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) \cong \Lambda Q /_{d(P)}$
- (c) $\Lambda Q \otimes \Lambda P$ est formel

Notons P^c , un complément du sous-espace de Samelson, c'est-à-dire

$$P = P^c \oplus \hat{P}$$

Alors nous avons $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) \cong (\Lambda Q \otimes \Lambda P^c \otimes \Lambda \hat{P}, d)$. De plus,

Théorème 3.51. [Théorème de réduction] *Il existe un isomorphisme d'adgc*

$$((\Lambda Q \otimes \Lambda P^c) \otimes \Lambda \hat{P}, d \otimes id) \cong (\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$$

Notons que la différentielle $d \otimes id$ envoie l'élément $1 \otimes p$ sur 0, pour tout $p \in \Lambda \hat{P}$.

Exemple 3.52. *Reprenons l'adgc non-formelle de l'exemple 3.39 :*

$$(\Lambda V, d) = (\Lambda(a_2, b_2, x_3, y_3, z_3), d),$$

où a et b sont des cocycles, et $dx = a^2$, $dy = b^2$, $dz = ab$. Il s'agit bien d'un modèle pur avec $Q = \{a, b\}$ et $P = \{x, y, z\}$. Alors

$$\Lambda Q /_{d(P)} = \Lambda^{(a,b)} /_{(a^2, b^2, ab)} \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}a \oplus \mathbb{Q}b.$$

Étant de dimension finie, le théorème 3.47 nous donne $\dim H(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) < \infty$. Regardons le sous-espace de Samelson. Puisque $dP \cap \Lambda^+ Q \cdot dP = \emptyset$, nous avons $\hat{P} = 0$. La condition (a) du théorème 3.50 n'étant pas respectée, elle nous confirme que $(\Lambda V, d)$ n'est pas formel.

Exemple 3.53. *Soit l'adgc $(\Lambda V, d) = (\Lambda(a_2, b_2, x_3, y_3, z_5), d)$, où a et b sont des cocycles, et $dx = a^2$, $dy = b^2$, $dz = a^3$. Il s'agit d'une algèbre pure avec $Q = \{a, b\}$ et $P = \{x, y, z\}$. Encore une fois, le quotient*

$$\Lambda Q /_{d(P)} = \Lambda^{(a,b)} /_{(a^2, b^2, a^3)} \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}a \oplus \mathbb{Q}b \oplus \mathbb{Q}ab$$

est de dimension finie, et donc $\dim H(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) < \infty$. Cependant ici notre sous-espace de Samelson est non-nul. Puisque $dP \cap \Lambda^+ Q \cdot dP = \{a^3\}$, nous avons $\hat{P} = \{z\}$ et donc $\dim \hat{P} = 1$. Nous avons donc l'égalité

$$\dim P = \dim \hat{P} + \dim Q,$$

et donc, par le théorème 3.50, $(\Lambda V, d)$ est formel. Un complément du sous-espace de Samelson étant $P^c = \{x, y\}$, le théorème de réduction 3.51 nous donne l'existence d'un isomorphisme d'adgc

$$(\Lambda(a, b, x, y, z), d) \cong (\Lambda(a, b, x, y), d) \otimes (\Lambda(z), 0).$$

Chapitre 4

LS-catégorie

Maintenant que nous avons les notions de base nécessaires, nous pouvons parler d'invariants. Commençons ici par la catégorie de Lusternik-Schnirelmann ([2], section 1.2).

4.1 Définitions géométriques

Rappelons tout d'abord la définition géométrique.

Définition 4.1. Soit X un espace. Nous appelons la catégorie de Lusternik-Schnirelmann de X (ou LS-catégorie de X) le plus petit entier m tel qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_1, \dots, U_{m+1}\}$ de X où tous les U_i sont contractiles dans X . Nous notons $\text{cat}(X) = m$.

Exemple 4.2. Soit $n \geq 1$. Puisque la sphère S^n n'est pas contractile, nous avons $\text{cat}(S^n) \geq 1$. Soient x et y deux pôles opposés de la sphère, et prenons les ouverts $U_0 = S^n \setminus \{x\}$ et $U_1 = S^n \setminus \{y\}$ contractiles dans S^n . Alors le recouvrement ouvert $\{U_0, U_1\}$ de S^n nous donne $\text{cat}(S^n) = 1$.

Plus généralement, nous avons la catégorie sectionnelle ([18], p.331) :

Définition 4.3. La catégorie sectionnelle d'une fibration $p : E \rightarrow B$ est le plus petit entier n tel qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$ de B où pour chaque $i = 1, \dots, n + 1$, il existe des sections continues $s_i : U_i \rightarrow E$ à p , c'est-à-dire telles que $p \circ s_i = \text{Id}_{U_i}$. Nous notons $\text{secat } p = n$.

Pour la proposition suivante, rappelons que pour un espace pointé (X, x_0) , l'espace PX est l'ensemble des chemins continus dans X démarrant à x_0 , muni de la topologie compacte-ouverte.

Proposition 4.4. Soit (X, x_0) un espace pointé connexe par arcs, et considérons la fibration $ev_1 : PX \rightarrow X$ définie par $ev_1(\alpha) = \alpha(1)$. Alors $\text{secat}(ev_1) = \text{cat}(X)$.

Preuve : Supposons $\text{secat}(ev_1) = m$. Alors il existe un recouvrement ouvert $\{U_1, \dots, U_{m+1}\}$ de X et des applications continues $s_i : U_i \rightarrow PX$ respectant $ev_1 \circ s_i = \text{Id}_{U_i}$. Les homotopies $H_i : U_i \times I \rightarrow X$ définies par $(x, t) \mapsto s_i(x)(t)$ nous montrent que chaque U_i est bien contractile dans X . Alors $\text{cat}(X) \leq m$.

Réciproquement, supposons $cat(X) = n$. Alors il existe un recouvrement ouvert $\{V_1, \dots, V_{n+1}\}$, où chaque V_i est contractile dans X . Il existe donc, pour chaque i , une application continue $H_i : V_i \times I \rightarrow X$ avec $H_i(a, 0) = x_0, H_i(a, 1) = a$. Définissons $s_i : V_i \rightarrow PX$ par

$$\begin{aligned} s_i(a) &: I \rightarrow X \\ t &\longmapsto H_i(a, t) \end{aligned}$$

De cette façon, les s_i sont les sections nous donnant $secat(ev_1) \leq n$. Nous concluons que $cat(X) = secat(ev_1)$. □

Nous avons aussi le lemme suivant ([30]).

Lemme 4.5. *Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration. Alors $secat p \leq cat B$.*

Pour définir la catégorie sectionnelle sur une flèche quelconque, nous utilisons les fibrations homotopiques.

Définition 4.6. *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application, et $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow Y$ sa fibration homotopique telle que définie au théorème 2.17. La catégorie sectionnelle de f est défini par*

$$secat(f) := secat(\tilde{f}).$$

4.2 La LS-catégorie pour des algèbres de Sullivan

Maintenant que nous comprenons la géométrie derrière la LS-catégorie, regardons comment nous pouvons la calculer sur les modèles de Sullivan. Remarquons tout d'abord que les modèles que nous utilisons sont des modèles rationnels. Nous introduisons tout d'abord la catégorie rationnelle d'un espace X .

Définition 4.7. *La catégorie rationnelle de X est définie par $cat_0(X) := cat(X_{\mathbb{Q}})$.*

La LS-catégorie et la catégorie rationnelle sont liées de la façon suivante ([8], chapitre 28).

Proposition 4.8. $cat_0(X) \leq cat(X)$.

Maintenant, nous pouvons travailler sur des adgc. Soit $(\Lambda V, d)$ une algèbre de Sullivan ainsi qu'un entier $m \geq 0$. Notons $\sigma_m : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V / \Lambda^{>m} V, \bar{d})$ la surjection canonique avec la différentielle induite \bar{d} . Par la proposition 3.23, il existe un modèle relatif ι_m à cette surjection. Nous avons donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda V, d) & \xrightarrow{\sigma_m} & (\Lambda V / \Lambda^{>m} V, \bar{d}) \\ & \searrow \iota_m & \uparrow \phi_m \\ & & (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \\ & \swarrow \tau_m & \end{array}$$

Définition 4.9. La LS-catégorie de $(\Lambda V, d)$ est le plus petit entier m tel qu'il existe une rétraction d'adgc r_m à ι_m , c'est-à-dire un morphisme d'adgc

$$r_m : (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \longrightarrow (\Lambda V, d)$$

tel que $r_m \circ \iota_m = Id_{(\Lambda V, d)}$. Nous notons $cat(\Lambda V, d) = m$. Si un tel entier n'existe pas, nous avons $cat(\Lambda V, d) = \infty$.

Nous notons $Mcat(\Lambda V, d)$ le plus petit entier m tel qu'il existe une rétraction r_m de ΛV -modules de ι_m . Encore une fois, s'il n'y a pas de tel m nous posons $Mcat(X) = \infty$.

La relation $Mcat(\Lambda V, d) \leq cat(\Lambda V, d)$ est évidente, puisque $cat(\Lambda V, d)$ demande une condition supplémentaire. En fait, s'il existe une rétraction d'adgc, cette rétraction est aussi un morphisme de modules. De plus, nous avons la relation suivante, entre la catégorie d'un espace et de son modèle ([8], proposition 29.4).

Théorème 4.10. Soient X un espace et $(\Lambda V, d)$ son modèle minimal de Sullivan. Alors $cat_0(X) = cat(\Lambda V, d)$.

Remarque 4.11. Si une rétraction de ι_m existe pour un certain m , alors il existe aussi une rétraction de ι_M pour tout $M \geq m$.

Notons aussi qu'il y a une définition pour $secat_0$ et $Msecat$ ([29], section 5).

Définition 4.12. Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration, et $f : B \rightarrow B_{\mathbb{Q}}$ la rationalisation de B . Alors $secat_0(p) := secat(f \circ p)$.

Définition 4.13. Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration. Nous appelons $Msecat p$ le plus petit entier n tel que, pour un modèle i de $A_{PL}(j^n p)$, il existe une rétraction de $A_{PL}(B)$ -modules r à i :

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(B) & \xrightarrow{A_{PL}(j^n p)} & A_{PL}(\rtimes_B^n E) \\ & \searrow i & \uparrow \simeq \\ & & (M, d) \\ & \swarrow r & \end{array}$$

Si un tel n n'existe pas, nous notons $Msecat p = \infty$.

La proposition 4.4 tient aussi en algèbre ([29], proposition 5.6) :

Proposition 4.14. Pour un espace X simplement connexe et de type fini, nous avons $Mcat X = Msecat ev_1$.

Voici une liste d'exemples pour mieux comprendre comment calculer la catégorie sur des algèbres de Sullivan.

Exemple 4.15. Soit $(\Lambda(a_2, b_3), d)$, où $da = 0$ et $db = a^2$, le modèle minimal de S^2 et étudions le cas $m = 0$. L'espace quotient $(\Lambda(a, b)/\Lambda^+(a, b), d)$ est en fait isomorphe à \mathbb{Q} muni de la différentielle nulle. Regardons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda(a, b), d) & \xrightarrow{\sigma} & (\mathbb{Q}, 0) \\ & \searrow \iota & \uparrow \phi \\ & & (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda W, d) \end{array}$$

Complexité topologique

où ϕ est le modèle de Sullivan de σ . Construisons l'espace W ainsi que le quasi-isomorphisme ϕ . Notons que a est le seul cocycle de $(\Lambda(a, b), d)$. Puisqu'il n'y a pas de cohomologie en degré supérieur à zéro dans \mathbb{Q} , nous introduisons un élément $x \in W^1$ de sorte que $dx = a$ et $\phi(x) = 0$. L'ajout de cet élément crée un autre cocycle de degré : $ax - b$. Pour annuler la classe, nous introduisons $y \in W^3$ avec $dy = ax - b$ et $\phi(y) = 0$. De cette façon, $\phi : (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda(x, y), d) \rightarrow \mathbb{Q}$ est un quasi-isomorphisme.

Supposons maintenant qu'il existe une rétraction d'adgc $r : (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda(x, y), d) \rightarrow (\Lambda(a, b), d)$. Alors

$$d(r(x)) = r(dx) = r(a) = a$$

apporte une contradiction, puisque a n'est pas un cobord dans $(\Lambda(a, b), d)$. Nous concluons qu'une telle rétraction n'existe pas, et donc $\text{cat}_0(S^2) = \text{cat}(\Lambda(a, b), d) > 0$.

Posons maintenant $m = 1$. L'espace quotient $(\Lambda(a, b)/\Lambda^{>1}(a, b), d)$ est isomorphe à $((a, b), 0) \cong (\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}a \oplus \mathbb{Q}b, 0)$. Construisons l'espace W et le quasi-isomorphisme ϕ du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda(a, b), d) & \xrightarrow{\sigma} & ((a, b), 0) \\ & \searrow \iota & \uparrow \simeq \phi \\ & & (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda W, d) \end{array}$$

Dans $((a, b), 0)$, tous les éléments sont des cocycles et aucun n'est un cobord. La cohomologie est alors engendrée par les classes $[1]$, $[a]$ et $[b]$. Dans $(\Lambda(a, b) \otimes \Lambda W, d)$, b n'est pas un cocycle. Nous introduisons $x \in W^3$ avec $dx = a^2$, $\phi(x) = 0$. De cette façon, $b - x$ est un cocycle de $\Lambda(a, b) \otimes W$ et ϕ envoie sa classe sur celle de b . De plus, en posant $r(x) = b$, nous vérifions que $r(dx) = d(r(x))$. En degré 4, il n'y a pas de cocycle dans aucun des ensembles, et donc ϕ est un quasi-isomorphisme jusqu'en degré 4. Les autres générateurs de W que nous devons introduire ne seront utiles que pour couper la cohomologie en degré supérieur à 4 créée par W lui-même. L'application ϕ enverra ces générateurs sur 0, puisque leur degré sera supérieur à 3. Par exemple, pour couper la classe du cocycle $a(b - x)$, nous introduisons $y \in W^4$ avec $dy = a(b - x)$ et $\phi(y) = 0$. Nous étendons r en posant $r(y) = 0$. De cette façon, $r(dy) = r(a)r(b - x) = 0 = d(r(y))$. Par induction, pour $[\omega] \in H^{k+1}(\Lambda(a, b) \otimes \Lambda W(n-1))$, $k \geq 4$, nous introduisons $z \in W^k(n)$ avec $dz = \omega$. Notons que les $W(i)$ forment la filtration de W , c'est-à-dire $W = \bigcup_{i \in I} W(i)$ et $W(0) \subset W(1) \subset \dots$. Pour définir r sur l'élément z , remarquons tout d'abord que $d(r(\omega)) = r(d\omega) = 0$. Cependant, $r(\omega)$, étant de degré $k + 1$, se doit d'être un cobord, car $H^{\geq 3}(\Lambda(a, b), d) = 0$. Il existe donc $\lambda \in \Lambda(a, b)$ tel que $d\lambda = r(\omega)$. Posons $r(z) = \lambda$. Puisque notre rétraction existe, nous concluons que $\text{cat}_0(S^2) = 1$.

Exemple 4.16. Soit $(\Lambda(a_3), 0)$ le modèle de Sullivan de S^3 , et prouvons $\text{cat}(\Lambda(a_3), 0) = 1$. L'espace quotient $\Lambda(a)/\Lambda^+(a)$ étant isomorphe à \mathbb{Q} , construisons l'espace W et le quasi-isomorphisme ϕ du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda(a), 0) & \xrightarrow{\sigma} & (\mathbb{Q}, 0) \\ & \searrow \iota & \uparrow \simeq \phi \\ & & (\Lambda(a) \otimes \Lambda W, d) \end{array}$$

Puisque a est un cocycle, nous introduisons un élément $x \in W^2$ avec $dx = a$, et posons $\phi(x) = 0$. Supposons maintenant qu'il existe une rétraction d'adgc $r : (\Lambda(a, x), d) \rightarrow (\Lambda(a), 0)$ à ι . Alors

$$d(r(x)) = r(dx) = r(a) = a.$$

Complexité topologique

Puisque a n'est pas un cobord dans $(\Lambda(a), 0)$, nous avons une contradiction et donc un tel r n'existe pas. Alors $\text{cat}_0(S^3) = \text{cat}(\Lambda(a), 0) > 0$.

Regardons maintenant le quotient $\Lambda(a)/\Lambda^{>1}(a) \cong ((a), 0)$. La surjection canonique $\sigma : (\Lambda(a), 0) \rightarrow ((a), 0)$ ne créant pas de nouveaux cocycles, il s'agit déjà d'un quasi-isomorphisme. L'inclusion et sa rétraction (ι et r) de la définition précédente ne sont alors que les identités, ce qui implique $\text{cat}_0(S^3) = 1$.

Exemple 4.17. Soit $(\Lambda(a_2, b_5), d)$, avec $da = 0$ et $db = a^3$, le modèle de Sullivan de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, et trouvons une borne inférieure pour $\text{cat}(\Lambda(a_2, b_5), d)$. Considérons l'espace quotient $(\Lambda(a, b)/\Lambda^{>1}(a, b), d) \cong ((a_2, b_5), 0)$, ainsi que le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda(a, b), d) & \xrightarrow{\sigma} & ((a, b), 0) \\ & \searrow \iota & \uparrow \simeq \phi \\ & & (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda W, d) \end{array}$$

Dans $((a, b), 0)$, il n'y a pas de cohomologie en degré 4. Cependant, dans $H^4(\Lambda(a, b) \otimes \Lambda W, d)$ il y a la classe $[a^2]$. Il existe alors un élément $x \in W^3$ avec $dx = a^2$, et $\phi(x) = 0$, pour des questions de degré. Supposons qu'il existe une rétraction d'adgc $r : (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda W, d) \rightarrow ((a, b), 0)$ de ι . Alors

$$d(\pi(x)) = \pi(dx) = \pi(a^2) = a^2$$

Ceci contredit cependant le fait que a^2 n'est pas un cobord dans $(\Lambda(a, b), d)$. La rétraction r n'existant pas, nous avons $\text{cat}_0(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = \text{cat}(\Lambda(a_2, b_5), d) \geq 2$.

Évaluons maintenant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda(a, b), d) & \xrightarrow{\sigma} & (\Lambda(a, b)/\Lambda^{>2}(a, b), \bar{d}) \\ & \searrow \iota & \uparrow \simeq \phi \\ & & (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda W, d) \end{array}$$

Dans le quotient, nous conservons les classes $[a]$ et $[a^2]$. Cependant, nous avons aussi la classe $[b]$ en degré 5. Nous introduisons alors un élément $x \in W^5$ avec $dx = a^3$, et posons $\phi(x) = 0$. De cette façon, ϕ est un quasi-isomorphisme jusqu'en degré 6. Les autres générateurs de W ne seront utiles que pour couper la cohomologie en degré supérieur à 6, créée par W lui-même. Le degré de ces générateurs impose que, sur ceux-ci, $\phi = 0$. Encore par induction, pour $[\omega] \in H^{k+1}(\Lambda(a, b) \otimes \Lambda W(n-1))$, $k \geq 6$, nous introduisons $z \in W^k(n)$ avec $dz = \omega$. Puisque $d(r(\omega)) = r(d\omega) = 0$, mais que $H^{\geq 5}(\Lambda(a, b), d) = 0$, il existe un élément $\lambda \in \Lambda(a, b)$ tel que $d\lambda = r(\omega)$. En posons $r(z) = \lambda$, nous avons la commutativité de d et r . Nous concluons que $\text{cat}_0(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = 2$.

Exemple 4.18. En restant plus général, cherchons une borne inférieure pour la catégorie de $(\Lambda(a_2, b_{2n+1}), d)$, $da = 0$, $db = a^{n+1}$, le modèle de Sullivan de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Considérons l'espace quotient $\Lambda(a, b)/\Lambda^{>n-1}(a, b)$, qui nous donne $\bar{d}b = 0$. Regardons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda(a_2, b_{2n+1}), d) & \xrightarrow{\sigma} & (\Lambda(a_2, b_{2n+1})/\Lambda^{>n-1}(a_2, b_{2n+1}), 0) \\ & \searrow \iota & \uparrow \simeq \phi \\ & & (\Lambda(a_2, b_{2n+1}) \otimes \Lambda W, d) \end{array}$$

Complexité topologique

où ι est le modèle de Sullivan de σ . Le quotient ne possède pas de cohomologie en degré $2n$. Cependant, dans $H^{2n}(\Lambda(a, b) \otimes \Lambda W, d)$, il y a la classe $[a^n]$. Il existe donc un élément $x \in W^{2n-1}$ tel que $dx = a^n$, $\phi(x) = 0$. Supposons qu'il existe une rétraction d'adgc $r : (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda W, d) \rightarrow (\Lambda(a, b), 0)$ de ι . Alors

$$d(\pi(x)) = \pi(dx) = \pi(a^n) = a^n.$$

Ceci contredit le fait que a^n n'est pas un cobord dans $(\Lambda(a, b), d)$. Une telle rétraction n'existe donc pas, ce qui implique $\text{cat}_0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \text{cat}(\Lambda(a_2, b_{2n+1}), d) \geq n$.

Évaluons maintenant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda(a, b), d) & \xrightarrow{\sigma} & (\Lambda(a, b) / \Lambda_{>n}(a, b), 0) \\ & \searrow \iota & \uparrow \simeq \phi \\ & & (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda W, d) \end{array}$$

et prouvons qu'une rétraction d'adgc r de ι existe. Dans le quotient, les classes $[a], \dots, [a^n]$ sont conservées. Cependant, nous avons en plus la classe $[b]$ en degré $2n + 1$. Nous introduisons alors un élément $x \in W^{2n+1}$ avec $dx = a^{n+1}$, et posons $\phi(x) = 0$. Alors ϕ est un quasi-isomorphisme jusqu'en degré $2n + 2$. Les autres générateurs de W ne servent qu'à couper la cohomologie en degré supérieur à $2n + 2$, créée par W lui-même. Le degré de ces générateurs impose que, sur ceux-ci, $\phi = 0$. Par induction, pour $[\omega] \in H^{k+1}(\Lambda(a, b) \otimes \Lambda W(n-1))$, $k \geq 2n + 2$, nous introduisons $z \in W^k(n)$ avec $dz = \omega$. Puisque $d(r(\omega)) = r(d\omega) = 0$, mais que $H^{\geq 2n+1}(\Lambda(a, b), d) = 0$, il existe un élément $\lambda \in \Lambda(a, b)$ tel que $d\lambda = r(\omega)$. Posons $r(z) = \lambda$. Alors $\text{cat}_0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = n$.

