

INFORMATION TO USERS

This manuscript has been reproduced from the microfilm master. UMI films the text directly from the original or copy submitted. Thus, some thesis and dissertation copies are in typewriter face, while others may be from any type of computer printer.

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted. Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleedthrough, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send UMI a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.

Oversize materials (e.g., maps, drawings, charts) are reproduced by sectioning the original, beginning at the upper left-hand corner and continuing from left to right in equal sections with small overlaps.

Photographs included in the original manuscript have been reproduced xerographically in this copy. Higher quality 6" x 9" black and white photographic prints are available for any photographs or illustrations appearing in this copy for an additional charge. Contact UMI directly to order.

Bell & Howell Information and Learning
300 North Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106-1346 USA
800-521-0600

UMI[®]



Université d'Ottawa • University of Ottawa

ANALYSE NUMÉRIQUE DES BIFURCATIONS DANS LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARAMÉTRÉES

Par
Patrick Boily, B.Sc., M.S.
Septembre 2000

Thèse présentée à l'École des Études Supérieures
de l'Université d'Ottawa pour l'obtention
de la Maîtrise ès Sciences en Mathématiques¹

© Copyright 2000
par Patrick Boily, B.Sc., M.S., Ottawa, Canada

¹Le programme de la maîtrise est conjoint avec l'Université Carleton et est administré par l'Institut de Mathématiques et de Statistiques d'Ottawa-Carleton



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-57087-8

Canada

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude numérique de systèmes d'équations différentielles paramétrées de la forme

$$\dot{u} = f(u, a), \tag{1}$$

où $u \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$, $n, m < \infty$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est suffisamment continûment différentiable. Nous montrons comment calculer numériquement des branches de solutions stationnaires de (1) à partir d'un point d'équilibre. Puis, nous indiquons comment identifier certains types de bifurcations, ce qui permet de dresser un diagramme de bifurcation partiel de (1). Nous utilisons ensuite la présence de symétrie pour simplifier l'étude numérique de (1). Finalement, nous présentons une série d'exemples qui illustrent l'utilisation des algorithmes et des concepts étudiés.

Remerciements

J'aimerais remercier Victor LeBlanc et Sam Melkonian d'avoir lu cette thèse en détail et d'y avoir apporté des modifications; Benoît Dionne, mon directeur de thèse, de sa patience et de son enthousiasme; Tara Good, ma compagne de vie, de son support continu et de son affection, et Alan Kelm, de son aide et de son amitié.

Dédicace

Je dédic cette thèse à mon père, Marcel Boily, qui m'a initié très tôt aux mystères des mathématiques, et à ma mère, Danyelle Bertrand, qui m'a encouragé à essayer de les comprendre.

Table des matières

Résumé	ii
Remerciements	iii
Dédicace	iv
1 Introduction	1
2 Préliminaires	6
2.1 Systèmes dynamiques et bifurcations	6
2.2 Un mot au sujet des dérivées d'ordre 1 et 2	8
3 Continuation et points limites	10
3.1 Continuation (points d'équilibre)	11
3.1.1 Points limite	11
3.1.2 Changement de stabilité	16
3.1.3 Continuation par le paramètre	17
3.1.4 Continuation par la norme	19
3.1.5 Continuation par la longueur d'arc	24
3.2 Continuation (points limites)	26
3.2.1 Continuation par le paramètre	26
3.2.2 Continuation par la longueur d'arc	28
3.2.3 Implémentation	29
3.3 Initialisation, méthode de Newton et problème de Bratu	31

4	Bifurcation de solutions stationnaires	39
4.1	Équation algébrique de bifurcation	40
4.2	Nouvelle direction et changement de branche	42
4.3	Détection de points de branchement	44
4.4	Implémentation	46
4.5	Modèle proie-prédateur	46
5	Bifurcation de Hopf	48
5.1	Bifurcation de Hopf	49
5.2	Implémentation et produit extérieur	51
5.3	Continuation (Hopf)	56
5.3.1	Continuation par le paramètre	56
5.3.2	Implémentation : continuation par le paramètre	59
5.3.3	Continuation par la longueur d'arc	59
5.4	Calcul des solutions périodiques	62
6	Exemples et applications	64
6.1	Modèle proie-prédateur	65
6.1.1	Analyse numérique	65
6.1.2	Analyse algébrique	70
6.2	Bifurcation en 2-fourche	77
6.3	Bifurcation de Bautin	79
7	Conclusion	82
	Bibliographie	84

Liste des tableaux

3.1	Continuation par le paramètre	18
3.2	Continuation par la norme	20
3.3	Continuation par la longueur d'arc	25
3.4	Résolution du système linéaire dans la méthode de Newton	30
3.5	Résolution du système linéaire de la forme $A\hat{y} = y$	32
3.6	Calcul de \hat{u}_0 et \hat{a}_0	33
3.7	Méthode de Newton	34
3.8	Approximations des solutions de (3.21) pour a près de 3.47	37
4.1	Changement de branche de solutions stationnaires	43
5.1	Résolution du système linéaire (5.20)	60

Table des figures

2.1	Diagramme de bifurcation de la bifurcation en fourche	8
3.1	Branche de points d'équilibre	10
3.2	Diagramme de bifurcation de la bifurcation en point limite	13
3.3	Branche de solutions stationnaires pour le PCL de Bratu (paramètre)	37
3.4	Branche de solutions stationnaires pour le PCL de Bratu (longueur d'arc)	38
5.1	Diagramme de phase pour la bifurcation de Hopf supercritique.	49
6.1	Fonctions-tests pour le système (6.1) ; première branche.	66
6.2	Diagramme de bifurcation du système (6.1).	66
6.3	Fonctions-tests pour le système (6.1) ; deuxième branche.	67
6.4	Fonctions-tests pour le système (6.1) ; deuxième branche.	68
6.5	Diagramme de bifurcation du système (6.1).	68
6.6	Fonctions-tests pour le système (6.1) ; troisième branche.	69
6.7	Diagramme de bifurcation du système (6.1).	70
6.8	Fonctions-tests pour le système (6.1) ; troisième branche.	70
6.9	Diagramme de bifurcation du système (6.1).	71
6.10	Diagramme de bifurcation du système (6.1) dans l'espace.	72
6.11	$y = 3 + 9u - 15u^2 - 3e^{5u} + 6ue^{5u}$	77
6.12	Fonctions-tests pour le système (6.12) ; première branche.	78
6.13	Diagramme de bifurcation du système (6.12).	78
6.14	Diagramme de bifurcation du système (6.12).	79
6.15	Diagramme de bifurcation de la bifurcation de Bautin.	81

Chapitre 1

Introduction

Considérons le système d'équations différentielles paramétrées

$$\dot{u} = f(u, a), \quad (1.1)$$

où $u \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$, n et $m < \infty$, et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est suffisamment continûment différentiable. L'étude des bifurcations de (1.1), qui est l'étude des changements qualitatifs des solutions de (1.1) lorsque l'on varie le paramètre a , est importante. Plusieurs phénomènes physiques et mathématiques, de la théorie des circuits électriques à la mécanique des solides, sont réglementés par un tel système d'équations. Par exemple :

1. Le célèbre *Brusellator*¹ de PRIGOGINE ET LEFEVER [31]. Ce système d'équations aux dérivées partielles est le plus simple modèle de réaction-diffusion (chimique) qui démontre un comportement oscillatoire. On peut en extraire un système d'équations différentielles ordinaires en utilisant une forme tronquée où les coefficients de diffusion sont nuls. Ce nouveau modèle prend alors la forme

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= X^2Y - (B+1)X + A \\ \frac{dY}{dt} &= -X^2Y + BX, \end{aligned}$$

où X et Y représentent les concentrations de deux substances, et A et B sont des constantes. Le paramètre de bifurcation est généralement B .

¹Le terme français approprié devrait vraisemblablement être *Bruzellateur*, ou *oscillateur de Bruxelles*.

2. Le modèle proie-prédateur de DOEDEL ET KERNÉVEZ [12]. Ce système d'équations différentielles ordinaires est un modèle d'interaction entre deux espèces, une espèce-proie et une espèce-prédateur. Le modèle prend la forme

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= p_2 u_1 (1 - u_1) - u_1 u_2 - p_1 (1 - e^{-p_3 u_1}) \\ \dot{u}_2 &= -u_2 + p_4 u_1 u_2,\end{aligned}$$

où u_1 et u_2 représentent les populations respectives de l'espèce-proie et de l'espèce-prédateur, et p_1 , p_2 , p_3 et p_4 sont des constantes. Chacun des termes dans le système est le modèle d'un type particulier d'interaction entre les espèces. La constante p_4 est le paramètre de bifurcation.

3. Les équations de LORENZ [30]. Les équations de Lorenz sont une forme tronquée des équations aux dérivés partielles non-linéaires d'Oberbeck-Boussinesq qui gouvernent la convection dans un fluide. Elles prennent la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy,\end{aligned}$$

où x est une vitesse, y et z des températures et σ , ρ et β des paramètres strictement positifs. L'attracteur de Lorenz provient de ce système.

Le comportement des solutions de ces systèmes est extrêmement varié, et riche en bifurcation. Entre autre, il est possible d'observer des bifurcations de Hopf et des bifurcations de solutions stationnaires, ce dont nous discuterons plus tard.

Supposons que (u_0, a_0) soit un point d'équilibre de (1.1). Le théorème des fonctions implicites implique l'existence générique d'une branche de solutions $(u(s), a(s))$ telles que $f(u(s), a(s)) \equiv 0$ si le jacobien $D_u f(u_0, a_0)$ est inversible. Le calcul numérique des points d'équilibre sur une branche se nomme la **continuation de la branche**. La théorie générale de ce sujet à été développée par KELLER [21], SEYDEL [36], RHEINBOLDT [32], ALLGOWER ET GEORG [1] et autres. La continuation par le **paramètre** et la continuation par la **norme** sont deux des premières méthodes de continuation qui ont été utilisées. Ces méthodes sont limitées, puisqu'elles flanchent

lorsqu'un **point limite** est atteint, c'est-à-dire lorsque la branche se «retourne» sur elle-même. Dans son article, KELLER [21] introduit la méthode de continuation dite de **pseudo longueur d'arc**,² une ingénieuse façon de remédier à ce problème. C'est cette méthode qui est la plus couramment utilisée en pratique. Plusieurs programmes de continuation existent, dont DERPÀR (KUBIČEK [27]), CURVE (LUNEVSKAYA³), PATH (KAAS-PETERSEN), PITCON (RHEINBOLDT ET BURKARDT [33]), BEETLE (NIKOLAEV) et ALCON (DEUFLHARD, FIEDLER ET KUNKEL [9]). Certains programmes qui effectuent une analyse de bifurcation plus détaillée contiennent aussi des composantes de continuation, notamment AUTO86⁴ (DOEDEL ET KERNÉVEZ [12]), BIFPACK (SEYDEL) et LINLBF (KHIBNIK [26]).

Supposons que $(u(s), a(s))$ soit une branche de solutions stationnaires de (1.1). Outre les bifurcations en point limite, il peut se produire plusieurs types de bifurcations le long de $(u(s), a(s))$.

