"LA CATEGORIE DES FORMES"

par

Yvan ROUX

Thèse présentée
à l'école des Etudes supérieures
de l'Université d'Ottawa
pour l'obtention de la maîtrise ès sciences
en mathématiques

1974

REMERCIEMENT

Au professeur Luc Demers, qui proposa le sujet de cette thèse et fut une source d'inspiration essentielle, je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements.

A l'Université du Québec à Rimouski dont le support financier a rendu possible la réalisation de ce travail, je dis merci.

A tous ceux qui ont si patiemment attendu la présentation de cette thèse, plus particulièrement Suzette, François et Catherine, je leur dédie cet ouvrage.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

A partir de la catégorie $\mathcal{B}$, dont les objets sont les espaces topologiques et dont les morphismes sont les classes d'homotopie d'applications continues, S. Mardesic a construit en [4] une catégorie $\mathcal{G}$. Les objets de $\mathcal{G}$ sont les espaces topologiques, tandis que ses morphismes sont appelés "shapings". Il a défini un foncteur covariant $S : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{G}$ vérifiant les propriétés suivantes:

i) $S(X) = X$ pour tout $X \in |\mathcal{B}|$

ii) Si Y a le type d'homotopie d'un CW-complexe alors, pour tout "shaping" $f : X \longrightarrow Y$, il existe un unique $\phi \in \mathcal{B}(X, Y)$ tel que $S(\phi) = f$.

De plus, il a caractérisé la catégorie $\mathcal{G}$ et le foncteur S, au moyen d'une propriété universelle.

Etant donné une catégorie $\mathcal{C}$ et une sous-catégorie pleine $\mathcal{C}_o$ de $\mathcal{C}$, nous construirons, en faisant l'hypothèse que $\mathcal{S}(X, Y)$ est un ensemble, une catégorie $\mathcal{S}$ et un foncteur covariant $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$. En plus d'obtenir des résultats analogues à ceux de Mardesic, nous montrerons que tout objet $X \in |\mathcal{S}|$ est la limite d'un certain diagramme dans $\mathcal{C}_o$, et que cette propriété caractérise la catégorie $\mathcal{S}$. Nous terminerons par deux illustrations de la construction duale.

CHAPITRE I

A) Introduction

La notion de forme pour les espaces compacts métriques a été définie en [1] par K. Borsuk. S. Mardesic et J. Ségal ont donné en [2] la définition de forme pour les espaces compacts Hausdorff, et ont démontré en [3] que, pour les espaces compacts métriques, leur définition était équivalente à celle de Borsuk. S. Mardesic a par la suite donné en [4] la définition de la forme d'un espace topologique, qui, pour les espaces compacts Hausdorff, est équivalente à celle donnée en [2].

Dans ce chapitre, nous construisons, étant donné une catégorie C et une sous-catégorie pleine C_o de C, une nouvelle catégorie $S = S(C, C_o)$ "catégorie des formes sur C par rapport à C_o" et un foncteur S de C dans S qui préserve les colimites. De plus, nous donnerons deux caractérisations de la catégorie $S = S(C, C_o)$ et nous démontrerons que le foncteur $S : C \longrightarrow S$ est l'extension de Kan du foncteur $S/C_o : C_o \longrightarrow S$.

B) La Catégorie $S = S(C, C_o)$

Soit C une catégorie et C_o une sous-catégorie pleine de C, c'est-à-dire $C_o(X, Y) = C(X, Y)$ pour tout $X, Y \in |C_o|$. On construit la catégorie S de la façon suivante:

i) Les objets de $\mathcal{S}$ sont les mêmes que ceux de C.

ii) Si X et Y sont des objets de C, considérons les foncteurs $C(X, ?)$ et $C(Y, ?)$. Désignons respectivement par $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ la restriction de ces foncteurs à $C_\circ$, on obtient,

$$\overline{X} : C_\circ \longrightarrow \text{Ens} \quad \text{et} \quad \overline{Y} : C_\circ \longrightarrow \text{Ens}.$$

Définissons maintenant $\mathcal{S}(X, Y) = [\overline{Y}, \overline{X}]$, où $[\overline{Y}, \overline{X}]$ désigne les transformations naturelles de $\overline{Y}$ dans $\overline{X}$.

<u>Proposition 1</u>.

Pour tout triple X, Y et Z, on a une fonction

$$\mu_{X,Y,Z} : \mathcal{S}(X, Y) \times \mathcal{S}(Y, Z) \longrightarrow \mathcal{S}(X, Z)$$

Démonstration:

Si $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}(X, Y) \times \mathcal{S}(Y, Z)$, alors $\alpha \in [\overline{Y}, \overline{X}]$ et $\beta \in [\overline{Z}, \overline{Y}]$, on a donc, pour tout $C, C' \in |C_\circ|$ et tout $C \xrightarrow{f} C'$, que les diagrammes ci-dessous sont commutatifs,

$$\begin{array}{ccc} \overline{Z}\,(C) & \xrightarrow{\overline{Z}\,(f)} & \overline{Z}\,(C') \\ {\scriptstyle \beta_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{C'}} \\ \overline{Y}\,(C) & \xrightarrow{\overline{Y}\,(f)} & \overline{Y}\,(C') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \overline{Y}\,(C) & \xrightarrow{\overline{Y}\,(f)} & \overline{Y}\,(C') \\ {\scriptstyle \alpha_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{C'}} \\ \overline{X}\,(C) & \xrightarrow{\overline{X}\,(f)} & \overline{X}\,(C') \end{array}$$

Conséquemment, si l'on définit $(\beta\alpha)_C \equiv \alpha_C \circ \beta_C$, le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd} \overline{Z}\,(C) \arrow[r, "\overline{Z}\,(f)"] \arrow[d, "(\beta\alpha)_C"'] & \overline{Z}\,(C') \arrow[d, "(\beta\alpha)_{C'}"] \\ \overline{X}\,(C) \arrow[r, "\overline{X}\,(f)"] & \overline{X}\,(C') \end{tikzcd}$$

On obtient donc une fonction $\mu_{X,Y,Z} : (\alpha, \beta) \longrightarrow \beta\alpha$ où $\beta\alpha$ est la transformation naturelle définie par

$$(\beta\alpha)_C = \alpha_C \circ \beta_C \quad \text{pour tout} \quad C \in |C_\circ| .$$

Proposition 2.

Pour tout quadruple X, Y, Z et W, le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd} S(X, Y) \times S(Y, Z) \times S(Z, W) \arrow[r, "1 \times \mu_{Y,Z,W}"] \arrow[d, "\mu_{X,Y,Z} \times 1"'] & S(X, Y) \times S(Y, W) \arrow[d, "\mu_{X,Y,W}"] \\ S(X, Z) \times S(Z, W) \arrow[r, "\mu_{X,Z,W}"] & S(X, W) \end{tikzcd}$$

Démonstration:

On a que,

$$\mu_{X,Y,W} \circ (1 \times \mu_{Y,Z,W}) ((\alpha, \beta, \gamma)) = \mu_{X,Y,W} ((\alpha, \gamma\beta)) = (\gamma\beta)\alpha$$

et que

$$\mu_{X,Z,W} \circ (\mu_{X,Y,Z} \times 1) ((\alpha, \beta, \gamma)) = \mu_{X,Z,W} ((\beta\alpha, \gamma)) = \gamma(\beta\alpha).$$

Puisque,

$$((\gamma\beta)\alpha)_C = \alpha_C \circ (\gamma\beta)_C = \alpha_C \circ (\beta_C \circ \gamma_C) = (\alpha_C \circ \beta_C) \circ \gamma_C =$$

$$= (\beta\alpha)_C \circ \gamma_C = (\gamma(\beta\alpha))_C$$

et ce, pour tout $C \in |C_o|$, on a donc que, $(\gamma\beta)\alpha = \gamma(\beta\alpha)$, conséquemment, le diagramme est commutatif.

Proposition 3.

Pour tout $X \in |S|$, il existe $\xi \in S(X, X)$ tel que $\mu_{X,X,Y} (\xi, \gamma) = \gamma$ pour tout $\gamma \in S(X, Y)$ et $\mu_{Y,X,X} (\eta, \xi) = \eta$ pour tout $\eta \in S(Y, Z)$.

Démonstration:

Montrons que $\mu_{X,X,Y}(\xi, \gamma) = \gamma\xi = \gamma$. En effet, on a que $(\gamma\xi)_C = \xi_C \circ \gamma_C$ et que $(\xi_C \circ \gamma_C)(t) = \xi_C(\gamma_C(t))$. Soit ξ le morphisme de $S(X, X)$ défini de la façon suivante: Pour tout $C \in |C_\circ|$,

$$\xi_C : C(X, C) \longrightarrow C(X, C)$$

est la fonction identique.

On a donc que $\xi_C(\gamma_C(t)) = \gamma_C(t)$, d'où $(\gamma\xi)_C = \xi_C \circ \gamma_C = \gamma_C$. Conséquemment, $\mu_{X,X,Y}(\xi, \gamma) = \gamma\xi = \gamma$. On démontre de la même façon que $\mu_{Y,X,X}(\eta, \xi) = \eta$.

<u>Remarque</u>: Si l'on fait l'hypothèse que $S(X, Y)$ est un ensemble pour tout $X, Y \in |C|$, on peut conclure des propositions précédentes que $S = S(C, C_\circ)$ est une catégorie. Cette catégorie est appelée catégorie des formes sur C par rapport à $C_\circ$.

C) <u>Le foncteur de la catégorie $S = S(C, C_\circ)$</u>.

<u>Proposition 4.</u>

Il existe un foncteur covariant $S : C \longrightarrow S$ tel que $S(X) = X$ pour tout $X \in |C|$.