4.2.1 Théorème de Hess

Le théorème suivant est très important dans le calcul de la catégorie. Pour une algèbre minimale de Sullivan $(\Lambda V, d)$ et un entier m , reprenons le modèle de la surjection canonique $\sigma : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V / \Lambda_{>m} V, \bar{d})$ suivant

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda V, d) & \xrightarrow{\sigma} & (\Lambda V / \Lambda_{>m} V, \bar{d}) \\ & \searrow \iota & \uparrow \simeq \phi \\ & & (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \end{array}$$

r (dotted arrow from $(\Lambda V, d)$ to $(\Lambda V \otimes \Lambda W, d)$)

Théorème 4.19. [Théorème de Hess]. Supposons qu'il existe un morphisme de $(\Lambda V, d)$ -modules $r : (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \rightarrow (\Lambda V, d)$ tel que $r \circ \iota = \text{Id}_{(\Lambda V, d)}$. Alors il existe $r' : (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \rightarrow (\Lambda V, d)$ un morphisme d'adgc tel que $r' \circ \iota = \text{Id}_{(\Lambda V, d)}$.

En d'autres mots, il nous est inutile de vérifier la propriété supplémentaire pour passer d'un morphisme de modules à un morphisme d'adgc. Nous pouvons alors reformuler la définition de la catégorie rationnelle comme suit :

Définition 4.20. Soit $(\Lambda V, d)$ une algèbre de Sullivan. La catégorie de $(\Lambda V, d)$ est le plus petit entier m tel que pour le diagramme commutatif de $(\Lambda V, d)$ -modules suivant

$$\begin{array}{ccc}
 (\Lambda V, d) & \xrightarrow{\sigma_m} & (\Lambda V / \Lambda^{>m} V, \bar{d}) \\
 & \searrow \iota_m & \uparrow \phi_m \\
 & & (\Lambda V \otimes (\mathbb{Q} \oplus M), \delta) \\
 & \swarrow r_m & \\
 & &
 \end{array} \tag{4.2A}$$

où ι_m est l'injection canonique et σ_m la surjection canonique, il existe un morphisme de modules r_m tel que $r_m \circ \iota_m = Id_{\Lambda V}$.

Cependant, est-ce plus simple d'utiliser cette définition plutôt que la précédente? Nous résumons ici l'algorithme de construction du quasi-isomorphisme ϕ_m ainsi que le module M , pour un entier m fixe. Cet algorithme provient de [8], chapitre 29 (f).

Rappelons que pour une différentielle d , nous pouvons séparer en $d = d_0 + d_1 + d_2 + \dots$ où d_i est la partie de la différentielle qui augmente la longueur des éléments d'exactlyment i . Nous appelons d_1 la *partie quadratique* de la différentielle. Puisque nous travaillons avec des algèbres minimales sans élément de degré 1, nous avons $d_0 = 0$.

Nous commençons par construire M en fonction de la partie quadratique du diagramme. Posons $M^0 = 0$ et supposons $\delta_1(M^{<n}) \subseteq \Lambda^{>m} V \oplus (\Lambda^+ V \otimes M^{<n-1})$. Prenons alors

$$M^n \cong H^{n+1}(\Lambda^{>m} V \oplus (\Lambda^+ V \otimes M^{<n}))$$

Notons α_n cet isomorphisme. Pour un générateur $[w] \in H^{n+1}(\Lambda^{>m} V \oplus (\Lambda^+ V \otimes M^{<n}))$, posons $x \in M^n$ tel que $\alpha_n(x) = [w]$ et définissons $\delta_1 x = \omega$. De cette façon, δ_1 est bien une différentielle, et sa restriction sur ΛV est d_1 .

Corollaire 4.21. Le morphisme de modules $\xi : (\Lambda V \otimes (\mathbb{Q} \oplus M), \delta_1) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda V / \Lambda^{>m} V, d_1)$ défini par $\xi|_M = 0$ et $\xi|_{\Lambda V} = Id|_{\Lambda V}$ est un quasi-isomorphisme.

Notons que les éléments ont une longueur et un degré. Nous pouvons alors considérer une bigradation sur ΛV , comme étant $(\Lambda V)^{p,q} := (\Lambda^p V)^{p+q}$. Nous appelons p le *degré de filtration* et q le *degré complémentaire*. Notre différentielle quadratique est donc homogène de bidegré $(1, 0)$. Posons une bigradation sur M de sorte que δ_1 soit aussi homogène de bidegré $(1, 0) : M = \bigoplus_{p,q} M^{p,q}$. Les différentielles quadratiques nous donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (\Lambda V, d_1) & \xrightarrow{\sigma_m} & (\Lambda V / \Lambda^{>m} V, \bar{d}_1) \\
 & \searrow \iota_m & \uparrow \xi \\
 & & (\Lambda V \otimes (\mathbb{Q} \oplus M), \delta_1)
 \end{array}$$

Puisque ξ est un quasi-isomorphisme, et que les classes de cohomologies sont déjà les mêmes en degré plus petit ou égal que m , nous n'avons pas d'élément en M de degré inférieur ou égal à m . Alors $M = M^{>m,*}$.

Lemme 4.22. $M = M^{m,*}$

Complexité topologique

La preuve se trouve dans [8], lemme 29.11. Il signifie en fait que tout élément de M est considéré de degré de filtration m , et de degré topologique supérieur ou égal à m .

Il est maintenant temps d'étendre notre différentielle δ_1 tout en gardant la commutativité de notre diagramme, et en respectant $\delta|_{\Lambda V} = d$. Nous savons que $\delta(M^0) = 0$, car $M^0 = 0$. Nous procédons par induction pour définir δ sur M^n , en supposant que nous connaissons $\delta(M^{<n})$.

Soit $\omega \in M^n$. Alors $\delta_1\omega \in [\Lambda^{>m}V \oplus (\Lambda^+V \otimes M^{<n})]$. De plus, ω étant de longueur m , nous avons $\delta\delta_1\omega \in [\Lambda V \oplus (\Lambda V \otimes M)]^{\geq m+3,*}$.

Corollaire 4.23. *Il existe un élément $u \in [\Lambda V \otimes (\mathbb{Q} \oplus M^{<n})]^{\geq m+2,*}$ tel que $\delta u = \delta\delta_1\omega$.*

Nous définissons alors

$$\delta\omega := \delta_1\omega - u$$

De cette façon, il s'agit bien d'une différentielle puisque $\delta\delta\omega = \delta\delta_1\omega - \delta u = 0$.

Notons $\phi : (\Lambda V \otimes (\mathbb{Q} \oplus M), \delta) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda V / \Lambda^{>m}V, \bar{d})$ l'extension de ξ à la différentielle δ . Remarquons que ϕ commute bien avec δ . Alors ϕ est un quasi-isomorphisme de modules. Ceci termine la construction de notre modèle.

Exemple 4.24. *Soit le modèle $(\Lambda V, d) = (\Lambda(x_3, y_3, z_3, w_3, t_{11}), d)$, où x, y, z, w sont des cocycles et $dt = xyzw$. Prouvons $\text{cat}_0(\Lambda V, d) = 5$, à l'aide du diagramme commutatif suivant.*

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda V, d) & \xrightarrow{\sigma_m} & (\Lambda V / \Lambda^{>m}V, \bar{d}) \\ & \searrow \iota_m & \uparrow \phi_m \\ & & (\Lambda V \otimes (\mathbb{Q} \oplus M), \delta) \end{array}$$

Commençons alors par la borne inférieure, en posant $m = 4$. Tous les éléments étant de degrés impair, nous n'avons aucune puissance d'éléments. Le seul mot de $\Lambda^{>4}V$ est donc $xyzwt$, qui est de degré 23. Il s'agit aussi d'un cocycle avec d_1 . Alors pour tout $n < 22$, $M^n = 0$ et

$$M^{22} \cong H^{23}(\Lambda^{>4}V, d_1) = \text{span}\{[xyzwt]\}$$

Notons alors $M^{22} = \text{span}\{s\}$ avec $\delta_1 s = xyzwt$. Aussi, puisque

$$\delta\delta_1 s = \delta(xyzwt) = x^2y^2z^2w^2 = 0$$

nous n'avons pas de perturbation de différentielle à s , c'est-à-dire $\delta s = \delta_1 s$. Supposons alors qu'il existe une rétraction $r : (\Lambda V \otimes (\mathbb{Q} \oplus M), \delta) \rightarrow (\Lambda V, d)$ de ι_4 . Alors $dr(s) = r\delta(s) = xyzwt \in (\Lambda V)^{23}$, ce qui implique que $r(s) \in (\Lambda V)^{22}$. Nous avons une contradiction puisque nous n'avons pas d'élément non-nul de degré 22 dans ΛV . Donc $\text{cat}_0(\Lambda V, d) > 4$.

Regardons ce qui se passe avec $m = 5$. Le plus long mot étant de longueur 5, $\Lambda^{>5}V$ est nul, et donc $M = 0$. Effectivement, la projection $\sigma_5 : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V / \Lambda^{>5}V, \bar{d})$ est déjà un isomorphisme, et donc aucun besoin de rajouter M . Alors ι_5 n'est que l'identité et sa rétraction aussi. Nous pouvons alors conclure que $\text{cat}(\Lambda V, d) = 5$.

Complexité topologique

Notons que l'exemple précédent pourrait être appliqué à n'importe quel modèle $(\Lambda V, d)$ contenant k éléments, tous de degré impair. Nous arriverions alors à la conclusion que $cat(\Lambda V, d) = k$.

Remarquons aussi que l'extension de ce résultat au cas de $secat_0$ n'est pas vérifié en général, comme le démontre l'exemple de D. Stanley. Il a construit une fibration $p : E \rightarrow B$ de fibre S^2 respectant $secat_0(p) = 1$, alors que Vandembroucq avait prouvé $Msecat(p) = 0$.

Chapitre 5

Autres invariants homotopiques

La LS-catégorie peut être bornée par d'autres invariants, tels la longueur-cup, la longueur en cône et l'invariant de Toomer. Elle peut aussi être utilisée pour borner la complexité topologique. Dans cette section, nous allons donc définir ces autres invariants.

5.1 Longueur cup

Cet invariant utilise le produit cup $\cup : H^*(X) \otimes H^*(X) \longrightarrow H^*(X)$ défini à la section 2.3.2. Sur des algèbres de Sullivan, $\cup : H^*(\Lambda V, d) \otimes H^*(\Lambda V, d) \longrightarrow H^*(\Lambda V, d)$ est définie par

$$[\alpha] \cup [\beta] = [\alpha\beta].$$

Soit A une algèbre et I un idéal de A .

Définition 5.1. La nilpotence de I , notée $\text{nil}(I)$, est le plus grand entier n tel qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in I$ respectant $x_1 \cdots x_n \neq 0$.

Définition 5.2. La longueur cup d'un espace X est le plus grand entier n tel qu'il existe des classes $[\alpha_1], \dots, [\alpha_n] \in H^+(X)$ respectant $[\alpha_1] \cup \dots \cup [\alpha_n] \neq 0$. Nous notons alors $\text{cup}(X) = n$.

Définition 5.3. Le noyau de \cup est appelé l'idéal des diviseurs de zéros de $H^*(X)$. Nous pouvons alors considérer $\text{nil ker } \cup := \text{nil}(\text{ker } \cup)$.

Les définitions sont les mêmes pour des algèbres $(\Lambda V, d)$.

Exemple 5.4. Posons $(\Lambda V, d) = (\Lambda(a_2, b_5), d)$ avec $da = 0$ et $db = a^3$, le modèle de $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Nous avons la cohomologie suivante :

$$H^*(\Lambda V, d) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[a] \oplus \mathbb{Q}[a^2]$$

Puisque $[a] \cup [a] = [a^2] \neq 0$, mais $[a] \cup [a] \cup [a] = [a^3] = 0$ et $[a^2] \cup [a] = 0$, nous obtenons $\text{cup}(\Lambda V, d) = 2$.

Complexité topologique

Dans $\ker \cup$, nous avons le produit $([a] \otimes [1] - [1] \otimes [a])^4 = 6[a^2] \otimes [a^2]$, ce qui implique $\text{nil ker } \cup \geq 4$. Les quatres égalités

$$\begin{aligned} ([a^2] \otimes [1] - [1] \otimes [a^2])^3 &= 0 \\ ([a^2] \otimes [1] - [1] \otimes [a^2])^2 ([a] \otimes [1] - [1] \otimes [a]) &= 0 \\ ([a^2] \otimes [1] - [1] \otimes [a^2]) ([a] \otimes [1] - [1] \otimes [a])^2 &= 0 \\ ([a] \otimes [1] - [1] \otimes [a])^5 &= 0 \end{aligned}$$

nous montre qu'un produit de longueur supérieur à 4 est impossible dans $\ker \cup$, et donc $\text{nil ker } \cup = 4$.

5.2 Longueur en cône

Rappelons tout d'abord quelques définitions de base.

Définition 5.5. Soit X un espace.

(1) Le cône de X est l'espace quotient

$$CX := I \times X / 1 \times X$$

(2) La suspension de X est l'espace quotient

$$\Sigma X := I \times X / (0,x) \sim (0,y), (1,x) \sim (1,y)$$

Pour le cône, nous avons aussi une définition pour un espace pointé.

Définition 5.6. Soit (X, x_0) un espace pointé. Alors son cône est l'espace quotient

$$\overline{CX} := CX / I \times x_0$$

Pour la définition suivante, nous utilisons les notions de cône et de suspension mentionnées dans les définitions 5.5 et 5.6.

Définition 5.7. Un n -cône est un espace topologique pointé (P, p_0) tel qu'il existe une suite d'espaces $\{p_0\} = P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots \subseteq P_n = P$ respectant

$$P_{k+1} = P_k \cup_{h_k} \overline{C\Sigma^k Y_k}$$

pour une suite d'espaces pointés (Y_k, y_k) et des applications d'attachement $h_k : (\Sigma^k Y_k, y_k) \longrightarrow (P_k, x_0)$.

Définition 5.8. La longueur en cône d'un espace X est le plus petit entier n tel que X a le même type d'homotopie qu'un n -cône. Nous notons alors $cl(X) = n$. Si un tel entier n'existe pas, nous écrivons $cl(X) = \infty$.

Tout comme la LS-catégorie, nous pouvons considérer la version rationnelle de cet invariant.

Définition 5.9. $cl_0(X) := cl(X_{\mathbb{Q}})$ est appelée la longueur en cône rationnelle de X

Pour l'exemple suivant, nous utilisons le fait que $\Sigma^k S^n \simeq S^{n+k}$ et $CS^n \simeq E^{n+1}$.

Exemple 5.10. Prenons l'espace pointé (S^n, s_0) . Nous savons que $cl(S^n) \geq 1$ puisque que S^n n'a pas le type d'homotopie d'un point. Cependant, puisque

$$S^n \simeq P_0 \cup_{h_0} E^n \simeq P_0 \cup_{h_0} CS^{n-1}$$

où h_0 envoie les extrémités de E^n sur le point de P_0 , nous avons $cl(S^n) = 1$ pour tout n .

5.3 Invariant de Toomer

L'invariant suivant provient de G. Toomer, mais la définition a été reformulée dans [8], p. 366, comme suit :

Définition 5.11. L'invariant de Toomer d'un espace X est le plus petit entier n tel qu'il existe un n -cône P ainsi qu'une application $f : P \rightarrow X$ tels que $H^*(f)$ est injective. Nous notons $e(X) = n$. Si un tel entier n'existe pas, nous notons $e(X) = \infty$

Exemple 5.12. Trouvons l'invariant de Toomer pour la sphère S^n . Puisqu'un 0-cône est seulement un point, supposons qu'il existe une application $f : \{p_0\} \rightarrow S^n$ telle que $H^*(f) : H^*(S^n) \rightarrow H^*\{p_0\}$ est injective. Puisque la cohomologie de $\{p_0\}$ n'a qu'un seul générateur en degré 0, l'injectivité de f contredit que la cohomologie de S^n a deux générateurs : un en degré 0 et l'autre en degré n . Donc une telle fonction n'existe pas et $e(S^n) > 0$.

Nous avons montré dans l'exemple 5.10, que S^n a le même type d'homotopie qu'un 1-cône P . Notons $f : P \rightarrow S^n$ et $g : S^n \rightarrow P$ les équivalences d'homotopie. Alors $f \circ g \simeq Id_{S^n}$ nous donne en cohomologie $H^*(g) \circ H^*(f) \simeq Id_{H^*(S^n)}$ et donc l'application $H^*(f)$ est injective. Alors $e(S^n) = 1$.

Nous avons, encore une fois une version rationnelle de l'invariant de Toomer :

Définition 5.13. Pour un espace X , $e_0(X) := e(X_{\mathbb{Q}})$ est l'invariant de Toomer rationnel.

Et donc, encore une fois, nous pouvons calculer l'invariant de Toomer du modèle $(\Lambda V, d)$ de X pour obtenir $e_0(X) = e(\Lambda V, d)$. Pour ce faire, nous utilisons la surjection canonique $\sigma_m : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V / \Lambda^{>m} V, \bar{d})$.

Définition 5.14. L'invariant de Toomer pour $(\Lambda V, d)$ est le plus petit entier m tel que l'application $H^*(\sigma_m)$ est injective. Alors $e(\Lambda V, d) = m$. Si un tel m n'existe pas, nous notons $e(\Lambda V, d) = \infty$.

Exemple 5.15. Posons $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et prenons son modèle $(\Lambda V, d) = (\Lambda(a_2, b_5), d)$ avec $da = 0$ et $db = a^3$. Nous avons donc la cohomologie suivante :

$$H^*(\Lambda V, d) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[a] \oplus \mathbb{Q}[a^2].$$

L'application $H^*(\sigma_1)$ n'est pas injective, car la classe $[a^2]$ est envoyé sur 0. Cependant, l'application $H^*(\sigma_2)$ envoie les générateurs sur eux même et donc elle est injective. Nous en concluons $e(\Lambda V, d) = e_0(\mathbb{C}\mathbb{P}_0^2) = 2$. De même, nous pouvons prouver que $e_0(\mathbb{C}\mathbb{P}_0^n) = n$.

5.4 Complexité Topologique

Soit $\pi : PX \rightarrow X \times X$ l'application continue définie par $\pi(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1))$. La question importante est : existe-t-il une section continue à cette fonction, c'est-à-dire une application continue $s : X \times X \rightarrow PX$ telle que $\pi \circ s = Id_{X \times X}$?

$$\begin{array}{ccc} & \pi & \\ & \curvearrowright & \\ PX & & X \times X \\ & \curvearrowleft & \\ & s? & \end{array}$$

Il est évident qu'une section s existe, puisque nous travaillons avec des espaces connexes par arcs. Cependant, quelles sont les conditions pour qu'elle soit continue ?

Théorème 5.16. *Une section continue $s : X \times X \rightarrow PX$ existe si et seulement si l'espace X est contractile.*

La preuve est fournie dans [5].

Définition 5.17. *Pour un espace X , nous appelons la complexité topologique de X le plus petit entier k tel qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_0, \dots, U_k\}$ de $X \times X$ et une application continue $s_i : U_i \rightarrow PX$ telle que $\pi \circ s_i = Id_{U_i}$ pour chaque $i \in \{0, \dots, k\}$. Nous notons alors $TC(X) = k$.*

Remarquons que $TC(X) = \text{secat}(\pi)$, où $\pi : PX \rightarrow X \times X$ est la fibration définie par $\pi(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1))$.

La définition précédente est la version géométrique. Puisque nous travaillons plus avec les modèles des espaces que les espaces eux-mêmes, nous voulons une définition par rapport aux modèles. Nous utiliserons la proposition suivante pour définir $TC(X_{\mathbb{Q}})$ et $MTC(X_{\mathbb{Q}})$ (introduite par L. Lechuga et A. Murillo dans [20]).

Soit $(\Lambda V, d)$ le modèle rationnel de X . Notons $\mu : (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V, d)$ la multiplication $u \otimes v \mapsto uv$ et $K := \ker \mu$. Pour alléger l'écriture, posons $A := (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda V, d)$.

Soit m un entier, et prenons le modèle de Sullivan

$$\psi : A^{\otimes m+1} \otimes \Lambda W \xrightarrow{\simeq} A^{\otimes m+1} / K^{\otimes m+1}$$

de la projection canonique $P : A^{\otimes m+1} \rightarrow A^{\otimes m+1} / K^{\otimes m+1}$. En notant $M : A^{\otimes m+1} \rightarrow A$ la multiplication itérée $a_1 \otimes \dots \otimes a_{m+1} \mapsto a_1 \cdots a_{m+1}$, nous avons le diagramme commutatif solide d'adgc suivant :

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes m+1} & \xrightarrow{P} & A^{\otimes m+1} / K^{\otimes m+1} \\ \downarrow M & \searrow \iota & \uparrow \psi \simeq \\ A & & A^{\otimes m+1} \otimes \Lambda W \\ & \swarrow r & \end{array}$$

Proposition 5.18. *$TC(X_{\mathbb{Q}})$ est le plus petit entier m tel qu'il existe un morphisme d'algèbres $r : A^{\otimes m+1} \otimes \Lambda W \rightarrow A$ faisant commuter tout le diagramme ci-dessus.*

Nous écrivons $MTC(X_{\mathbb{Q}}) = m$ si m est le plus petit entier admettant un morphisme r de A -modules gradués faisant tout commuter.

Nous avons évidemment la propriété $MTC(X_{\mathbb{Q}}) \leq TC(X_{\mathbb{Q}})$.

En transformant les tenseurs du diagramme de TC par de simples multiplications, nous obtenons un autre invariant algébrique. Celui-ci a été apporté dans l'article [19]. Nous voulons alors le comparer à TC , dans le but de prouver l'égalité. Nous utilisons μ et K comme définit ci-dessus, et notons

$$K^m = M(K^{\otimes m}).$$

Soit $p : A \rightarrow A / K^{m+1}$ la projection canonique.

Définition 5.19. Pour le diagramme commutatif d'adgc

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & A / K^{m+1} \\ & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\ & & A \otimes \Lambda W \\ & \swarrow r & \end{array}$$

nous notons

- $\mathbf{tc}(X)$ le plus petit entier m tel qu'il existe une rétraction d'algèbres r à ι .
- $\mathbf{mtc}(X)$ le plus petit entier m tel qu'il existe une rétraction de A -modules r à ι .

Encore une fois, pour un espace X , nous avons l'inégalité $\mathbf{mtc}(X) \leq \mathbf{tc}(X)$. Nous avons aussi les relations suivantes ([19], proposition 1.3).

Proposition 5.20. $TC(X_{\mathbb{Q}}) \leq \mathbf{tc}(X)$ et $MTC(X_{\mathbb{Q}}) \leq \mathbf{mtc}(X)$

Preuve : (basée sur [19]) Soit $m = \mathbf{tc}(X)$. Alors nous avons un diagramme commutatif d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & A / K^{m+1} \\ & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\ & & A \otimes \Lambda W \\ & \swarrow r & \end{array}$$

ainsi qu'un morphisme d'algèbres $r : A \otimes \Lambda W \rightarrow A$ respectant $r \circ \iota = Id$.