1. **Bifurcation de solutions stationnaires.** En un point singulier (u_0, a_0) de (1.1), plusieurs branches de solutions stationnaires peuvent se rencontrer. Dans ce cas, $(u(s), a(s))$ subit une bifurcation de solutions stationnaires au **point de branchement** (u_0, a_0) .
2. **Bifurcation de Hopf.** Si, lorsque a varie, une paire de valeurs propres du jacobien $D_u f$ traverse l'axe imaginaire en un point d'équilibre (u_0, a_0) , il se produit une **bifurcation de Hopf** au point (u_0, a_0) . Une des propriétés de ce type de bifurcation est l'apparition ou la disparition d'une solution périodique de (1.1).
3. **Bifurcations de doublage de période.** Supposons que $u_a(t)$ soit une solution périodique de (1.1) pour la valeur de paramètre a . Si l'application de Poincaré associée à cette solution périodique subit une bifurcation en *flip* lorsque $a = a_0$, il se produit une bifurcation de doublage de période le long de la branche $(u(s), a(s))$, c'est-à-dire que la période des solutions périodiques $u_a(t)$ double lorsque $a = a_0$.

²Dans cet écrit, nous remplacerons *pseudo longueur d'arc* par *longueur d'arc*.

³Voir KUZNETSOV [28] lorsque les références ne sont pas mentionnées de façon explicite.

⁴La plus récente version d'AUTO est AUTO97.

Par ailleurs, nous aurions pu tout aussi bien considérer un système dynamique discret

$$u_{i+1} = f(u_i, a) \quad (1.2)$$

où $u_i \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$, n et $m < \infty$, et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est suffisamment continûment différentiable.⁵ L'étude de bifurcation de (1.2) se fait de façon analogue à celle de (1.1).

L'analyse numérique et la détection d'un des trois types de bifurcations ci-haut repose sur l'élaboration de certaines fonctions-test, qui ne sont définitivement pas uniques. Quelques fonctions-test pour la détection de points de branchement lorsque deux branches se croisent, basées sur le calcul du déterminant d'un jacobien augmenté, sont présentés par SEYDEL [36], et ALLGOWER ET GEORG [2]. Plusieurs autres programmes (STAFF (BORISYUK), AUTO) détectent de tels points ainsi que la direction de la branche qui bifurque. LINLBF (KHIBNIK [26]) utilise le déterminant de Hurwitz pour calculer les points de bifurcations de Hopf, tandis que FULLER, en 1968, se sert du produit extérieur de STÉPHANOS [37], publié en 1900! GUCKENHEIMER ET MEYERS [19] ont récemment réintroduit cette méthode avec succès. Les articles de DOEDEL, KELLER ET KERNÉVEZ [10, 11] démontrent l'efficacité d'AUTO pour le calcul des bifurcations de codimension 1.⁶

Supposons que (1.1) possède la symétrie du groupe de Lie Γ , c'est à-dire

$$f(\gamma u, a) = \gamma f(u, a)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$, $u \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^m$. On dit du champs de vecteur f qu'il est Γ -**équivariant**. Plusieurs textes présentent l'étude de bifurcation de (1.1), ainsi que des résultats majeurs de la théorie générale des bifurcations, entre autres :

Γ **non-trivial** : GOLUBITSKY ET SCHAEFFER [16], GOLUBITSKY, STEWART ET SCHAEFFER [17] et VANDERBAUWHEDE [38, 39].

Γ **trivial** : CARR [5], GUCKENHEIMER ET HOLMES [18] et WIGGINS [42].

⁵Un système discret peut être associé à un système continu, comme l'application de Poincaré pour la bifurcation de doublage de période.

⁶De façon intuitive, la codimension d'une bifurcation est le nombre de paramètres nécessaires pour qu'elle se produise. Dans cet écrit, nous ne considérons que les bifurcations de codimension 1.

Une bibliographie plus complète se retrouve dans KUZNETSOV [28]. Dans de nombreux cas, on doit utiliser le calcul numérique pour compléter et faciliter l'étude de bifurcation de (1.1).

La présence de symétrie entraîne généralement des valeurs propres de $D_u f$ de multiplicité élevée, ce qui rend les fonctions-test inutilisables. DELLNITZ [6, 7], DELLNITZ ET WERNER [8], WERNER [40] et WERNER ET SPENCE [41] expliquent comment se servir de la symétrie d'un système pour faciliter le calcul numérique de ces bifurcations.

AUTO est probablement le système de calcul numérique de bifurcation le plus populaire à l'heure actuelle. Cependant, son interface est très complexe et il peut être extrêmement difficile à utiliser. Nous proposons une alternative : le système de calcul numérique matriciel MATLAB (The MathWorks), disponible sur Internet.⁷ MATLAB est de plus en plus utilisé dans la communauté scientifique, son langage de programmation est simple, son interface attrayante, et sa librairie de fonctions bien fournie. Nos algorithmes de calcul numérique de bifurcations émulent les résultats obtenus par AUTO pour plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires paramétrées. La détection de différentes bifurcations repose sur l'élaboration et l'implémentation de diverses fonctions-test.

Le contenu de notre thèse se résume de la façon suivante :

Chapitre 2 : La notion de bifurcation est introduite.

Chapitre 3 : La continuation d'une branche de points d'équilibre, la détection de points limites d'un système et la continuation d'une branche de points limites sont étudiées.

Chapitre 4 : La détection de point de branchement et la continuation de la branche de points d'équilibre qui bifurque sont étudiées.

Chapitre 5 : La détection de point de bifurcation de Hopf et la continuation de branche de points de bifurcation de Hopf sont étudiées.

Chapitre 6 : Les résultats obtenus aux chapitres 3, 4 et 5 sont implémentés.

⁷<http://www.mathworks.com>

Chapitre 2

Préliminaires

Puisque cette thèse se penche sur l'analyse numérique des bifurcations dans un système d'équations différentielles de la forme

$$\dot{u}(t) = f(u(t), a), \quad (2.1)$$

où $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n < \infty$ et f est suffisamment continuellement différentiable, il est impératif de définir le concept de bifurcation.

2.1 Systèmes dynamiques et bifurcations

Définition 2.1 *Un système dynamique est une paire $(X, \{\varphi^t\}_{t \in T})$, $T \subseteq \mathbb{Z}$ ou \mathbb{R} , où X est un espace d'état et $\{\varphi^t\}_{t \in T}$ est une famille d'applications $\varphi^t : X \rightarrow X$ telles que*

1. $\varphi^0 = \text{Id}$;
2. $\varphi^{t+s}(x) = \varphi^t(\varphi^s(x))$, pour tout $x \in X$, et pour tout $t, s \geq 0$ tels que $\varphi^{t+s}(x)$ et $\varphi^t(\varphi^s(x))$ soient bien définis.

Soient $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction C^1 déterminant un système d'équations différentielles

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (2.2)$$

et $\phi : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'unique solution de (2.2) sur l'intervalle maximal I , avec condition initiale $x_0 \in E^1$. La paire $(\mathbb{R}^n, \{\varphi^t\}_{t \in I})$, où $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est donnée par $x \mapsto \phi(t, x)$ pour tout t , constitue un système dynamique.

Un système d'équations différentielles, dépendant des paramètres a_1, \dots, a_m s'écrit

$$\dot{x} = f(x, a); \quad (x, a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Soient $a \in \mathbb{R}^m$ et U un ouvert de \mathbb{R}^n . Le diagramme de phase à l'intérieur de U associé à (2.3) est dénoté $D(U, a)$. Lorsque a varie, le diagramme de phase $D(U, a)$ change. Le diagramme de phase $D(U, a)$ est soit **topologiquement équivalent**² au diagramme de phase original, dénoté $D(U, a_0)$, ou il ne l'est pas. Cette observation motive la définition suivante.

Définition 2.2 *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $a_0 \in \mathbb{R}^m$. Si, pour tout voisinage V de a_0 , les diagrammes de phases $D(U, a)$ et $D(U, a_0)$ ne sont pas topologiquement équivalents pour tout $a \in V - \{a_0\}$, le système (2.3) **subit une bifurcation dans l'ouvert U lorsque $a = a_0$.***

Exemple 2.3 (BIFURCATION EN FOURCHE)

Soit l'équation différentielle

$$\dot{x} = ax - x^3 \equiv f(x, a); \quad x, a \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Il y a deux cas distincts :

1. $a < 0$: (2.4) ne possède qu'un point d'équilibre à $x_1 = 0$. Ce point d'équilibre est stable pour tout $a < 0$ puisque

$$D_x f(x_1, a) = a - 3x_1^2 = a < 0.$$

¹L'existence et l'unicité de ϕ sur un intervalle maximal I est garantie par le théorème fondamental d'existence et d'unicité des solutions de (2.2).

²Deux diagrammes de phases $D(U, a)$ et $D(U, a_0)$ sont **topologiquement équivalents** s'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow U$ qui envoie les orbites dirigées de $D(U, a)$ sur les orbites dirigées de $D(U, a_0)$ en préservant la direction du temps. En d'autres mots, $D(U, a)$ et $D(U, a_0)$ sont qualitativement semblables.

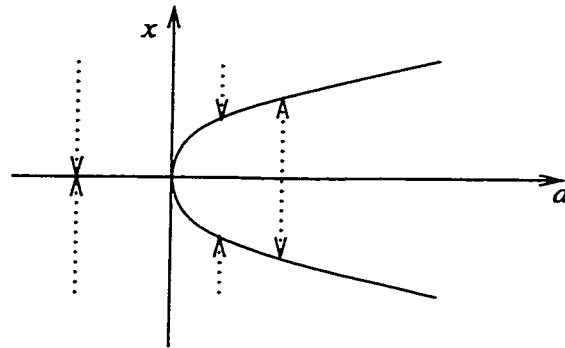


FIG. 2.1 – Diagramme de bifurcation de la bifurcation en fourche

2. $a > 0$: (2.4) possède toujours un point d'équilibre à $x_1 = 0$. Cependant, ce point d'équilibre est instable pour tout $a > 0$, puisque

$$D_x f(x_1, a) = a - 3x_1^2 = a > 0.$$

(2.4) possède deux autres points d'équilibre à $x_2 = \sqrt{a}$ et $x_3 = -\sqrt{a}$. Ces derniers sont stables pour tout $a > 0$ puisque

$$D_x f(x_{2,3}, a) = a - 3a = -2a < 0.$$

Le diagramme de bifurcation de (2.4) est présenté à la figure 2.1.

2.2 Un mot au sujet des dérivées d'ordre 1 et 2

Soient $m, n \geq 1$, et f une application suffisamment différentiable de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n définie par

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix}.$$

La dérivée de f par rapport à $x \in \mathbb{R}^m$ est l'application $D_x f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$D_x f(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{pmatrix}.$$

L'application $D_{xx}f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\begin{aligned} D_{xx}f(\phi, \psi) &= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_m} \right) & \cdots & \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_m \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_m \partial x_m} \right) \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_m} \right) & \cdots & \left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_m \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_m \partial x_m} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_i} \phi_i & \cdots & \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_m \partial x_i} \phi_i \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_i} \phi_i & \cdots & \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_m \partial x_i} \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

est la **dérivée d'ordre 2 de f par rapport à $x \in \mathbb{R}^m$** . En général, on écrit $D_{xx}f\phi\psi$ pour $D_{xx}f(\phi, \psi)$. De plus, si $\psi, \phi \in \mathbb{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$, l'expression $\psi^\top D_{xx}f\phi$ est utilisée à la place de

$$\psi^\top D_{xx}f\phi \equiv \psi^\top \begin{pmatrix} D_{xx}f_1 \\ \vdots \\ D_{xx}f_n \end{pmatrix} \phi \equiv \begin{pmatrix} \psi^\top D_{xx}f_1\phi \\ \vdots \\ \psi^\top D_{xx}f_n\phi \end{pmatrix} \equiv \sum_{j=1}^n (\psi^\top D_{xx}f_j\phi) e_j \equiv \sum_{j=1}^n \psi^\top D_{xx}f_j(\phi, e_j)$$

où $\{e_j\}$ représente la base canonique. Il est bon de rappeler que la matrice définissant la seconde dérivée n'est pas une matrice au sens formel, puisque ces composantes n'appartiennent pas à un anneau. Elle représente plutôt les opérations à effectuer de manière symbolique.