Démonstration:

Il nous reste à définir S sur les morphismes. Soit $f \in C(X, Y)$, $S(f) \in S(X, Y)$ sera la transformation naturelle de $\overline{Y}$ dans $\overline{X}$ définie de la façon suivante: Pour tout $C \in |C_\circ|$,

$$(S(f))_C : C(Y, C) \longrightarrow C(X, C)$$

est la fonction définie par $(S(f))_C\ (t) = t \circ f$ comme l'illustre le diagramme que voici:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "t"] & \\ & C \\ X \arrow[uu, "f"] \arrow[ur, "t \circ f"'] & \end{tikzcd}$$

Montrons que tel que définie, $S(f)$ est bien une transformation naturelle de $\overline{Y}$ dans $\overline{X}$. En effet, considérons le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd} C(Y, C) \arrow[r, "S(f)_C"] \arrow[d, "{C(Y, h)}"'] & C(X, C) \arrow[d, "{C(X, h)}"] \\ C(Y, C') \arrow[r, "S(f)_{C'}"] & C(X, C') \end{tikzcd} \qquad (A)$$

où $C, C' \in |\mathcal{C}_o|$, $S(f)_C$ et $S(f)_{C'}$ sont les fonctions définies précédemment, $\mathcal{C}(Y, h)$ et $\mathcal{C}(X, h)$ sont les fonctions définies par les diagrammes que voici:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[ur, "t"] \arrow[r, "h\circ t"'] & C' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "h\circ u"'] & C' \end{tikzcd}$$

Pour tout $t \in \mathcal{C}(Y, C)$, on a que

$$(\mathcal{C}(X, h) \circ S(f)_C)\,(t) = \mathcal{C}(X, h)\,(S(f)_C\,(t)) = \mathcal{C}(X, h)\,(t\circ f) = h \circ (t\circ f)$$

et que

$$(S(f)_{C'} \circ \mathcal{C}(Y, h))\,(t) = S(f)_{C'}\,(\mathcal{C}(Y, h)(t)) = S(f)_{C'}\,(h\circ t) = (h\circ t) \circ f.$$

Puisque $h \circ (t\circ f) = (h\circ t) \circ f$, le diagramme (A) est commutatif et $S(f)$ est bien une transformation naturelle de $\overline{Y}$ dans $\overline{X}$.

Montrons maintenant que S est un foncteur covariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{S}$. En effet,

$$S(g\circ f)_C\,(t) = t \circ (g\circ f) = (t\circ g) \circ f = S(f)_C\,(t\circ g) = S(f)_C\,(S(g)_C\,(t))$$

$$= (S(f)_C \circ S(g)_C)\,(t) = (S(g)\,S(f))_C\,(t)$$

d'où $S(g\circ f) = S(g)\,S(f)$.

Soit maintenant 1_X l'identité de $C(X, X)$, montrons que $S(1_X)$ est l'identité de $S(X, X)$. En effet, soit $\eta \in S(Y, X)$, pour tout $C \in |C_o|$ on a que $(S(1_X)\eta)_C\ (t) = (\eta_C \circ S(1_X)_C)\ (t) = \eta_C(S(1_X)_C\ (t)) = \eta_C(t \circ 1_X) = \eta_C(t)$, conséquemment, $S(1_X)\eta = \eta$. De même si $\gamma \in S(X, Y)$, on a pour tout $C \in |C_o|$, $(\gamma\ S(1_X))_C\ (t) = (S(1_X)_C \circ \gamma_C)\ (t) = S(1_X)_C\ (\gamma_C(t)) = \gamma_C(t) \circ 1_X = \gamma_C(t)$, d'où $\gamma\ S(1_X) = \gamma$ ce qui complète la démonstration.

<u>Proposition 5</u>.

Soit $F : I \longrightarrow C$ un foncteur. Si la colimite de F existe alors

$$\operatorname{colim}\ (S \circ F) = S\ (\operatorname{colim}\ F)$$

Démonstration:

Si colim F existe, posons colim F = L, on a donc une famille de morphismes

$$f_I : F(I) \longrightarrow L$$

où $L \in |C|$ et $I \in |I|$. En appliquant le foncteur S à cette famille, on obtient une famille $S(f_I) : F(I) \longrightarrow L$ de morphismes de S. Pour tout $C \in |C_o|$, on a donc

$$S(f_I)_C : C(L, C) \longrightarrow C(F(I), C)\ .$$

Montrons que $\lim C(F(I), C) \approx C(L, C)$, $C \in |C_o|$. En effet, $\lim C(F(I), C) \approx C(\operatorname{colim} F(I), C) \approx C(L, C)$, donc $\lim \overline{F(I)} \approx \overline{L}$ dans Ens^{C_o}, conséquemment $L \approx \operatorname{colim} F(I)$ dans S, d'où $S(\operatorname{colim} F) \approx \operatorname{colim} (S \circ F)$.

Proposition 6.

Pour tout $Y \in |C_o|$ et pour tout $X \in |C|$,

$$S : C(X, Y) \longrightarrow S(X, Y)$$

est une bijection.

Démonstration:

Soit $\eta \in S(X, Y)$, on a donc, pour tout $C \in |C_o|$, une fonction $\eta_C : C(Y, C) \longrightarrow C(X, C)$, plus particulièrement si l'on fait $C = Y$, on a

$$\eta_Y : C(Y, Y) \longrightarrow C(X, Y)$$

Soit 1_Y l'identité de $C(Y, Y)$, on a que $\eta_Y(1_Y) \in C(X, Y)$, montrons $S(\eta_Y(1_Y)) = \eta$. Notons que pour tout $C \in |C_o|$, $S(\eta_Y(1_Y))_C$ et η_C sont des fonctions de $C(Y, C) \longrightarrow C(X, C)$, il faut donc montrer que pour tout $C \in |C_o|$ et pour tout $t \in C(Y, C)$,

$$S(\eta_Y(1_Y))_C\,(t) = \eta_C(t)$$

En effet, $S(\eta_Y(1_Y))_C\ (t) = t \circ \eta_Y(1_Y)$, puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
C(Y, Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & C(X, Y) \\
{\scriptstyle C(Y,\ t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C(X,\ t)} \\
C(Y, C) & \xrightarrow{\eta_C} & C(X, C)
\end{array}$$

est commutatif, on a que

$$t \circ \eta_Y(1_Y) = \eta_C(t \circ 1_Y) = \eta_C(t)$$

d'où $S(\eta_Y(1_Y))_C\ (t) = \eta_C(t)$ pour tout $t \in C(Y, C)$ conséquemment $S(\eta_Y(1_Y))_C = \eta_C$ pour tout $C \in |C_o|$ donc $S(\eta_Y(1_Y)) = \eta$.

Supposons maintenant que $f \in C(X, Y)$ $Y \in |C_o|$, soit tel que $S(f) = \eta$, montrons que $f = \eta_Y(1_Y)$. En effet, puisque $S(f)_Y : C(Y, Y) \longrightarrow C(X, Y)$ et que $\eta = S(f)$ on a que $\eta_Y(1_Y) = S(f)_Y\ (1_Y)$. Mais $S(f)_Y\ (1_Y) = 1_Y \circ f$ comme l'illustre le diagramme que voici:

$$\begin{array}{ccc}
Y & & \\
 & \searrow^{1_Y} & \\
{\scriptstyle f}\uparrow & & Y \\
 & \nearrow_{1_Y \circ f} & \\
X & &
\end{array}$$

d'où $\eta_Y(1_Y) = S(f)_Y\ (1_Y) = 1_Y \circ f$, et par conséquent $f = \eta_Y(1_Y)$.

Lemme 1.

Soit $\eta \in S(X, Y)$. Pour tout $C \in |C_\circ|$, le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd} C(Y, C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "S"'] & C(X, C) \arrow[d, "S"] \\ S(Y, C) \arrow[r, "Y_\eta"] & S(X, C) \end{tikzcd}$$

où η_C est la fonction induite par η, S la fonction induite par le foncteur $S : C \longrightarrow S$ et Y_η la fonction définie par $Y_\eta(\mu) = \mu\eta$.

Démonstration:

Il faut montrer que, pour tout $t \in C(Y, C)$,

$$S(\eta_C(t)) = S(t)\, \eta \ .$$

Puisque $S(\eta_C(t))$ et $S(t)\eta \in S(X, C)$, on a, pour tout $Q \in |C_\circ|$, des fonctions $S(\eta_C(t))_Q$ et $(S(t)\eta)_Q$ de

$$C(C, Q) \longrightarrow C(X, Q) \ .$$

Dans ce cas, il faut montrer que pour tout $s \in C(C, Q)$, $S(\eta_C(t))_Q\,(s) = (S(t)\eta)_Q\,(s)$. D'une part, on a que $S(\eta_C(t))_Q\,(s) = s \circ \eta_C(t)$ comme l'illustre le diagramme que voici:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[ur, "\eta_C(t)"] \arrow[r, "s\circ\eta_C(t)"'] & Q \end{tikzcd}$$

D'autre part, $(S(t)\eta)_Q\ (s) = (\eta_Q \circ S(t)_Q)\ (s) = \eta_Q(S(t)_Q(s))$
mais, $S(t)_Q\ (s) = s \circ t$, d'où $(S(t)\eta)_Q\ (s) = \eta_Q(s\circ t)$, et puisque le diagramme ci-dessous est commutatif,

$$\begin{tikzcd} C(Y, C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "C(Y, s)"'] & C(X, C) \arrow[d, "C(X, s)"] \\ C(Y, Q) \arrow[r, "\eta_Q"] & C(X, Q) \end{tikzcd}$$

on a que, $s \circ \eta_C(t) = \eta_Q(s\circ t)$. Conséquemment, $S(\eta_C(t)) = S(t)\eta$ et le diagramme est commutatif.

D) <u>Caractérisation de la catégorie $S = S(C, C_\circ)$</u>.

<u>Proposition 7</u>.

Soient S' une catégorie dont les objets sont les mêmes que ceux de C et S' : $C \to S'$ un foncteur tel que:

i) $S'(X) = X$ pour tout $X \in |C|$

ii) $S' : C(X, C) \longrightarrow S'(X, C)$ est une bijection pour tout $C \in |C_\circ|$,

alors il existe un unique foncteur $\sigma : S' \longrightarrow S$ pour lequel le diagramme ci-dessous est commutatif.