Prenons alors le modèle de la projection canonique $p' : A^{\otimes m+1} \rightarrow A^{\otimes m+1} / K^{\otimes m+1}$, ainsi que le morphisme M :

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes m+1} & \xrightarrow{p'} & A^{\otimes m+1} / K^{\otimes m+1} \\ M \downarrow & \searrow \iota' & \uparrow \phi' \simeq \\ A & & A^{\otimes m+1} \otimes \Lambda W' \end{array}$$

Puisque $M(K^{\otimes m+1}) \subseteq K^{m+1}$, nous avons un morphisme induit $\tilde{M} : A^{\otimes m+1} / K^{\otimes m+1} \rightarrow A / K^{m+1}$. Ceci nous donne le diagramme commutatif d'algèbres

$$\begin{array}{ccccc} A^{\otimes m+1} & \xrightarrow{M} & A & \xrightarrow{\iota'} & A \otimes \Lambda W \\ \downarrow \iota' & & & \searrow H & \downarrow \phi \simeq \\ A^{\otimes m+1} \otimes \Lambda W' & \xrightarrow{\phi' \simeq} & A^{\otimes m+1} / K^{\otimes m+1} & \xrightarrow{\tilde{M}} & A / K^{m+1} \end{array}$$

Complexité topologique

Le lemme de relèvement (3.24) nous donne le morphisme d'algèbres H faisant tout commuter. Le morphisme $r' = r \circ H$ respecte donc $r' \circ \iota' = M$, ce qui implique $TC(X_{\mathbb{Q}}) \leq m$.

La preuve est semblable pour $MTC(X_{\mathbb{Q}}) \leq \mathbf{mtc}(X)$. \square

Regardons maintenant les deux invariants TC et \mathbf{tc} dans les exemples suivants.

Exemple 5.21. Soient $X = S^2$ et son modèle minimal de Sullivan $(\Lambda V, d) = (\Lambda(a_2, b_3), d)$. Notons $A = (\Lambda(a, b), d) \otimes (\Lambda(a, b), d)$ et regardons

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes m+1} & \xrightarrow{P} & A^{\otimes m+1} / K^{\otimes m+1} \\ M \downarrow & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\ A & & A^{\otimes m+1} \otimes \Lambda W \end{array}$$

pour $m = 1$. Alors nous avons l'élément de $K^{\otimes 2}$

$$\alpha := (a \otimes 1 - 1 \otimes a)^{\otimes 2} = a \otimes 1 \otimes a \otimes 1 - a \otimes 1 \otimes 1 \otimes a - 1 \otimes a \otimes a \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes 1 \otimes a$$

qui est un cocycle dans $A^{\otimes 2}$ mais nul dans le quotient. Nous introduisons donc $\omega \in W^3$, où $d\omega = \alpha$ et posons $\phi(\omega) = 0$. En supposant qu'il existe un morphisme d'algèbres $r : A^{\otimes 2} \otimes \Lambda W \rightarrow A$ respectant $r \circ \iota = M$, nous avons

$$\begin{aligned} d(r\omega) &= r(d\omega) = M\alpha = a^2 \otimes 1 - 2(a \otimes a) + 1 \otimes a^2 \\ &= d(b \otimes 1 + 1 \otimes b) - 2(a \otimes a) \end{aligned}$$

Cependant, $a \otimes a$ n'étant pas un cobord dans A , nous avons une contradiction, et donc $TC(S_{\mathbb{Q}}^2) > 1$.

Regardons maintenant $\mathbf{tc}(S^2)$, à l'aide du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda(a, b), d) & \xrightarrow{\sigma} & (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda(a, b) / K^{m+1}, \bar{d}) \\ & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\ & & (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda(a, b) \otimes \Lambda W, d), \end{array}$$

où ι est l'inclusion et σ la projection canonique. Essayons pour $m = 2$. Nous pouvons voir que les seuls cocycles coupés par K^3 sont de la forme

$$(a \otimes 1 - 1 \otimes a)^k = \sum_{i=0}^k C_i (a^{k-i} \otimes a^i)$$

avec $k \geq 3$, et où les C_i sont des coefficients rationnels. Nous observons alors que ces cocycles sont tous des cobords, car au moins un de $k - i$ ou i est plus grand que 2. Supposons qu'il existe un $\lambda \in A$ tel que $d\lambda = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)^k$, pour $k \geq 3$ et tel que $[\phi(\lambda)]$ est non-nulle. Alors nous introduisons $\omega \in W^{2k-1}$ et posons $d\omega = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)^k$ et $\phi(\omega) = 0$. De cette façon, la classe $[\lambda - \omega]$ est envoyée sur $[\phi(\lambda)]$. Aussi, nous posons $r(\omega) = \lambda$. Supposons maintenant qu'il existe un $\omega' \in W$ tel que $d(\omega') \in A \otimes \Lambda W$, et où $r(d\omega')$ est bien défini. Puisque ω' est en degré supérieur ou égal à 5 et qu'il n'y a plus de cohomologie dans S^2 en degré supérieur à 2, $r(d\omega')$ est un cobord, et donc il est possible de définir $r(\omega')$. Alors la rétraction $r \circ \iota$ existe. Nous en concluons alors que $\mathbf{tc}(S^2) \leq 2$. La proposition 5.20 nous donne la suite $1 < TC(S_{\mathbb{Q}}^2) \leq \mathbf{tc}(S^2) \leq 2$, et donc $TC(S_{\mathbb{Q}}^2) = \mathbf{tc}(S^2) = 2$.

Complexité topologique

Exemple 5.22. Posons $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et son modèle $(\Lambda V, d) = (\Lambda(a_2, b_5), d)$ avec $da = 0$ et $db = a^3$. Notons $A = (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda V, d)$ et évaluons le diagramme suivant pour $m = 3$:

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes m+1} & \xrightarrow{P} & A^{\otimes m+1} / K^{\otimes m+1} \\ \downarrow M & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\ A & & A^{\otimes m+1} \otimes \Lambda W \end{array}$$

Nous avons alors $\alpha = (a-1 \otimes 1 - a)^{\otimes 4} \in K^{\otimes 4}$ avec $M\alpha = a^4 \otimes 1 - 4(a^3 \otimes a) + 6(a^2 \otimes a^2) - 4(a \otimes a^3) + 1 \otimes a^4$. Puisque α est un cycle dans $A^{\otimes m+1}$ et est nul dans l'espace quotient, nous ajoutons un élément $\omega \in W^7$ et posons $d\omega = \alpha$ et $\phi(\omega) = 0$. Supposons maintenant qu'il existe un morphisme d'algèbre $r : A^{\otimes m+1} \otimes \Lambda W \rightarrow A$ respectant $r \circ \iota = M$. Alors

$$\begin{aligned} d(r(\omega)) &= r(d\omega) = r(\alpha) = M\alpha \\ &= a^4 \otimes 1 - 4(a^3 \otimes a) + 6(a^2 \otimes a^2) - 4(a \otimes a^3) + 1 \otimes a^4 \\ &= d\left(ab \otimes 1 - 4(b \otimes a) - 4(a \otimes b) + 1 \otimes ab\right) + 6(a^2 \otimes a^2) \end{aligned}$$

Puisque $a^2 \otimes a^2$ n'est pas un bord dans A , nous avons une contradiction, ce qui implique $TC(\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2) > 3$.

Évaluons $tc(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$, à l'aide du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda(a, b), d) & \xrightarrow{\sigma} & (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda(a, b) / K^{m+1}, \bar{d}) \\ & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\ & & (\Lambda(a, b) \otimes \Lambda(a, b) \otimes \Lambda W, d). \end{array}$$

Posons $m = 4$. Les seuls cocycles dans K^5 sont de la forme

$$(a \otimes 1 - 1 \otimes a)^k = \sum_{i=0}^k C_i (a^{k-i} \otimes a^i)$$

où $k \geq 5$ et où les C_i sont des coefficients rationnels. Cependant ceux-ci sont aussi des cobords. Supposons qu'il existe un $\lambda \in A$ tel que $d\lambda = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)^k$, pour $k \geq 5$ et tel que $[\phi(\lambda)]$ est non-nulle. Alors nous introduisons $\omega \in W^{2k-1}$ et posons $d\omega = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)^k$ et $\phi(\omega) = 0$. De cette façon, la classe $[\lambda - \omega]$ est envoyée sur $[\phi(\lambda)]$. Nous posons aussi $r(\omega) = \lambda$. Supposons maintenant qu'il existe un $\omega' \in W$ tel que $d(\omega') \in A \otimes \Lambda W$, et où $r(d\omega')$ est bien défini. Puisque ω' est en degré supérieur ou égal à 9 et que la cohomologie de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ en degré supérieur à 4 est nulle, $r(d\omega')$ est un cobord. Il est donc possible de définir $r(\omega')$. Alors $tc(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \leq 4$. Puisque $3 < TC(\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2) \leq tc(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \leq 4$, nous en concluons que $TC(\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2) = tc(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = 4$.

Chapitre 6

Relations entre invariants

Maintenant que nous connaissons quelques invariants homotopiques, nous pouvons les comparer entre eux.

6.1 La catégorie sectionnelle et la LS-catégorie

Pour comparer $secat$ et cat , il nous faut travailler sur une fibration $p : E \rightarrow B$. La proposition suivante est tirée de [29], théorème 5.2 et proposition 5.7, ainsi que de [2].

Proposition 6.1. *Supposons que $p : E \rightarrow B$ est une fibration. En notant $p^* : H^*(B) \rightarrow H^*(E)$ l'application induite en cohomologie, nous avons*

- (1) $nil\ ker\ p^* \leq Msecat\ p \leq secat\ p \leq cat\ B$.
- (2) *Si B est simplement connexe et de type fini, alors $Msecat\ p \leq Mcat\ B$.*

La catégorie sectionnelle est une borne inférieure de la catégorie, mais elle n'est pas la seule que nous avons étudié. Le théorème suivant ([8], proposition 27.14 et théorème 28.5) nous donne une suite d'inégalités bornant cat .

Théorème 6.2. *Soit X un espace normal. Alors*

$$cup(X) \leq e(X) \leq cat(X) \leq cl(X)$$

Rationnellement, nous avons

$$cup(X) \leq e_0(X) \leq cat_0(X) \leq cl_0(X) \leq cat_0(X) + 1$$

De plus, si X est formel,

$$cup(X) = e_0(X) = cat_0(X) = cl_0(X)$$

Aussi, nous avons l'égalité suivante, provenant de Y. Félix, S. Halperin et J.-M. Lemaire ([7]).

Théorème 6.3. *Soit un espace X rationnellement elliptique. Alors $e_0(X) = cat_0(X)$.*

Une autre borne supérieure de $cat(X)$ utilise la dimension et connexité de X ([8]).

Proposition 6.4. (1) Pour un espace X , nous avons l'inégalité

$$cat X \leq \frac{dim X}{conn(X) + 1}.$$

(2) Soit $(\Lambda V, d)$ une algèbre de Sullivan dont tous les éléments de $H^+(\Lambda V, d)$ sont de degré entre n et m , pour des entiers $1 \leq n \leq m$. Alors

$$cat(\Lambda V, d) \leq m/n.$$

Exemple 6.5. Trouvons la catégorie rationnelle de $\mathbb{C}P^n$. En notant $(\Lambda V, d)$ son modèle rationnel de Sullivan, nous avons

$$H^k(\Lambda V, d) \cong H^k(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } k \text{ pair et } 0 \leq k \leq 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La proposition 6.4 nous donne

$$cat_0(\mathbb{C}P^n) = cat(\Lambda V, d) \leq 2n/2 = n$$

De plus, l'exemple 5.15 nous donne $e_0(\mathbb{C}P^n) = n$, qui est une borne inférieure pour $cat_0(\mathbb{C}P^n)$. Nous concluons que $cat_0(\mathbb{C}P^n) = n$

6.2 Complexité topologique

Par la proposition 5.20, nous savons déjà que $TC(X_{\mathbb{Q}}) \leq \mathbf{tc}(X)$ et $MTC(X_{\mathbb{Q}}) \leq \mathbf{mtc}(X)$. Regardons quelles autres bornes nous avons pour ces invariants.

Prouvé par Farber ([5], théorème 5), cat nous donne non-seulement un borne inférieure pour TC , mais aussi une borne supérieure.

Théorème 6.6. Pour un espace X simplement connexe, $cat(X) \leq TC(X) \leq 2 \cdot cat(X)$.

Preuve : Montrons tout d'abord la première inégalité, en posant $TC(X) = m$. Il existe donc un recouvrement ouvert $\{U_1, \dots, U_{m+1}\}$ de $X \times X$ ainsi que des applications continues $s_i : U_i \rightarrow PX$ telles que $\pi \circ s_i = Id_{U_i}$. Posons $x_0 \in X$ et posons $V_i := \{x \in X \mid (x_0, x) \in U_i\}$ des ouverts dans X . La restriction de s_i à $\{x_0\} \times V_i$ est donc continue pour chaque $i = 1, \dots, m+1$, et donc par le théorème 1.3, tout V_i est contractile dans X . De plus, pour tout $x \in X$, il existe un i tel que $(x_0, x) \in U_i$ et donc $x \in V_i$. Alors $\{V_1, \dots, V_{m+1}\}$ est bien un recouvrement ouvert de X . Nous concluons alors que $cat(X) \leq TC(X)$.

Pour la deuxième inégalité, nous utilisons le lemme 6.1 dans la suite d'inégalité

$$TC(X) = \text{secat}(\pi) \leq cat(X \times X) \leq 2 \cdot cat(X)$$

où la dernière inégalité vient de [18], proposition 2.3. □

Aussi, nous avons la borne inférieure suivante ([19], corollaire 2.2).

Proposition 6.7. *Pour un espace X quelconque, $\text{nil ker } \cup_{\mathbb{Q}} \leq TC(X_{\mathbb{Q}})$. En particulier, il y a égalité si X est formel.*

Les deux invariants cat et $\text{nil ker } \cup_{\mathbb{Q}}$ étant inférieurs ou égaux à TC sont aussi des bornes inférieures pour tc . Pour cibler $\text{tc}(X)$ supérieurement, nous avons la proposition suivante ([19], proposition 1.5).

Proposition 6.8. *Soit N une adgc de même type d'homotopie rationnelle que X , et notons μ_N la multiplication sur celle-ci. Alors*

$$\text{tc}(X) \leq \text{nil ker } \mu_N$$

Preuve : (basée sur [19]) Notons d'abord que N et X étant de même type d'homotopie rationnelle signifie aussi qu'il existe une série de quasi-isomorphismes entre eux. Un modèle de un est donc aussi un modèle de l'autre. Notons encore $(\Lambda V, d)$ le modèle minimal de X (et donc aussi de N), ainsi que μ sa multiplication. Notons alors $\phi : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} N$ le quasi-isomorphisme. Puisque ϕ est un morphisme d'algèbre, il est facile de vérifier que $(\phi \otimes \phi)K \subseteq (\text{ker } \mu_N)$, et donc, pour un entier m , nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\simeq]{\phi \otimes \phi} & N \otimes N \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ A/K^{m+1} & \xrightarrow{\sigma} & N \otimes N / (\text{ker } \mu_N)^{m+1} \end{array}$$

Posons maintenant $m = \text{nil ker } \mu_N$. Alors $(\text{ker } \mu_N)^{m+1} = 0$ et donc le diagramme devient

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\simeq]{\phi \otimes \phi} & N \otimes N \\ p \downarrow & \nearrow \sigma & \\ A/K^{m+1} & & \end{array}$$

Notons $\psi : A \otimes \Lambda W \xrightarrow{\simeq} A/K^{m+1}$ le modèle de Sullivan de la projection $p : A \rightarrow A/K^{m+1}$. Nous avons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\quad} & A & & \\ \downarrow \iota & & \downarrow \simeq \phi \otimes \phi & & \\ A \otimes \Lambda W & \xrightarrow[\psi]{\simeq} & A/K^{m+1} & \xrightarrow{\sigma} & N \otimes N \end{array}$$

r (diagonal dotted arrow from $A \otimes \Lambda W$ to A)

qui nous donne, par le lemme de relèvement (3.24), le morphisme d'algèbres $r : A \otimes \Lambda W \rightarrow A$, rétraction de ι . Alors $\text{tc}(X) \leq m = \text{nil ker } \mu_N$. □

6.3 Analyse des modèles

Les invariants algébriques que nous avons présenté dépendent souvent de l'existence ou non d'une rétraction. De façon générale, soit B une adgc et I un idéal de B . Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{p} & B/I \\
 & \searrow \iota & \uparrow \simeq \phi \\
 & & B \otimes \Lambda W,
 \end{array}$$

où p et ι sont respectivement la projection canonique et l'inclusion.

Théorème 6.9. *S'il existe une rétraction $r : B \otimes \Lambda W \rightarrow B$ de ι , alors l'application $H^*(p)$ est injective.*

Preuve : Supposons qu'il existe une rétraction r de ι . Alors $r \circ \iota = Id_B$, ce qui nous donne en cohomologie $H^*(r) \circ H^*(\iota) = Id_{H^*(B)}$. L'application $H^*(\iota)$ est donc injective, ce qui implique que $H^*(p)$ est injective, car $H^*(\phi)$ est un isomorphisme. \square

Le théorème précédent explique aussi la relation $e(\Lambda V, d) \leq cat(\Lambda V, d)$, pour une algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$.

6.3.1 Types d'éléments primaires dans W

Retournons au diagramme ci-dessus, et suivons les étapes de construction de W , afin de construire le quasi-isomorphisme ϕ . L'espace W est composé de trois types d'éléments.

- (1) En supposant qu'il existe une classe non-nulle $[\alpha]$ dans B avec $\alpha \in I$, nous introduisons $\omega \in W$ et posons $d\omega = \alpha$ et $\phi(\omega) = 0$.
Sur cet élément, il est impossible de définir une rétraction r de ι . Effectivement, si r existait, nous aurions $d(r(\omega)) = r(d(\omega)) = \alpha$, ce qui contredit le fait que α n'est pas un cobord dans B . La rétraction est donc impossible.
- (2) S'il existe $\beta \in B$ tel que $0 \neq d\beta = \alpha \in I$ et que $[\phi(\beta)] \neq 0$ dans $H^*(B/I)$, nous introduisons $\omega \in W$ et posons $d\omega = \alpha$ et $\phi(\omega) = 0$. À ce moment, $H^*(\phi)$ envoie la classe $[\beta - \omega]$ sur $[\phi(\beta)]$.
Si ι admet une rétraction, alors nous devons poser $r(\omega) = \beta$. Attention ! Comme le démontre l'exemple de J.-M. Lemaire et F. Sigrist ([21]), l'obstruction à la réalisation de la rétraction peut se retrouver dans des produits de cocycle avec ce ω . En fait, à l'aide de ces obstructions, Lemaire et Sigrist ont réussi à construire un exemple où $2 = e_0(X) < cat_0(X) = 3$.
- (3) En ajoutant des éléments dans W , il se peut que nous créons de la cohomologie non-désirée. Pour une telle classe $[\eta]$ dans $B \otimes \Lambda W$, nous introduisons $\omega \in W$ et posons $d\omega = \eta$ et $\phi(\omega) = 0$. Par induction, $r(\eta) \in B$ est bien défini. Si $r(\eta)$ est un cobord dans B , alors il existe un élément $\lambda \in B$ tel que $d\lambda = r(\eta)$. Nous posons $r(\omega) = \lambda$. Inversément, si $r(\eta)$ n'est pas un cobord dans B , la rétraction ne peut être définie sur ω , et donc elle n'existe pas. Remarquons cependant que si n est le degré maximal tel que $H^n(B) \neq 0$ et que η est de degré supérieur à n , alors $r(\eta)$ est automatiquement un cobord et $r(\omega)$ est bien défini. Pour la construction de r , il suffit de définir $r : (B \otimes \Lambda W)^{\leq n} \rightarrow B^{\leq n}$, et le reste suivra par induction. Remarquons aussi qu'il serait

possible de définir autrement la rétraction, et donc une obstruction pourrait survenir pour une construction mais pas pour une autre. Il faudrait donc vérifier toutes les constructions possibles de la rétraction.

Remarquons que l'absence d'éléments de type (1) dans W implique que l'application $H^*(p)$ est injective. De plus, le premier type nous donne les résultats suivants, pour un espace X et son modèle minimal $(\Lambda V, d)$. Rappelons que $A = (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda V, d)$.

Corollaire 6.10. (1) Soit m un entier tel qu'il existe une classe $[\alpha] \neq 0$ dans $H^*(\Lambda V, d)$ avec $\alpha \in \Lambda^{>m}V$, nous avons $\text{cat}(X) > m$.
 (2) Soit m un entier tel qu'il existe une classe $[\alpha] \neq 0$ dans $H^*(A)$ avec $\alpha \in K^{m+1}$, nous avons $m < \text{mtc}(X) \leq \text{tc}(X)$.

Il en découle aussi la proposition suivante, pour $TC(\Lambda V, d)$.

Proposition 6.11. Soit m un entier. S'il existe un cocycle $\alpha \in K^{\otimes m+1}$ tel que $[M(\alpha)]$ est non-nulle dans A , alors $TC(X_{\mathbb{Q}}) > m$ et $MTC(X_{\mathbb{Q}}) > m$.

Preuve : Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 A^{\otimes m+1} & \xrightarrow{P} & A^{\otimes m+1} / K^{\otimes m+1} \\
 \downarrow M & \searrow \iota & \uparrow \psi \simeq \\
 A & & A^{\otimes m+1} \otimes \Lambda W \\
 & \swarrow r & \\
 & & A
 \end{array}$$

et supposons qu'il existe un cocycle $\alpha \in K^{\otimes m+1}$ tel que $M(\alpha)$ n'est pas un cobord dans A . Supposons qu'il existe un élément $\beta \in A^{\otimes m+1}$ tel que $d\beta = \alpha$. Alors $d(M(\beta)) = M(\alpha)$, ce qui est impossible. Alors α n'est pas un cobord dans $A^{\otimes m+1}$.

Puisque la classe $[\alpha]$ est non-nulle dans $A^{\otimes m+1}$, mais que $[\phi(\alpha)]$ est nulle, nous introduisons $\omega \in W$ avec $d\omega = \alpha$. Supposons qu'il existe un morphisme d'adgc (ou de modules)

$$r : A^{\otimes m+1} \otimes W \longrightarrow A$$

tel que $r \circ \iota = M$. Nous obtenons $d(r(\omega)) = r(d\omega) = r(\alpha) = M(\alpha)$. Cependant $M(\alpha)$ n'est pas un cobord. Nous obtenons ainsi une obstruction à l'existence de r . Nous concluons que $TC(X_{\mathbb{Q}}) > m$ et $MTC(X_{\mathbb{Q}}) > m$. \square

En conclusion, si pour le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{P} & A / K^{m+1} \\
 & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\
 & & A \otimes \Lambda W,
 \end{array}$$

il existe un élément de type (1) dans W , alors $\text{tc}(X)$ et $TC(X_{\mathbb{Q}})$ sont tout deux supérieur à m .