Chapitre 3

Continuation et points limites

Toute analyse de bifurcation de (2.1) débute par la recherche de branches (ou parcours) de solutions stationnaires (ou points d'équilibre), c'est-à-dire par la recherche des solutions $(u(s), a(s))$ de $f(u, a) = 0$. En posant $x = (u, a)$, cette dernière condition devient

$$f(x) = 0 \quad \text{avec } f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

La courbe à la figure 3.1 peut être une branche de solutions stationnaires de (3.1), avec $n = 1$, pour une fonction f continue quelconque. Soit x_0 un point d'équilibre de (3.1). Le processus permettant de trouver des points d'équilibre voisins de $x_0 = (u_0, a_0)$ lorsque a varie s'appelle **continuation d'une branche de solutions stationnaires**.

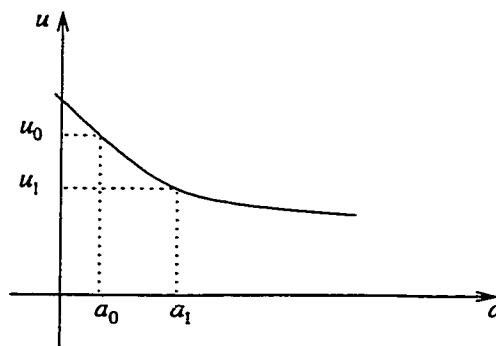


FIG. 3.1 – Branche de points d'équilibre

Quelques méthodes sont présentées dans ce chapitre.

3.1 Continuation (points d'équilibre)

Définition 3.1 Une solution x_0 de (3.1) est dite **régulière** si le jacobien de f à ce point, $D_x f(x_0)$, est une matrice de rang n . Une partie de branche de solutions stationnaires $\{x(s); a \leq s \leq b\}$ de (3.1) est dite **régulière** si $x(s)$ est une solution régulière pour tout $s \in [a, b]$.

Remarque 3.2 Par le théorème des fonctions implicites, si $x(s_0)$ est une solution régulière de (3.1), il existe $\epsilon > 0$ tel que $x(s)$ soit l'unique solution pour $|s - s_0| < \epsilon$; c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de $x(s_0)$ dans lequel il ne se retrouve qu'une seule branche de points d'équilibre.

Proposition 3.3 $\text{Rang}[D_x f(x_0)] = n$ si et seulement si

1. $D_u f(u_0, a_0)$ est inversible, ou
2. $\dim \ker D_u f(u_0, a_0) = 1$ et $D_a f(u_0, a_0) \notin \text{Im } D_u f(u_0, a_0)$.

Démonstration: Supposons que $\text{Rang } D_x f(x_0) = n$. Il y a alors deux possibilités :

1. $\text{Rang } D_u f(u_0, a_0) = n$, d'où $D_u f(u_0, a_0)$ est inversible.
2. $\text{Rang } D_u f(u_0, a_0) = n - 1$, d'où $\dim \ker D_u f(u_0, a_0) = 1$ et

$$D_a f(u_0, a_0) \notin \text{Im } D_u f(u_0, a_0),$$

ce qui implique que $\text{Rang } D_x f(x_0) \geq n$. Mais n est le rang maximal que $D_x f(x_0)$ puisse atteindre, d'où $\text{Rang } D_x f(x_0) = n$. ■

3.1.1 Points limite

Soit $(u(s_0), a(s_0))$ une solution stationnaire de (2.1) telle que

$$\text{Rang}[D_u f(u(s_0), a(s_0)) | D_a f(u(s_0), a(s_0))] = n.$$

Par la proposition 3.3, il y a alors deux possibilités :

1. $D_u f(u(s_0), a(s_0))$ est inversible ;
2. $\dim \ker D_u f(u(s_0), a(s_0)) = 1$ et $D_a f(u(s_0), a(s_0)) \notin \text{Im } D_u f(u(s_0), a(s_0))$.

Dans le premier cas, $\det (D_u f(u(s_0), a(s_0))) \neq 0$ et le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$u = u(a) \text{ et } f(u(a(s)), a(s)) \equiv 0 \text{ pour } s \in]s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon[.$$

Autrement, il suffit de réarranger les colonnes de $D_x f(x_0)$ pour remarquer que les solutions de (3.1) peuvent être paramétrisées localement par une des composantes de $u \in \mathbb{R}^n$. Soit

$$\hat{u} = (u_1, \dots, u_{i-1}, a, u_{i+1}, \dots, u_n),$$

où i est tel que $D_{\hat{u}} f(\hat{u}(s_0), u_i(s_0))$ soit inversible. Le théorème des fonctions implicites implique l'existence d'un $\delta > 0$ tel que

$$\hat{u} = \hat{u}(u_i) \text{ et } f(\hat{u}(u_i(s)), u_i(s)) \equiv 0 \text{ pour } s \in]s_0 - \delta, s_0 + \delta[.$$

Alors, modulo un réarrangement de colonnes et un changement de paramètre, les solutions $x(s)$ de (3.1) dans un voisinage de $x(s_0)$ satisfaisant $\text{Rang } D_x f(x(s)) = n$ peuvent être paramétrisées localement par une des composantes de $x \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 3.4 Une solution $(u(s_0), a(s_0))$ de (3.1) est un **point limite** si

1. $\dim \ker D_u f(u(s_0), a(s_0)) = 1$ et
2. $D_a f(u(s_0), a(s_0)) \notin \text{Im } D_u f(u(s_0), a(s_0))$.

Exemple 3.5 (BIFURCATION EN POINT LIMITE)

Soit l'équation

$$\dot{u} = a + u^2 \equiv f(u, a); \quad u, a \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

Il y a deux cas distincts :

1. $a > 0$: (3.2) ne possède aucun point d'équilibre.

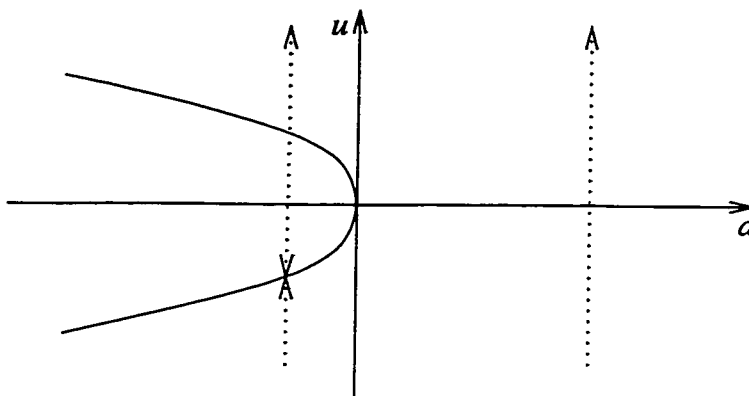


FIG. 3.2 – Diagramme de bifurcation de la bifurcation en point limite

2. $a < 0$: (3.2) possède 2 points d'équilibre à $u_1 = -\sqrt{-a}$ et $u_2 = \sqrt{-a}$. Le premier point d'équilibre est stable puisque

$$D_u f(u_1, a) = 2u_1 = -2\sqrt{-a} < 0.$$

L'autre point d'équilibre est instable puisque

$$D_u f(u_2, a) = 2u_2 = 2\sqrt{-a} > 0.$$

Le diagramme de bifurcation de (3.2) est présenté à la figure 3.2.

Remarque 3.6 Dans l'exemple qui précède, $(u, a) = (0, 0)$ est un point limite de (3.2). En effet, $f(0, 0) = 0$ et $\ker D_u f(0, 0) = \ker(0) = \mathbb{R}$, tandis que

$$D_a f(0, 0) = 1 \notin \text{Im } D_u f(0, 0) = \{0\}.$$

Soient $(u(s), a(s))$ une branche de solutions de (3.1), et α la fonction qui mesure la longueur de la branche de $s = 0$ à $s = \tau$. Cette fonction s'écrit

$$\alpha(\tau) = \int_0^\tau \sqrt{\|\dot{u}(t)\|^2 + (\dot{a}(t))^2} dt,$$

où $\| - \|$ est la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n . La paramétrisation selon la longueur d'arc se fait de la façon suivante : $U(\alpha) = u(s(\alpha))$ et $\Lambda(\alpha) = a(s(\alpha))$.

L'application $s \mapsto \alpha(s)$ est une reparamétrisation bijective de s ; elle est donc inversible. Le théorème des fonctions inverses implique alors que

$$\dot{s}(\alpha) = \frac{1}{\dot{\alpha}(s(\alpha))} = \frac{1}{\sqrt{\|\dot{u}(s(\alpha))\|^2 + (\dot{a}(s(\alpha)))^2}},$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\dot{U}(\alpha)\|^2 + \|\dot{\Lambda}(\alpha)\|^2 &= \|\dot{u}(s(\alpha))\dot{s}(\alpha)\|^2 + \|\dot{a}(s(\alpha))\dot{s}(\alpha)\|^2 \\ &= \frac{\|\dot{u}(s(\alpha))\|^2 + (\dot{a}(s(\alpha)))^2}{\|\dot{u}(s(\alpha))\|^2 + (\dot{a}(s(\alpha)))^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

En reparamétrisant si nécessaire, nous pouvons supposer que $\|\dot{u}(s)\|^2 + (\dot{a}(s))^2 = 1$ sur la branche $(u(s), a(s))$ pour tout s près de s_0 .

Dérivons $f(u(s), a(s)) = 0$ par rapport à s pour obtenir

$$D_u f(u(s), a(s))\dot{u}(s) + D_a f(u(s), a(s))\dot{a}(s) = 0, \quad (3.3)$$

pour tout s près de s_0 . Supposons que $(u(s_0), a(s_0))$ soit tel que

1. $f(u(s_0), a(s_0)) = 0$,
2. $\dim \ker D_u f(u(s_0), a(s_0)) = 1$ et
3. $D_a f(u(s_0), a(s_0)) \notin \text{Im } D_u f(u(s_0), a(s_0))$