$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[dd, "\sigma"] \\ C \arrow[ur, "S'"] \arrow[dr, "S"'] & \\ & S \end{tikzcd}$$

Démonstration:

On définit σ sur les objets de S' en posant $\sigma(X) = X$ pour tout $X \in |S'|$.

Soit $\eta' \in S'(X, Y)$. On définit $\sigma(\eta') \in S(X, Y) = [\overline{Y}, \overline{X}]$ de la façon suivante: Pour tout $C \in |C_\circ|$, on sait que le foncteur

$$S' : C(X, C) \longrightarrow S'(X, C)$$

est une bijection, définissons pour tout $C \in |C_\circ|$

$$\sigma(\eta')_C\ (t) = S'^{-1}\ (S'(t)\eta')\ .$$

Montrons que, ainsi défini, $\sigma(\eta')$ est bien une transformation naturelle de $\overline{Y}$ dans $\overline{X}$. En effet, pour tout $C, C' \in |C_o|$ et tout $h : C \to C'$, considérons le diagramme ci-dessous,

$$\begin{array}{ccc} C(Y, C) & \xrightarrow{C(Y, h)} & C(Y, C') \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma(\eta')_C} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma(\eta')_{C'}} \\ C(X, C) & \xrightarrow{C(X, h)} & C(X, C') \end{array}$$

où $\sigma(\eta')_C$ et $\sigma(\eta')_{C'}$ sont les fonctions définies précédemment.

Puisque, pour tout $t \in C(Y, C)$, on a que:

$$(\sigma(\eta')_{C'} \circ C(Y, h))\ (t) = \sigma(\eta')_{C'}\ (C(Y, h)(t))$$

$$= \sigma(\eta')_{C'}\ (h \circ t) = S'^{-1}\ [S'(h \circ t)\ \eta']$$

$$= \ S'^{-1}\ [S'(h)\ S'(t)\ \eta'] = S'^{-1}\ [S'(h)\ S'(\sigma(\eta')_C\ (t))]$$

$$= \ S'^{-1}\ [S'(h \circ \sigma(\eta')_C\ (t)) = \ h \circ \sigma(\eta')_C\ (t)$$

$$= \ C(X, h)\ (\sigma(\eta')_C\ (t)) = (C(X, h) \circ \sigma(\eta')_C)\ (t),$$

on conclut que le diagramme est commutatif. Conséquemment, $\sigma(\eta')$ est une transformation naturelle de $\overline{Y}$ dans $\overline{X}$.

Montrons maintenant que, pour tout $\eta' \in S'(X, Y)$ et pour tout $\gamma' \in S'(Y, Z)$,

$$\sigma(\gamma' \eta') = \sigma(\gamma') \sigma(\eta') .$$

En effet, pour tout $C \in |C_o|$ et pour tout $t \in C(Z, C)$ on a que

$$(\sigma(\gamma') \cdot \sigma(\eta'))_C (t) = (\sigma(\eta')_C \circ \sigma(\gamma')_C) (t)$$

$$= \sigma(\eta')_C (\sigma(\gamma')_C (t)) = \sigma(\eta')_C [S'^{-1} (S'(t) \gamma')]$$

$$= S'^{-1} [S' (S'^{-1} (S'(t) \gamma')) \eta'] = S'^{-1} [(S'(t) \gamma') \eta']$$

$$= S'^{-1} [S'(t) (\gamma' \eta')] = \sigma(\gamma' \eta')_C (t)$$

d'où $\sigma(\gamma') \sigma(\eta') = \sigma(\gamma' \eta')$.

De plus, si 1_X est l'identité de $S'(X, X)$, montrons que, $\sigma(1_X)$ est l'identité de $S(X, X)$. En effet, pour tout $\eta \in S(X, Y)$ et pour tout $t \in C(Y, C)$ avec $C \in |C_o|$, on a que,

$$(\eta\, \sigma(1_X))_C (t) = (\sigma(1_X)_C \circ \eta_C) (t) = \sigma(1_X)_C (\eta_C (t))$$

$$= S'^{-1} [S' (\eta_C (t)) 1_X] = S'^{-1} [S' (\eta_C (t))] = \eta_C (t) ,$$

d'où $\eta\, \sigma(1_X) = \eta$. De même, on démontre que pour tout $\gamma \in S(Y, X)$, $\sigma(1_X) \gamma = \gamma$. Conséquemment, $\sigma : S' \longrightarrow S$ est un foncteur covariant.

Montrons maintenant que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[dd, "\sigma"] \\ C \arrow[ur, "S'"] \arrow[dr, "S"'] & \\ & S \end{tikzcd}$$

est commutatif.

i) Pour tout $X \in |C|$, on a que

$$\sigma(S'(X)) = \sigma(X) = X = S(X)$$

ii) Pour tout $f \in C(X, Y)$ et pour tout $t \in C(Y, C)$, $C \in |C_o|$, on a que

$$\sigma(S'(f))_C\ (t) = S'^{-1}\ (S'(t)\ S'(f)) = S'^{-1}\ (S'(t \circ f))$$

$$= t \circ f = S(f)_C\ (t)$$

d'où $\sigma(S'(f)) = S(f)$. Ce qui prouve que, $\sigma \circ S' = S$.

Montrons maintenant que σ est unique. En effet, soit $\eta' \in S'(X, Y)$, pour tout $C \in |C_o|$ et pour tout $t \in C(Y, C)$, on a, par définition de $\sigma(\eta')$, que

$$\sigma(\eta')_C\ (t) = S'^{-1}\ (S'(t)\ \eta')\ .$$

Mais, $\sigma'\ (S'(t)\ \eta') = \sigma'\ (S'(t))\ \sigma'\ (\eta') = S(t)\ \sigma'\ (\eta')$, de plus, sachant que, d'après le lemme 1, le diagramme ci-dessous est commutatif,

$$\begin{tikzcd} C(Y, C) \arrow[r, "\sigma'(\eta')_C"] \arrow[d, "S"'] & C(X, C) \arrow[d, "S"] \\ S(Y, C) \arrow[r, "Y_{\sigma'(\eta')}"] & S(X, C) \end{tikzcd}$$

on a que $S(t)\ \sigma'(\eta') = S(\sigma'(\eta')_C\ (t))$, donc $\sigma'\ (S'(t)\eta') = S(\sigma'(\eta')_C\ (t))$, ce qui implique que $\sigma'(\eta')_C\ (t) = S^{-1}\ [\sigma'\ (S'(t)\ \eta')]$, étant donné que pour tout $C \in |C_\circ|$,

$$S : C(X, C) \longrightarrow S(X, C)$$

est une bijection.

Considérons maintenant le diagramme ci-dessous,

$$C(X, C) \xrightarrow{S'} S'(X, C) \xrightarrow{\sigma'} S(X, C)$$

où $C \in |C_\circ|$, puisque $S = \sigma' \circ S'$ et que S' et S sont des bijections, on a que σ' est une bijection et que

$$S^{-1} = (\sigma' \circ S')^{-1} = S'^{-1} \circ \sigma'^{-1}.$$

Dans ce cas, on a que

$$\sigma'(\eta')_C\ (t) = S^{-1}\ [\sigma'\ (S'(t)\ \eta')] = (S'^{-1} \circ \sigma'^{-1})\ [\sigma'\ (S'(t)\ \eta')]$$

$$= S'^{-1}\ (\sigma'^{-1}\ [\sigma'\ (S'(t)\ \eta')]) = S'^{-1}\ (S'(t)\ \eta') = \sigma(\eta')_C\ (t).$$

Conséquemment, $\sigma'(\eta') = \sigma(\eta')$ et σ est unique.

<u>Corollaire</u>.

$C \xrightarrow{S} S$ est un objet terminal dans la catégorie dont,

i) les objets sont les foncteurs $C \xrightarrow{S'} S'$ tels que définies dans la proposition précédente

ii) les morphismes sont les triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd}
 & S' \arrow[dd, "\gamma"] \\
C \arrow[ur, "S'"] \arrow[dr, "S''"'] & \\
 & S''
\end{tikzcd}$$

iii) la composition des morphismes est celle induite par la composition habituelle des foncteurs.

Démonstration:

Conséquence immédiate de la proposition précédente.

E) S est l'extension de Kan de $S|C_o$.

Soient C et C_o les catégories des sections précédentes.

Proposition 8.

On a une catégorie X/C_o définie de la façon suivante:

i) Les objets de X/C_o sont les morphismes $X \xrightarrow{\xi} C$, avec $C \in |C_o|$, $X \in |C|$.

ii) Les morphismes de $X \xrightarrow{\xi} C$ à $X \xrightarrow{\xi'} C'$ sont les triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dd, "\gamma"] \\ X \arrow[ur, "\xi"] \arrow[dr, "\xi'"'] & \\ & C' \end{tikzcd}$$

iii) La composition des morphismes est celle induite par la composition des morphismes dans C_o.

Démonstration immédiate.

Proposition 9.

On a un foncteur $\rho_X : X/C_o \longrightarrow C$ définie de la façon suivante:

i) $\rho_X\ (X \xrightarrow{\xi} C) = C$

ii) $$\rho_X\left(\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "\gamma"] \\ X \arrow[ur, "\xi"] \arrow[r, phantom, ""] \arrow[dr, "\xi'"'] & C' \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} C \arrow[d, "\gamma"] \\ C' \end{tikzcd}$$

Démonstration immédiate.

<u>Proposition 10</u>.

Pour tout objet $X \in |C|$, on a que

$$S(X) = \lim S \circ \rho_X$$

Démonstration.