Chapitre 7

Un théorème et des exemples

Nous savons que géométriquement $cat(X) \leq TC(X) \leq 2 \cdot cat(X)$. De plus, nous avons toujours $TC(X_{\mathbb{Q}}) \leq \mathbf{tc}(X)$. Nous prouverons en fait que $2 \cdot cat_0(X)$ borne aussi $\mathbf{tc}(X)$ supérieurement, ce qui appuie la conjecture $\mathbf{tc}(X) = TC(X)$. Ensuite nous élaborerons des exemples afin de tester davantage cette conjecture : un premier exemple formel, suivi de deux exemples non-formels, afin d'illustrer les difficultés de calcul.

7.1 Borne supérieure pour \mathbf{tc}

Soient X un espace et $(\Lambda V, d)$ son modèle minimal de Sullivan. Rappelons que $A = (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda V, d)$, et que K est le noyau de la multiplication $\mu : A \rightarrow (\Lambda V, d)$, $u \otimes v \mapsto uv$.

Théorème 7.1. $cat_0(X) \leq TC(X_{\mathbb{Q}}) \leq \mathbf{tc}(X) \leq 2 \cdot cat_0(X)$.

Preuve : Les deux premières inégalités proviennent du théorème 6.6 et de la proposition 5.20. Il nous reste à prouver $\mathbf{tc}(X) \leq 2 \cdot cat_0(X)$. Soit $m = 2 \cdot cat_0(X)$. Par Félix, Halperin et Lemaire ([7]), nous avons $m = cat_0(X \times X) = cat_0(\Lambda V \otimes \Lambda V)$. De l'inclusion $K^{m+1} \subseteq \Lambda^{>m}(V \oplus V)$, on tire que la surjection canonique

$$j : A/K^{m+1} \longrightarrow A/\Lambda^{>m}(V \oplus V)$$

est bien définie. Notons $p : A \longrightarrow A/K^{m+1}$ la projection canonique. Remarquons alors que la projection $A \longrightarrow A/\Lambda^{>m}(V \oplus V)$ est en fait $j \circ p$. Considérons les deux modèles suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{p} & A/K^{m+1} \\
 & \searrow \iota_1 & \uparrow \phi \simeq \\
 & & A \otimes \Lambda W
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{j \circ p} & A/\Lambda^{>m}(V \oplus V) \\
 & \searrow \iota_2 & \uparrow \psi \simeq \\
 & & A \otimes \Lambda W'
 \end{array}$$

Alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\iota_2} & A \otimes \Lambda W' \\
 \downarrow \iota_1 & \nearrow \iota & \downarrow \psi \simeq \\
 A \otimes \Lambda W & \xrightarrow{j \circ \phi} & A / \Lambda^{>m}(V \oplus V)
 \end{array}$$

ainsi que le lemme de relèvement (3.24) nous donne l'application $\iota : A \otimes \Lambda W \rightarrow A \otimes \Lambda W'$ faisant commuter les triangles ci-dessus.

Alors nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{p} & A / K^{m+1} & \xrightarrow{j} & A / \Lambda^{>m}(V \oplus V) \\
 \searrow \iota_1 & & \uparrow \phi \simeq & & \uparrow \psi \simeq \\
 & & A \otimes \Lambda W & \xrightarrow{\iota} & A \otimes \Lambda W' \\
 \swarrow r & & & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Puisque $\text{cat}_0(\Lambda V \otimes \Lambda V) = m$, il existe une rétraction $r : A \otimes \Lambda W' \rightarrow A$ à $\iota_2 = \iota \circ \iota_1$. Alors $r \circ \iota$ est une rétraction de ι_1 . Nous en concluons $\text{tc}(X) \leq m = 2 \cdot \text{cat}_0(X)$. \square

7.2 Modèle pur formel avec une puissance 4 à la différentielle

Considérons l'algèbre de Sullivan $\Lambda_\gamma = (\Lambda(a_2, b_2, x_5, y_7), d_\gamma)$, où a et b sont des cocycles, et

$$\begin{aligned}
 d_\gamma x &= a^2 b & d_\gamma y &= a^4 + b^4 + (\gamma a + b)^4 \\
 & & &= (1 + \gamma^4) a^4 + 4\gamma^3 a^3 b + 6\gamma^2 a^2 b^2 + 4\gamma a b^3 + 2b^4,
 \end{aligned}$$

pour un entier γ . Nous avons alors une famille d'algèbre $\{\Lambda_\gamma \mid \gamma \in \mathbb{N}\}$. Notons X_γ l'espace rationnel ayant Λ_γ comme modèle. Tout Λ_γ est homogène, avec $Q = \{a, b\}$ et $P = \{x, y\}$. Cet exemple est discuté dans [9], p.244.

7.2.1 Algèbre $\Lambda^Q / d_\gamma P$ et cohomologie de X_γ

Regardons l'espace quotient

$$\Lambda^Q / d_\gamma P = \Lambda^{(a,b)} / a^2 b, \beta$$

où $\beta = (1 + \gamma^4) a^4 + 4\gamma^3 a^3 b + 6\gamma^2 a^2 b^2 + 4\gamma a b^3 + 2b^4$. En quotientant par $a^2 b$, l'élément β se simplifie par

$$\beta = (1 + \gamma^4) a^4 + 4\gamma a b^3 + 2b^4$$

En degré 2 et 4, nous avons respectivement les éléments $\{a, b\}$ et $\{a^2, ab, b^2\}$. En degré 6, nous avons $a^3, a^2 b, ab^2$ et b^3 , où par le quotient $a^2 b = 0$. Nous avons donc seulement 3 éléments non-nuls comme

générateurs. En degré 8, sans compter les multiples de a^2b qui sont nuls, nous avons les générateurs a^4 , ab^3 et b^4 . Cependant, puisque β est coupé, nous avons

$$b^4 = \frac{-1}{2}((1 + \gamma^4)a^4 + 4\gamma ab^3)$$

Nous avons donc seulement les deux générateurs linéairement indépendants a^4 et ab^3 . En degré 10, nous avons les générateurs a^5 , ab^4 et b^5 , où

$$\begin{aligned} 0 = a \cdot \beta &= (1 + \gamma^4)a^5 + 4\gamma a^2b^3 + 2ab^4 = (1 + \gamma^4)a^5 + 2ab^4 \\ &\implies -2ab^4 = (1 + \gamma^4)a^5 \\ 0 = b \cdot \beta &= (1 + \gamma^4)a^4b + 4\gamma ab^4 + 2b^5 = 4\gamma ab^4 + 2b^5 \\ &\implies b^5 = -2\gamma ab^4. \end{aligned}$$

Nous avons seulement un générateur linéairement indépendant : a^5 .

En degré $2k$ supérieur à 10, nous avons les éléments a^k , ab^{k-1} et b^k , où $k \geq 6$.

$$\begin{aligned} 0 = a^{k-4} \cdot \beta &= (1 + \gamma^4)a^k + 4\gamma a^{k-3}b^3 + 2a^{k-4}b^4 = (1 + \gamma^4)a^k \\ &\implies a^k = 0 \\ 0 = ab^{k-5} \cdot \beta &= (1 + \gamma^4)a^5b^{k-5} + 4\gamma a^2b^{k-2} + 2ab^{k-1} = 2ab^{k-1} \\ &\implies ab^{k-1} = 0 \\ 0 = b^{k-4} \cdot \beta &= (1 + \gamma^4)a^4b^{k-4} + 4\gamma ab^{k-1} + 2b^k = 2b^k \\ &\implies b^k = 0. \end{aligned}$$

Nous n'avons donc aucun élément en degré supérieur à 10. Puisque le quotient est de dimension finie, le théorème 3.47 nous confirme que la cohomologie de Λ_γ est aussi de dimension finie.

Par le théorème 3.49 et puisque $\dim P = \dim Q = 2$, nous avons nécessairement $\dim \hat{P} = 0$. Le théorème 3.50 nous dit alors que notre modèle est formel, et que $H^*(\Lambda_\gamma) \cong \Lambda^Q / d_\gamma P$. Alors, en tant qu'espace vectoriel, nous avons

$$\begin{aligned} H^*(\Lambda_\gamma) &\cong \mathbb{Q} \oplus \left(\mathbb{Q}[a] \oplus \mathbb{Q}[b] \right) \oplus \left(\mathbb{Q}[a^2] \oplus \mathbb{Q}[ab] \oplus \mathbb{Q}[b^2] \right) \oplus \left(\mathbb{Q}[a^3] \oplus \mathbb{Q}[ab^2] \oplus \mathbb{Q}[b^3] \right) \\ &\oplus \left(\mathbb{Q}[ab^3] \oplus \mathbb{Q}[b^4] \right) \oplus \mathbb{Q}[a^5] \end{aligned}$$

Proposition 7.2. *Si $\gamma_1 \neq \gamma_2$, alors il n'y a pas d'isomorphisme d'algèbre entre $H^*(\Lambda_{\gamma_1})$ et $H^*(\Lambda_{\gamma_2})$.*

Par soucis de complétude, nous incluons la démonstration de [9], p.245.

Preuve : Soient γ_1, γ_2 tels que $\gamma_1 \neq \gamma_2$, et supposons que nous avons un isomorphisme d'adgc entre $H^*(\Lambda_{\gamma_1})$ et $H^*(\Lambda_{\gamma_2})$. Nommons f cet isomorphisme, et notons $[\cdot]_1$ et $[\cdot]_2$ les classes dans $H^*(\Lambda_{\gamma_1}, \mathbb{Q})$ et $H^*(\Lambda_{\gamma_2}, \mathbb{Q})$ respectivement. Alors en degré 2 nous avons

$$\begin{aligned} f([a]_1) &= r_1[a]_2 + r_2[b]_2 \\ f([b]_1) &= s_1[a]_2 + s_2[b]_2 \end{aligned}$$

Complexité topologique

où $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$. Nous savons que $[a^2b]_1 = 0 = [a^2b]_2$. Donc

$$\begin{aligned} 0 &= f([a^2b]_1) = (r_1[a]_2 + r_2[b]_2)^2(s_1[a]_2 + s_2[b]_2) \\ &= r_1^2 s_1 [a^3]_2 + (r_2^2 s_1 + 2r_1 r_2 s_2) [ab^2]_2 + r_2^2 s_2 [b^3]_2 \end{aligned}$$

Par indépendance linéaire des trois classes ci-dessus, nous avons $0 = r_1^2 s_1 = r_2^2 s_1 + 2r_1 r_2 s_2 = r_2^2 s_2$, ce qui nous laisse 4 possibilités :

$$\begin{array}{ll} (1) & r_1 = r_2 = 0 \\ (2) & s_1 = s_2 = 0 \\ (3) & r_1 = s_2 = 0 \\ (4) & s_1 = r_2 = 0 \end{array}$$

Les cas (1) et (2) nous donne respectivement $f([a]_1) = 0$ et $f([b]_1) = 0$, ce qui contredit l'injectivité de f . Le cas (3) et l'égalité $r_2^2 s_1 + 2r_1 r_2 s_2 = 0$ impose $r_2^2 s_1 = 0$. Il implique donc le cas (1) ou le cas (2), qui sont tous deux impossible. Il nous reste (4). Alors

$$\begin{aligned} f([a]_1) &= r[a]_2 \\ f([b]_1) &= s[b]_2 \end{aligned}$$

avec $r = r_1, s = s_2 \in \mathbb{Q}$.

Pour les calculs suivants, nous nous référons à la table de multiplication des classes de cohomologie (appendice A).

En degré 8, nous avons $[a^4]_i = \frac{1}{1+\gamma_i^4}(-4\gamma_i[ab^3]_i - 2[b^4]_i)$, pour $i = 1, 2$. Puisque f est un isomorphisme, nous avons $f([a^4]_1) = r^4[a^4]_2$, ce qui implique

$$\begin{aligned} 0 &= f([a^4]_1) - r^4[a^4]_2 \\ &= f\left(\frac{1}{1+\gamma_1^4}(-4\gamma_1[ab^3]_1 - 2[b^4]_1)\right) - \frac{r^4}{1+\gamma_2^4}(-4\gamma_2[ab^3]_2 - 2[b^4]_2) \\ &= \frac{1}{1+\gamma_1^4}(-4\gamma_1 r s^3 [ab^3]_2 - 2s^4 [b^4]_2) - \frac{r^4}{1+\gamma_2^4}(-4\gamma_2 [ab^3]_2 - 2[b^4]_2) \\ &= -4r \left(\frac{\gamma_1 s^3}{1+\gamma_1^4} - \frac{r^3 \gamma_2}{1+\gamma_2^4}\right) [ab^3]_2 - 2r^4 \left(\frac{s^4}{1+\gamma_1^4} - \frac{1}{1+\gamma_2^4}\right) [b^4]_2. \end{aligned}$$

Puisque les deux classes sont linéairement indépendantes et que $r \neq 0$, nous avons que leurs coefficients sont nuls, et donc

$$\begin{aligned} \frac{4\gamma_1 r s^3}{1+\gamma_1^4} &= \frac{4r^4 \gamma_2}{1+\gamma_2^4} & \frac{2r^4 s^4}{1+\gamma_1^4} &= \frac{2r^4}{1+\gamma_2^4} \\ \gamma_1 s^3(1+\gamma_2^4) &= r^3 \gamma_2(1+\gamma_1^4) & s^4(1+\gamma_2^4) &= 1+\gamma_1^4. \end{aligned}$$

Par substitution nous obtenons

$$\begin{aligned} \gamma_1 s^3(1+\gamma_2^4) &= r^3 s^4 \gamma_2(1+\gamma_2^4) \\ \gamma_1 &= r^3 s \gamma_2. \end{aligned}$$

Si un de γ_1 ou γ_2 est nul, l'autre l'est aussi. Cela contredit alors $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Alors γ_1 et γ_2 sont non-nuls, et donc $s = \frac{\gamma_1}{r^3 \gamma_2}$.

Complexité topologique

Regardons en degré 10, où $[b^5]_i = 2\gamma_i[ab^4]_i$ pour $i = 1, 2$. Puisque $f(2\gamma_1[ab^4]_1) = 2\gamma_1rs^4[ab^4]_2$, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= f(2\gamma_1[ab^4]_1) - 2\gamma_1rs^4[ab^4]_2 \\ &= f([b^5]_1) - \frac{\gamma_1rs^4}{\gamma_2}[b^5]_2 \\ &= s^5[b^5]_2 - \frac{\gamma_1rs^4}{\gamma_2}[b^5]_2 \\ &= \left(s - \frac{\gamma_1r}{\gamma_2}\right)s^4[b^5]_2, \end{aligned}$$

et donc $s\gamma_2 = \gamma_1r$. En y substituant l'égalité $s = \frac{\gamma_1}{r^3\gamma_2}$, nous obtenons $r = 1$ et $s = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

Regardons cependant la relation $(1 + \gamma_i^4)[a^5]_i = -2[ab^4]_i$. Puisque $f(-2[ab^4]_1) = -2rs^4[ab^4]_2$, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= f(-2[ab^4]_1) + 2rs^4[ab^4]_2 \\ &= f((1 + \gamma_1^4)[a^5]_1) - (1 + \gamma_2^4)rs^4[a^5]_2 \\ &= (1 + \gamma_1^4)r^5[a^5]_2 - (1 + \gamma_2^4)rs^4[a^5]_2 \\ &= \left((1 + \gamma_1^4)r^4 - (1 + \gamma_2^4)s^4\right)r[a^5]_2, \end{aligned}$$

ce qui implique $(1 + \gamma_1^4)r^4 = (1 + \gamma_2^4)s^4$. En remplaçant par les valeurs de r et de s trouvées ci-dessus, nous obtenons

$$(1 + \gamma_1^4) = (1 + \gamma_2^4)\frac{\gamma_1^4}{\gamma_2^4},$$

et alors $\gamma_1 = \gamma_2$. Nous avons donc notre contradiction à l'existence de l'isomorphisme d'algèbre f . \square

7.2.2 LS-catégorie de X_γ

Notons ici $(\Lambda V, d_\gamma) := \Lambda_\gamma$. Par la proposition 6.4, nous savons que $\text{cat}(X_\gamma) = \text{cat}(\Lambda V, d_\gamma) \leq 5$. Évaluons alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda V, d_\gamma) & \xrightarrow{p} & (\Lambda V / \Lambda^{>4}V, \bar{d}_\gamma) \\ & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\ & & (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \end{array}$$

où p est la projection canonique et ι l'inclusion. En quotientant par $\Lambda^{>4}V$, nous coupons la classe $[a^5]$. Nous introduisons alors un élément $\omega \in W$ de degré 9, avec $d\omega = a^5$ et $\phi(\omega) = 0$. En supposant qu'une rétraction r à ι existe, nous avons $d_\gamma(r\omega) = r(d\omega) = a^5$. Cependant a^5 n'étant pas un cobord dans $(\Lambda V, d_\gamma)$, r ne peut exister, et donc $\text{cat}(X_\gamma) > 4$. Nous concluons que $\text{cat}(X_\gamma) = 5$.

Bornes inférieures

Nous aurions pu aussi calculer la LS-catégorie en commençant avec ses bornes inférieures.

La classe de cohomologie de plus haut degré est de longueur 5. Alors $\text{cup}(X_\gamma) \leq 5$. Cependant le produit cup $[a] \cup [a] \cup [a] \cup [a] \cup [a] = [a^5]$ nous confirme que $\text{cup}(X_\gamma) = 5$. Nous aurions donc pu utiliser le théorème 6.2, nous donnant la borne inférieure suivante :

$$5 = \text{cup}(X_\gamma) \leq \text{cat}(X_\gamma).$$

Une autre borne inférieure de la LS-catégorie est l'invariant de Toomer. Comme nous coupons la classe $[a^5]$ dans le quotient ci-dessus, elle se retrouve dans le noyau de $H^*(p)$. Alors $H^*(p)$ n'est pas injective, et donc $e(X_\gamma) > 4$. En quotientant par $\Lambda^{>5}V$, la projection p est en fait l'identité, ce qui induit une application injective en cohomologie. Alors $e(X_\gamma) = 5$. Le théorème 6.2 nous donne $5 = e(X_\gamma) \leq \text{cat}(X_\gamma)$, et donc $\text{cat}(X_\gamma) = 5$.

7.2.3 nil ker $\cup_{\mathbb{Q}}$

Puisque la classe la plus longue est de longueur 5, nous savons que $\text{nil ker } \cup_{\mathbb{Q}} \leq 10$. Puisque $([a] \otimes [1] - [1] \otimes [a]) \in \text{ker } \cup_{\mathbb{Q}}$ et

$$\begin{aligned} ([a] \otimes [1] - [1] \otimes [a])^{10} &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-1)^k [a^{10-k}] \otimes [a^k] \\ &= -252 [a^5] \otimes [a^5] \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

nous avons $\text{nil ker } \cup_{\mathbb{Q}} = 10$.

7.2.4 $TC(X_\gamma)$ et $\text{tc}(X_\gamma)$

Puisque notre modèle est formel, la proposition 6.7 nous donne $TC(X_\gamma) = \text{nil ker } \cup_{\mathbb{Q}} = 10$.

Aussi, notre théorème 7.1 et la proposition 5.20 nous donne la suite $10 = TC(X_\gamma) \leq \text{tc}(X_\gamma) \leq 2 \cdot \text{cat}(X_\gamma) = 10$. Nous en concluons que $TC(X_\gamma) = \text{tc}(X_\gamma) = 10$.

7.3 Modèle de $X = SU(2)^3 / T^2$, espace non-formel

Considérons $SU(2) := \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid AA^* = I_2, \det(A) = 1\}$, ainsi que l'inclusion $T^2 \rightarrow SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$ définie par

$$(\theta, \alpha) \mapsto \left[\left(\begin{array}{cc} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} e^{-i(\theta+\alpha)} & 0 \\ 0 & e^{i(\theta+\alpha)} \end{array} \right) \right]$$

Soit $X = SU(2)^3 / T^2$, l'espace quotient le long de cette inclusion. Nous pouvons montrer, à l'aide de [15], que le modèle minimal de X est $(\Lambda V, d) = (\Lambda(a_2, b_2, x_3, y_3, z_3))$, où a et b sont des cocycles,

et $dx = a^2$, $dy = b^2$, $dz = ab$. Nous avons prouvé dans l'exemple 3.39 qu'il s'agit d'un espace non-formel. Notons aussi que, puisque $\dim(SU(2)) = 3$, X est une variété de dimension 7.

7.3.1 Cohomologie de X

Puisque X est en dimension 7, il n'y a pas de cohomologie en degré supérieur à 7. Aussi, les premiers cocycles arrivent en dimension 2 : a et b . Ceux-ci n'étant pas des cobords, leur classe de cohomologie est non-nulle. En degré 3, nous n'avons aucun cocycle. En degré 4, les seuls cocycles sont aussi des cobords : $a^2 = dx$, $b^2 = dy$ et $ab = dz$. Énumérons maintenant les éléments engendrant le degré 5 et leur image respective sous la différentielle :

$$\begin{array}{ll} ax \xrightarrow{d} a^3 & bx \xrightarrow{d} a^2b \\ ay \mapsto ab^2 & by \mapsto b^3 \\ az \mapsto a^2b & bz \mapsto ab^2 \end{array}$$

Nous avons les deux cocycles $ay - bz$ et $az - bx$, qui ne sont pas des cobords.

En degré 6, nous avons les cocycles a^3 , a^2b , ab^2 et b^3 , qui sont tous des cobords. Nous avons aussi les éléments

$$\begin{array}{l} xy \xrightarrow{d} (a^2y - xb^2) \\ xz \mapsto (a^2z - xab) \\ yz \mapsto (b^2z - yab) \end{array}$$

Ces éléments ne créant pas de cocycle, nous avons $H^6(X) = 0$.

Le degré 7 est engendré par les éléments suivants.

$$\begin{array}{ll} a^2x \xrightarrow{d} a^4 & abx \xrightarrow{d} a^3b \\ a^2y \mapsto a^2b^2 & aby \mapsto ab^3 \\ a^2z \mapsto a^3b & abz \mapsto a^2b^2 \\ b^2x \mapsto a^2b^2 & \\ b^2y \mapsto ab^3 & \\ b^2z \mapsto ab^3 & \end{array}$$

Alors nous avons les cinq cocycles

$$a^2y - xb^2, \quad a^2z - xab, \quad b^2z - yab, \quad a^2y - abz \quad \text{et} \quad b^2x - abz.$$

Les trois premiers sont les cobords de xy , xz et yz respectivement. Les deux derniers n'étant pas des cobords, leur classe est non-nulle. Cependant,

$$a^2y - abz = d(xy) + b^2x - abz,$$

implique que leur classe est égale. Il n'y a donc qu'une classe de cohomologie en degré 7.