(e.g. $(u(s_0), a(s_0))$ est un point limite du système original). En substituant $s = s_0$ dans (3.3), on obtient

$$D_u f(u(s_0), a(s_0))\dot{u}(s_0) + D_a f(u(s_0), a(s_0))\dot{a}(s_0) = 0.$$

Supposons que $\dot{a}(s_0) \neq 0$. Dans ce cas

$$D_a f(u(s_0), a(s_0)) = -\frac{1}{\dot{a}(s_0)} D_u f(u(s_0), a(s_0))\dot{u}(s_0),$$

d'où $D_a f(u(s_0), a(s_0)) \in \text{Im } D_u f(u(s_0), a(s_0))$, ce qui contredit la troisième hypothèse. Alors $\dot{a}(s_0) = 0$. L'égalité en (3.3) devient donc

$$D_u f(u(s_0), a(s_0))\dot{u}(s_0) = 0,$$

et $\dot{u}(s_0) \in \ker D_u f(u(s_0), a(s_0))$. Mais $\dim \ker D_u f(u(s_0), a(s_0)) = 1$. Alors

$$\ker D_u f(u(s_0), a(s_0)) = \mathbb{R}\{\dot{u}(s_0)\}.$$

En dérivant (3.3) par rapport à s une seconde fois, nous obtenons

$$\begin{aligned} D_u f(u(s), a(s))\ddot{u}(s) + D_{uu} f(u(s), a(s))\dot{u}(s)\dot{u}(s) + D_a f(u(s), a(s))\ddot{a}(s) \\ + D_{aa} f(u(s), a(s))\dot{a}(s)\dot{a}(s) + 2\dot{a}(s)D_{ua} f(u(s), a(s))\dot{u}(s) = 0, \end{aligned}$$

d'où, au point limite $(u(s_0), a(s_0))$,

$$\begin{aligned} D_u f(u(s_0), a(s_0))\ddot{u}(s_0) + D_{uu} f(u(s_0), a(s_0))\dot{u}(s_0)\dot{u}(s_0) + D_a f(u(s_0), a(s_0))\ddot{a}(s_0) \\ + D_{aa} f(u(s_0), a(s_0))\dot{a}(s_0)\dot{a}(s_0) + 2\dot{a}(s_0)D_{ua} f(u(s_0), a(s_0))\dot{u}(s_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Soient ϕ et ψ deux vecteurs tels que

$$\ker D_u f(u(s_0), a(s_0)) = \mathbb{R}\{\phi\} \text{ et } \ker D_u f(u(s_0), a(s_0))^\top = \mathbb{R}\{\psi\}.$$
¹

D'après ce qui précède, $\phi = \dot{u}(s_0)$ après renormalisation. La substitution $\dot{a}(s_0) = 0$ dans (3.4), suivie d'une multiplication à gauche par ψ^\top , donne

$$\psi^\top D_u f(u(s_0), a(s_0))\ddot{u}(s_0) + \psi^\top D_{uu} f(u(s_0), a(s_0))\phi\phi + \psi^\top D_a f(u(s_0), a(s_0))\ddot{a}(s_0) = 0.$$

Mais

$$D_u f(u(s_0), a(s_0))^\top \psi = (\psi^\top D_u f(u(s_0), a(s_0)))^\top = 0$$

puisque $\ker D_u f(u(s_0), a(s_0))^\top = \mathbb{R}\{\psi\}$, d'où

$$\psi^\top D_{uu} f(u(s_0), a(s_0))\phi\phi + \psi^\top D_a f(u(s_0), a(s_0))\ddot{a}(s_0) = 0. \quad (3.5)$$

Soient $A = D_u f(u(s_0), a(s_0))$ et $Y \in \text{Im } A$. Il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX = Y$.

Donc

$$\psi^\top Y = \psi^\top AX = (A^\top \psi)^\top X.$$

¹Posons $A = D_u f(u(s_0), a(s_0))$. Peut-on assumer que le noyau de A^\top est de dimension 1? En utilisant le théorème du rang nul, $\text{Im } A$ est de dimension $n - 1$. Mais $\mathbb{R}^n = \text{Im } A \oplus (\text{Im } A)^\perp$, ce qui implique que $(\text{Im } A)^\perp = \ker A^\top$ est de dimension 1.

Mais $A^\top \psi = 0$ puisque $\psi \in \ker A^\top$, d'où $\psi^\top Y = 0$ et $\psi \perp \text{Im } A$. Supposons que $\psi^\top D_a f(u(s_0), a(s_0)) = 0$. Alors $\psi \perp D_a f(u(s_0), a(s_0))$ et

$$\psi \perp \text{Im } A \oplus \mathbb{R}\{D_a f(u(s_0), a(s_0))\} = \mathbb{R}^n$$

puisque la seconde hypothèse dicte que $D_a f(u(s_0), a(s_0)) \notin \text{Im } A$. Donc $\psi = 0$, ce qui est impossible puisque $\dim \ker A^\top = 1$. Alors $\psi^\top D_a f(u(s_0), a(s_0)) \neq 0$. Il découle alors de (3.5) que

$$\ddot{a}(s_0) = -\frac{\psi^\top D_{uu} f(u(s_0), a(s_0)) \phi \phi}{\psi^\top D_a f(u(s_0), a(s_0))}. \quad (3.6)$$

Définition 3.7 Si la quantité $\ddot{a}(s_0)$ provenant de (3.6) est non-nulle, le point limite $(u(s_0), a(s_0))$ est un **point limite quadratique simple**.

3.1.2 Changement de stabilité

Supposons que 0 soit une valeur propre simple de $D_u f(u(s_0), a(s_0))$. Alors, près de s_0 , on peut résoudre le problème

$$D_u f(u(s), a(s)) \phi(s) = \kappa(s) \phi(s) \quad (3.7)$$

où $\phi(s)$ est un vecteur propre de $D_u f(u(s), a(s))$ associé à la valeur propre $\kappa(s)$, $\kappa(s_0) = 0$ et $\phi(s_0) = \phi$. En dérivant (3.7) par rapport à s , on obtient

$$D_{uu} f(u(s), a(s)) \dot{u}(s) \phi(s) + D_u f(u(s), a(s)) \dot{\phi}(s) = \dot{\kappa}(s) \phi(s) + \kappa(s) \dot{\phi}(s),$$

d'où, lorsque $s = s_0$,

$$D_{uu} f(u(s_0), a(s_0)) \phi \phi + D_u f(u(s_0), a(s_0)) \dot{\phi}(s_0) = \dot{\kappa}(s_0) \phi, \quad (3.8)$$

puisque $\dot{u}(s_0) = \phi$. Après multiplication à gauche par ψ^\top , (3.8) devient

$$\psi^\top D_{uu} f(u(s_0), a(s_0)) \phi \phi = \psi^\top \dot{\kappa}(s_0) \phi,$$

parce que $\ker D_u f(u(s_0), a(s_0))^\top = \mathbb{R}\{\psi\}$. Alors

$$\dot{\kappa}(s_0) = \frac{\psi^\top D_{uu} f(u(s_0), a(s_0)) \phi \phi}{\psi^\top \phi},$$

puisque $\psi^\top \phi \neq 0$.² Lorsque $(u(s_0), a(s_0))$ est un point quadratique simple,

$$\ddot{a}(s_0) = -\frac{\psi^\top D_{uu}f(u(s_0), a(s_0))\phi\phi}{\psi^\top D_a f(u(s_0), a(s_0))} \neq 0,$$

d'où $\dot{\kappa}(s_0) \neq 0$. Cependant $\kappa(s_0) = 0$. Le scalaire $\kappa(s)$ change donc de signe lorsque $s = s_0$. Dans ce cas, la partie réelle d'une des valeurs propres du jacobien change de signe le long de $(u(s), a(s))$ lorsque $s = s_0$ et la « stabilité » du point d'équilibre change.

3.1.3 Continuation par le paramètre

La continuation par le paramètre nous permet de suivre une branche $u \equiv u(a)$ de solutions stationnaires de f près d'un point d'équilibre (u_0, a_0) qui n'est pas un point limite quadratique simple.

L'algorithme pour implémenter cette méthode est présenté au tableau 3.1. L'approximation initiale utilisée lors de la continuation par le paramètre est

$$u_1^{[0]} = u_0 + \dot{u}_0 \Delta a.$$

L'algorithme présenté au tableau 3.6 à la sous-section 3.3 est utilisé pour calculer \dot{u}_0 . Le système à l'étape 4 est résolu à l'aide de la décomposition LU . La convergence de la méthode de Newton aux étapes 4-6 est garantie si $D_u f(u_i, a_0 + i\Delta a)$ est inversible, où $u_i = u(a_0 + i\Delta a)$, et Δa est suffisamment petit. Le calcul à l'étape 9 est justifié par ce qui suit. Si $f(u(a), a) \equiv 0$, alors

$$D_u f(u(a), a)\dot{u}(a) + D_a f(u(a), a) \equiv 0,$$

²Supposons au contraire que $\psi^\top \phi = 0$. On peut alors effectuer un changement de coordonnées tel que $\phi = e_1$ et $\psi = e_2$. Puisque $D_u f(u(s_0), a(s_0))\phi = D_u f(u(s_0), a(s_0))e_1 = 0$, et $\psi^\top D_u f(u(s_0), a(s_0)) = e_2^\top D_u f(u(s_0), a(s_0)) = 0$, on a

$$A = D_u f(u(s_0), a(s_0)) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} & \xi_{13} & \cdots & \xi_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_{32} & \xi_{33} & \cdots & \xi_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \xi_{n2} & \xi_{n3} & \cdots & \xi_{nn} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est $\rho_A(\lambda) = \lambda^2 q(\lambda)$, où $\deg q(\lambda) = n - 2$, ce qui implique que la valeur propre 0 de $D_u f(u(s_0), a(s_0))$ n'est pas simple.

Algorithme (CONTINUATION PAR LE PARAMÈTRE)

Soient $u \equiv u(a)$ une branche de solutions stationnaires de f près d'un point d'équilibre (u_0, a_0) et $\dot{u}_0 = \frac{du}{da} \Big|_{u_0, a_0}$. On obtient des approximations u_i de $u(a_0 + i\Delta a)$ de la façon suivante :

-
- ENTRÉE : f : champs de vecteurs paramétré;
 (u_0, a_0) : point d'équilibre $(u(a_0), a_0)$ de f ;
 \dot{u}_0 : dérivée de u par rapport à a , évaluée à a_0 ;
 Δa : incrément du paramètre a ;
 ϵ : degré d'approximation recherché ;
 N : nombre maximal d'itérations ;
 M : nombre d'approximations voulues ;
 - SORTIE : $x = (u_1, \dots, u_M)$: approximations de $u(a_0 + i\Delta a)$, $i = 1, \dots, M$; ou
 x : message d'erreur
-

1. Pour $i = 1 : M$, faire les étapes 2-9 ;
 2. $u_i^{[0]} = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1}\Delta a$;
 3. Pour $n = 0 : N$, faire les étapes 4-6 (Méthode de Newton) ;
 4. Résoudre $D_u f(u_i^{[n]}, a_0 + i\Delta a)\Delta u_i^{[n]} = -f(u_i^{[n]}, a_0 + i\Delta a)$;
 5. $u_i^{[n+1]} = u_i^{[n]} + \Delta u_i^{[n]}$;
 6. Si $\|\Delta u_i^{[n]}\| < \epsilon$, sauter à l'étape 8 ;
 7. x : message d'erreur ;
 - FIN.
 8. $u_i = u_i^{[n+1]}$;
 9. Résoudre $D_u f(u_i, a_0 + i\Delta a)\dot{u}_i = -D_a f(u_i, a_0 + i\Delta a)$;
 10. $x = (u_1, \dots, u_M)$.
- FIN.
-

TAB. 3.1 – Continuation par le paramètre

d'où

$$D_u f(u_i, a_0 + i\Delta a) \dot{u}(a_0 + i\Delta a) = -D_a f(u_i, a_0 + i\Delta a).$$

Le système à l'étape 9 permet de trouver une bonne approximation de

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i(a_0 + i\Delta a).$$

Que ce passe-t-il cependant si la solution stationnaire (u_0, a_0) est un point limite de (2.1)? Dans ce cas, $\dim \ker D_u f(u_0, a_0) = 1$, ce qui implique que $D_u f(u_0, a_0)$ n'est pas inversible. L'algorithme ne pourra exécuter l'étape 4 pour $n = 0$. La méthode de continuation par le paramètre ne permet donc pas de continuer sur une branche de points d'équilibre lorsqu'un point limite est atteint.