Définissons d'abord, pour tout $X \xrightarrow{\xi} C$, une transformation naturelle $\eta_\xi : \overline{C} \longrightarrow \overline{X}$ telle que pour tout $X \xrightarrow{\xi} C$, $X \xrightarrow{\xi'} C'$ de $|X/C_\circ|$ et pour tout $C \xrightarrow{\gamma} C'$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & S(\rho_X(\xi)) = C \arrow[d, "S(\gamma)"] \\ X = S(X) \arrow[ur, "\eta_\xi"] \arrow[dr, "\eta_{\xi'}"'] & \\ & S(\rho_X(\xi')) = C' \end{tikzcd} \qquad (A)$$

est commutatif. En effet, pour tout $Q \in |C_\circ|$ et pour tout $t \in C(C, Q)$, on définit une fonction $\eta_{\xi_Q} : C(C, Q) \longrightarrow C(X, Q)$, en posant $\eta_{\xi_Q}(t) = t \circ \xi$ comme l'illustre le diagramme que voici:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "t\circ\xi"] \arrow[d, "\xi"'] & \\ C \arrow[r, "t"'] & Q \end{tikzcd}$$

Montrons que η_ξ est bien une transformation naturelle de $\overline{C}$ dans $\overline{X}$. Pour tout $Q, Q' \in |C_\circ|$, et tout $q : Q \to Q'$, considérons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} C(C, Q) \arrow[r, "\eta_{\xi_Q}"] \arrow[d, "q_C^*"] & C(X, Q) \arrow[d, "q_X^*"] \\ C(C, Q') \arrow[r, "\eta_{\xi_{Q'}}"] & C(X, Q') \end{tikzcd} \qquad \text{(B)}$$

où $q_C^*\,(t) = q \circ t$, $q_X^*\,(s) = q \circ s$, η_{ξ_Q} et $\eta_{\xi_{Q'}}$ sont les fonctions définies précédemment. Pour tout $t \in C(C, Q)$, on a d'une part

$$q_X^*\,(\eta_{\xi_Q}\,(t)) = q_X^*\,(t\circ\xi) = q \circ (t\circ\xi)\ ,$$

et d'autre part

$$\eta_{\xi_{Q'}}\,(q_C^*\,(t)) = \eta_{\xi_{Q'}}\,(q\circ t) = (q\circ t) \circ \xi.$$

Mais, puisque $q \circ (t\circ\xi) = (q\circ t) \circ \xi$, on conclut que le diagramme (B) est commutatif, ce qui prouve que $\eta_\xi : \overline{C} \to \overline{X}$ est une transformation naturelle.

Pour montrer maintenant que le triangle (A) est commutatif, il suffit de montrer que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} C(C', Q) \arrow[d, "S(\gamma)_Q"'] \arrow[dr, "\eta_{\xi'_Q}"] & \\ C(C, Q) \arrow[r, "\eta_{\xi_Q}"'] & C(X, Q) \end{tikzcd} \qquad \text{(C)}$$

où $S(\gamma)_Q\ (t) = t \circ \gamma$, $\eta_{\xi'_Q}$ et η_{ξ_Q} sont les fonctions définies précédemment, est commutatif. En effet, soit $t \in C(C', Q)$. On a d'une part, $\eta_{\xi'_Q}\ (t) = t \circ \xi'$, d'autre part $\eta_{\xi_Q}\ (S\ (\gamma)_Q\ (t)) = \eta_{\xi_Q}\ (t \circ \gamma) = (t \circ \gamma) \circ \xi$. Mais, puisque $\gamma : C \to C'$ est tel que $\gamma \circ \xi = \xi'$, on a que $t \circ \xi' = t \circ (\gamma \circ \xi) = (t \circ \gamma) \circ \xi$, d'où le diagramme (C) est commutatif.

ii) Soit maintenant $\beta_? : Y \to S(\rho_X\ (?))$ une famille de morphismes de S pour lesquels le diagramme

$$\begin{tikzcd} & S(\rho_X\ (\xi)) \arrow[dd, "S(\gamma)"] \\ Y = S(Y) \arrow[ur, "\beta_\xi"] \arrow[dr, "\beta_{\xi'}"'] & \\ & S(\rho_X\ (\xi')) \end{tikzcd}$$

est commutatif, montrons qu'il existe un unique $\theta : S(Y) \to S(X)$ pour lequel le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & & S(\rho_X(\xi)) = C \arrow[dd, "S(\gamma)"] \\
Y = S(Y) \arrow[r, "\theta"] \arrow[urr, "\beta_\xi"] \arrow[drr, "\beta_{\xi'}"'] & X = S(X) \arrow[ur, "\eta_\xi"] \arrow[dr, "\eta_{\xi'}"'] & \\
 & & S(\rho_X(\xi')) = C'
\end{tikzcd} \qquad (D)$$

est commutatif. En effet, pour tout $Q \in |C_o|$ et pour tout $t \in C(X, Q)$, on a que $t \in |X/C_o|$. Mais, puisque l'on s'est donné une famille de morphismes $\beta_?$: $Y \to S(\rho_X\ (?))$ (un pour chaque $\xi \in |X/C_o|$), il existe donc un unique β_t : $Y \to Q = S(\rho_X\ (t))$. On définit θ_Q : $C(X, Q) \to C(Y, Q)$ en posant $\theta_Q(t) = S^{-1}\ (\beta_t)$.

Montrons que θ est une transformation naturelle. En effet, considérons le diagramme ci-dessous,

$$\begin{tikzcd}
C(X, Q) \arrow[r, "\theta_Q"] \arrow[d, "q_X^*"'] & C(Y, Q) \arrow[d, "q_Y^*"] \\
C(X, Q') \arrow[r, "\theta_{Q'}"] & C(Y, Q')
\end{tikzcd}$$

Pour tout $\mu \in C(X, Q)$, on a d'une part,

$$q_Y^*\ (\theta_Q\ (\mu)) = q_Y^*\ (S^{-1}\ (\beta_\mu)) = q \circ S^{-1}\ (\beta_\mu)$$

et d'autre part,

$$\theta_{Q'}\ (q_X^*\ (\mu)) = \theta_{Q'}\ (q\circ\mu) = S^{-1}\ (\beta_{q\circ\mu})\ .$$

Mais $S(q\circ\mu) = S(q)\ S(\mu)$. D'où $\eta_{q\circ\mu} = \eta_q\ \eta_\mu$, donc $\eta_q\ \beta_\mu = \beta_{q\circ\mu}$. On a alors que $S^{-1}\ (\beta_{q\circ\mu}) = S^{-1}\ (\eta_q\ \beta_\mu) = S^{-1}\ (\eta_q)\ S^{-1}\ (\beta_\mu) = q \circ S^{-1}\ (\beta_\mu)$. Conséquemment, le diagramme est commutatif, et θ est une transformation naturelle de $\overline{X}$ dans $\overline{Y}$.

Montrons maintenant que dans (D), le triangle

$$\begin{tikzcd} & S(\rho_X\ (\xi)) = C \\ Y = S(Y) \arrow[ur, "\beta_\xi"] \arrow[dr, "\theta"'] & \\ & X = S(X) \arrow[uu, "\eta_\xi"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif, c'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{tikzcd} C(C,\ Q) \arrow[dr, "\beta_{\xi_Q}"] \arrow[dd, "\eta_{\xi_Q}"'] & \\ & C(Y,\ Q) \\ C(X,\ Q) \arrow[ur, "\theta_Q"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Soit $t \in (C, Q)$, on a que

$$\theta_Q (\eta_{\xi_Q} (t)) = \theta_Q (t \circ \xi) = S^{-1} (\beta_{t \circ \xi}) = S^{-1} (\eta_t \circ \beta_\xi)$$

$$= t \circ S^{-1} (\beta_\xi) = t \circ S^{-1} (S (\beta_{\xi_C} (1_C))) = t \circ \beta_{\xi_C} (1_C)$$

et $\beta_{\xi_Q} (t) = t \circ \beta_{\xi_C} (1_C)$ car le diagramme

$$\begin{tikzcd} C(C, C) \arrow[r, "\beta_{\xi_C}"] \arrow[d, "t^*_C"'] & C(Y, C) \arrow[d, "t^*_Y"] \\ C(C, Q) \arrow[r, "\beta_{\xi_Q}"] & C(Y, Q) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Il reste à montrer l'unicité de θ. Soit donc $\theta' : Y \longrightarrow X$ pour lequel le diagramme (D) est commutatif. Montrons que pour tout $Q \in |C_\circ|$,

$$\theta'_Q : C(X, Q) \longrightarrow C(Y, Q)$$

est tel que $\theta'_Q (t) = \theta_Q (t)$. Pour tout $t : X \longrightarrow Q$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& Q = S(\rho_X(t)) \\
Y \arrow[ur, "\beta_t"] \arrow[dr, "\theta'"'] & \\
& X \arrow[uu, "\eta_t"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif, donc pour tout $Q \in |C_\circ|$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& C(X, Q) \arrow[dd, "\theta'_Q"] \\
C(Q, Q) \arrow[ur, "\eta_{t_Q}"] \arrow[dr, "\beta_{t_Q}"'] & \\
& C(Y, Q)
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Dans ce cas,

$$\beta_{t_Q}(1_Q) = \theta'_Q(\eta_{t_Q}(1_Q)) = \theta'_Q(1_Q \circ t) = \theta'_Q(t) .$$

De plus, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& Q = S(\rho_X(t)) \\
Y \arrow[ur, "\beta_t"] \arrow[dr, "\theta"'] & \\
& X \arrow[uu, "\eta_t"']
\end{tikzcd}$$

étant commutatif, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & C(X, Q) \arrow[dd, "\theta_Q"] \\ C(Q, Q) \arrow[ur, "\eta_{t_Q}"] \arrow[dr, "\beta_{t_Q}"'] & \\ & C(Y, Q) \end{tikzcd}$$

est commutatif, d'où

$$\beta_{t_Q}(1_Q) = \theta_Q(\eta_{t_Q}(1_Q)) = \theta_Q(1_Q \circ t) = \theta_Q(t) .$$

Conséquemment $\theta'_Q(t) = \theta_Q(t)$, ce qui prouve que $\theta = \theta'$.

Corollaire 1.

Le foncteur $S : C \longrightarrow \mathcal{S}$ est l'extension de Kan du foncteur $S/C_\circ : C_\circ \longrightarrow S$.