En résumé, nous avons la cohomologie suivante :

$$H^*(X, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[a] \oplus \mathbb{Q}[b] \oplus \mathbb{Q}[ay - bz] \oplus \mathbb{Q}[az - bx] \oplus \mathbb{Q}[a^2y - abz]$$

$$\implies H^k(X, \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } k = 0, 7 \\ \mathbb{Q}^2 & \text{si } k = 2, 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

7.3.2 LS-catégorie de X

Le corollaire 6.4 nous dit que $cat_0(X) \leq 3$. Construisons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda V, d) & \xrightarrow{\sigma} & (\Lambda^V / \Lambda^{>2V}, \bar{d}) \\ & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\ & & (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \end{array}$$

où σ est la projection canonique et ι l'inclusion. En quotientant par $\Lambda^{>2V}$, nous coupons l'élément $a^2y - abz$. Pour tuer sa classe de cohomologie, nous introduisons un élément $\omega \in W^6$ et posons $d\omega := a^2y - abz$. En supposant qu'une rétraction r à ι existe, nous avons $d(r\omega) = r(d\omega) = a^2y - abz$. Puisque $a^2y - abz$ n'est pas un cobord dans $(\Lambda V, d)$, nous obtenons une obstruction à la construction de r . Donc $cat_0(X) > 2$. Nous concluons que $cat_0(X) = 3$.

La catégorie de X peut aussi être calculée à l'aide de son invariant de Toomer et de l'inégalité $e_0(X) \leq cat_0(X) \leq 3$ (thm 6.2). Puisque la cohomologie en degré 7 est créée à l'aide d'un élément de longueur 3, l'application $H^*(\sigma) : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda^V / \Lambda^{>2V}, \bar{d})$ n'est pas injective. Effectivement, le noyau contient la classe $[a^2y - abz]$. Alors $e_0(X) = 3$, ce qui implique $cat_0(X) = 3$.

7.3.3 nil ker μ_N

Soit $N := \left(\Lambda_{a^2/a^2} \otimes \Lambda_{b^2/b^2} \otimes \Lambda_{z^3}, d \right)$, où $da = db = 0$ et $dz = ab$ (tiré de [8], p.389). La flèche $(\Lambda V, d) \rightarrow N$ est un quasi-isomorphisme, et la cohomologie de N est

$$H^*(N) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[a] \oplus \mathbb{Q}[b] \oplus \mathbb{Q}[az] \oplus \mathbb{Q}[bz] \oplus \mathbb{Q}[abz].$$

Trouvons alors nil ker μ_N , qui sera une borne supérieure pour notre complexité topologique.

Remarquons tout d'abord que ker μ_N est l'idéal engendré par

$$\{a \otimes a, b \otimes b, z \otimes z, (a \otimes 1 - 1 \otimes a), (b \otimes 1 - 1 \otimes b), (z \otimes 1 - 1 \otimes z)\}$$

Puisque $(a \otimes 1 - 1 \otimes a)^2 = -2(a \otimes a)$ (même résultat pour b), nous pouvons dire que ker μ_N est engendré par seulement

$$\{z \otimes z, (a \otimes 1 - 1 \otimes a), (b \otimes 1 - 1 \otimes b), (z \otimes 1 - 1 \otimes z)\}$$

Considérons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 (z \otimes z)^2 &= 0 \\
 (a \otimes 1 - 1 \otimes a)^2 &= -2(a \otimes a) & (a \otimes 1 - 1 \otimes a)^3 &= 0 \\
 (b \otimes 1 - 1 \otimes b)^2 &= -2(b \otimes b) & (b \otimes 1 - 1 \otimes b)^3 &= 0 \\
 (z \otimes 1 - 1 \otimes z)^2 &= 0 \\
 (z \otimes z)(z \otimes 1 - 1 \otimes z) &= 0
 \end{aligned}$$

Elles nous confirment alors que le produit de longueur 5

$$\begin{aligned}
 (a \otimes 1 - 1 \otimes a)^2(b \otimes 1 - 1 \otimes b)^2(z \otimes z) &= 4(a \otimes a)(b \otimes b)(z \otimes z) \\
 &= 4(abz \otimes abz)
 \end{aligned}$$

est le plus long produit non-nul de $\ker \mu_N$. Nous en concluons que $\text{nil ker } \mu_N = 5$

7.3.4 nil ker $\cup_{\mathbb{Q}}$

Nous calculons $\text{nil ker } \cup_{\mathbb{Q}}$ sur la cohomologie de N , celle-ci étant isomorphe en tant qu'algèbre à celle de X . Rappelons

$$H^*(N) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[a] \oplus \mathbb{Q}[b] \oplus \mathbb{Q}[az] \oplus \mathbb{Q}[bz] \oplus \mathbb{Q}[abz].$$

Puisque $[a]^2 = [a][b] = [b]^2 = 0$, nous devons avoir au plus un degré 2 du même côté du tenseur. Alors une multiplication de 4 éléments sera de degré au moins $0 + 2 + 5 + 5 = 12$ de chaque côté du tenseur et donc sera nulle. Cependant, il existe une multiplication non-nulle entre trois éléments de $\ker \cup_{\mathbb{Q}}$:

$$([a] \otimes [1] - [1] \otimes [a])^2([bz] \otimes [bz]) = -2[abz] \otimes [abz]$$

Alors $\text{nil ker } \cup_{\mathbb{Q}} = 3$.

7.3.5 $\text{tc}(X)$

Par notre théorème 7.1, nous savons que $3 \leq \text{tc}(X) \leq 6$. Cependant dans ce cas, la borne supérieure $\text{nil ker } \mu_N$ est plus utile :

$$3 \leq \text{tc}(X) \leq \text{nil ker } \mu_N = 5.$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda V \otimes \Lambda V & \xrightarrow{p} & \Lambda V \otimes \Lambda V / K^{m+1} \\
 & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\
 & & \Lambda V \otimes \Lambda V \otimes \Lambda W.
 \end{array}$$

Analyse de W avec $m = 3$

Nous construisons ici notre modèle W à l'aide des types d'éléments décrits en 6.3.1.

Type (1)

Prouvons ici que $\mathbf{tc}(X) > 3$, en montrant l'existence d'un élément de type (1) dans W^8 . Rappelons que $A = (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda V, d)$, et définissons, pour le reste de cet exemple,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &:= (a \otimes 1 - 1 \otimes a) \\ \mathbf{b} &:= (b \otimes 1 - 1 \otimes b) \\ \mathbf{x} &:= (x \otimes 1 - 1 \otimes x) \\ \mathbf{y} &:= (y \otimes 1 - 1 \otimes y) \\ \mathbf{z} &:= (z \otimes 1 - 1 \otimes z). \end{aligned}$$

L'isomorphisme de Künneth (théorème 2.12) nous donne

$$\begin{aligned} H^9(A) &\cong H^2(\Lambda V, d) \otimes H^7(\Lambda V, d) \oplus H^7(\Lambda V, d) \otimes H^2(\Lambda V, d) \\ &\cong [a \otimes (a^2y - abz)]\mathbb{Q} \oplus [b \otimes (a^2y - abz)]\mathbb{Q} \oplus [(a^2y - abz) \otimes a]\mathbb{Q} \oplus [(a^2y - abz) \otimes b]\mathbb{Q}. \end{aligned}$$

De plus, nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} [a \otimes (a^2y - abz)] &= [a \otimes (b^2x - abz)] & [b \otimes (a^2y - abz)] &= [b \otimes (b^2x - abz)] \\ [(a^2y - abz) \otimes a] &= [(b^2x - abz) \otimes a] & [(a^2y - abz) \otimes b] &= [(b^2x - abz) \otimes b]. \end{aligned}$$

Prenons en degré 9

$$\alpha := \mathbf{ab}^2\mathbf{x} + \mathbf{b}^3\mathbf{x} + \mathbf{a}^3\mathbf{y} + \mathbf{a}^2\mathbf{b}\mathbf{y} - 2\mathbf{a}^2\mathbf{b}\mathbf{z} - 2\mathbf{ab}^2\mathbf{z}.$$

Étant une combinaison linéaire d'éléments de K^4 , nous savons que α est dans K^4 . De plus, en développant $d(\alpha)$, nous observons que α est un cocycle. Prouvons maintenant qu'il ne s'agit pas d'un cobord dans A . Notons β la somme des éléments dans le développement de α tel qu'aucun côté du tenseur n'est de degré 2. Alors β est un cobord, et nous notons $\beta' \in A$ tel que $d(\beta') = \beta$. Alors

$$\begin{aligned} \alpha &= d(\beta' + 2a \otimes yz + 2b \otimes xz + 2yz \otimes a + 2xz \otimes b) \\ &\quad - 3a \otimes (a^2y - abz) - a \otimes (b^2x - abz) - b \otimes (a^2y - abz) - 3b \otimes (b^2x - abz) \\ &\quad - 3(a^2y - abz) \otimes a - (b^2x - abz) \otimes a - (a^2y - abz) \otimes b - 3(b^2x - abz) \otimes b \end{aligned}$$

En évaluant la classe de α , nous obtenons

$$\begin{aligned} [\alpha] &= -4[a \otimes (a^2y - abz)] - 4[b \otimes (a^2y - abz)] - 4[(a^2y - abz) \otimes a] - 4[(a^2y - abz) \otimes b] \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Pour éliminer la classe $[\alpha]$ dans $A \otimes \Lambda W$, nous introduisons $\omega \in W^8$ et posons $d\omega = \alpha$ et $\phi(\omega) = 0$. Puisque ω est de type (1), il empêche l'existence de la rétraction r de ι , et donc $\mathbf{tc}(X) > 3$.

Analyse de W avec $m = 4$

Type (1)

Regardons maintenant ce qui se passe avec K^5 . Nous savons que tout élément de K^5 est de degré au moins 10. Les éléments de degré 10 dans K^5 sont engendrés par

$$\{\mathbf{a}^k \mathbf{b}^{5-k} \mid k \in \{0, \dots, 5\}\}.$$

Étant tous des cocycles et des cobords, nous créons seulement des éléments de type (2) dans W . Par Künneth (théorème 2.12), nous savons que $\Lambda V \otimes \Lambda V$ n'a pas de cohomologie en degré 11, 13 et supérieur à 14. Il ne nous reste alors qu'à regarder les cocycles de A dans K^5 en degré 12 et 14. Commençons en degré 12 :

$$H^{12}(\Lambda V \otimes \Lambda V) \cong H^5(\Lambda V) \otimes H^7(\Lambda V) \oplus H^7(\Lambda V) \otimes H^5(\Lambda V)$$

Pour obtenir du degré 12, nous avons deux possibilités menant à un monôme de longueur 5 :

- multiplier 3 éléments de degré 2 avec 2 éléments de degré 3, ou
- multiplier 6 éléments de degré 2.

La dernière possibilité cependant nous donnera forcément un cobord. Supposons alors que nous avons un cocycle non-nul $\alpha := \sum_{i \in I} \alpha_{(i,1)} \cdots \alpha_{(i,5)} \in K^5$, où pour tout $i \in I$, nous avons $|\alpha_{(i,1)}| = |\alpha_{(i,2)}| = |\alpha_{(i,3)}| = 2$ et $|\alpha_{(i,4)}| = |\alpha_{(i,5)}| = 3$.

Alors pour tout $i, j \in I$, la multiplication $\alpha_{(i,4)} \alpha_{(j,5)}$ est dans l'espace engendré par $\{\mathbf{xy}, \mathbf{xz}, \mathbf{yz}\}$. Nous avons les différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{xy} &\xrightarrow{d} a^2 y \otimes 1 - b^2 x \otimes 1 - a^2 \otimes y + x \otimes b^2 + b^2 \otimes x - y \otimes a^2 + 1 \otimes a^2 y - 1 \otimes b^2 x \\ \mathbf{xz} &\xrightarrow{d} a^2 z \otimes 1 - abx \otimes 1 - a^2 \otimes z + x \otimes ab + ab \otimes x - z \otimes a^2 + 1 \otimes a^2 z - 1 \otimes abx \\ \mathbf{yz} &\xrightarrow{d} b^2 z \otimes 1 - aby \otimes 1 - b^2 \otimes z + y \otimes ab + ab \otimes y - z \otimes b^2 + 1 \otimes b^2 z - 1 \otimes aby \end{aligned}$$

Pour que α soit un cocycle, il faut que les différentielles s'annulent et donc il nous faut une combinaison linéaire des trois éléments ci-dessus. Alors nous avons, pour des $c_i, k_i, l_i \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} \alpha &= (c_1 \mathbf{a}^3 + c_2 \mathbf{a}^2 \mathbf{b} + c_3 \mathbf{ab}^2 + c_4 \mathbf{b}^3) \mathbf{xy} + (k_1 \mathbf{a}^3 + k_2 \mathbf{a}^2 \mathbf{b} + k_3 \mathbf{ab}^2 + k_4 \mathbf{b}^3) \mathbf{xz} \\ &\quad + (l_1 \mathbf{a}^3 + l_2 \mathbf{a}^2 \mathbf{b} + l_3 \mathbf{ab}^2 + l_4 \mathbf{b}^3) \mathbf{yz} \end{aligned}$$

La somme des éléments de $d\alpha$ de la forme $ux \otimes 1$, pour $u \in \Lambda(a, b)$, devrait s'annuler, par indépendance linéaire. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= -k_1(a^4 bx \otimes 1) - (c_1 + k_2)(a^3 b^2 x \otimes 1) - (c_2 + k_3)(a^2 b^3 x \otimes 1) \\ &\quad - (c_3 + k_4)(ab^4 x \otimes 1) - c_4(b^5 x \otimes 1), \end{aligned}$$

implique $k_1 = c_4 = 0$, et

$$\begin{aligned} k_2 &= -c_1 \\ k_3 &= -c_2 \\ k_4 &= -c_3. \end{aligned}$$

En faisant de même avec les éléments de la forme $uz \otimes 1$, nous obtenons en plus $k_2 = l_3 = l_4 = 0$, et

$$\begin{aligned} l_1 &= -k_3 = c_2 \\ l_2 &= -k_4 = c_3. \end{aligned}$$

Alors α devient

$$\alpha = (c_2 \mathbf{a}^2 \mathbf{b} + c_3 \mathbf{a} \mathbf{b}^2) \mathbf{xy} + (-c_2 \mathbf{a} \mathbf{b}^2 + -c_3 \mathbf{b}^3) \mathbf{xz} + (c_2 \mathbf{a}^3 + c_3 \mathbf{a}^2 \mathbf{b}) \mathbf{yz}$$

Aussi, le coefficient de $b^3 x \otimes a^2$ étant c_2 , nous avons $c_2 = 0$. Donc

$$\alpha = (c_3 \mathbf{a} \mathbf{b}^2) \mathbf{xy} + (-c_3 \mathbf{b}^3) \mathbf{xz} + (c_3 \mathbf{a}^2 \mathbf{b}) \mathbf{yz}$$

Maintenant, le coefficient de $a^3 y \otimes b^2$ étant c_3 , il faut $c_3 = 0$. Alors $\alpha = 0$, ce qui contredit la deuxième possibilité de degré.

Regardons maintenant ce qui se passe en degré 14. Puisque $H^{>7}(\Lambda V) = 0$, nous avons

$$H^{14}(\Lambda V \otimes \Lambda V) \cong H^7(\Lambda V) \otimes H^7(\Lambda V).$$

La classe génératrice en degré 14 est

$$\begin{aligned} [(a^2 y - abz)^{\otimes 2}] &= [(a^2 y - abz) \otimes (b^2 x - abz)] \\ &= [(b^2 x - abz) \otimes (a^2 y - abz)] \\ &= [(b^2 x - abz)^{\otimes 2}] \end{aligned}$$

Les cocycles n'étant pas des cobords contiennent alors

$$(\kappa_1 \otimes \kappa_2) - (\kappa_1 \otimes abz) - (abz \otimes \kappa_2) + (abz \otimes abz),$$

pour tout $\kappa_1, \kappa_2 \in \{a^2 y, b^2 x\}$. Remarquons que tous contiennent $(abz \otimes abz)$. Pour créer un élément de type (1) dans W , il nous faut un cocycle de la forme ci-dessus, et donc qui contient $(abz \otimes abz)$.

Supposons qu'il existe un cocycle $\alpha := \sum_{i \in I} \alpha_{(i,1)} \cdots \alpha_{(i,5)} \in K^5$ de degré 14 et ayant une classe de cohomologie non-nulle. Notons que si tout $\alpha_{(i,j)}$ est de degré pair, nous avons un cobord. Aussi, nous ne pouvons avoir plus de trois éléments de degré 3, car notre produit sera nul. Regardons alors les autres possibilités de degré pour les $\alpha_{(i,j)}$, où nous posons sans perte de généralité $|\alpha_{(i,1)}| \leq \dots \leq |\alpha_{(i,5)}|$:

- (1) $|\alpha_{(i,1)}| = |\alpha_{(i,2)}| = 2, |\alpha_{(i,3)}| = |\alpha_{(i,4)}| = 3$ et $|\alpha_{(i,5)}| = 4$
- (2) $|\alpha_{(i,1)}| = |\alpha_{(i,2)}| = |\alpha_{(i,3)}| = 2, |\alpha_{(i,4)}| = 3$ et $|\alpha_{(i,5)}| = 5$

Regardons quels cocycles contiennent $(abz \otimes abz)$. Dans la première option, les seuls éléments pouvant contenir du z sont $\alpha_{(i,3)}$ et $\alpha_{(i,4)}$. Pour retrouver du z de chaque côté du tenseur d'un même élément, nous devons retrouver z dans $\alpha_{(i,3)}$ et $\alpha_{(i,4)}$. En notant $z_{(i,3)}$ et $z_{(i,4)}$ les parties de $\alpha_{(i,3)}$ et $\alpha_{(i,4)}$ contenant du z , nous avons $z_{(i,3)} = z_{(i,4)} = \mathbf{z}$, mais alors $z_{(i,3)} \cdot z_{(i,4)} = 0$ nous coupe tout z . Puisque nous ne retrouvons pas $(abz \otimes abz)$, tout élément respectant la première option est un cobord.

Évaluons maintenant la deuxième option :

$$|\alpha_{(i,1)}| = |\alpha_{(i,2)}| = |\alpha_{(i,3)}| = 2, \quad |\alpha_{(i,4)}| = 3 \quad \text{et} \quad |\alpha_{(i,5)}| = 5.$$

Alors

$$\begin{aligned}\alpha_{(i,1)}\alpha_{(i,2)}\alpha_{(i,3)} &\in \text{span}\{\mathbf{a}^3, \mathbf{a}^2\mathbf{b}, \mathbf{ab}^2, \mathbf{b}^3\} \\ &= \text{span}\{(s \otimes 1 - 1 \otimes s)^2(t \otimes 1 - 1 \otimes t) \mid s, t \in \{a, b\}\}\end{aligned}$$

Remarquons que tout élément étant de degré supérieur à 7 d'un côté du tenseur a une classe nulle. Alors en cohomologie nous avons

$$[\alpha_{(i,1)}\alpha_{(i,2)}\alpha_{(i,3)}] \in \text{span}\{[-2(st \otimes s) + (t \otimes s^2) - (s^2 \otimes t) + 2(s \otimes st)] \mid s, t \in \{a, b\}\}.$$

Pour avoir z des deux côtés du tenseur, nous devons avoir du z dans $\alpha_{(i,4)}$ et $\alpha_{(i,5)}$. Notons $z_{(i,4)}$ et $z_{(i,5)}$ les parties de $\alpha_{(i,4)}$ et $\alpha_{(i,5)}$ respectivement contenant du z . Alors $z_{(i,4)} = \mathbf{z}$, et

$$z_{(i,5)} \in \text{span}\{(uz \otimes 1 - 1 \otimes uz), (u \otimes z - z \otimes u) \mid u \in \{a, b\}\},$$

ce qui implique

$$z_{(i,4)} \cdot z_{(i,5)} \in \text{span}\{uz \otimes z - z \otimes uz \mid u \in \{a, b\}\},$$

Alors en cohomologie

$$[\alpha_{(i,1)}\alpha_{(i,2)}\alpha_{(i,3)}z_{(i,4)}z_{(i,5)}] \in \text{span}\{[(tuz \otimes s^2z) + 2(suz \otimes stz) - 2(stz \otimes suz) - (s^2z \otimes tuz)] \mid s, t, u \in \{a, b\}\}$$

Pour obtenir $abz \otimes abz$, nous devons avoir $st = ab$ et $su = ab$. Cependant nous obtenons $2abz \otimes abz - 2abz \otimes abz = 0$. L'option 2 ne contient alors pas $abz \otimes abz$.

Nous concluons qu'il n'y a pas d'élément de type (1) dans W .

Type (2)

Regardons quels sont les éléments de type (2) dans W . Remarquons que nous travaillons jusqu'en degré 14. Pour trouver les éléments dont leur différentielle est dans K^5 , il suffit de regarder les cocycles de K^5 qui sont des cobords.

En degré 10, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{b}^5 &= d(\lambda_0), \quad \text{avec } \lambda_0 = (b^3y \otimes 1) - 5(b^2y \otimes a) + 10(b^3 \otimes y) - 10(y \otimes b^3) + 5(b \otimes b^2y) - (1 \otimes b^3y) \\ \mathbf{ab}^4 &= d(\lambda_1), \quad \text{avec } \lambda_1 = (a \otimes 1 - 1 \otimes a) \left((b^2y \otimes 1) - 4(by \otimes b) + 6(y \otimes b^2) - 4(b \otimes by) + (1 \otimes b^2y) \right) \\ \mathbf{a}^2\mathbf{b}^3 &= d(\lambda_2), \quad \text{avec } \lambda_2 = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)^2 \left((by \otimes 1) - 3(y \otimes b) + 3(b \otimes y) - (1 \otimes by) \right) \\ \mathbf{a}^3\mathbf{b}^2 &= d(\lambda_3), \quad \text{avec } \lambda_3 = (ax \otimes 1) - 3(x \otimes a) + 3(a \otimes x) - (1 \otimes ax) \left((b \otimes 1 - 1 \otimes b)^2 \right) \\ \mathbf{a}^4\mathbf{b} &= d(\lambda_4), \quad \text{avec } \lambda_4 = ((a^2x \otimes 1) - 4(ax \otimes a) + 6(x \otimes a^2) - 4(a \otimes ax) + (1 \otimes a^2x)) \left((b \otimes 1 - 1 \otimes b) \right) \\ \mathbf{a}^5 &= d(\lambda_5), \quad \text{avec } \lambda_5 = (a^3x \otimes 1) - 5(a^2x \otimes a) + 10(a^3 \otimes x) - 10(x \otimes a^3) + 5(a \otimes a^2x) - (1 \otimes a^3x).\end{aligned}$$

Alors $d(\lambda_i) = \mathbf{a}^i\mathbf{b}^{5-i}$, et tout λ_i est un cocycle dans le quotient. Remarquons que toute combinaison linéaire de $\mathbf{a}^i\mathbf{b}^{5-i}$ sera le cobord d'une combinaison linéaire des λ_i .