3.1.4 Continuation par la norme

L'objectif de cette sous-section est de trouver une méthode qui permet de suivre des branches de solutions de (3.1), tout en continuant lorsqu'un point limite est atteint. À cet effet, un nouveau paramètre $s = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ est introduit, où $\langle -, - \rangle$ est le produit scalaire habituel dans \mathbb{R}^n . Le système à résoudre devient alors

$$f(u(s), a(s)) = 0, \quad \langle u(s), u(s) \rangle - s^2 = 0. \quad (3.9)$$

L'algorithme qui implémente cette méthode est donné au tableau 3.2. Les approximations initiales utilisées lors de la continuation par la norme sont

$$u_1^{[0]} = u_0 + \dot{u}_0 \Delta s \text{ et } a_1^{[0]} = a_0 + \dot{a}_0 \Delta s.$$

L'algorithme présenté au tableau 3.6 à la sous-section 3.3 est utilisé pour calculer \dot{u}_0 et \dot{a}_0 . Le système à l'étape 4 est résolu à l'aide de la décomposition LU . La convergence de la méthode de Newton aux étapes 4-6 est garantie si

$$\begin{pmatrix} D_u f(u_i, a_i) & D_a f(u_i, a_i) \\ 2(u_i)^\top & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et Δs est suffisamment petit.

Algorithme (CONTINUATION PAR LA NORME)

Soit $(u, a) \equiv (u(s), a(s))$ une branche de solutions stationnaires de f près du point d'équilibre (u_0, a_0) , et $\dot{u}_0 = \frac{du}{ds}|_{u_0}$, $\dot{a}_0 = \frac{da}{ds}|_{a_0}$. On obtient des approximations (u_i, a_i) de $(u(s_0 + i\Delta s), a(s_0 + i\Delta s))$ de la façon suivante :

- ENTRÉE : f : champs de vecteurs paramétré ;
 (u_0, a_0) : point d'équilibre $(u(s_0), a(s_0))$ de f ;
 \dot{u}_0, \dot{a}_0 : dérivées de u, a par rapport à s , évaluées à u_0, a_0 ;
 Δs : incrément du paramètre s ;
 ϵ : degré d'approximation recherché ;
 N : nombre maximal d'itérations ;
 M : nombre d'approximations voulues ;
 - SORTIE : x : approximations de $(u(s_0 + i\Delta s) \quad a(s_0 + i\Delta s))^T, i = 1, \dots, M$; ou
 x : message d'erreur
-

1. Pour $i = 1 : M$, faire les étapes 2-9 ;

$$2. \begin{pmatrix} u_i^{[0]} & a_i^{[0]} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u_{i-1} + \dot{u}_{i-1}\Delta s & a_{i-1} + \dot{a}_{i-1}\Delta s \end{pmatrix}^T ;$$

3. Pour $n = 0 : N$, faire les étapes 4-6 (Méthode de Newton) ;

4. Résoudre

$$\begin{pmatrix} D_u f(u_i^{[n]}, a_i^{[n]}) & D_a f(u_i^{[n]}, a_i^{[n]}) \\ 2(u_i^{[n]})^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_i^{[n]} \\ \Delta a_i^{[n]} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(u_i^{[n]}, a_i^{[n]}) \\ \langle u_i^{[n]}, u_i^{[n]} \rangle - (s_0 + i\Delta s)^2 \end{pmatrix} ;$$

$$5. \begin{pmatrix} u_i^{[n+1]} & a_i^{[n+1]} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u_i^{[n]} + \Delta u_i^{[n]} & a_i^{[n]} + \Delta a_i^{[n]} \end{pmatrix}^T ;$$

6. Si $\left\| \begin{pmatrix} \Delta u_i^{[n]} \\ \Delta a_i^{[n]} \end{pmatrix} \right\| < \epsilon$, sauter à l'étape 8 ;

7. x : message d'erreur ;

- FIN.

$$8. \begin{pmatrix} u_i & a_i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u_i^{[n+1]} & a_i^{[n+1]} \end{pmatrix}^T ;$$

$$9. \text{Résoudre } \begin{pmatrix} D_u f(u_i, a_i) & D_a f(u_i, a_i) \\ 2u_i^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{a}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(s_0 + i\Delta s) \end{pmatrix} ;$$

$$10. x = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_M \\ a_1 & \cdots & a_M \end{pmatrix} ;$$

- FIN.

TAB. 3.2 – Continuation par la norme

En dérivant $f(u(s), a(s)) = 0$ et $\langle u(s), u(s) \rangle - s^2 = 0$ par s , nous obtenons

$$D_u f(u(s), a(s))\dot{u}(s) + D_a f(u(s), a(s))\dot{a}(s) = 0 \text{ et } 2u(s)^\top \dot{u}(s) - 2s = 0.$$

Lorsque $s = s_0 + i\Delta s$, ce système devient

$$\begin{pmatrix} D_u f(u_i, a_i) & D_a f(u_i, a_i) \\ 2u_i^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{a}_i \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2(s_0 + i\Delta s) \end{pmatrix}.$$

Dans ce qui précède, $u_i = u(s_0 + i\Delta s)$, $a_i = a(s_0 + i\Delta s)$, $\dot{u}_i = \dot{u}(s_0 + i\Delta s)$ et $\dot{a}_i = \dot{a}(s_0 + i\Delta s)$. Ce système, que l'on retrouve à l'étape 9, permet de trouver une bonne approximation de \dot{u}_i et \dot{a}_i .

Que ce passe-t-il cependant si la solution stationnaire (u_0, a_0) est un point limite de (2.1)? Le processus bloque-t-il à l'étape 4, comme c'était le cas dans la méthode de continuation par le paramètre? Un lemme de KELLER [21] indique les conditions sous lesquelles la matrice

$$B = \begin{pmatrix} D_u f(u_0, a_0) & D_a f(u_0, a_0) \\ 2u_0^\top & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Lemme 3.8 Si $\hat{A} = \begin{pmatrix} A & c \\ b^\top & d \end{pmatrix}$, les énoncés qui suivent sont valides :

1. Si A est inversible, \hat{A} est inversible $\iff d \neq b^\top A^{-1}c$;
2. Si $\dim \ker A = 1$, \hat{A} est inversible $\iff c \notin \text{Im } A$ et $b \notin \text{Im } A^\top$;
3. Si $\dim \ker A \geq 2$, \hat{A} n'est pas inversible.

Démonstration: 1. Supposons que A soit inversible. On peut écrire

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ b^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}c \\ 0^\top & e \end{pmatrix}, \text{ où } e = d - b^\top A^{-1}c.$$

Si $e = 0$ (e.g. $d = b^\top A^{-1}c$),

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ b^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}c \\ 0^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais

$$\det \begin{pmatrix} I & A^{-1}c \\ 0^\top & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

d'où $\det(\hat{A}) = 0$ et \hat{A} n'est pas inversible.

Si \hat{A} n'est pas inversible, alors

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ b^\top & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \det \begin{pmatrix} I & A^{-1}c \\ 0^\top & e \end{pmatrix} = 0.$$

Cependant

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ b^\top & 1 \end{pmatrix} = \det(A) \neq 0,$$

puisque A est inversible. Alors

$$0 = \det \begin{pmatrix} I & A^{-1}c \\ 0^\top & e \end{pmatrix} = e,$$

d'où $d = b^\top A^{-1}c$.

2. Si \hat{A} n'est pas inversible, le système

$$\begin{pmatrix} A & c \\ b^\top & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admet une solution non-triviale. Supposons que $\xi \neq 0$. Alors $Ax = -\xi c$ et $c \in \text{Im } A$.

Si $x \neq 0$ et $\xi = 0$, alors $Ax = 0$, $x \in \ker A = \mathbb{R}\{x\}$ et $b \in \ker A^\perp = \text{Im } A^\top$.

Supposons que $b \in \text{Im } A^\top = \ker A^\perp$ et $\ker A = \mathbb{R}\{x\}$. Alors $b^\top x = 0$ et

$$\hat{A} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & c \\ b^\top & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice \hat{A} n'est pas inversible, puisque $\mathbb{R} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \ker \hat{A}$.

Si $c \in \text{Im } A$ et $\ker A = \mathbb{R}\{x\}$, il existe w tel que $Aw = c$. Posons

$$\xi = -\frac{1}{d}b^\top x.$$

On construit une solution non-triviale de $\hat{A}\hat{x} = 0$.

$$\begin{aligned} Ax + c\xi &= Ax + Aw\xi \\ &= A(x + w\xi) \\ &= A\left(x - \frac{wb^\top x}{d}\right) \\ &= Ax\left(\text{Id} - \frac{wb^\top}{d}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque $x \in \ker A$. De plus

$$b^\top x + d\xi = b^\top x - \frac{db^\top x}{d} = 0.$$

Le vecteur $\hat{x} = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$ est une solution non-triviale de $\hat{A}\hat{x} = 0$, et \hat{A} n'est pas inversible.

3. Si $\dim \ker A \geq 2$, $\dim \ker \hat{A} \geq 1$ et \hat{A} n'est pas inversible. ■

Au point limite quadratique simple (u_0, a_0) ,

$$\dim \ker D_u f(u_0, a_0) = 1 \text{ et } D_a f(u_0, a_0) \notin \text{Im } D_u f(u_0, a_0).$$

D'après le lemme 3.8, la matrice B est inversible si de plus $u_0 \notin \text{Im } D_u f(u_0, a_0)^\top$, ce qui n'est pas toujours le cas.³ Il serait bon de trouver une méthode qui soit toujours capable de continuer une branche de solutions stationnaires lorsque un point limite est atteint.

³Dans l'exemple de la bifurcation en point limite, $(u_0, a_0) = (0, 0)$ est un point limite de (3.2). Mais $0 \in \text{Im } A$ pour n'importe quel opérateur linéaire A .

3.1.5 Continuation par la longueur d'arc

Cette méthode, due à KELLER [21], est la méthode la plus utilisée en pratique. Le paramètre introduit satisfait les conditions suivantes :

$$f(u(s), a(s)) = 0, \quad \|\dot{u}(s)\|^2 + \dot{a}(s)^2 = 1. \quad (3.10)$$

En pratique cependant, la formulation suivante est utilisée :

$$\begin{aligned} f(u(s_0 + i\Delta s), a(s_0 + i\Delta s)) &= 0, \\ (u(s_0 + i\Delta s) - u(s_0 + (i-1)\Delta s))^\top \dot{u}_{i-1} + (a(s_0 + i\Delta s) - a(s_0 + (i-1)\Delta s)) \dot{a}_{i-1} - \Delta s &= 0 \end{aligned}$$

où $\dot{u}_i = \dot{u}(s_0 + i\Delta s)$, $\dot{a}_i = \dot{a}(s_0 + i\Delta s)$ et $\|\dot{u}_i\|^2 + \dot{a}_i^2 = 1$ pour $i = 0, \dots$. La discrétisation provient d'approximations des dérivées de premier ordre. En utilisant la notation $x = (u, a)$, la méthode de la longueur d'arc devient

$$\begin{aligned} f(x(s_0 + i\Delta s)) &= 0, \\ (x(s_0 + i\Delta s) - x(s_0 + (i-1)\Delta s))^\top \dot{x}_{i-1} - \Delta s &= 0 \end{aligned}$$

où $\dot{x}_i = \dot{x}(s_0 + i\Delta s)$ et $\|\dot{x}_i\| = 1$ pour $i = 0, \dots$