Démonstration:

Le résultat découle de façon immédiate du corollaire 4, page 235, (c.f., S. Maclane, Categories for the working mathematician) et de la proposition précédente.

F) Autre caractérisation de la catégorie $\mathcal{S}$

La proposition 10 de la section précédente signifie que pour tout $X \in |C|$, la famille $S(\xi) : S(X) \longrightarrow S(\rho_X(\xi))$ où $\xi \in |X/C_\circ|$, est la limite du foncteur $S \circ \rho_X : X/C_\circ \longrightarrow S$. Nous démontrerons ici que cette propriété caractérise la catégorie $\mathcal{S}$.

Proposition 11.

Pour toute catégorie A et tout foncteur $F : \mathcal{C} \to A$ tel que pour tout $X \in |\mathcal{C}|$, la famille $\{F(\xi) : F(X) \to F(\rho_X(\xi)),\ \xi \in |X/C_\circ|\}$ est une limite de $F \circ \rho_X$, alors il existe un unique foncteur $T : \mathcal{S} \to A$ tel que $T \circ S = F$.

Démonstration:

a) On définit T sur les objets en posant $T(X) = F(X)$ pour tout $X \in |\mathcal{S}|$.

Soit $\eta \in \mathcal{S}(X, Y)$. On a, pour tout $C \in |C_\circ|$, une fonction $\eta_C : C(Y, C) \to C(X, C)$. Considérons le diagramme que voici

$$
\begin{tikzcd}
 & & F(\rho_Y(\xi)) \arrow[dd, "F(\gamma)"] \\
F(X) \arrow[urr, "F(\eta_C(\xi))"] \arrow[drr, "F(\eta_{C'}(\xi'))"'] \arrow[r, dotted, "f"] & F(Y) \arrow[ur, "F(\xi)"] \arrow[dr, "F(\xi')"'] & \\
 & & F(\rho_Y(\xi'))
\end{tikzcd}
\qquad (A)
$$

où $C, C' \in |C_\circ|$, $Y \xrightarrow{\xi} C$ et $Y \xrightarrow{\xi'} C' \in |Y/C_\circ|$ et $\gamma \in Y/C_\circ(\xi, \xi')$.

On a d'une part que $F(\gamma) \circ F(\xi) = F(\xi')$ car $\gamma \circ \xi = \xi'$ et d'autre part que $F(\gamma) \circ F(\eta_C(\xi)) = F(\eta_{C'}(\xi'))$, car η est une transformation naturelle.

Etant donné que la famille $F(\xi) : F(Y) \longrightarrow F(\rho_Y(\xi))$ est une limite de $F \circ \rho_Y$, il existe un unique $f : F(X) \longrightarrow F(Y)$ pour lequel le diagramme (A) est commutatif. Définissons $T(\eta) = f$.

b) Montrons que

i) $T(\beta) \circ T(\mu) = T(\beta\mu)$

ii) $T(1_X) = 1_{T(X)}$

i) Soient $\eta \in S(X, Y)$ et $\beta \in S(Y, Z)$. Montrons que, pour tout $\xi : Z \longrightarrow C$, $\xi' : Z \longrightarrow C'$ de $|Z/C_o|$ et pour tout $\gamma : \xi \longrightarrow \xi'$, le diagramme ci-desous est commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & F(\rho_Z(\xi)) \arrow[dd, "F(\gamma)"] \\
F(X) \arrow[urr, "F(\eta_C(\beta_C(\xi)))"] \arrow[r, "T(\beta) \circ T(\eta)"] \arrow[drr, "F(\eta_{C'}(\beta_{C'}(\xi')))"'] & F(Z) \arrow[ur, "F(\xi)"] \arrow[dr, "F(\xi')"] & \\
 & & F(\rho_Z(\xi'))
\end{tikzcd} \qquad (B)$$

En effet, si $\beta \in S(Y, Z)$, pour tout $\xi : Z \longrightarrow C$, $\xi' : Z \longrightarrow C'$ de $|Z/C_o|$ et pour tout $\gamma : \xi \longrightarrow \xi'$, on a, par définition de $T(\beta)$, que le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & F(\rho_Z(\xi)) \arrow[dd, "F(\gamma)"] \\
F(Y) \arrow[r, "T(\beta)"] \arrow[urr, "F(\beta_C(\xi))"] \arrow[drr, "F(\beta_{C'}(\xi'))"'] & F(Z) \arrow[ur, "F(\xi)"'] \arrow[dr, "F(\xi')"] & \\
 & & F(\rho_Z(\xi'))
\end{tikzcd}$$

d'où $F(\xi) \circ T(\beta) = F(\beta_C(\xi))$ et $F(\xi') \circ T(\beta) = F(\beta_{C'}(\xi'))$. De plus, si $\eta \in S(X, Y)$, pour tout $\zeta : Y \twoheadrightarrow C$, $\zeta' : Y \twoheadrightarrow C'$ de $|Y/C_\circ|$ et pour tout $\nu : \zeta \twoheadrightarrow \zeta'$, on a, par définition de $T(\eta)$, que le diagramme ci-dessous est commutatif,

$$\begin{tikzcd}
 & & F(\rho_Y(\zeta)) \arrow[dd, "F(\nu)"] \\
F(X) \arrow[r, "T(\eta)"] \arrow[urr, "F(\eta_C(\zeta))"] \arrow[drr, "F(\eta_{C'}(\zeta'))"'] & F(Y) \arrow[ur, "F(\zeta)"'] \arrow[dr, "F(\zeta')"] & \\
 & & F(\rho_Y(\zeta'))
\end{tikzcd}$$

d'où $F(\zeta) \circ T(\eta) = F(\eta_C(\zeta))$ et $F(\zeta') \circ T(\eta) = F(\eta_{C'}(\zeta'))$. En particulier, si $\zeta = \beta_C(\xi)$ et $\zeta' = \beta_{C'}(\xi')$, on a que, $F(\beta_C(\xi)) \circ T(\eta) = F(\eta_C(\beta_C(\xi)))$ et $F(\beta_{C'}(\xi')) \circ T(\eta) = F(\eta_{C'}(\beta_{C'}(\xi')))$. D'où $F(\xi) \circ (T(\beta) \circ T(\eta)) = (F(\xi) \circ T(\beta)) \circ T(\eta) = F(\beta_C(\xi)) \circ T(\eta) = F(\eta_C(\beta_C(\xi)))$. De même, on montre que

$$F(\xi') \circ (T(\beta) \circ T(\eta)) = F(\eta_{C'}(\beta_{C'}(\xi'))).$$

De plus, étant donné que $\gamma \circ \xi = \xi'$ on a que $F(\gamma) \circ F(\xi) = F(\xi')$. Conséquemment le diagramme (B) est commutatif. Etant donné que $T(\beta\eta)$ est, par définition, l'unique morphisme pour lequel le diagramme (B) est commutatif, on conclut que

$$T(\beta\eta) = T(\beta)\ T(\eta)$$

ii) Montrons maintenant que $T(1_X) = 1_{T(X)}$.

En effet, pour tout $\xi : X \to C$, $\xi' : X \to C'$ de $|X/C_\circ|$ et pour tout $\gamma : \xi \to \xi'$, on a que $T(1_X)$ est, par définition, l'unique morphisme pour lequel le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & F(\rho_X(\xi)) \arrow[dd, "F(\gamma)"] \\
F(X) \arrow[r, "T(1_X)"] \arrow[urr, "F((1_X)_C(\xi))"] \arrow[drr, "F((1_X)_{C'}(\xi'))"'] & F(X) \arrow[ur, "F(\xi)"] \arrow[dr, "F(\xi')"] & \\
 & & F(\rho_X(\xi'))
\end{tikzcd}$$

puisque $F((1_X)_C(\xi)) = F(\xi)$ et que $F((1_X)_{C'}(\xi')) = F(\xi')$ on a que $1_{F(X)} : F(X) \to F(X)$ rend le diagramme ci-dessus commutatif, d'où

$$T(1_X) = 1_{F(X)} = 1_{T(X)}$$

c) Montrons que $T \circ S = F$.

i) Pour tout $X \in |C|$, on a que $(T \circ S)(X) = T(S(X)) = T(X) = F(X)$.

ii) Soit $f \in C(X, Y)$, $S(f) \in S(X, Y)$ est la transformation naturelle définie par $S(f)_C(\xi) = \xi \circ f$ pour tout $C \in |C_o|$. Pour tout $\xi : Y \to C$, $\xi' : Y \to C'$ de $|Y/C_o|$ et pour tout $\gamma : \xi \to \xi'$, on a que le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & F(\rho_Y(\xi)) \arrow[dd, "F(\gamma)"] \\
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[urr, "F(\xi \circ f)"] \arrow[drr, "F(\xi' \circ f)"'] & F(Y) \arrow[ur, "F(\xi)"] \arrow[dr, "F(\xi')"'] & \\
 & & F(\rho_Y(\xi'))
\end{tikzcd}$$

étant donné que $F(\xi \circ f) = F(S(f)_C(\xi))$ et que $F(\xi' \circ f) = F(S(f)_{C'}(\xi'))$, on a que $T(S(f))$ est, par définition, l'unique morphisme pour lequel le diagramme ci-dessus est commutatif. Conséquemment, $T(S(f)) = F(f)$.

d) <u>Unicité</u>

Si $T' : S \to A$ est un foncteur tel que $T' \circ S = F$, montrons que $T' = T$.

i) Pour tout $X \in |S|$, on a que

$$T'(X) = T'(S(X)) = F(X) = T(S(X)) = T(X).$$

ii) Pour tout $\eta \in \mathcal{S}(X, Y)$, considérons le diagramme que voici

$$\begin{tikzcd}
 & & S(\rho_Y(\xi)) \arrow[dd, "S(\gamma)"] \\
S(X) \arrow[r, "\eta"] \arrow[urr, "S(\eta_C(\xi))"] \arrow[drr, "S(\eta_{C'}(\xi'))"'] & S(Y) \arrow[ur, "S(\xi)"] \arrow[dr, "S(\xi')"'] & \\
 & & S(\rho_Y(\xi'))
\end{tikzcd}$$

où $\xi : Y \twoheadrightarrow C$, $\xi' : Y \twoheadrightarrow C'$ sont des objets de $|Y/C_0|$,
$\gamma : \xi \twoheadrightarrow \xi'$ est tel que $\gamma \circ \xi = \xi'$.