Remarquons cependant que λ_i n'est pas le seul élément de A dont la différentielle est envoyée sur $\mathbf{a}^i \mathbf{b}^{5-i}$. Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^5 &= d(\lambda_5) \\ &= d\left((a^3x \otimes 1) - 5(a^2x \otimes a) + 10(ax \otimes a^2) - 10(x \otimes a^3) + 5(a \otimes a^2x) - (1 \otimes a^3x)\right) \\ &= d\left((a^3x \otimes 1) - 5(a^2x \otimes a) + 10(a^3 \otimes x) - 10(a^2 \otimes ax) + 5(a \otimes a^2x) - (1 \otimes a^3x)\right) \\ &= d\left((a^3x \otimes 1) - 5(a^2x \otimes a) + 10(ax \otimes a^2) - 10(a^2 \otimes ax) + 5(a \otimes a^2x) - (1 \otimes a^3x)\right). \end{aligned}$$

Prenons $\lambda \in A$ tel que $d(\lambda) = \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{5-i}$ et supposons qu'il s'agit d'un cobord dans le quotient. Alors il existe $\gamma \in A$ et $\eta \in K^5$ tel que $d(\gamma) + \eta = \lambda$ dans A . La différentielle nous donne $d\eta = d\lambda = \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{5-i}$, ce qui implique que η est de degré 9. Puisque K^5 ne contient pas d'élément de degré 9, nous avons $\eta = 0$, et donc $d(\gamma) = \lambda$. Alors λ est un cobord aussi dans A . N'étant pas un cocycle dans A , nous avons une contradiction, et donc λ n'est pas un cobord dans le quotient. La classe $[\lambda]$ dans le quotient étant non-nulle, nous introduisons $\omega_i \in W^9$ pour tout $i \in \{0, \dots, 5\}$, et posons $d(\omega_i) = \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{5-i}$ et $\phi(\omega_i) = 0$. De cette façon, ϕ envoie la classe $[\lambda - \omega_i]$ sur $[\lambda_i]$. De plus, nous posons $r(\omega_i) = \lambda_i \in A$.

En degré 11, supposons que nous avons un cocycle dans K^5 . Alors il s'agit d'une multiplication de quatre éléments de degré 2 et d'un de degré 3. Cependant, les éléments de degré 2 sont des cocycles mais pas celui de degré 3, et donc la multiplication ne peut être un cocycle. Nous concluons que $W^{10} = 0$.

En degré 12, K^5 contient des éléments de la forme $\alpha_1 \cdots \alpha_5$ où nous avons deux possibilités pour les degrés :

- (1) $|\alpha_1| = |\alpha_2| = |\alpha_3| = 2$ et $|\alpha_4| = |\alpha_5| = 3$, ou
- (2) $|\alpha_1| = |\alpha_2| = |\alpha_3| = |\alpha_4| = 2$ et $|\alpha_5| = 4$.

La première possibilité ne crée pas de cocycle, comme nous l'avons montré dans le type (1). Cependant un élément respectant la deuxième possibilité est forcément un cocycle, et donc il suffit de regarder les monômes. Nous avons

$$\begin{aligned} \alpha_1, \dots, \alpha_4 &\in \text{span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \quad \text{et} \\ \alpha_5 &\in \text{span}\{\mathbf{a}^2, \mathbf{ab}, \mathbf{b}^2, (a^2 \otimes 1 - 1 \otimes a^2), (b^2 \otimes 1 - 1 \otimes b^2), (ab \otimes 1 - 1 \otimes ab), (a \otimes b - b \otimes a)\}. \end{aligned}$$

Tout produit $\alpha := \alpha_1 \cdots \alpha_5$ de cette forme est aussi un cobord.

Évaluons tout d'abord lorsque $\alpha_5 \in \{\mathbf{a}^2, \mathbf{ab}, \mathbf{b}^2\}$. Alors $\alpha_1 \cdots \alpha_5$ est de la forme $\mathbf{a}^i \mathbf{b}^{6-i}$, pour $i \in \{0, \dots, 6\}$. Soit $\lambda \in A$ tel que $d(\lambda) = \alpha^i \beta^{6-i}$, et supposons qu'il s'agit d'un cobord dans le quotient. Alors il existe un $\gamma \in A$ et un $\eta \in K^5$ tel que dans A nous avons

$$d(\gamma) + \eta = \lambda.$$

La différentielle implique $d(\eta) = d(\lambda) = \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{6-i} \in K^6$, et donc η est de degré 11. Puisque K^6 ne contient pas de degré 11, λ n'est pas un cobord dans le quotient. Cependant, nous n'avons pas à introduire de nouveaux éléments dans W , puisqu'il existe un $u \in \{a, b\}$ et un $j \in \{0, \dots, 5\}$ tel que ϕ envoie la classe $[\lambda - u \cdot \omega_j]$ sur $[\lambda]$.

Évaluons maintenant lorsque

$$\alpha_5 \in \{(a^2 \otimes 1 - 1 \otimes a^2), (b^2 \otimes 1 - 1 \otimes b^2), (ab \otimes 1 - 1 \otimes ab)\}.$$

Alors α_5 est un cobord. Prenons $\lambda \in A$ tel que $d\lambda = \alpha_1 \cdots \alpha_5$ et notons $\eta \in A$ tel que $d\eta = \alpha_5$. Remarquons que $\eta \in K$. Notons $\eta' := \alpha_1 \cdots \alpha_4 \eta \in K^5$. Alors $d\eta' = \alpha_1 \cdots \alpha_5$. Alors $\lambda - \eta'$ est un cocycle de degré 11 dans A . Puisque $H^{11}(A) = 0$, il s'agit aussi d'un cobord, et donc il existe $\gamma \in A$ tel que $d\gamma = \lambda - \eta'$. Dans le quotient, nous obtenons $d\gamma = \lambda$, et donc la classe de λ est nulle. Nous n'avons donc pas besoin d'introduire d'éléments dans W .

Il ne nous reste que le cas $\alpha_5 = (a \otimes b - b \otimes a)$. Puisque $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ forme une base de $\text{span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ et que les deux éléments sont des cocycles, il n'est pas nécessaire de vérifier toutes combinaisons linéaires. Remarquons aussi que le produit α n'est pas cobord d'un élément de K^5 . Tout $\lambda \in A$ avec $d\lambda = \alpha$ est donc un cocycle dans le quotient, mais pas un cobord. De plus, aucune classe de $A \otimes W^{<11}$ n'est envoyé par ϕ sur λ . Introduisons alors $\omega'_i \in W^{11}$, pour chaque $i \in \{0, \dots, 4\}$, et posons $d(\omega'_i) = \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{4-i} (a \otimes b - b \otimes a)$ et $\phi(\omega'_i) = 0$. Afin de définir $r(\omega'_i)$, nous introduisons

$$\begin{aligned} \zeta_i &= (by \otimes 1 - 3y \otimes b + 3b \otimes y - 1 \otimes by) \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{1-i} \quad \text{pour } i = 0, 1 \\ \zeta_2 &= (bx \otimes 1 - 2z \otimes a + b \otimes x - x \otimes b + 2a \otimes z - 1 \otimes bx) \mathbf{b} \\ \zeta_i &= (ax \otimes 1 - 3x \otimes a + 3a \otimes x - 1 \otimes ax) \mathbf{a}^{3-i} \mathbf{b}^{4-i} \quad \text{pour } i = 3, 4. \end{aligned}$$

et $\lambda'_i = \zeta_i \cdot (a \otimes b - b \otimes a)$, pour chaque $i \in \{0, \dots, 4\}$. De cette façon, $d(\lambda'_i) = d(\omega'_i)$. Nous posons alors $r(\omega'_i) = \lambda'_i$.

En degré 13, les éléments de K^5 sont des combinaisons linéaires d'éléments de la forme $\alpha_1 \cdots \alpha_5$ où nous avons trois possibilités pour les degrés :

- (1) $|\alpha_1| = |\alpha_2| = |\alpha_3| = |\alpha_4| = 2$ et $|\alpha_5| = 5$,
- (2) $|\alpha_1| = |\alpha_2| = |\alpha_3| = 2$, $|\alpha_4| = 3$ et $|\alpha_5| = 4$, ou
- (3) $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 2$ et $|\alpha_3| = |\alpha_4| = |\alpha_5| = 3$.

Regardons les combinaisons linéaires qui sont des cocycles. Notons $\alpha_{(i,j)}$ les éléments de la combinaison respectant la première possibilité, $\beta_{(i,j)}$ ceux de la deuxième, et $\gamma_{(i,j)}$ ceux de la troisième, et notons α, β et γ leur somme respective. Alors nous évaluons le cocycle

$$\alpha + \beta + \gamma = \sum \alpha_{(i,1)} \cdots \alpha_{(i,5)} + \sum \beta_{(i,1)} \cdots \beta_{(i,5)} + \sum \gamma_{(i,1)} \cdots \gamma_{(i,5)}.$$

Remarquons alors que $\gamma \in \text{span}\{\mathbf{a}^2 \mathbf{xyz}, \mathbf{abxyz}, \mathbf{b}^2 \mathbf{xyz}\}$, où nous avons la différentielle

$$d(\mathbf{xyz}) = (a^2 \otimes 1 - 1 \otimes a^2) \mathbf{yz} - (b^2 \otimes 1 - 1 \otimes b^2) \mathbf{xz} + (ab \otimes 1 - 1 \otimes ab) \mathbf{xy}$$

Puisqu'aucune autre différentielle ne contient de multiplication de deux éléments parmi $\{x, y, z\}$, nous avons $\gamma = 0$. Il nous reste donc $\alpha + \beta$, avec

$$\begin{aligned} \alpha_{(i,1)} \cdots \alpha_{(i,4)} &\in \text{span}\{\mathbf{a}^4, \mathbf{a}^3 \mathbf{b}, \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2, \mathbf{ab}^3, \mathbf{b}^4\} \\ \alpha_{(i,5)} &\in \text{span}\{(s \otimes v - v \otimes s), (sv \otimes 1 - 1 \otimes sv) \mid s \in \{a, b\}, v \in \{x, y, z\}\} \\ \beta_{(i,1)} \cdots \beta_{(i,3)} &\in \text{span}\{\mathbf{a}^3, \mathbf{a}^2 \mathbf{b}, \mathbf{ab}^2, \mathbf{b}^3\}, \quad \beta_{(i,4)} \in \text{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} \\ \beta_{(i,5)} &\in \text{span}\{\mathbf{a}^2, \mathbf{ab}, \mathbf{b}^2, (a \otimes b - b \otimes a), (st \otimes 1 - 1 \otimes st) \mid s, t \in \{a, b\}\}. \end{aligned}$$

Ceci nous donne alors les développements de α et β suivants, où tous $c_i, k_i \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}
 \alpha := & (c_1\mathbf{a}^4 + c_2\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_3\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_4\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_5\mathbf{b}^4)(ax \otimes 1 - 1 \otimes ax) \\
 & + (c_6\mathbf{a}^4 + c_7\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_8\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_9\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{10}\mathbf{b}^4)(ay \otimes 1 - 1 \otimes ay) \\
 & + (c_{11}\mathbf{a}^4 + c_{12}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{13}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{14}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{15}\mathbf{b}^4)(az \otimes 1 - 1 \otimes az) \\
 & + (c_{16}\mathbf{a}^4 + c_{17}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{18}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{19}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{20}\mathbf{b}^4)(bx \otimes 1 - 1 \otimes bx) \\
 & + (c_{21}\mathbf{a}^4 + c_{22}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{23}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{24}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{25}\mathbf{b}^4)(by \otimes 1 - 1 \otimes by) \\
 & + (c_{26}\mathbf{a}^4 + c_{27}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{28}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{29}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{30}\mathbf{b}^4)(bz \otimes 1 - 1 \otimes bz) \\
 & + (c_{31}\mathbf{a}^4 + c_{32}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{33}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{34}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{35}\mathbf{b}^4)(x \otimes a - a \otimes x) \\
 & + (c_{36}\mathbf{a}^4 + c_{37}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{38}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{39}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{40}\mathbf{b}^4)(y \otimes a - a \otimes y) \\
 & + (c_{41}\mathbf{a}^4 + c_{42}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{43}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{44}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{45}\mathbf{b}^4)(z \otimes a - a \otimes z) \\
 & + (c_{46}\mathbf{a}^4 + c_{47}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{48}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{49}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{50}\mathbf{b}^4)(x \otimes b - b \otimes x) \\
 & + (c_{51}\mathbf{a}^4 + c_{52}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{53}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{54}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{55}\mathbf{b}^4)(y \otimes b - b \otimes y) \\
 & + (c_{56}\mathbf{a}^4 + c_{57}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{58}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{59}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{60}\mathbf{b}^4)(z \otimes b - b \otimes z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta := & (k_1\mathbf{a}^5 + k_2\mathbf{a}^4\mathbf{b} + k_3\mathbf{a}^3\mathbf{b}^2 + k_4\mathbf{a}^2\mathbf{b}^3 + k_5\mathbf{a}\mathbf{b}^4 + k_6\mathbf{b}^5)\mathbf{x} \\
 & + (k_7\mathbf{a}^5 + k_8\mathbf{a}^4\mathbf{b} + k_9\mathbf{a}^3\mathbf{b}^2 + k_{10}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^3 + k_{11}\mathbf{a}\mathbf{b}^4 + k_{12}\mathbf{b}^5)\mathbf{y} \\
 & + (k_{13}\mathbf{a}^5 + k_{14}\mathbf{a}^4\mathbf{b} + k_{15}\mathbf{a}^3\mathbf{b}^2 + k_{16}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^3 + k_{17}\mathbf{a}\mathbf{b}^4 + k_{18}\mathbf{b}^5)\mathbf{z} \\
 & + (k_{19}\mathbf{a}^3 + k_{20}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{21}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{22}\mathbf{b}^3)(a \otimes b - b \otimes a)\mathbf{x} \\
 & + (k_{23}\mathbf{a}^3 + k_{24}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{25}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{26}\mathbf{b}^3)(a \otimes b - b \otimes a)\mathbf{y} \\
 & + (k_{27}\mathbf{a}^3 + k_{28}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{29}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{30}\mathbf{b}^3)(a \otimes b - b \otimes a)\mathbf{z} \\
 & + (k_{31}\mathbf{a}^3 + k_{32}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{33}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{34}\mathbf{b}^3)(a^2 \otimes 1 - 1 \otimes a^2)\mathbf{x} \\
 & + (k_{35}\mathbf{a}^3 + k_{36}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{37}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{38}\mathbf{b}^3)(a^2 \otimes 1 - 1 \otimes a^2)\mathbf{y} \\
 & + (k_{39}\mathbf{a}^3 + k_{40}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{41}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{42}\mathbf{b}^3)(a^2 \otimes 1 - 1 \otimes a^2)\mathbf{z} \\
 & + (k_{43}\mathbf{a}^3 + k_{44}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{45}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{46}\mathbf{b}^3)(ab \otimes 1 - 1 \otimes ab)\mathbf{x} \\
 & + (k_{47}\mathbf{a}^3 + k_{48}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{49}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{50}\mathbf{b}^3)(ab \otimes 1 - 1 \otimes ab)\mathbf{y} \\
 & + (k_{51}\mathbf{a}^3 + k_{52}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{53}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{54}\mathbf{b}^3)(ab \otimes 1 - 1 \otimes ab)\mathbf{z} \\
 & + (k_{55}\mathbf{a}^3 + k_{56}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{57}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{58}\mathbf{b}^3)(b^2 \otimes 1 - 1 \otimes b^2)\mathbf{x} \\
 & + (k_{59}\mathbf{a}^3 + k_{60}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{61}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{62}\mathbf{b}^3)(b^2 \otimes 1 - 1 \otimes b^2)\mathbf{y} \\
 & + (k_{63}\mathbf{a}^3 + k_{64}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{65}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{66}\mathbf{b}^3)(b^2 \otimes 1 - 1 \otimes b^2)\mathbf{z}
 \end{aligned}$$

La différentielle $d(\alpha + \beta)$ nous donne alors

$$\begin{aligned}
0 = & (c_1\mathbf{a}^4 + c_2\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_3\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_4\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_5\mathbf{b}^4)(\mathbf{a}^3 \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{a}^3) \\
& + (c'_{11}\mathbf{a}^4 + c'_{12}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c'_{13}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c'_{14}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c'_{15}\mathbf{b}^4)(\mathbf{a}^2\mathbf{b} \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{a}^2\mathbf{b}) \\
& + (c'_6\mathbf{a}^4 + c'_7\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c'_8\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c'_9\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c'_{10}\mathbf{b}^4)(\mathbf{a}\mathbf{b}^2 \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{a}\mathbf{b}^2) \\
& + (c_{21}\mathbf{a}^4 + c_{22}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{23}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{24}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{25}\mathbf{b}^4)(\mathbf{b}^3 \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{b}^3) \\
& + (c_{31}\mathbf{a}^4 + c_{32}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{33}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{34}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{35}\mathbf{b}^4)(\mathbf{a}^2 \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}^2) \\
& + (c_{36}\mathbf{a}^4 + c_{37}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{38}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{39}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{40}\mathbf{b}^4)(\mathbf{b}^2 \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^2) \\
& + (c_{41}\mathbf{a}^4 + c_{42}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{43}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{44}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{45}\mathbf{b}^4)(\mathbf{a}\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}\mathbf{b}) \\
& + (c_{46}\mathbf{a}^4 + c_{47}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{48}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{49}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{50}\mathbf{b}^4)(\mathbf{a}^2 \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}^2) \\
& + (c_{51}\mathbf{a}^4 + c_{52}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{53}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{54}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{55}\mathbf{b}^4)(\mathbf{b}^2 \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}^2) \\
& + (c_{56}\mathbf{a}^4 + c_{57}\mathbf{a}^3\mathbf{b} + c_{58}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + c_{59}\mathbf{a}\mathbf{b}^3 + c_{60}\mathbf{b}^4)(\mathbf{a}\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}\mathbf{b}) \\
& + (k_1\mathbf{a}^5 + k_2\mathbf{a}^4\mathbf{b} + k_3\mathbf{a}^3\mathbf{b}^2 + k_4\mathbf{a}^2\mathbf{b}^3 + k_5\mathbf{a}\mathbf{b}^4 + k_6\mathbf{b}^5)(\mathbf{a}^2 \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{a}^2) \\
& + (k_7\mathbf{a}^5 + k_8\mathbf{a}^4\mathbf{b} + k_9\mathbf{a}^3\mathbf{b}^2 + k_{10}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^3 + k_{11}\mathbf{a}\mathbf{b}^4 + k_{12}\mathbf{b}^5)(\mathbf{b}^2 \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{b}^2) \\
& + (k_{13}\mathbf{a}^5 + k_{14}\mathbf{a}^4\mathbf{b} + k_{15}\mathbf{a}^3\mathbf{b}^2 + k_{16}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^3 + k_{17}\mathbf{a}\mathbf{b}^4 + k_{18}\mathbf{b}^5)(\mathbf{a}\mathbf{b} \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{a}\mathbf{b}) \\
& + (k_{19}\mathbf{a}^3 + k_{20}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{21}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{22}\mathbf{b}^3)(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})(\mathbf{a}^2 \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{a}^2) \\
& + (k_{23}\mathbf{a}^3 + k_{24}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{25}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{26}\mathbf{b}^3)(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})(\mathbf{b}^2 \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{b}^2) \\
& + (k_{27}\mathbf{a}^3 + k_{28}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{29}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{30}\mathbf{b}^3)(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})(\mathbf{a}\mathbf{b} \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{a}\mathbf{b}) \\
& + (k_{31}\mathbf{a}^3 + k_{32}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{33}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{34}\mathbf{b}^3)(\mathbf{a}^2 \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{a}^2)^2 \\
& + (k_{51}\mathbf{a}^3 + k_{52}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{53}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{54}\mathbf{b}^3)(\mathbf{a}\mathbf{b} \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{a}\mathbf{b})^2 \\
& + (k_{59}\mathbf{a}^3 + k_{60}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k_{61}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k_{62}\mathbf{b}^3)(\mathbf{b}^2 \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{b}^2)^2 \\
& + (k'_{35}\mathbf{a}^3 + k'_{36}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k'_{37}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k'_{38}\mathbf{b}^3)(\mathbf{a}^2 \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{a}^2)(\mathbf{b}^2 \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{b}^2) \\
& + (k'_{39}\mathbf{a}^3 + k'_{40}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k'_{41}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k'_{42}\mathbf{b}^3)(\mathbf{a}^2 \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{a}^2)(\mathbf{a}\mathbf{b} \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{a}\mathbf{b}) \\
& + (k'_{47}\mathbf{a}^3 + k'_{48}\mathbf{a}^2\mathbf{b} + k'_{49}\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + k'_{50}\mathbf{b}^3)(\mathbf{a}\mathbf{b} \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{a}\mathbf{b})(\mathbf{b}^2 \otimes 1 - 1 \otimes \mathbf{b}^2),
\end{aligned}$$

où les c'_j et k'_j sont définis par

$$\begin{array}{ccccc}
c'_6 = c_6 + c_{26} & c'_{11} = c_{11} + c_{16} & k'_{35} = k_{35} + k_{55} & k'_{39} = k_{39} + k_{43} & k'_{47} = k_{47} + k_{63} \\
c'_7 = c_7 + c_{27} & c'_{12} = c_{12} + c_{17} & k'_{36} = k_{36} + k_{56} & k'_{40} = k_{40} + k_{44} & k'_{48} = k_{48} + k_{64} \\
c'_8 = c_8 + c_{28} & c'_{13} = c_{13} + c_{18} & k'_{37} = k_{37} + k_{57} & k'_{41} = k_{41} + k_{45} & k'_{49} = k_{49} + k_{65} \\
c'_9 = c_9 + c_{29} & c'_{14} = c_{14} + c_{19} & k'_{38} = k_{38} + k_{58} & k'_{42} = k_{42} + k_{46} & k'_{50} = k_{50} + k_{66} \\
c'_{10} = c_{10} + c_{30} & c'_{15} = c_{15} + c_{20} & & &
\end{array}$$

En créant la base B des cocycles de degré 12 de K^5 , les coefficients c'_j nous donnent les cocycles de la forme

$$\mathbf{a}^i\mathbf{b}^{4-i}((\mathbf{a}\mathbf{y} - \mathbf{b}\mathbf{z}) \otimes 1 - 1 \otimes (\mathbf{a}\mathbf{y} - \mathbf{b}\mathbf{z})) \quad \text{et} \quad \mathbf{a}^i\mathbf{b}^{4-i}((\mathbf{a}\mathbf{z} - \mathbf{b}\mathbf{x}) \otimes 1 - 1 \otimes (\mathbf{a}\mathbf{z} - \mathbf{b}\mathbf{x})),$$

pour $i = 0, \dots, 4$.