L'algorithme pour implémenter cette méthode est présenté au tableau 3.3. L'approximation initiale utilisée lors de la continuation par la longueur d'arc est

$$x_1^{[0]} = x_0 + \dot{x}_0 \Delta s.$$

L'algorithme présenté au tableau 3.6 à la sous-section 3.3 est utilisé pour calculer \dot{x}_0 . Le système à l'étape 4 est résolu à l'aide de la décomposition LU . La convergence de la méthode de Newton aux étapes 4-6 est garantie si x_0 est une solution régulière de (3.1) et Δs est assez petit. Il faut vérifier que la matrice

$$B_1 = \begin{pmatrix} D_x f(x(s_0 + i\Delta s)) \\ \dot{x}(s_0 + (i-1)\Delta s)^\top \end{pmatrix}$$

qui apparaît à l'étape 4 est inversible lorsque $x(s_0 + (i-1)\Delta s)$ est une solution régulière. Il suffit pour cela de montrer que

$$B_2 = \begin{pmatrix} D_x f(x(s_0 + (i-1)\Delta s)) \\ \dot{x}(s_0 + (i-1)\Delta s)^\top \end{pmatrix}$$

Algorithme (CONTINUATION PAR LA LONGEUR D'ARC)

Soient $x \equiv x(s)$ une branche de solutions stationnaires de f près du point d'équilibre x_0 , et $\dot{x}_0 = \frac{dx}{ds} \Big|_{x_0}$. On obtient des approximations x_i de $x(s_0 + i\Delta s)$ de la façon suivante :

-
- ENTRÉE : f : champs de vecteurs paramétré;
 x_0 : point d'équilibre $x(s_0)$ de f ;
 \dot{x}_0 : dérivée de x par rapport à s , évaluée à x_0 ;
 Δs : incrément du paramètre s ;
 ϵ : degré d'approximation recherché ;
 N : nombre maximal d'itérations ;
 M : nombre d'approximations voulues ;
 - SORTIE : x : approximations de $(x(s_0 + i\Delta s))$, $i = 1, \dots, M$; ou
 x : message d'erreur
-

1. Pour $i = 1 : M$, faire les étapes 2-10 ;
 2. $x_i^{[0]} = x_{i-1} + \dot{x}_{i-1} \Delta s$;
 3. Pour $n = 0 : N$, faire les étapes 4-6 (Méthode de Newton) ;
 4. Résoudre $\begin{pmatrix} D_x f(x_i^{[n]}) \\ \dot{x}_{i-1}^\top \end{pmatrix} \Delta x_i^{[n]} = - \begin{pmatrix} f(x_i^{[n]}) \\ (x_i^{[n]} - x_{i-1})^\top \dot{x}_{i-1} - \Delta s \end{pmatrix}$;
 5. $x_i^{[n+1]} = x_i^{[n]} + \Delta x_i^{[n]}$;
 6. Si $\|\Delta x_i^{[n]}\| < \epsilon$, sauter à l'étape 8 ;
 7. x : message d'erreur ;
 - FIN.
 8. $x_i = x_i^{[n+1]}$;
 9. Résoudre $\begin{pmatrix} D_x f(x_i) \\ \dot{x}_{i-1}^\top \end{pmatrix} \hat{x}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
 10. $\hat{x}_i = \|\dot{x}_i\|^{-1} \hat{x}_i$;
 11. $x = (x_1 \ \cdots \ x_M)$;
- FIN.
-

TAB. 3.3 – Continuation par la longueur d'arc

est inversible. Si Δs est suffisamment petit, B_1 sera également inversible par continuité. Si B_2 n'est pas inversible, il existe $z_i \neq 0$, $\|z_i\| = 1$ tel que

$$\begin{aligned} D_x f(x(s_0) + (i-1)\Delta s) z_i &= 0 \\ \dot{x}(s_0 + (i-1)\Delta s)^\top z_i &= 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Mais $D_x f(x(s_0 + (i-1)\Delta s)) \dot{x}(s_0 + (i-1)\Delta s) = 0$. Puisque $x(s_0 + (i-1)\Delta s)$ est une solution régulière,

$$\text{Rang } D_x f(x(s_0 + (i-1)\Delta s)) = n.$$

Alors $\dim \ker D_x f(x(s_0 + (i-1)\Delta s)) = 1$ et

$$\dot{x}(s_0 + (i-1)\Delta s) = \pm z_i, \text{ après normalization.}$$

Dans ce cas

$$|\dot{x}(s_0 + (i-1)\Delta s)^\top z_i| = \|\dot{x}(s_0 + (i-1)\Delta s)\|^2 = 1,$$

ce qui contredit (3.11). Donc B_2 est inversible et la méthode de Newton converge.

3.2 Continuation (points limites)

Considérons le système à 2 paramètres

$$\dot{u} = f(u, a, \mu). \tag{3.12}$$

Supposons que (u_0, a_0, μ_0) soit un point limite quadratique de ce système et que ϕ_0 et ψ_0 soient tels que $\ker D_u f(u_0, a_0, \mu_0) = \mathbb{R}\{\phi_0\}$ et $\ker D_u f(u_0, a_0, \mu_0)^\top = \mathbb{R}\{\psi_0\}$. Nous aimerions calculer une branche de points limites de (3.12) passant par (u_0, a_0, μ_0) .

3.2.1 Continuation par le paramètre

Pour ce faire, nous résolvons le système

$$\begin{aligned} f(u, a, \mu) &= 0 \\ D_u f(u, a, \mu) \phi &= 0 \\ \phi^\top \phi_0 - 1 &= 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Le vecteur ϕ_0 appartient à la solution de référence $(u_0, \phi_0, a_0, \mu_0)$ qui est, en pratique, la dernière solution calculée sur la branche. On réécrit (3.13) sous la forme $F_{0,f}(u, \phi, a, \mu) = 0$, où $F_{0,f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est définie par

$$F_{0,f}(u, \phi, a, \mu) = (f(u, a, \mu), D_u f(u, a, \mu)\phi, \phi^\top \phi_0 - 1).$$

Posons $U \equiv (u, \phi, a)$. L'application $F_{0,f}$ est donc une fonction de $\mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^{2n+1} . Une branche de points d'équilibre de (3.13) correspondra alors à une branche de points limites de (3.12). Il est naturel d'essayer de continuer une solution (U_0, μ_0) de (3.13) en utilisant μ comme paramètre de continuation. Le théorème des fonctions implicites implique l'existence d'une branche $U(\mu) = (u(\mu), \phi(\mu), a(\mu))$ de solutions de (3.13) tant et aussi longtemps que le jacobien

$$\left. \frac{dF_{0,f}}{dU} \right|_{(U_0, \mu_0)} = \begin{pmatrix} D_u f(u_0, a_0, \mu_0) & 0 & D_a f(u_0, a_0, \mu_0) \\ D_{uu} f(u_0, a_0, \mu_0)\phi_0 & D_u f(u_0, a_0, \mu_0) & D_{ua} f(u_0, a_0, \mu_0)\phi_0 \\ 0^\top & \phi_0^\top & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas une matrice singulière. Elle ne l'est pas puisque la seule solution de

$$\left. \frac{dF_{0,f}}{dU} \right|_{(U_0, \mu_0)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}$$

est $x = y = 0$ et $z = 0$. En effet, considérons

$$D_u f(u_0, a_0, \mu_0)x + D_a f(u_0, a_0, \mu_0)z = 0, \quad (3.14)$$

$$D_{uu} f(u_0, a_0, \mu_0)\phi_0 x + D_u f(u_0, a_0, \mu_0)y + D_{ua} f(u_0, a_0, \mu_0)z = 0, \quad (3.15)$$

$$\phi_0^\top y = 0. \quad (3.16)$$

De (3.14), nous savons que

$$D_u f(u_0, a_0, \mu_0)x = -z D_a f(u_0, a_0, \mu_0).$$

Mais (u_0, a_0, μ_0) est un point limite, ce qui implique (voir section 3.1.1) que

$$D_a f(u_0, a_0, \mu_0) \notin \text{Im } D_u f(u_0, a_0, \mu_0).$$

Donc $z = 0$ et $x \in \ker D_u f(u_0, a_0, \mu_0) = \mathbb{R}\{\phi_0\}$, d'où $x = c_1 \phi_0$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

Multiplions (3.15) à gauche par ψ_0^\top pour obtenir

$$\psi_0^\top D_{uu} f(u_0, a_0, \mu_0) \phi_0 (c_1 \phi_0) + \psi_0^\top D_u f(u_0, a_0, \mu_0) y = 0.$$

Mais

$$\ker D_u f(u_0, a_0, \mu_0)^\top = \mathbb{R}\{\psi_0\},$$

d'où $c_1 \psi_0^\top D_{uu} f(u_0, a_0, \mu_0) \phi_0 \phi_0 = 0$. Puisque U_0 est un point limite quadratique,

$$\psi_0^\top D_{uu} f(u_0, a_0, \mu_0) \phi_0 \phi_0 \neq 0,$$

d'où $c_1 = 0$ et $x = 0$. En resubstituant dans (3.15) nous obtenons alors

$$D_u f(u_0, a_0, \mu_0) y = 0.$$

Donc $y = c_2 \phi_0$, et en substituant cette équation dans (3.16) nous obtenions

$$c_2 \phi_0^\top \phi_0 = 0.$$

Mais $\phi_0^\top \phi_0 = 1$, d'où $c_2 = 0$ et $y = 0$.

En implémentant l'algorithme 3.1, nous calculons une branche de solutions stationnaires de (3.13) passant par (U_0, μ_0) , ce qui correspond à calculer une branche de points limites de (3.12) passant par (u_0, a_0, μ_0) .⁴

3.2.2 Continuation par la longueur d'arc

Bien sur, il est possible que la branche de points limites ait elle-même un point limite en μ , et à cet endroit l'algorithme 3.1 cesse de fonctionner. Pour remédier à cet inconvénient, nous passons à la continuation par la longueur d'arc. Supposons que $(u(s_0), a(s_0), \mu(s_0))$ soit un point limite de (3.12) et que

$$\begin{aligned} \ker D_u f(u(s_0), a(s_0), \mu(s_0)) &= \mathbb{R}\{\phi(s_0)\}, \\ \ker D_u f(u(s_0), a(s_0), \mu(s_0))^\top &= \mathbb{R}\{\psi(s_0)\}. \end{aligned}$$

⁴Dans les deux cas, on fait la continuation par le paramètre μ .

Pour calculer une branche de points limites de (3.12), on résoud le système

$$F_{0,f}(X(s_0 + \Delta s)) = 0 \quad (3.17)$$

$$(X(s_0 + \Delta s) - X(s_0))^\top \dot{X}(s_0) - \Delta s = 0, \quad (3.18)$$

où $X(s) \equiv (u(s), \phi(s), a(s), \mu(s))$ et $\|\dot{X}(s_0 + \Delta s)\| = 1$ lorsque Δs est suffisamment petit.

Pour pouvoir appliquer l'algorithme de continuation par la longueur d'arc, et ainsi calculer une branche $X(s)$ de points d'équilibre de (3.17), il suffit de vérifier que

$$\begin{pmatrix} D_u f(u_0, a_0, \mu_0) & 0 & D_a f(u_0, a_0, \mu_0) & D_\mu f(u_0, a_0, \mu_0) \\ D_{uu} f(u_0, a_0, \mu_0) \phi_0 & D_u f(u_0, a_0, \mu_0) & D_{ua} f(u_0, a_0, \mu_0) \phi_0 & D_{u\mu} f(u_0, a_0, \mu_0) \phi_0 \\ 0^\top & \phi_0^\top & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le jacobien de $F_{0,f}$ par rapport à X , évalué en $X_0 = X(s_0)$, possède le rang maximal.