On a, d'après le lemme 1, que $S(\xi)\eta = S(\eta_C(\xi))$ et que $S(\xi')\eta = S(\eta_{C'}(\xi'))$. D'où le diagramme ci-dessus est commutatif. En appliquant le foncteur T' à ce diagramme, sachant que $T' \circ S = F$ on obtient le diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
 & & F(\rho_Y(\xi)) \arrow[dd, "F(\gamma)"] \\
F(X) \arrow[r, "T'(\eta)"] \arrow[urr, "F(\eta_C(\xi))"] \arrow[drr, "F(\eta_{C'}(\xi'))"'] & F(Y) \arrow[ur, "F(\xi)"] \arrow[dr, "F(\xi')"'] & \\
 & & F(\rho_Y(\xi'))
\end{tikzcd}$$

et puisque $T(\eta)$ est, par définition l'unique morphisme pour lequel le diagramme ci-dessus est commutatif, on a que $T(\eta) = T'(\eta)$.

Corollaire.

Il existe une unique catégorie $\mathcal{S}$ et un unique foncteur $S : C \to \mathcal{S}$ tel que pour tout $X \in |C|$ la famille $S(\xi) : S(X) \to S(\rho_X(\xi))$ où $\xi \in |X/C_o|$ est la limite du foncteur $S \circ \rho_X$ et vérifiant la propriété universelle de la proposition précédente.

Démonstration:

Conséquence immédiate de la proposition précédente.

CHAPITRE II

A) Introduction

Le but de ce chapitre est de démontrer que la théorie des formes exposées précédemment, coïncide avec les théories des formes exposées antérieurement, en [4] par S. Mardesic, en [2] par S. Mardesic et J. Segal, en [1] par K. Borsuk. De plus, nous démontrerons que si C désigne la catégorie dont

i) les objets sont les espaces topologiques

ii) les morphismes sont les classes d'homotopie d'applications continues

et que si C_o est la sous-catégorie pleine de C dont les objets sont les CW complexes, on obtient une catégorie $\mathcal{S} = \mathcal{S}\ (C, C_o)$ équivalente à la catégorie $G|$ de Mardesic.

B) La théorie de Mardesic

Soient C une catégorie, C_o une sous-catégorie pleine de C et $\mathcal{S} = \mathcal{S}\ (C, C_o)$ la catégorie construite au chapitre précédent.

Proposition 1.

Soit $\eta \in \mathcal{S}(X, Y)$. Alors pour tout $Q \in |C_o|$, η définit une fonction

$$\eta_Q : C(Y, Q) \longrightarrow C(X, Q)$$

telle que pour tout $Q \xrightarrow{g} Q'$, $Q' \in |C_o|$

$$(*) \quad \begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ Q \arrow[rr, "g"'] & {} & Q' \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\eta_Q(f)"'] \arrow[dr, "\eta_{Q'}(f')"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ Q \arrow[rr, "g"'] & {} & Q' \end{tikzcd}$$

et réciproquement.

Démonstration:

Soit $\eta \in S(X, Y)$. On a que η est une transformation naturelle de $\overline{Y}$ dans $\overline{X}$. Dans ce cas, pour tout $Q, Q' \in |C_o|$ et pour tout $Q \xrightarrow{g} Q'$, on a que le diagramme ci-dessous est commutatif,

$$\begin{tikzcd} C(Y, Q) \arrow[r, "C(Y,g)"] \arrow[d, "\eta_Q"'] & C(Y, Q') \arrow[d, "\eta_{Q'}"] \\ C(X, Q) \arrow[r, "C(X,g)"] & C(X, Q') \end{tikzcd}$$

où η_Q et $\eta_{Q'}$ sont les fonctions induites par η, $C(Y, g)$ et $C(X, g)$ sont les fonctions définies par $C(Y, g)$ $(f) = g \circ f$ et $C(X, g)$ $(f') = g \circ f'$. D'où $\eta_{Q'}(g \circ f) = g \circ \eta_Q(f)$. Or, si le triangle

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ Q \arrow[rr, "g"] & & Q' \end{tikzcd}$$

est commutatif, alors $f' = g \circ f$. Donc $\eta_{Q'}(f') = \eta_{Q'}(g \circ f) = g \circ \eta_Q(f)$, et par conséquent le triangle

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\eta_Q(f)"'] \arrow[dr, "\eta_{Q'}(f')"] & \\ Q \arrow[rr, "g"] & & Q' \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démontrons maintenant la réciproque. En effet, pour tout $Q \in |C_\circ|$, soit $\eta_Q : C(Y, Q) \to C(X, Q)$ une fonction vérifiant la condition (*) de la proposition. Pour tout $Q, Q' \in |C_\circ|$ et pour tout $Q \xrightarrow{g} Q'$, considérons le diagramme que voici

$$\begin{tikzcd} C(Y, Q) \arrow[r, "C(Y, g)"] \arrow[d, "\eta_Q"'] & C(Y, Q') \arrow[d, "\eta_{Q'}"] \\ C(X, Q) \arrow[r, "C(X, g)"] & C(X, Q') \end{tikzcd}$$

où η_Q et $\eta_{Q'}$ sont des fonctions vérifiant la condition (*), $C(Y, g)$ et $C(X, g)$ les fonctions définies précédemment. Soit $f \in C(Y, Q)$ et supposons que $g \circ f = f'$, dans ce cas, $\eta_{Q'}(g \circ f) = \eta_{Q'}(f')$. Or si $g \circ f = f'$ on a par hypothèse que $g \circ \eta_Q(f) = \eta_{Q'}(f')$, d'où $\eta_{Q'}(g \circ f) = g \circ \eta_Q(f)$, donc le diagramme est commutatif. Conséquemment, la famille η_Q où $Q \in |C_\circ|$ définie une transformation naturelle η de $\overline{Y}$ dans $\overline{X}$.

Dans le cas où C désigne la catégorie dont

i) les objets sont les espaces topologiques

ii) les morphismes sont les classes d'homotopie d'applications continues

et que $C_\circ$ est la sous-catégorie pleine de C dont les objets sont les espaces topologiques ayant le type d'homotopie d'un CW complexe, on obtient le corollaire suivant.

<u>Corollaire 1</u>.

La catégorie $S = S(C, C_\circ)$ est équivalente à la catégorie G de Mardesic, construite en [4].

De plus, si $C_\circ'$ est la sous-catégorie pleine de C dont les objets sont les CW complexes on obtient la proposition suivante.

Proposition 2.

La catégorie $S(C, C_\circ)$ est équivalente à la catégorie $S(C, C'_\circ)$.

Démonstration.

En effet, $S : C(X, Q) \longrightarrow S(C, C_\circ)(X, Q)$ étant une bijection pour tout $Q \in |C'_\circ|$, il existe d'après la proposition 7 du Chapitre I un unique $\sigma : S(C, C_\circ) \longrightarrow S(C, C'_\circ)$ pour lequel le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd} & S(C, C'_\circ) \\ C \arrow[ur, "S'"] \arrow[dr, "S"'] & \\ & S(C, C_\circ) \arrow[uu, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Montrons maintenant qu'il existe un $\sigma' : S(C, C'_\circ) \longrightarrow S(C, C_\circ)$ tel que $\sigma' \circ S' = S$. Pour cela, il nous faut montrer que $S' : C(X, C) \longrightarrow S(C, C'_\circ)(X, C)$ est une bijection pour tout $C \in |C_\circ|$. Soit donc $t \in S(X, C)$ où $C \in |C_\circ|$. Puisque C est un espace topologique ayant le type d'homotopie d'un CW complexe, il existe un $Q \in |C'_\circ|$ et des morphismes $C \xrightarrow{\overline{f}} Q$, $Q \xrightarrow{\overline{g}} C$ tels $\overline{f} \circ \overline{g} = id_Q$ $\overline{g} \circ \overline{f} = id_C$. Dans ce cas, $S'(\overline{f})\, t \in S(X, Q)$. Mais puisque $Q \in |C'_\circ|$ et que

$$S' : C(X, Q) \longrightarrow S(C, C'_\circ)(X, Q)$$

est une bijection pour tout $Q \in |C'_\circ|$, on a un unique $\overline{r} \in C(X, Q)$ tel que $S'(\overline{r}) = S(\overline{f}) \cdot t$.

Montrons que $\overline{g} \circ \overline{r} \in C(X, C)$ est tel que $S'(\overline{g} \circ \overline{r}) = t$. En effet, on a que

$$S'(\overline{g} \circ \overline{r}) = S'(\overline{g})\ S'(\overline{r}) = S'(\overline{g})\ S'(\overline{f})\ t = S'(\overline{g} \circ \overline{f})\ t = S(id_C)\ t = id_C\ t = t.$$

De plus, $\overline{g} \circ \overline{r}$ est l'unique morphisme tel que $S'(\overline{g} \circ \overline{r}) = t$. En effet, soit $\overline{h} \in C(X, C)$. On a que $S'(\overline{f} \circ \overline{h}) = S'(\overline{f})\ S'(\overline{h}) = S'(\overline{f})\ t = S'(\overline{r})$, or S' est une bijection lorsque $Q \in |C'_\circ|$, d'où $\overline{r} = \overline{f} \circ \overline{h}$. Dans ce cas, $\overline{g} \circ \overline{r} = \overline{g} \circ (\overline{f} \circ \overline{h}) = (\overline{g} \circ \overline{f}) \circ \overline{h} = id_C \circ \overline{h} = \overline{h}$. Conséquemment

$$S' : C(X, C) \longrightarrow S(C, C'_\circ)\ (X, C)$$

est une bijection.