Complexité topologique

Soit $\lambda \in A$ tel que $d\lambda$ est un des éléments ci-dessus. Puisque $d\lambda$ n'est pas dans $d(K^5)$, il ne s'agit pas d'un cobord dans le quotient, et donc la classe $[\phi(\lambda)]$ est non-nulle. Nous introduisons alors ω_i'' et ω_i''' dans W^{12} et posons

$$\begin{aligned} d(\omega_i'') &= \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{4-i} ((ay - bz) \otimes 1 - 1 \otimes (ay - bz)) & \phi(\omega_i'') &= 0 \\ d(\omega_i''') &= \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{4-i} ((az - bx) \otimes 1 - 1 \otimes (az - bx)) & \phi(\omega_i''') &= 0 \end{aligned}$$

De cette façon, il existe un $\omega \in \{\omega_i'', \omega_i''' \mid i = 0, \dots, 4\}$ tel que ϕ envoie la classe $[\lambda - \omega]$ sur $[\phi(\lambda)]$. Pour définir $r(\omega_i'')$ et $r(\omega_i''')$, nous introduisons λ_i'' et λ_i''' dans A , pour $i = 0, \dots, 4$ par

$$\begin{aligned} \lambda_i'' &:= \zeta_i((ay - bz) \otimes 1 - 1 \otimes (ay - bz)) \\ \lambda_i''' &:= \zeta_i((az - bx) \otimes 1 - 1 \otimes (az - bx)), \end{aligned}$$

où les ζ_i sont définis plus haut. Alors

$$\begin{aligned} d(\lambda_i'') &= \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{4-i} ((ay - bz) \otimes 1 - 1 \otimes (ay - bz)) \\ d(\lambda_i''') &= \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{4-i} ((az - bx) \otimes 1 - 1 \otimes (az - bx)). \end{aligned}$$

Alors nous posons $r(\omega_i'') = \lambda_i''$ et $r(\omega_i''') = \lambda_i'''$.

Les coefficients k_j' rajoutent à notre base B les cocycles de la forme suivante (énumérées à gauche) :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{3-i} ((a^2 \otimes 1 - 1 \otimes a^2) \mathbf{y} - (b^2 \otimes 1 - 1 \otimes b^2) \mathbf{x}) &= d(\mathbf{a}^i \mathbf{b}^{3-i} (x \otimes 1 - 1 \otimes x)(y \otimes 1 - 1 \otimes y)) \\ \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{3-i} ((a^2 \otimes 1 - 1 \otimes a^2) \mathbf{z} - (ab \otimes 1 - 1 \otimes ab) \mathbf{x}) &= d(\mathbf{a}^i \mathbf{b}^{3-i} (x \otimes 1 - 1 \otimes x)(z \otimes 1 - 1 \otimes z)) \\ \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{3-i} ((ab \otimes 1 - 1 \otimes ab) \mathbf{y} - (b^2 \otimes 1 - 1 \otimes b^2) \mathbf{z}) &= d(\mathbf{a}^i \mathbf{b}^{3-i} (z \otimes 1 - 1 \otimes z)(y \otimes 1 - 1 \otimes y)), \end{aligned}$$

pour $i = 0, \dots, 3$. Cependant la colonne de droite nous montre que les cocycles sont tous dans $d(K^5)$. En évaluant cas par cas, nous avons que tout nouveau cocycle du quotient créé par l'enlèvement des cocycles ci-dessus (à gauche de l'égalité) est aussi un cobord dans le quotient. Sa classe étant nulle, nous n'avons pas besoin de rajouter d'éléments dans W pour l'instant.

Jusqu'à présent, nous avons en degré inférieur ou égal à 12 les éléments suivants dans W :

$\omega \in W$	ω_i avec $0 \leq i \leq 5$	ω_i' avec $0 \leq i \leq 4$	
degré	9	11	
$d(\omega)$	$\mathbf{a}^i \mathbf{b}^{5-i}$	$\mathbf{a}^i \mathbf{b}^{4-i} (a \otimes b - b \otimes a)$	
$r(\omega)$	λ_i	λ_i'	
$\omega \in W$	ω_i'' avec $0 \leq i \leq 4$	ω_i''' avec $0 \leq i \leq 4$...
degré	12	12	≥ 12
$d(\omega)$	$\mathbf{a}^i \mathbf{b}^{4-i} ((ay - bz) \otimes 1 - 1 \otimes (ay - bz))$	$\mathbf{a}^i \mathbf{b}^{4-i} ((az - bx) \otimes 1 - 1 \otimes (az - bx))$...
$r(\omega)$	λ_i''	λ_i'''	...

De plus, $\phi(W) = 0$.

Il nous manque cependant des éléments en degré 12 dans W . Pour les autres cocycles dans notre base B , il suffit d'échelonner une matrice. Remarquons que $d(\alpha + \beta) \in (\Lambda(a, b)^{13}, d)$. Nous prenons donc la base

$$\{a^7 \otimes 1, a^6 b \otimes 1, \dots, b^7 \otimes 1, a^6 \otimes a, \dots, 1 \otimes a^7\}$$

de $(\Lambda(a, b)^{13}, d)$ pour obtenir la matrice des coefficients (voir appendice B). Une fois échelonnée, elle nous donne les derniers cocycles de la base B . Soit $\lambda \in A$ tel que $d\lambda$ est un de ces cocycles. Alors il se peut que $\phi(\lambda)$ ait une classe non-nulle. Dans ce cas, il nous reste des éléments de type (2) à introduire dans W^{12} .

Type (3)

Les éléments de type (3) de W sont des éléments servant à couper la cohomologie créée par l'ajout de W que nous ne désirons pas.

Soit $\omega \in W$ de type (3). Nous pouvons définir r sur cet élément si et seulement si $r(d\omega)$ est un cobord. Si il n'y a pas de cohomologie dans le degré de $r(d\omega)$, c'est-à-dire en degré $|\omega| + 1$, alors $r(d\omega)$ est forcément un cobord. Nous n'avons donc pas besoin de regarder les éléments de type (3) en degré 10, 12 et supérieur ou égal à 14.

Remarquons aussi que les premiers éléments de type (3) annulent des cocycles de $A \oplus (A^+ \otimes \Lambda W)^+$ ou $(A^+ \otimes \Lambda W) \oplus (A^+ \otimes \Lambda W)^+$. Les cocycles en degré inférieur ou égal à 14 sont alors formés avec des éléments de type (2) de W en degré inférieur ou égal à 12.

Supposons qu'il existe un élément $\omega \in W^9$ de type (3). Alors $d\omega = s - tv$, pour $s, t \in A$, $|t| \geq 2$, et $v \in W$ de type (2). Puisque $|t| + |v| = |tv| = 10$, nous avons $|v| \leq 8$. Cependant W commence en degré 9. Nous n'avons donc pas d'élément de type (3) en degré 9.

Regardons maintenant en degré 11. Supposons qu'il existe un élément $\omega \in W^{11}$ de type (3). Alors $d\omega = s - tv$, pour $s, t \in A$, $|t| \geq 2$, et $v \in W$ de type (2). Alors nous avons deux possibilités pour les degrés de t et v :

$$|t| = 2 \text{ et } |v| = 10 \quad \text{ou} \quad |t| = 3 \text{ et } |v| = 9.$$

La première possibilité est impossible car nous n'avons pas d'éléments de type (2) de degré 10. La deuxième possibilité implique que tv se retrouve dans l'espace engendré par les éléments de gauche suivants, ou à droite est leur différentielle respective :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\omega_i &\xrightarrow{d} (a^2 \otimes 1 - 1 \otimes a^2)\omega_i - \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{5-i} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}\omega_i &\xrightarrow{d} (b^2 \otimes 1 - 1 \otimes b^2)\omega_i - \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{5-i} \mathbf{y} \\ \mathbf{z}\omega_i &\xrightarrow{d} (ab \otimes 1 - 1 \otimes ab)\omega_i - \mathbf{a}^i \mathbf{b}^{5-i} \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Cependant, il est impossible de trouver un $s \in A$ tel que $d(s) = d(tv)$, et donc $s - tv$ n'est pas un cocycle. Alors $\omega \in W^{11}$ de type (3) n'existe pas.

Il ne nous reste qu'à vérifier le degré 13. Supposons qu'il existe un $\omega \in W^{13}$ de type (3). Alors $d\omega = s - tv$, pour $s, t \in A$, $|t| \geq 2$, et $v \in W$ est de type (2). En considérant que v ne peut être de degré 10, nous avons deux possibilités pour les degrés de t et v :

Complexité topologique

- (1) $|t| = 2$ et $|v| = 12$
- (2) $|t| = 3$ et $|v| = 11$
- (3) $|t| = 5$ et $|v| = 9$.

Regardons tout d'abord chaque cas séparé, et ensuite, nous regardons le cas où tv est une combinaison linéaire de plusieurs degrés de t et v .

Regardons les éléments de type (3) dont la différentielle n'est pas composé des éléments de type (2) non-développés dans W . Pour l'option (1), tv est dans l'espace engendré par les éléments suivants, où leur différentielle respective est à droite :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}\omega_i'' &\xrightarrow{d} \mathbf{a}^{i+1}\mathbf{b}^{4-i}((ay - bz) \otimes 1 - 1 \otimes (ay - bz)) \\
 \mathbf{a}\omega_i''' &\xrightarrow{d} \mathbf{a}^{i+1}\mathbf{b}^{4-i}((az - bx) \otimes 1 - 1 \otimes (az - bx)) \\
 \mathbf{b}\omega_i'' &\xrightarrow{d} \mathbf{a}^i\mathbf{b}^{5-i}((ay - bz) \otimes 1 - 1 \otimes (ay - bz)) \\
 \mathbf{b}\omega_i''' &\xrightarrow{d} \mathbf{a}^i\mathbf{b}^{5-i}((az - bx) \otimes 1 - 1 \otimes (az - bx)),
 \end{aligned}$$

pour $i \in \{0, \dots, 4\}$. Prenons $s \in A$ tel que $ds = d(tv)$. Supposons que $d(tv)$ n'est pas dans $d(K^5)$. Alors il n'existe pas de $\eta \in K^5$ et de $\gamma \in A$ tel que $d(\gamma) + \eta = s$. Alors la classe $[\phi(s)] = [\phi(s - tv)]$ est non-nulle dans le quotient. Cependant, la classe $[s - tv]$ est nulle dans $A \otimes \Lambda W$. Nous regardons donc seulement les tv dont leur différentielle est dans $d(K^5)$, qui, en degré 15, est engendré par.

Regardons l'option (2). Alors tv est dans l'espace engendré par les éléments de gauche suivants :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}\omega_i' &\xrightarrow{d} (a^2 \otimes 1 - 1 \otimes a^2)\omega_i' - \mathbf{a}^i\mathbf{b}^{4-i}(a \otimes b - b \otimes a)\mathbf{x} \\
 \mathbf{y}\omega_i' &\xrightarrow{d} (b^2 \otimes 1 - 1 \otimes b^2)\omega_i' - \mathbf{a}^i\mathbf{b}^{4-i}(a \otimes b - b \otimes a)\mathbf{y} \\
 \mathbf{z}\omega_i' &\xrightarrow{d} (ab \otimes 1 - 1 \otimes ab)\omega_i' - \mathbf{a}^i\mathbf{b}^{4-i}(a \otimes b - b \otimes a)\mathbf{z}.
 \end{aligned}$$

Cependant, puisque les différentielles contiennent toutes du W , il est impossible d'avoir $s \in A$ tel que $d(s) = d(tv)$. L'option (2) est donc impossible.

Il nous reste l'option (3). Nous ne voulons pas de W dans les différentielles de tv , comme nous avons vu dans l'option (2). De plus, il serait impossible d'annuler le W de l'option (3) avec des éléments de l'option (2), car il ne s'agit pas du même degré de W . Nous voulons donc que t soit un cocycle. Alors tv est dans l'espace engendré par les éléments de gauche suivants :

$$\begin{aligned}
 ((ay - bz) \otimes 1 - 1 \otimes (ay - bz))\omega_i &\xrightarrow{d} \mathbf{a}^i\mathbf{b}^{5-i}((ay - bz) \otimes 1 - 1 \otimes (ay - bz)) \\
 ((az - bx) \otimes 1 - 1 \otimes (az - bx))\omega_i &\xrightarrow{d} \mathbf{a}^i\mathbf{b}^{5-i}((az - bx) \otimes 1 - 1 \otimes (az - bx)),
 \end{aligned}$$

pour $i \in \{0, \dots, 5\}$. Remarquons que les différentielles sont les mêmes que dans l'option (1), et donc la même contradiction s'applique ici.

Regardons alors les combinaisons linéaires. Les options (1) et (3) nous donnent les cocycles suivants :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}\omega_i'' - ((ay - bz) \otimes 1 - 1 \otimes (ay - bz))\omega_i \\
 \mathbf{b}\omega_i''' - ((az - bx) \otimes 1 - 1 \otimes (az - bx))\omega_i
 \end{aligned}$$

Complexité topologique

pour $i \in \{0, \dots, 4\}$. Puisque ϕ envoie ces deux formats de cocycles sur 0, il envoie leur classe non nulle sur une classe nulle. Il nous faut donc $\sigma_i, \sigma'_i \in W^{14}$ de type (3), avec

$$\begin{aligned} d(\sigma_i) &= \mathbf{b}\omega_i'' - ((ay - bz) \otimes 1 - 1 \otimes (ay - bz))\omega_i \\ d(\sigma'_i) &= \mathbf{b}\omega_i''' - ((az - bx) \otimes 1 - 1 \otimes (az - bx))\omega_i \end{aligned}$$

Regardons alors si les éléments suivants sont des cobords dans A :

$$\begin{aligned} r(d(\sigma_i)) &= \mathbf{b}\lambda_i'' - ((ay - bz) \otimes 1 - 1 \otimes (ay - bz))\lambda_i \\ &= ((ay - bz) \otimes 1 - 1 \otimes (ay - bz))(\mathbf{b}\zeta_i - \lambda_i) \\ r(d(\sigma'_i)) &= \mathbf{b}\lambda_i''' - ((az - bx) \otimes 1 - 1 \otimes (az - bx))\lambda_i \\ &= ((az - bx) \otimes 1 - 1 \otimes (az - bx))(\mathbf{b}\zeta_i - \lambda_i). \end{aligned}$$

Supposons qu'un des éléments ci-dessus n'est pas un cobord. Alors il contient l'élément $abz \otimes abz$ dans son développement. Puisqu'il n'y a qu'un z dans $(ay - bz) \otimes 1 - 1 \otimes (ay - bz)$ et $((az - bx) \otimes 1 - 1 \otimes (az - bx))$, il doit y avoir un z aussi dans $(\mathbf{b}\zeta_i - \lambda_i)$. Puisqu'aucun λ_i ne contient de z , et que le seul ζ_i en contenant ζ_2 , les seuls éléments ci-dessus qui pourraient ne pas être des cobords sont $r(d(\sigma_2))$ et $r(d(\sigma'_2))$.

Remarquons que $(\mathbf{b}\zeta_2 - \lambda_2)$ est de degré 9, et que

$$H^9(A) \cong H^2(\Lambda V, d) \otimes H^7(\Lambda V, d) \oplus H^7(\Lambda V, d) \otimes H^2(\Lambda V, d).$$

Notons β la somme des éléments de $(\mathbf{b}\zeta_2 - \lambda_2)$ qui n'est pas de degré 2 d'un côté du tenseur. Alors β est un cobord. Notons $\beta' \in A$ tel que $d(\beta') = \beta$. Nous avons

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}\zeta_2 - \lambda_2) &= \beta + 2a \otimes (b^2z - aby) - 2(b^2z - aby) \otimes a + 3(a^2y - b^2x) \otimes b - 3b \otimes (a^2y - b^2x) \\ &= d(\beta' + 2a \otimes yz - 2yz \otimes a + 3xy \otimes b - 3b \otimes xy). \end{aligned}$$

Puisque $(\mathbf{b}\zeta_2 - \lambda_2)$ est un cobord, alors $r(d(\sigma_2))$ et $r(d(\sigma'_2))$ le sont aussi. Nous pouvons donc définir la rétraction sur tous les éléments de type (3).

La seule possibilité que r soit impossible à définir serait s'il existe un élément τ de type (3), dont la différentielle $d\tau$ contient un élément de type (2) de W , introduit suite à l'évaluation de la matrice. De plus, il faudrait que $r(d\tau)$ ne soit pas un cobord dans A . Un tel élément ferait en sorte que $\mathbf{tc}(X) = 5$. S'il n'existe aucun élément avec un tel comportement, nous avons $\mathbf{tc}(X) = 4$. Les contraintes de temps nous force à nous satisfaire de $4 \leq \mathbf{tc}(X) \leq 5$.

7.3.6 Complexité topologique : $TC(X_{\mathbb{Q}})$

La proposition 5.20 nous dit $TC(X) \leq \mathbf{tc}(X) = 5$. Prouvons ici que $TC(X) > 3$. Considérons le diagramme commutatif d'adgc suivant

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes 4} & \xrightarrow{P} & A^{\otimes 4} / K^{\otimes 4} \\ M \downarrow & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\ A & & A^{\otimes 4} \otimes \Lambda W \end{array}$$

et rappelons la cohomologie de X :

$$H^*(X) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[a] \oplus \mathbb{Q}[b] \oplus \mathbb{Q}[ay - bz] \oplus \mathbb{Q}[az - bx] \oplus \mathbb{Q}[a^2y - abz].$$

Introduisons le cocycle de $K^{\otimes 4}$ suivant :

$$\alpha := \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{b}^{\otimes 3} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{a}^{\otimes 3} \otimes \mathbf{y} + \mathbf{a}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{y} - 2\mathbf{a}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{z} - 2\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{z}.$$

Nous avons montré dans la section $\mathbf{tc}(X)$ avec $m = 3$ que $M(\alpha)$ a une classe non-nulle dans A . Par le corollaire 6.11, nous obtenons $TC(X) > 3$. Nous concluons que $TC(X)$ est aussi 4 ou 5.

7.4 Modèle pur avec des degrés pairs différents

Notons X l'espace rationnel ayant le modèle minimal $(\Lambda V, d) = (\Lambda(a_2, b_4, x_5, y_7, z_{11}), d)$ où a, b sont des cocycles et $dx = a^3 + ab$, $dy = a^4$ et $dz = b^3$. Il s'agit bien d'un modèle homogène avec $Q = \{a, b\}$, $P = \{x, y, z\}$. Commençons par évaluer sur quel type d'espace nous travaillons.

7.4.1 Algèbre $\Lambda Q / dP$

Regardons l'espace quotient

$$\Lambda Q / dP = \Lambda(a, b) / a^3 + ab, a^4, b^3$$

Puisque nous coupons a^4 , nous n'avons aucune puissance a^k pour un $k \geq 4$. De même, toute puissance b^k pour $k \geq 3$ est nulle. Nous savons donc que l'espace quotient est de dimension finie. Le théorème 3.47 nous confirme que la cohomologie de X est aussi de dimension finie. Nous travaillons donc sur une adgc elliptique.

Notons aussi que par le théorème 3.49 et puisque $\dim P = 3$ et $\dim Q = 2$, nous avons que $\dim \hat{P}$ est égale à 0 ou 1. Cependant, puisque $dP = \{(a^3 + ab), a^4, b^3\}$, nous avons $dP \cap (\Lambda^+ Q \cdot dP) = \emptyset$, et donc $\hat{P} = 0$. Alors $\dim P > \dim \hat{P} + \dim Q$ nous dit, par le théorème 3.50, que notre modèle n'est pas formel.

7.4.2 Cohomologie de X

Puisque $(\Lambda V, d)$ est elliptique, nous pouvons appliquer le théorème 3.43. Le plus grand degré tel que la cohomologie est non-nulle est donc 19.

Degrés pairs

Le premier cocycle apparait en degré 2. Nous avons alors la classe $[a]$. Le degré 4 est engendré par a^2 et b . En degré 6 nous avons a^3 et ab , mais puisque $ab = dx - a^3$, il n'y a qu'une seule classe linéairement indépendante. En degré 8 nous avons a^4 , a^2b et b^2 . Le premier est le cobord de y , et le deuxième est celui de $ax - y$. Alors nous avons seulement $[b^2]$. En degré 10, nous avons les cocycles

Complexité topologique

a^5 , a^3b et ab^2 , soient les cobords de ay , $(a^2x - ay)$ et $(bx - a^2x + ay)$ respectivement. En degré 12 et plus, les cocycles dans $\Lambda(a, b)$ sont tous des cobords :

$$\begin{aligned} a^k b^l &= d(a^{k-4} b^l y) && \text{pour } k \geq 4 \text{ et } l \geq 0 \\ a^k b^l &= d(a^k b^{l-1} x - a^{k-1} b^{l-1} y) && \text{pour } k \geq 2 \text{ et } l \geq 1 \\ a^k b^l &= d(a^k b^{l-3} z) && \text{pour } k \geq 0 \text{ et } l \geq 3 \end{aligned}$$

Les trois éléments xy , xz et yz sont aussi de degré pair. Regardons leur différentielle :

$$\begin{aligned} xy &\xrightarrow{d} a^3y + aby - a^4x \\ xz &\xrightarrow{\quad} a^3z + abz - b^3x \\ yz &\xrightarrow{\quad} a^4z - b^3y. \end{aligned}$$

Toute combinaison linéaire sous $\Lambda(a, b)$ des différentielles ci-dessus est non-nulle. Alors nous n'avons pas d'autres cocycles en degré pair.

Degrés impairs

Regardons maintenant en degré impair. En degré 3 et 5, nous n'avons pas de cocycle. En degré 7, nous avons les éléments ax et y , avec leur différentielle respective a^4a^2b et a^4 . Alors il n'y a pas de cocycles. En degré 9 nous avons

$$\begin{aligned} a^2x &\xrightarrow{d} a^5 + a^3b \\ bx &\xrightarrow{\quad} a^3b + ab^2 \\ ay &\xrightarrow{\quad} a^5 \end{aligned}$$

et donc toujours pas de cocycles. En degré 11, nous avons les éléments suivants, avec leur différentielle respective :

$$\begin{aligned} a^3x &\xrightarrow{d} a^6 + a^4b && abx \xrightarrow{d} a^4b + a^2b^2 \\ a^2y &\xrightarrow{\quad} a^6 && by \xrightarrow{\quad} a^4b \\ z &\xrightarrow{\quad} b^3. \end{aligned}$$

Le seul cocycle est donc $\lambda := a^2y - a^3x + by$. Il ne s'agit pas d'un cobord, puisqu'en degré 10 tout élément est dans $\Lambda(a, b)$ et donc est un cocycle.