Si le point limite quadratique est en fonction du paramètre a , le rang du jacobien est maximal (voir sous-section 3.2.1). Si le point limite quadratique est en fonction du paramètre μ , il suffit d'interchanger les colonnes 3 et 4 pour obtenir le même résultat. La branche de points d'équilibre correspond alors à une branche de points limites de (3.12).

3.2.3 Implémentation

Lors des applications de l'algorithme 3.3, nous devons, à l'étape 4, résoudre le système

$$\begin{pmatrix} D_X F_{0,f}(X_i^{[n]}) \\ \dot{X}_{i-1}^\top \end{pmatrix} \Delta X_i^{[n]} = - \begin{pmatrix} F_{0,f}(X_i^{[n]}) \\ (X_i^{[n]} - X_{i-1})^\top \dot{X}_{i-1} - \Delta s \end{pmatrix}.$$

Ce système s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} A & c \\ b^\top & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}.$$

où A est non-singulière.

Algorithme (RÉSOLUTION DU SYSTÈME LINÉAIRE DANS LA MÉTHODE DE NEWTON)*Soit le système*

$$\begin{pmatrix} A & c \\ b^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix},$$

où A n'est pas singulière. On obtient la solution $(x, z)^T$ de la façon suivante :

-
- ENTRÉE : A : matrice de dimension $2n \times 2n$ non-singulière;
 b, c, f : vecteurs de dimension $2n \times 1$;
 d, h : scalaires;
 - SORTIE : x : vecteur de dimension $2n \times 1$;
 z : scalaire;
-

1. Résoudre $A\hat{c} = c$;
2. $e = d - b^T\hat{c}$;
3. Résoudre $A\hat{f} = f$;
4. $z = (h - b^T\hat{f})e^{-1}$;
5. $x = \hat{f} - z\hat{c}$;

FIN.

 TAB. 3.4 – Résolution du système linéaire dans la méthode de Newton

Pour ce faire, nous faisons appel à l'algorithme présenté au tableau 3.4. Aux étapes 1 et 3 de cet algorithme, nous devons résoudre un système de la forme $A\hat{y} = y$, où

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 & c_1 \\ B & \tilde{A} & c_2 \\ 0^\top & \phi^\top & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \ker \tilde{A} = \mathbb{R}\{\phi\}, \quad \text{et } \ker \tilde{A}^\top = \mathbb{R}\{\psi\}.$$

Ceci ce fait très efficacement en utilisant l'algorithme présenté au tableau 3.5.

3.3 Initialisation, méthode de Newton et problème de Bratu

Initialisation : Supposons que $(u(s), a(s))$ soit une branche de solutions stationnaires de (2.1), c'est-à-dire $f(u(s), a(s)) \equiv 0$. Alors

$$D_u f(u(s), a(s))\dot{u}(s) + D_a f(u(s), a(s))\dot{a}(s) \equiv 0,$$

d'où $(\dot{u}_0, \dot{a}_0) \in \ker [D_u f(u(s_0), a(s_0)) \mid D_a f(u(s_0), a(s_0))]$. Si $(u(s_0), a(s_0))$ est une solution régulière de (2.1), le noyau du jacobien est de dimension 1.

L'algorithme qui implémente ce raisonnement se retrouve au tableau 3.6. En général le vecteur dérivée est normalisé tel que

$$\theta_u^2 \|\dot{u}_0\|^2 + \theta_a^2 \dot{a}_0^2 = 1,$$

pour θ_u, θ_a donnés. Le cas le plus fréquent est $\theta_u = \theta_a = 1$.

Méthode de Newton : La méthode de Newton est un algorithme fondamental, utilisé dans plusieurs branches des mathématiques. Elle joue évidemment un rôle très important dans l'analyse numérique des bifurcations. (voir tableau 3.7)

Fonction-test τ_{pl} : Supposons que $(u(s), a(s))$ soit une branche de solutions stationnaires du système (2.1). La fonction

$$\tau_{pl}(s) = \det D_u f(u(s), a(s)), \tag{3.19}$$

Algorithme (RÉSOLUTION DU SYSTÈME LINÉAIRE DE LA FORME $A\hat{y} = y$.)

Soit le système $A\hat{y} = y$, où

$$A = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 & c_1 \\ B & \bar{A} & c_2 \\ 0^\top & \phi^\top & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \ker \bar{A} = \mathbb{R}\{\phi\}, \quad \text{et } \ker \bar{A}^\top = \mathbb{R}\{\psi\}.$$

La solution de ce système est calculée de la façon suivante :

- ENTRÉE : \bar{A} : matrice de dimension $n \times n$ non-singulière ;
 B : matrice de dimension $n \times n$;
 c_1, c_2, ϕ, y_1, y_2 : vecteurs de dimension $n \times 1$;
 y_3 : scalaire ;
 - SORTIE : \hat{y}_1, \hat{y}_2 : vecteur de dimension $n \times 1$;
 \hat{y}_3 : scalaire ;
-

1. Résoudre $\bar{A}^\top \psi = 0$;
2. $\hat{y}_3 = \frac{\psi^\top y_1}{\psi^\top c_1}$;
3. Résoudre $\bar{A} \hat{y}_{1p} = y_1 - \hat{y}_3 c_1$;
4. $\alpha = \frac{\psi^\top y_2 - \hat{y}_3 \psi^\top c_2 - \psi^\top B \hat{y}_{1p}}{\psi^\top B \phi}$;
5. $\hat{y}_1 = \hat{y}_{1p} + \alpha \phi$;
6. Résoudre $\bar{A} \hat{y}_{2p} = y_2 - B \hat{y}_1 - \hat{y}_3 c_2$;
7. $\beta = \frac{y_3 - \phi^\top \hat{y}_{2p}}{\phi^\top \phi}$;
8. $\hat{y}_2 = \hat{y}_{2p} + \beta \phi$;

FIN.

TAB. 3.5 – Résolution du système linéaire de la forme $A\hat{y} = y$.

Algorithme (CALCUL DE \dot{u}_0 ET \dot{a}_0)

Soit (u_0, a_0) un point d'équilibre de f , et supposons que la dimension du noyau du jacobien $D_u f$ soit 1. Le vecteur (\dot{u}_0, \dot{a}_0) est calculé de la façon suivante :

- ENTRÉE : f : champs de vecteurs paramétré ;
 (u_0, a_0) : point d'équilibre de f ;
 - SORTIE : (\dot{u}_0, \dot{a}_0) : dérivées de u, a évaluées à u_0, a_0 ;
-

1. Résoudre $[D_u f(u_0, a_0) | D_a f(u_0, a_0)] \begin{pmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{a}_0 \end{pmatrix} = 0$;

2. $\begin{pmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{a}_0 \end{pmatrix} = \left\| \begin{pmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{a}_0 \end{pmatrix} \right\|^{-1} \begin{pmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{a}_0 \end{pmatrix}$.

- FIN.

TAB. 3.6 – Calcul de \dot{u}_0 et \dot{a}_0

Algorithme (MÉTHODE DE NEWTON)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction se comportant bien. Les racines de f peuvent alors être calculées de la façon suivante :

- ENTRÉE : f : fonction dont les racines sont recherchées ;
 x_0 : approximation initiale d'une solution de $f(x) = 0$;
 ϵ : degré d'approximation recherché ;
 N : nombre maximum d'itérations ;
 - SORTIE : x : approximation d'une solution de $f(x) = 0$; ou
 x : message d'erreur ;
-

1. $k = 1$;
 2. Tant que ($k \leq N$), répéter les étapes 3-7 ;
 3. Évaluer $f(x_0)$ et $D_x f(x_0)$;
 4. Résoudre $D_x f(x_0)y = -f(x_0)$;
 5. $x_0 = x_0 + y$;
 6. Si $\|y\| < \epsilon$, sauter à l'étape 9 ;
 7. $k = k + 1$;
 8. x : message d'erreur ;
 - FIN.
 9. $x = x_0$;
- FIN.
-

TAB. 3.7 – Méthode de Newton

définie le long de $(u(s), a(s))$ est une **fonction-test de bifurcation en point limite**. Lorsque $\tau_{pl}(s_0) = 0$ et $D_a f(u(s_0), a(s_0)) \notin \text{Im } D_u f(u(s_0), a(s_0))$, il se produit une bifurcation en point limite à $(u(s_0), a(s_0))$.

Supposons que $(u(s_1), a(s_1))$ soit un point d'équilibre de (2.1) et que l'on approxime $(u(s_1 + i\Delta s), a(s_1 + i\Delta s))$ par (u_i, a_i) , pour $i = 1, \dots, M$, à l'aide de la continuation par la longueur d'arc. Si $s_{i-1} = s_1 + (i-1)\Delta s$ et $s_i = s_1 + i\Delta s$ sont tels que $\tau_{pl}(s_i)\tau_{pl}(s_{i-1}) < 0$, τ_{pl} possède une racine s_0 entre s_{i-1} et s_i . On utilise la méthode de Newton pour trouver cette racine, ainsi que les vecteurs $(u(s_0), a(s_0))$ et $(\dot{u}(s_0), \dot{a}(s_0))$. Si $(u(s_0), a(s_0))$ est un point limite de (2.1), il y a bifurcation en point limite.

Problème de Bratu : Le problème aux conditions limites qui suit, le problème de Bratu, est un exemple typique lors des considérations numériques sur les solutions stationnaires.

$$\ddot{u}(x) + ae^{u(x)} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (3.20)$$

Lorsque $a = 0$, $u_0 \equiv u(x) \equiv 0$ est une solution de (3.20). Le vecteur $(0, 0)$, qui appartient à $(C^2[0, 1] \cap \{u : u(0) = u(1) = 0\}) \times \mathbb{R}$, est donc un point d'équilibre.

Soient $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ une partition de $[0, 1]$ avec

$$x_j - x_{j-1} = h = 1/N$$

pour $j = 1, \dots, N$ et $u(x)$ une solution de (3.20). D'après le théorème de Taylor,

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + \dot{u}(x)h + \ddot{u}(x)\frac{h^2}{2!} + u^{(3)}(x)\frac{h^3}{3!} + u^{(4)}(\zeta_1)\frac{h^4}{4!}, \\ u(x-h) &= u(x) - \dot{u}(x)h + \ddot{u}(x)\frac{h^2}{2!} - u^{(3)}(x)\frac{h^3}{3!} + u^{(4)}(\zeta_2)\frac{h^4}{4!}, \end{aligned}$$

et alors

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + \ddot{u}(x)h^2 + \frac{h^4}{4!} [u^{(4)}(\zeta_1) + u^{(4)}(\zeta_2)],$$

d'où, par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\ddot{u}(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{h^4}{12} u^{(4)}(\zeta).$$

La discrétisation du problème de Bratu (c'est à ce nouveau problème que les techniques numériques seront appliquées) prend alors la forme

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + ae^{u_j} = 0, \quad (3.21)$$

pour $j = 1, \dots, N-1$ et $u_0 = u_N = 0$. En posant $U = (u_1, \dots, u_{N-1})^\top$ le vecteur solution, (3.21) se réécrit $F(U, a) = 0$, où

$$F : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$$

est définie par

$$F(U, a) = \begin{pmatrix} N^2(u_2 - 2u_1) + ae^{u_1} \\ N^2(u_3 - 2u_2 + u_1) + ae^{u_2} \\ \vdots \\ N^2(u_{N-1} - 2u_{N-2} + u_{N-3}) + ae^{u_{N-2}} \\ N^2(-2u_{N-1} + u_{N-2}) + ae^{u_{N-1}} \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$D_U F(U, a) = \begin{pmatrix} -2N^2 + ae^{u_1} & N^2 & 0 & \dots & 0 \\ N^2 & -2N^2 + ae^{u_2} & N^2 & \dots & 0 \\ 0 & N^2 & -2N^2 + ae^{u_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2N^2 + ae^{u_{N-1}} \end{pmatrix}$$

et $D_a F(U, a) = (e^{u_1} \dots e^{u_{N-1}})^\top$. Lorsque $a = 0$, $U_0 = (0, \dots, 0)^\top$ est une solution de (3.21), et nous obtenons alors

$$D_U F(U_0, 0) = \begin{pmatrix} -2N^2 & N^2 & 0 & \dots & 0 \\ N^2 & -2N^2 & N^2 & \dots & 0 \\ 0 & N^2 & -2N^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2N^2 \end{pmatrix}$$

a	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47
$\begin{pmatrix} u_0 \\ U \\ u_6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5258 \\ 0.8904 \\ 1.0228 \\ 0.8904 \\ 0.5258 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5376 \\ 0.9115 \\ 1.0478 \\ 0.9115 \\ 0.5376 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5526 \\ 0.9386 \\ 1.0796 \\ 0.9386 \\ 0.5526 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5772 \\ 0.9832 \\ 1.1323 \\ 0.9832 \\ 0.5772 \\ 0 \end{pmatrix}$	La méthode de Newton ne converge pas.