Considérons maintenant le diagramme ci-dessous,

$$\begin{tikzcd}
& S(C, C_\circ) \\
C \arrow[ur, "S"] \arrow[dr, "S'"'] & \\
& S(C, C'_\circ) \arrow[uu, dashed, "\sigma'"']
\end{tikzcd}$$

Puisque pour tout $C \in |C_o|$, $S' : C(X, C) \to S(C, C'_o)(X, C)$ est une bijection, il existe d'après la proposition 7 du chapitre I un unique σ' tel que $\sigma' \circ S' = S$.

Dans ce cas, les diagrammes ci-dessous

$$\begin{tikzcd} & S(C, C_o) \\ C \arrow[ur, "S"] \arrow[dr, "S"'] & \\ & S(C, C_o) \arrow[uu, "\sigma' \circ \sigma"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & S(C, C'_o) \\ C \arrow[ur, "S'"] \arrow[dr, "S'"'] & \\ & S(C, C'_o) \arrow[uu, "\sigma \circ \sigma'"'] \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Mais, le foncteur identité rend aussi ces diagrammes commutatifs, d'où $\sigma' \circ \sigma$ = identité et $\sigma \circ \sigma'$ = identité.

C) La théorie de Mardesic-Segal.

Mardesic a démontré en [4], que pour la sous-catégorie pleine G_B de G, dont les objets sont les espaces compacts Hausdorff, la notion de forme était équivalente à celle donnée antérieurement en [2] par S. Mardesic et J. Segal.

Nous démontrerons ici que si B désigne la catégorie dont

i) les objets sont les espaces compacts Hausdorff

ii) les morphismes sont les classes d'homotopie d'applications continues

et que $\mathbb{B}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}$ dont les objets sont les espaces topologiques ayant le type d'homotopie d'un CW complexe fini, la catégorie $S = S(\mathcal{B}, \mathbb{B})$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{G}_B$.

<u>Proposition 3</u>.

La catégorie $S = S(\mathcal{B}, \mathbb{B})$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{G}_B$.

Démonstration:

En effet, $S : \mathcal{B}(X, Q) \longrightarrow S(\mathcal{B}, \mathbb{B})\ (X, Q)$ étant une bijection pour tout $Q \in |\mathbb{B}|$, il existe d'après ([4], th. 8, p. 14-15) un unique foncteur $\Phi : S(\mathcal{B}, \mathbb{B}) \longrightarrow \mathcal{G}_B$ pour lequel le diagramme ci-dessous est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[rr, "S/\mathcal{B}"] \arrow[drr, "S"'] & & \mathcal{G}_B \\
& & S\ (\mathcal{B}, \mathbb{B}) \arrow[u, "\Phi"']
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{B} \xrightarrow{S/\mathcal{B}} \mathcal{G}_B$ sont définies en ([4], th. 8, p. 14-15).

De plus, $S/\mathcal{B} : \mathcal{B}(X, Q) \longrightarrow G_{\mathcal{B}}(X, Q)$ étant une bijection pour tout $Q \in |\mathbb{B}|$, il existe d'après la proposition 7 du chapitre I, un unique $\sigma : G_{\mathcal{B}} \longrightarrow S(\mathcal{B}, \mathbb{B})$ pour lequel le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd} & S(\mathcal{B}, \mathbb{B}) \\ \mathcal{B} \arrow[ur, "S"] \arrow[dr, "S/\mathcal{B}"'] & \\ & G_{\mathcal{B}} \arrow[uu, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Dans ce cas, les diagrammes ci-dessous

$$\begin{tikzcd} & G_{\mathcal{B}} \arrow[dd, "\Phi \circ \sigma"] \\ \mathcal{B} \arrow[ur, "S/\mathcal{B}"] \arrow[dr, "S/\mathcal{B}"'] & \\ & G_{\mathcal{B}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & S(\mathcal{B}, \mathbb{B}) \arrow[dd, "\sigma \circ \Phi"] \\ S \arrow[ur, "S"] \arrow[dr, "S"'] & \\ & S(\mathcal{B}, \mathbb{B}) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Mais puisque le foncteur identité rend aussi ces diagrammes commutatifs, on a que $\Phi \circ \sigma$ = identité et que $\sigma \circ \Phi$ = identité.

<u>Remarque 1.</u>

Si $\mathbb{B}'$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}$ dont les objets sont les CW complexes finis, une démonstration analogue à celle de la proposition 3, montre que la catégorie $S(\mathcal{B}, \mathbb{B})$ est équivalente à la catégorie $S(\mathcal{B}, \mathbb{B}')$.

Remarque 2.

Mardesic a démontré ([4], th. 9, p. 16) que la catégorie des formes de Borsuk était équivalente à la sous-catégorie pleine de G_B dont les objets sont les espaces compacts métriques. D'après ce que l'on a démontré précédemment, il est immédiat que la sous-catégorie pleine de $S(\mathcal{B}, \mathbb{B})$ dont les objets sont les espaces compacts métriques est équivalente à la catégorie de Borsuk.

CHAPITRE III

A) Introduction:

Dans ce chapitre, nous exposerons brièvement la méthode duale de construire une catégorie S', à partir d'une catégorie C et d'une sous-catégorie pleine C_o de C. De plus, nous donnerons deux applications de cette construction duale.

B) Construction duale:

Soient C une catégorie et C_o une sous-catégorie pleine de C. On définit une catégorie S' de la façon suivante:

i) les objets de S' sont les mêmes que ceux de C.

ii) les morphismes sont définies comme suit:

Soit $X \in |C|$. Considérons le foncteur $\underline{X} = C(?, X)$

$$\underline{X} = C(?, X) : C_o \longrightarrow \text{Ens}.$$

Faisant l'hypothèse que c'est un ensemble, on définit $S'(X, Y)$ en posant $S'(X, Y) = [\underline{X}, \underline{Y}]$, où $[\underline{X}, \underline{Y}]$ désigne les transformations naturelles de $\underline{X}$ dans $\underline{Y}$.

C) <u>Applications</u>:

Voici maintenant deux applications de cette construction duale.

<u>Application 1</u>:

Dans le cas où C désigne la catégorie dont

i) les objets sont les espaces topologiques

ii) les morphismes sont les fonctions continues

et que C_o est la sous-catégorie pleine de C ayant pour objets les espaces compacts, on obtient la proposition suivante.

<u>Proposition 1</u>:

$S'(X, Y)$ est isomorphe à l'ensemble des fonctions de X dans Y, qui sont continues sur tout sous-espace compact de X.

Démonstration:

Désignons par $C_K(X, Y)$, l'ensemble des fonctions de X dans Y qui sont continues sur tout compact K de X. Soit $f \in C_K(X, Y)$. Pour tout $K \in |C_o|$, on définit une fonction $\psi_K : C(K, X) \rightarrow C(K, Y)$ en posant $\psi_K(t) = f \circ t$.

Montrons que $\psi_K(t)$ est continue. En effet, $t : K \rightarrow X$ étant continue et K compact, on a que $t(K)$ est compact. Puisque f est continue sur tout compact de X, $f \circ t : K \rightarrow Y$ est continue, d'où $\psi_K(t)$ est continue.

Montrons maintenant que la famille ψ_K, où $K \in |C_\circ|$, nous définit une transformation naturelle $\psi : \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$. Pour tout $K, K' \in |C_\circ|$ et pour tout $h : K' \longrightarrow K$, considérons le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd} C(K, X) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "\psi_K"'] & C(K', X) \arrow[d, "\psi_{K'}"] \\ C(K, Y) \arrow[r, "\phi_Y"] & C(K', Y) \end{tikzcd}$$

où $\phi_X(t) = t \circ h$, $\phi_Y(\mu) = \mu \circ h$, ψ_K et $\psi_{K'}$ sont les fonctions définies précédemment. Pour tout $t \in C(K, X)$, on a d'une part

$$(\psi_{K'} \circ \phi_X)\ (t) = \psi_{K'}\ (\phi_X\ (t)) = \psi_{K'}\ (t \circ h) = f \circ (t \circ h)$$

et d'autre part

$$(\phi_Y \circ \psi_K)\ (t) = \phi_Y\ (\psi_K\ (t)) = \phi_Y\ (f \circ t) = (f \circ t) \circ h.$$

Or $f \circ (t \circ h) = (f \circ t) \circ h$, donc $(\psi_{K'} \circ \phi_X)\ (t) = (\phi_Y \circ \psi_K)\ (t)$. Ce qui prouve que le diagramme est commutatif, donc ψ est une transformation naturelle de $\underline{X}$ dans $\underline{Y}$.

On peut donc définir une fonction $\theta : C_K(X, Y) \longrightarrow S'(X, Y)$ en posant $\theta(f) = \psi$.

Il nous reste à montrer que pour tout $\eta \in S'(X, Y)$ il existe un unique $g \in C_K(X, Y)$ tel que $\theta(g) = \eta$. En effet, soit $x \in X$. Puisque $\{x\}$ est compact, on a une unique fonction $\eta_{\{x\}} : C(\{x\}, X) \to C(\{x\}, Y)$. On définit $g : X \to Y$ en posant $g(x) = (\eta_{\{x\}} (j_x)) (x)$, où $j_x : \{x\} \to X$ est l'inclusion. Il est immédiat que g est bien définie.

On démontre que $g : X \to Y$ est continue sur tout sous-espace compact de X, en montrant que pour tout compact $K \subset X$,

$$g(k) = (\eta_{\{k\}} (j_k)) (k) = (\eta_K (j_K)) (k)$$

où $k \in K$, $j_k : \{k\} \to X$ est l'inclusion, $j_K : K \to X$ est l'inclusion, $\eta_{\{k\}} : C(\{k\}, X) \to C(\{k\}, Y)$ et $\eta_K : C(K, X) \to C(K, Y)$ sont les fonctions induites par $\eta \in S(X, Y)$. En effet, on a que le diagramme ci-dessous est commutatif,

$$\begin{tikzcd}
C(K, X) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "\eta_K"'] & C(\{k\}, X) \arrow[d, "\eta_{\{k\}}"] \\
C(K, Y) \arrow[r, "\phi_Y"] & C(\{k\}, Y)
\end{tikzcd}$$

où $\eta_{\{k\}}$ et η_K sont induites par $\eta \in S'(X, Y)$, $\phi_X(t) = t \circ i$ où $i : \{k\} \to K$ est l'inclusion, $\phi_Y(u) = u \circ i$.