Les éléments en degrés 13 avec leur différentielle respective sont :

$$\begin{aligned} a^4x &\xrightarrow{d} a^7 + a^5b && a^2bx \xrightarrow{d} a^5b + a^3b^2 \\ b^2x &\xrightarrow{\quad} a^3b^2 + ab^3 && a^3y \xrightarrow{\quad} a^7 \\ aby &\xrightarrow{\quad} a^5b && az \xrightarrow{\quad} ab^3. \end{aligned}$$

Complexité topologique

Notons que le seul non-cocycle en degré 12 est xy , avec $d(xy) = a^3y + aby - a^4x$. Les cocycles en degré 13 n'étant pas des cobords sont

$$a^4 - a^3y - a^2bx + b^2x - az \quad \text{et} \quad aby + b^2x - az - a^2bx$$

Cependant, ils ont la même classe, car

$$a^4 - a^3y - a^2bx + b^2x - az = aby + b^2x - az - a^2bx - d(xy).$$

En définissant $\gamma := aby + b^2x - az - a^2bx$, la seule classe linéairement indépendante en degré 13 est $[\gamma]$.

En degré 15, nous avons les éléments

$$\begin{array}{ll} a^5x \xrightarrow{d} a^8 + a^6b & a^3bx \xrightarrow{d} a^6b + a^4b^2 \\ ab^2x \mapsto a^4b^2 + a^2b^3 & a^4y \mapsto a^8 \\ a^2by \mapsto a^6b & b^2y \mapsto a^4b^2 \\ a^2z \mapsto a^2b^3 & bz \mapsto b^4, \end{array}$$

Considérons qu'en degré 14 il n'y a qu'un seul non-cocycle, dont la différentielle nous donne un cobord en degré 15 :

$$axy \xrightarrow{d} a^4y + a^2by - a^5x$$

En plus de ce cobord, nous avons les deux cocycles linéairement indépendants

$$b\lambda = a^2by + b^2y - a^3bx \quad \text{et} \quad a\gamma = a^2by + ab^2x - a^2z - a^3bx,$$

ainsi que les cocycles énumérés à gauche :

$$\begin{array}{rcl} a^5x - a^4y - a^3bx + b^2y & = & b\lambda - d(axy) \\ a^5x - a^4y - a^3bx + ab^2 - a^2z & = & a\gamma - d(axy) \\ ab^2x - a^2z - b^2y & = & a\gamma - b\lambda. \end{array}$$

La colonne de droite montre qu'il n'y a que deux classes linéairement indépendantes : $[b\lambda]$ et $[a\gamma]$.

En degré 17, nous avons les éléments suivants ainsi que leur différentielle :

$$\begin{array}{ll} a^6x \xrightarrow{d} a^9 + a^7b & a^4bx \xrightarrow{d} a^7b + a^5b^2 \\ a^2b^2x \mapsto a^5b^2 + a^3b^3 & b^3x \mapsto a^3b^3 + ab^4 \\ a^5y \mapsto a^9 & a^3by \mapsto a^7b \\ ab^2y \mapsto a^5b^2 & a^3z \mapsto a^3b^3 \\ abz \mapsto ab^4. & \end{array}$$

Considérons les non-cocycles en degré 16 avec leur différentielle :

$$\begin{array}{l} a^2xy \xrightarrow{d} a^5y + a^3by - a^6x \\ bxy \mapsto a^3by + ab^2y - a^4bx \\ xz \mapsto a^3z + abz - b^3x \end{array}$$

Complexité topologique

Les différentielles ci-dessus nous donnent trois cobords en degré 17. De plus, nous avons le cocycle $b\gamma = ab^2y + b^3x - abz - a^2b^2x$, ainsi que les cocycles suivants, à gauche :

$$\begin{aligned}
 a^5y - a^6x + a^4bx - ab^2y &= d(a^2xy - bxy) \\
 ab^2y - a^2b^2x + a^3z &= b\gamma - d(xz) \\
 a^5y - a^6x + a^4bx - a^2b^2x + a^3z &= b\gamma + d(a^2xy - bxy + xz) \\
 a^5y - a^6x + a^4bx - a^2b^2x + b^3x - abz &= b\gamma + d(a^2xy - bxy) \\
 a^4bx - a^3by - a^2b^2x + a^3z &= b\gamma + d(xz - bxy) \\
 a^4bx - a^3by - a^2b^2x + b^3x - abz &= b\gamma - d(bxy)
 \end{aligned}$$

La colonne de droite montre que toute classe non-nulle est égale à $[b\gamma]$. La seule classe en degré 17 est donc $[b\gamma] = [ab^2y + b^3x - abz - a^2b^2x]$.

En degré 19, nous retrouvons les éléments suivants, avec leur différentielle respective :

$$\begin{array}{ll}
 a^7x \xrightarrow{d} a^{10} + a^8b & a^5bx \xrightarrow{d} a^8b + a^6b^2 \\
 a^3b^2x \mapsto a^6b^2 + a^4b^3 & ab^3x \mapsto a^4b^3 + a^2b^4 \\
 a^6y \mapsto a^{10} & a^4by \mapsto a^8b \\
 a^2b^2y \mapsto a^6b^2 & b^3y \mapsto a^4b^3 \\
 a^4z \mapsto a^4b^3 & a^2bz \mapsto a^2b^4 \\
 b^2y \mapsto b^5 &
 \end{array}$$

Considérons les non-cocycles en degré 18 avec leur différentielle respective :

$$\begin{aligned}
 a^3xy &\xrightarrow{d} a^6y + a^4by - a^7x \\
 abxy &\mapsto a^4by + a^2b^2y - a^5bx \\
 axz &\mapsto a^4z + a^2bz - ab^3x \\
 yz &\mapsto a^4z - b^3y
 \end{aligned}$$

En plus des quatre cobords ci-dessus, nous avons en degré 19, le cocycle $b^2\lambda = a^2b^2y - a^3b^2x + b^3y$, ainsi que les suivants (colonne de gauche) :

$$\begin{aligned}
 a^6y - a^7x + a^5bx - a^2b^2y &= d(a^3xy - abxy) \\
 b^3y - ab^3x + a^2bz &= d(axz - yz) \\
 a^6y - a^7x + a^5bx - a^3b^2x + b^3y &= b^2\lambda + d(a^3xy - abxy) \\
 a^6y - a^7x + a^5bx - a^3b^2x + a^4z &= b^2\lambda + d(a^3xy - abxy + yz) \\
 a^6y - a^7x + a^5bx - a^3b^2x + ab^3x - a^2bz &= b^2\lambda + d(a^3xy - abxy - axz + yz) \\
 a^5bx - a^4by - a^3b^2x + b^3y &= b^2\lambda - d(abxy) \\
 a^5bx - a^4by - a^3b^2x + a^4z &= b^2\lambda + d(yz - abxy) \\
 a^5bx - a^4by - a^3b^2x + ab^3x - a^2bz &= b^2\lambda + d(yz - abxy - axz) \\
 a^2b^2y - a^3b^2x + a^4z &= b^2\lambda + d(yz) \\
 a^2b^2y - a^3b^2x + ab^3x - a^2bz &= b^2\lambda + d(yz - axz)
 \end{aligned}$$

La colonne de droite montre alors que $[b^2\lambda]$ est la seule classe en degré 19.

Puisque $H^{>19}(\Lambda V, d) = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} H^*(\Lambda V, d) = & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[a] \oplus \left(\mathbb{Q}[a^2] \oplus \mathbb{Q}[b] \right) \oplus \mathbb{Q}[a^3] \oplus \mathbb{Q}[b^2] \oplus \mathbb{Q}[\lambda] \\ & \oplus \mathbb{Q}[\gamma] \oplus \left(\mathbb{Q}[b\lambda] \oplus \mathbb{Q}[a\gamma] \right) \oplus \mathbb{Q}[b\gamma] \oplus \mathbb{Q}[b^2\lambda] \end{aligned}$$

avec $\lambda = a^2y - a^3x + by$ et $\gamma = aby + b^2x - az - a^2bx$.

7.4.3 LS-catégorie de X

Le théorème 6.3 nous dit que $cat(X) = e(X)$. Évaluons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda V, d) & \xrightarrow{p} & (\Lambda V / \Lambda^{>m} V, \bar{d}) \\ & \searrow \iota & \uparrow \phi \simeq \\ & & (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \\ & \swarrow r & \end{array}$$

où p est la projection canonique et ι l'inclusion.

Posons tout d'abord $m = 3$. Rappelons que $\lambda = a^2y - a^3x + by$ est composé d'éléments de longueur entre 3 et 4. En quotientant par $\Lambda^{>3}V$, la classe $[b^2\lambda] = [a^2b^2y - a^3b^2x + b^3y]$ de degré 19 est coupée. L'application p n'est donc pas injective, ce qui implique $e(X) > 3$.

En posant $m = 4$, nous quotientons par $\Lambda^{>4}V$, ce qui ne coupe aucune classe de cohomologie. Dans le quotient, les classes sont seulement réduites. Par exemple, la classe $[b^2\lambda]$ devient

$$[b^2\lambda] = [a^2b^2y - a^3b^2x + b^3y] = [b^3y].$$

L'application p est alors injective, puisqu'il n'y a pas d'élément de type (1) dans W . Alors $e(X) = 4$.

Nous concluons que $cat(X) = 4$.

7.4.4 nil ker μ_N

Posons l'adgc

$$N := \left(\Lambda^{(\alpha_2)} / \alpha^4 \otimes \Lambda^{(\beta_4)} / \beta^3 \otimes \chi_5, d \right)$$

avec $d\alpha = d\beta = 0$ et $d\chi = \alpha^3 + \alpha\beta$. L'application $\phi : (\Lambda V, d) \rightarrow N$ définit par

$$\begin{array}{ll} a \xrightarrow{\phi} \alpha & y \mapsto 0 \\ b \mapsto \beta & z \mapsto 0 \\ x \mapsto \chi & \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme. La cohomologie de N est la suivante :

$$\begin{aligned} H^*(N) = & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[\alpha] \oplus \left(\mathbb{Q}[\alpha^2] \oplus \mathbb{Q}[\beta] \right) \oplus \mathbb{Q}[\alpha^3] \oplus \mathbb{Q}[\beta^2] \oplus \mathbb{Q}[\alpha^3\chi] \oplus \mathbb{Q}[\beta^2\chi - \alpha^2\beta\chi] \\ & \oplus \left(\mathbb{Q}[\alpha^3\beta\chi] \oplus \mathbb{Q}[\alpha\beta^2\chi] \right) \oplus \mathbb{Q}[\alpha^2\beta^2\chi] \oplus \mathbb{Q}[\alpha^3\beta^2\chi]. \end{aligned}$$

Complexité topologique

Calculons $\text{nil ker } \mu_N$, qui sera une borne supérieure de $\text{tc}(\Lambda V, d)$. Nous savons que $\text{ker } \mu_N$ est l'idéal engendré par $\{u \otimes 1 - 1 \otimes u \mid u = \alpha, \beta \text{ ou } \chi\}$. Les égalités suivantes

$$\begin{aligned} (\alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha)^6 &= -20\alpha^3 \otimes \alpha^3 \\ (\alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha)^7 &= 0 \\ (\beta \otimes 1 - 1 \otimes \beta)^4 &= 6\beta^2 \otimes \beta^2 \\ (\beta \otimes 1 - 1 \otimes \beta)^5 &= 0 \\ (\chi \otimes 1 - 1 \otimes \chi)^2 &= 0 \end{aligned}$$

nous montre que la multiplication

$$(\alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha)^6 (\beta \otimes 1 - 1 \otimes \beta)^4 (\chi \otimes \chi) = -120\alpha^3\beta^2\chi \otimes \alpha^3\beta^2\chi$$

est en fait la plus longue multiplication non-nulle de $\text{ker } \mu$. Alors $\text{nil ker } \mu_N = 11$.

7.4.5 $\text{nil ker } \cup_{\mathbb{Q}}$

Puisque N et $(\Lambda V, d)$ ont la même cohomologie, regardons le produit cup sur N . Puisque la multiplication de longueur 7

$$\begin{aligned} &([\alpha] \otimes [1] - [1] \otimes [\alpha])^6 ([\beta^2\chi] \otimes [1] - [1] \otimes [\beta^2\chi]) \\ &= -20([\alpha^3\beta^2\chi] \otimes [\alpha^3]) + 20([\alpha^3] \otimes [\alpha^3\beta^2\chi]) \end{aligned}$$

est la plus longue multiplication non nulle dans $\text{ker } \cup_{\mathbb{Q}}$, nous avons $\text{nil ker } \cup_{\mathbb{Q}} = 7$.

7.4.6 $\text{tc}(X)$ et $TC(X)$

La proposition 6.7 ainsi que notre théorème 7.1 nous donnent la suite

$$7 = \text{nil ker } \cup_{\mathbb{Q}} \leq TC(X) \leq \text{tc}(X) \leq 2 \cdot \text{cat}(X) = 8.$$

Les calculs étant encore plus long que ceux de l'exemple 7.2, nous nous contentons de cette inégalité.

Chapitre 8

Conclusion

Bien que parfois incapable de calculer exactement les deux invariants $TC(X_{\mathbb{Q}})$ et $\mathbf{tc}(X)$, ils semblent toujours très proches.

Nous avons aussi remarqué que, bien que les nombres $2cat_0(X)$ et $\text{nil ker } \mu_N$ soient des bornes supérieures de $\mathbf{tc}(X)$, ils semblent indépendants. Effectivement, dans l'exemple 7.3 nous avons $\text{nil ker } \mu_N < 2 \cdot \text{cat}(X)$, tandis que dans l'exemple 7.4, nous avons $\text{nil ker } \mu_N > 2 \cdot \text{cat}(X)$. Calculer les deux invariants nous permet de resserrer l'intervalle autour de $TC(X_{\mathbb{Q}})$ et $\mathbf{tc}(X)$. Malgré tous nos efforts, nous n'avons pu trouver d'indice de l'existence d'un espace X pour lequel $TC(X_{\mathbb{Q}}) < \mathbf{tc}(X)$. Tous nos calculs tendent à supporter la conjecture

$$TC(X_{\mathbb{Q}}) = \mathbf{tc}(X).$$

D'autres questions concernant la complexité topologique sont encore sans réponse. Par exemple, le théorème 4.19 de Hess montre que $cat_0(X) = Mcat(X)$. Nous nous demandons alors si cela tient aussi pour la complexité topologique. Avons-nous $TC_0(X) = MTC(X)$?

Une autre question naturelle se rapporte au théorème 6.3, qui nous dit que pour un espace X rationnellement elliptique, nous avons $cat_0(X) = e_0(X)$. Ceci signifie donc que, pour le modèle $(\Lambda V, d)$ de X ainsi que le diagramme commutatif suivant pour $m = cat(X)$

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda V, d) & \xrightarrow{\sigma_m} & (\Lambda V / \Lambda^{>m} V, \bar{d}) \\ & \searrow \iota_m & \uparrow \phi_m \\ & & (\Lambda V \otimes \Lambda W, d), \end{array}$$

l'espace W ne contient pas d'élément de type I. Si nous regardons le modèle

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & A / K^{m'+1} \\ & \searrow \iota & \uparrow \phi \\ & & A \otimes \Lambda W', \end{array}$$

qui nous aide habituellement à trouver $\mathbf{tc}(X)$, avons nous la même relation ? Si W' ne contient pas d'élément de type I, pouvons nous affirmer que $\mathbf{tc}(X) \leq m'$?

Appendices

Annexe A

Table de multiplication de $H^*(X_\gamma)$

(exemple de la section 7.2)

Rappelons que X_γ est l'espace rationnel ayant comme modèle $\Lambda_\gamma = (\Lambda(a_2, b_2, x_5, y_7), d_\gamma)$, où $d_\gamma a = d_\gamma b = 0$, $d_\gamma x = a^2 b$, et $d_\gamma y = a^4 + b^4 + (\gamma a + b)^4$. De la cohomologie

$$H^*(\Lambda_\gamma) = \mathbb{Q} \oplus (\mathbb{Q}[a] \oplus \mathbb{Q}[b]) \oplus (\mathbb{Q}[a^2] \oplus \mathbb{Q}[ab] \oplus \mathbb{Q}[b^2]) \oplus (\mathbb{Q}[a^3] \oplus \mathbb{Q}[ab^2] \oplus \mathbb{Q}[b^3]) \\ \oplus (\mathbb{Q}[ab^3] \oplus \mathbb{Q}[b^4]) \oplus \mathbb{Q}[a^5],$$

nous obtenons les tableaux de multiplication :

\cdot	$[a]$	$[b]$	$[a^2]$	$[ab]$	$[b^2]$	$[a^3]$	$[ab^2]$	$[b^3]$
$[a]$	$[a^2]$	$[ab]$	$[a^3]$	0	$[ab^2]$	$\frac{-4\gamma[ab^3]-2[b^4]}{1+\gamma^4}$	0	$[ab^3]$
$[b]$		$[b^2]$	0	$[ab^2]$	$[b^3]$	0	$[ab^3]$	$[b^4]$
$[a^2]$			$\frac{-4\gamma[ab^3]-2[b^4]}{1+\gamma^4}$	0	0	$[a^5]$	0	0
$[ab]$				0	$[ab^3]$	0	0	$\frac{(1+\gamma^4)[a^5]}{-2}$
$[b^2]$					$[b^4]$	0	$\frac{(1+\gamma^4)[a^5]}{-2}$	$-\gamma(1+\gamma^4)[a^5]$
$[a^3]$						0	0	0
$[ab^2]$							0	0
$[b^3]$								0
$[ab^3]$								
$[b^4]$								
$[a^5]$								

Complexité topologique

\cdot	$[ab^3]$	$[b^4]$	$[a^5]$
$[a]$	0	$\frac{(1+\gamma^4)[a^5]}{-2}$	0
$[b]$	$\frac{(1+\gamma^4)[a^5]}{-2}$	$-\gamma(1+\gamma^4)[a^5]$	0
$[a^2]$	0	0	0
$[ab]$	0	0	0
$[b^2]$	0	0	0
$[a^3]$	0	0	0
$[ab^2]$	0	0	0
$[b^3]$	0	0	0
$[ab^3]$	0	0	0
$[b^4]$		0	0
$[a^5]$			0

Notons que puisque a et b sont de degré pair, le tableau est symétrique.

Annexe B

Matrices des coefficients

Le tableau B.1 représente la matrice des coefficients de l'élément $\alpha + \beta$ de l'exemple 7.3 ($tc(X)$, construction du type 2). Le tableau B.2 représente la matrice échelonnée réduite qui lui est associée.

Bibliographie

- [1] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*. Springer.
- [2] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanré, *Lusternik-Schnirelmann Category*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 103, American Mathematical Society.
- [3] M. Cuvilliez, *L.S-catégorie et k-monomorphisme*. Université de Louvain, Faculté des sciences.
- [4] J.-P. Doeraene, *Homotopy Pull backs, Homotopy Push outs and Joins*. Bull. of the Belg. Math. Soc. 5-1 (1998), 15-37.
- [5] M. Farber, *Topological Complexity of Motion Planning*. Discrete & Computational Geometry, Springer-Verlag (article), 2003.
- [6] A. Fasso Velenik, *Relative homotopy invariants of the type of the Lusternik-Schnirelmann category*. thèse de PhD, Freien Universität Berlin (2002).
- [7] Y. Félix, S. Halperin, J.-M. Lemaire, *The rational L.S. category of products and Poincaré duality complexes.*, *Topology*, 37, (1998), 749-756.
- [8] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Springer 205.
- [9] Y. Félix, J. Oprea, D. Tanré, *Algebraic Models in Geometry*. Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford Mathematics 17.
- [10] Y. Félix, D. Tanré, *Topologie Algébrique*. Dunod.
- [11] P.M. J. Greenberg, J. R. Harper, *Algebraic Topology : A First Course*. ABP, Mathematics lecture note series, 58.
- [12] W. Greub, *Multilinear Algebra.*, 2nd edition, Springer-Verlag.
- [13] W. Greub, *Connections, Curvature and Cohomology, Volume I*. Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks 47.
- [14] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology, Volume II*. Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks 47.
- [15] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology, Volume III*. Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks 47.
- [16] S. Halperin, *Finiteness in the minimal models of Sullivan*. Transactions of the American Mathematical Society, 1977, 230, 173-199.
- [17] M. Hovey, *Model Categories*. Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society.

- [18] I. M. James, *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann*. *Topology*, 17, 1978, pp. 331-348.
- [19] B. Jessup, A. Murillo, P.-E. Parent, *Rational Topological Complexity*. *Algebraic & Discrete Topology XX (20XX)* 1001–999.
- [20] L. Lechuga, A. Murillo, *Topological complexity of formal spaces.*, *Topology and Robotics, Contemp. Math.*, 438 (2007), 105–114.
- [21] J.-M. Lemaire, F. Sigrist, *Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L.S. catégorie.*, *Comment. Math. Helvetici* 56, (1981), 103-122.
- [22] L. Lusternik, L.Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationels*. *Actualités scientifiques et industrielles*, 188, Paris, Hermann, 1934.
- [23] S. MacLane, *Homology*. Springer-Verlag.
- [24] M. Mather, *Pull-backs in Homotopy Theory*. *Can. J. Math.*, Vol. XXVIII, No. 2, 1976.
- [25] J. R. Munkres, *Topology*. 2nd edition.
- [26] P.-E. Parent, *Formal and Non-Formal Homogeneous Spaces of Small Rank*. Université d'Ottawa, thèse de maîtrise.
- [27] S. Smale, *On the topology of algorithms I*. *Complexity*, 3, 1987.
- [28] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*. Springer-Verlag.
- [29] L.F. Suarez, P. Ghienne, T. Kahl, L. Vandembroucq, *Joins of DGA modules and sectional category*. *Algebraic & Geometric Topology* 6 (2006) 119–144.
- [30] A. S. Svarc, *The genus of a fibered space.*, *Trudy Moskov. Mat. Obsc* 10 et 11, (1961-1962), 217-272, 99-126, *American Math. Society Translated Series* 2, vol. 55 (1966).
- [31] V. A. Vassiliev, *Cohomology of Braid Groups and Complexity of Algorithms*. *Functional Anal. Appl.*, 22, 1988.
- [32] V. A. Vassiliev, *Topology of Complements to Discriminants*. FAZIS, Moscow, 1997.
- [33] J. H. C. Whitehead, *Combinatorial homotopy.*, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 55 (1949), 213-245, 453-496.