D'où, si $j_K : K \rightarrowtail X$ est l'inclusion, $(\eta_{\{k\}} \circ \phi_X)(j_K) = (\phi_Y \circ \eta_K)(j_K)$, ce qui implique que $\eta_{\{k\}}(j_K \circ i) = (\eta_K(j_K)) \circ i$. Mais $j_K \circ i = j_k$ comme l'illustre le diagramme que voici,

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, "j_K"] \\ \{k\} \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "j_k"'] & X \end{tikzcd}$$

d'où $\eta_{\{k\}}(j_k) = (\eta_K(j_K)) \circ i$. Conséquemment

$$g(k) = (\eta_{\{k\}}(j_k))(k) = (\eta_K(j_K) \circ i)(k) = (\eta_K(j_K))(k).$$

Montrons maintenant que g est unique. Soit donc $g' \in C_K(X, Y)$ tel que $\theta(g') = \eta$. Pour tout $x \in X$, on a que $(\theta(g'))_{\{x\}}(j_x) = g' \circ j_x = \eta_{\{x\}}(j_x)$ où $j_x : \{x\} \rightarrowtail X$ est l'inclusion. D'où
$g(x) = (\eta_{\{x\}}(j_x))(x) = (g' \circ j_x)(x) = g'(j_x(x)) = g'(x)$, donc $g = g'$.

<u>Application 2</u>:

Dans le cas où C désigne la catégorie dont

i) les objets sont les espaces topologiques de Kelley

ii) les morphismes sont les classes d'homotopie d'applications continues, (notées $\overline{f}$, $\overline{g}$, $\overline{h}$, etc...)

et que C_o est la sous-catégorie pleine de C ayant comme objets les CW - complexes, on obtient la proposition suivante:

<u>Proposition 2</u>

$S'(X, Y)$ est isomorphe à l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de $|S(X)|$ dans $|S(Y)|$, où $|S(?)|$ désigne la réalisation géométrique du complexe singulier.

<u>Rappel</u>:

1. Pour tout $X \in |C|$, il existe un morphisme $\overline{j}_X \in C(|S(X)|, X)$ possédant la propriété suivante: pour tout $\overline{t} \in C(Q, X)$, il existe un unique $\overline{f} \in C(Q, |S(X)|)$ pour lequel le triangle ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
{|S(X)|} \arrow[dr, "\overline{j}_X"] & \\
& X \\
Q \arrow[uu, "\overline{f}"] \arrow[ur, "\overline{t}"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

2. Le foncteur $|S(?)| : C \to C_o$ est l'adjoint à droite du foncteur inclusion de C_o dans C.

Démonstration de la proposition.

Soit $\eta \in S'(X, Y)$. Pour tout $Q \in |C_o|$, on a une fonction $\eta_Q : C(Q, X) \to C(Q, Y)$. Puisque $|S(X)| \in |C_o|$, on a en particulier

$$\eta_{|S(X)|} : C(|S(X)|, X) \to C(|S(X)|, Y) .$$

Soit $\overline{j}_X \in C(|S(X)|, X)$ et considérons $\eta_{|S(X)|}(\overline{j}_X)$. On a donc un unique $\overline{f} : |S(X)| \to |S(Y)|$ pour lequel le triangle

$$\begin{tikzcd}
{|S(Y)|} \arrow[dr, "\overline{j}_Y"] & \\
& Y \\
{|S(X)|} \arrow[uu, "\overline{f}"] \arrow[ur, "\eta_{|S(X)|}(\overline{j}_X)"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

On définit une fonction

$$\theta : S'(X, Y) \to (|S(X)|, |S(Y)|)$$

en posant $\theta(\eta) = \overline{f}$.

Montrons maintenant que pour $\overline{g} \in C(|S(X)|, |S(Y)|)$ il existe un unique $\beta \in S(X, Y)$ tel que $\theta(\beta) = \overline{g}$. En effet, $|S(?)|$ étant l'adjoint à droite du foncteur inclusion $\underline{I}$: $C_o \to C$, on a que les foncteurs $C(I(?), ?)$ et $C_o(?, |S(?)|) : C_o^{opp} \times C \to$ Ens. sont naturellement équivalents. Donc les diagrammes ci-dessous

$$\begin{tikzcd} C(Q, X) \arrow[r, "\gamma_{Q,X}"] \arrow[d, "\phi_X"'] & C_o(Q, |S(X)|) \arrow[d, "\phi_{|S(X)|}"] \\ C(Q', X) \arrow[r, "\gamma_{Q',X}"] & C_o(Q', |S(X)|) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_o(Q, |S(Y)|) \arrow[r, "\lambda_{Q,Y}"] \arrow[d, "\phi_{|S(Y)|}"'] & C(Q, Y) \arrow[d, "\phi_Y"] \\ C_o(Q', |S(Y)|) \arrow[r, "\lambda_{Q',Y}"] & C(Q', Y) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs, où $\gamma_{Q,X}$, $\gamma_{Q',X}$, $\lambda_{Q,Y}$, $\lambda_{Q',Y}$ sont les fonctions induites par les transformations naturelles $\gamma : C(I(?), ?) \to C_o(?, |S(?)|)$ et $\lambda : C_o(?, |S(?)|) \to C(I(?), ?)$ tandis que ϕ_X, $\phi_{|S(X)|}$, $\phi_{|S(Y)|}$ et ϕ_Y sont les fonctions induites par $\overline{h} : Q' \to Q$. De plus, $\overline{g} : |S(X)| \to |S(Y)|$ étant donné, considérons le diagramme .

$$\begin{tikzcd} C_o(Q, |S(X)|) \arrow[r, "\psi_Q"] \arrow[d, "\phi_{|S(X)|}"'] & C_o(Q, |S(Y)|) \arrow[d, "\phi_{|S(Y)|}"] \\ C_o(Q', |S(X)|) \arrow[r, "\psi_{Q'}"] & C_o(Q', |S(X)|) \end{tikzcd}$$

où $\phi_{|S(X)|}$ et $\phi_{|S(Y)|}$ sont comme précédemment, ψ_Q et $\psi_{Q'}$ sont les fonctions induites par $\overline{g} : |S(X)| \to |S(Y)|$. Soit $\overline{t} \in C_o(Q, |S(X)|)$. On a d'une part que

$$\phi_{|S(Y)|}\,(\psi_Q\,(\overline{t})) = \phi_{|S(Y)|}\,(\overline{g}\circ\overline{t}) = (\overline{g}\circ\overline{t}) \circ \overline{h}$$

et d'autre part,

$$\psi_{Q'}\,(\phi_{|S(X)|}(\overline{t})) = \psi_{Q'}\,(\overline{t}\circ\overline{h}) = \overline{g} \circ (\overline{t}\circ\overline{h})$$

Mais $(\overline{g}\circ\overline{t}) \circ \overline{h} = \overline{g} \circ (\overline{t}\circ\overline{h})$, d'où le diagramme est commutatif.

Les trois diagrammes précédents étant commutatifs, on a que le diagramme

$$\begin{tikzcd} C(Q,\,X) \arrow[r, "\beta_Q"] \arrow[d, "\phi_X"'] & C(Q,\,Y) \arrow[d, "\phi_Y"] \\ C(Q',\,X) \arrow[r, "\beta_{Q'}"] & C(Q,\,Y) \end{tikzcd}$$

où $\beta_Q = \lambda_{Q,Y} \circ \psi_Q \circ \gamma_{Q,X}$ et $\beta_{Q'} = \lambda_{Q',Y} \circ \psi_{Q'} \circ \gamma_{Q',X}$, est commutatif. On obtient donc une transformation naturelle $\beta : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$.

Montrons que $\theta(\beta) = \overline{g}$. En effet, on a que

$$\beta_{|S(X)|}\,(\overline{j}_X) = \lambda_{|S(X)|,Y}\,(\psi_{|S(X)|}\,(\gamma_{|S(X)|,X}\,(\overline{j}_X)))$$

$$= \lambda_{|S(X)|,Y}\,(\psi_{|S(X)|}\,(id)) = \lambda_{|S(X)|,Y}\,(\overline{g}) = \overline{j}_Y \circ \overline{g}.$$

Etant donné que $\overline{g} : |S(X)| \longrightarrow |S(Y)|$ est l'unique morphisme pour lequel le triangle ci-dessous est commutatif,

$$\begin{tikzcd}
{|S(Y)|} \arrow[dr, "\overline{j}_Y"] & \\
& Y \\
{|S(X)|} \arrow[uu, "\overline{g}"] \arrow[ur, "\overline{j}_Y \circ \overline{g}"'] &
\end{tikzcd}$$

on a que $\theta(\beta) = \overline{g}$. L'unicité de β découle du fait que $\lambda_{Q,Y}$, ψ_Q et $\gamma_{Q,X}$ sont uniques.

BIBLIOGRAPHIE

Articles

[1] K. BORSUK — Concerning the homotopy properties of compacta. Fund. Math. 62 (1968), 223-254.

[2] S. MARDESIC and J. SEGAL — Shapes of compacta and ANR-Systems. Fund. Math. 72 (1971), 41-79.

[3] S. MARDESIC and J. SEGAL — Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes, Fund. Math. 72 (1971), 61-68.

[4] S. MARDESIC — Shapes for topological spaces (to appear in Gen. Top.).

Livres

[1] A.T. LUNDELL and S. WEINGRAM — The topology of CW complexes, Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.

[2] S. MACLANE — Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, New York, 1971.

[3] H. HERRLICH and G.E. STRECKER — Category Theory, Allyn and Bacon, Boston 1973.

RESUME

L'objet de cette thèse est de construire, pour toute catégorie C et pour toute sous-catégorie pleine C_o de C, une catégorie S qui généralise les catégories des formes définies antérieurement dans la littérature.