TAB. 3.8 – Approximations des solutions de (3.21) pour a près de 3.47

et $D_a F(U_0, 0) = (1 \ \dots \ 1)^T$.

Les algorithmes présentés aux tableaux 3.1, 3.2 et 3.3 sont appliqués tour à tour au problème (3.21) avec MATLAB. La méthode de la continuation par le paramètre cesse de fonctionner lorsque $a \approx 3.47$ (voir figure 3.3). Le tableau

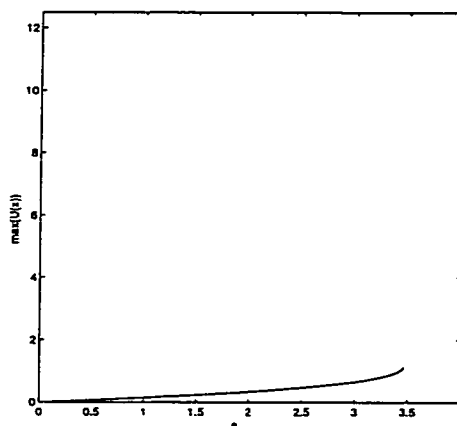


FIG. 3.3 – Branche de solutions stationnaires pour le PCL de Bratu (paramètre)

3.8 examine le comportement des solutions stationnaires U de (3.21) lorsque a se rapproche de 3.47 ($N = 6$). En appliquant la continuation par la norme au problème, nous remarquons qu'il y a un point limite, situé précisément là où la continuation par le paramètre échoue (Voir figure 3.4).

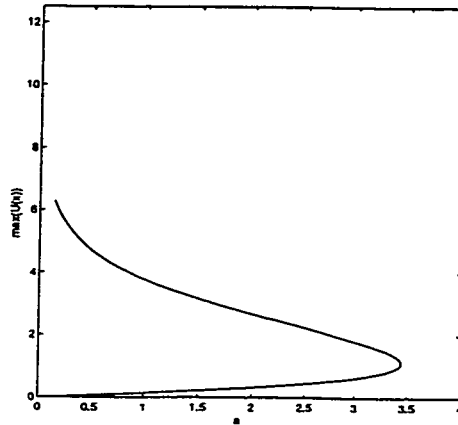


FIG. 3.4 – Branche de solutions stationnaires pour le PCL de Bratu (longueur d'arc)

Un phénomène intéressant se produit lorsque nous essayons de résoudre le problème de Bratu à l'aide des méthodes de continuation par la norme et par la longueur d'arc. Si N est impair, les routines continuent la branche de points d'équilibre dans la «direction» opposée à celle du point limite; ceci est probablement dû aux méthodes utilisées par MATLAB pour résoudre les systèmes linéaires.

Un bon programme de continuation de solutions devrait donc être capable de suivre une branche de solutions dans les deux directions. Ceci nous amène à considérer ce qui se passe lorsque deux branches de solutions s'intersectent. Le prochain chapitre traite de ce sujet.

Chapitre 4

Bifurcation de solutions stationnaires

On retrouve un **point de branchement de solutions stationnaires** lorsque plusieurs branches de points d'équilibre se coupent. Les considérations numériques se rapportant aux points limite ayant été l'objet du chapitre précédent, cette section se penchera sur une méthode permettant de changer de branches lorsque deux branches se coupent. À cet effet, le concept de point singulier est introduit.

Définition 4.1 Une solution x_0 de (3.1) est dite **simple et singulière** si le jacobien de f à ce point, $D_x f(x_0)$, est une matrice de rang $n - 1$.

Que ce passe-t-il dans l'entourage d'un tel point ? La proposition suivante répond à cette question.

Proposition 4.2 Soit $D_x f(x_0) = [D_u f(u_0, a_0) | D_a f(u_0, a_0)]$. Alors

$$\text{Rang} [D_u f(u_0, a_0) | D_a f(u_0, a_0)] = n - 1$$

si et seulement si

1. $\dim \ker D_u f(u_0, a_0) = 1$ et $D_a f(u_0, a_0) \in \text{Im } D_u f(u_0, a_0)$; ou
2. $\dim \ker D_u f(u_0, a_0) = 2$ et $D_a f(u_0, a_0) \notin \text{Im } D_u f(u_0, a_0)$.

Démonstration: La démonstration est identique à celle de la proposition 3.3. ■

4.1 Équation algébrique de bifurcation

Soit $x(s)$ une branche de solutions de (3.1) passant par $x(s_0)$. À ce point, la direction tangentielle de la branche est donnée par $\dot{x}(s_0)$. En dérivant $f(x(s)) \equiv 0$ par rapport à s , nous obtenons

$$D_x f(x(s))\dot{x}(s) \equiv 0. \quad (4.1)$$

En reparamétrisant si nécessaire,

$$\|\dot{x}(s)\| = 1. \quad (4.2)$$

Si de plus $x(s_0)$ est un point singulier simple, il y a deux possibilités :

1. $\dim \ker D_u f(u_0, a_0) = 2$ et $D_a f(u_0, a_0) \notin \text{Im } D_u f(u_0, a_0)$;
2. $\dim \ker D_u f(u_0, a_0) = 1$ et $D_a f(u_0, a_0) \in \text{Im } D_u f(u_0, a_0)$

Définissons

$$\begin{aligned} \ker D_x f(x(s_0)) &= \mathbb{R}\{\phi_1, \phi_2\} \\ \ker D_x f(x(s_0))^\top &= \mathbb{R}\{\psi\} \end{aligned}$$

dans le premier cas.¹ Par (4.1),

$$\dot{x}(s_0) \in \ker D_x f(x(s_0)).$$

Donc il existe $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\dot{x}(s_0) = \alpha_0 \phi_1 + \beta_0 \phi_2. \quad (4.3)$$

Existe-t-il une autre branche de points d'équilibre $y(s)$ telle que $y(s_0) = x(s_0)$ (c'est-à-dire telle que $\dot{y}(s_0) = \alpha_1 \phi_1 + \beta_1 \phi_2$, où $(\alpha_1, \beta_1) \neq (\alpha_0, \beta_0)$) ? En dérivant (4.1) de nouveau par rapport à s , la relation suivante est obtenue

$$D_x f(x(s))\ddot{x}(s) + D_{xx} f(x(s))\dot{x}(s)\dot{x}(s) = 0,$$

¹Autrement, il suffit d'interchanger deux colonnes pour obtenir le même résultat.

d'où, en substituant $s = s_0$,

$$D_x f(x(s_0))\ddot{x}(s_0) + D_{xx}f(x(s_0))\dot{x}(s_0)\dot{x}(s_0) = 0. \quad (4.4)$$

Puisque $\psi \in \ker D_x f(x(s_0))^\top$, il suffit de multiplier (4.4) à gauche par ψ^\top pour obtenir

$$\psi^\top D_{xx}f(x(s_0))\dot{x}(s_0)\dot{x}(s_0) = 0. \quad (4.5)$$

En substituant $\dot{x}(s_0) = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2$ dans (4.5),

$$\psi^\top D_{xx}f(x(s_0)) (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = 0.$$

Puisque $D_{xx}f(x(s_0))$ est une application bilinéaire symétrique, cette dernière équation se réécrit sous forme quadratique de la manière suivante :

$$c_{11}\alpha^2 + 2c_{12}\alpha\beta + c_{22}\beta^2 = 0, \quad (4.6)$$

où $c_{ij} = \psi^\top D_{xx}f(x(s_0))\phi_i\phi_j$ pour $i, j = 1, 2$.

Définition 4.3 *L'équation (4.6) est appelée équation algébrique de bifurcation de f au point singulier simple $x(s_0)$.*

Si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ et $\dot{x}(s_0) = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2$, alors

$$\|\dot{x}(s_0)\| = 0,$$

ce qui contredit (4.2). Sans perte de généralités, supposons que $\alpha \neq 0$. Alors (4.6) devient

$$c_{11} + 2c_{12}\frac{\beta}{\alpha} + c_{22}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 0. \quad (4.7)$$

Les solutions (α, β) de (4.7), et par conséquent celles de (4.6), dépendent donc du discriminant $\Delta_0 \equiv c_{12}^2 - c_{11}c_{22}$.

Mais (4.7) possède déjà la solution réelle $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0)$, d'où $\Delta_0 \geq 0$. Si $\Delta_0 = 0$, il n'y a que la branche $x(s)$ qui passe par $x(s_0)$. Si cependant $\Delta_0 > 0$, (4.7) possède 2 solutions distinctes (α_0, β_0) et (α_1, β_1) . Dans ce cas, nous sommes en droit de supposer qu'il existe une branche $y(s)$ de points d'équilibre passant par $y(s_0) = x(s_0)$ telle que

$$\dot{y}(s_0) = \alpha_1\phi_1 + \beta_1\phi_2 \neq \alpha_0\phi_1 + \beta_0\phi_2 = \dot{x}(s_0).$$

section 4.3.

4.2 Nouvelle direction et changement de branche

Posons dans ce qui précède

$$\phi_1 = \dot{x}(s_0).$$

Dans ce cas, $(\alpha_0, \beta_0) = (1, 0)$ est une solution de (4.6) et

$$c_{11} = \psi^\top D_{xx}f(x(s_0))\dot{x}(s_0)\dot{x}(s_0) = 0,$$

par (4.5) d'où $\Delta_0 = c_{12}^2 > 0$, ce qui implique que $c_{12} \neq 0$. Il découle alors de (4.6) que la deuxième solution (α_1, β_1) doit satisfaire

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = -\frac{c_{22}}{2c_{12}}.$$

Les quantités c_{12}, c_{22} sont calculées à partir de ϕ_1, ϕ_2 et ψ . Il suffit alors de choisir ϕ_2 de sorte que $\phi_2 \perp \phi_1$. Alors

$$\phi_2 \in \ker \begin{pmatrix} D_x f(x(s_0)) \\ \dot{x}(s_0)^\top \end{pmatrix}.$$

De même,

$$\begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker [D_x f(x(s_0))^\top \dot{x}(s_0)]. \quad (4.8)$$

Le rapport $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ est connu après substitution dans (4.6). La direction de la seconde branche est alors donnée en renormalisant α_1 et β_1 pour obtenir

$$\|\dot{y}(s_0)\| = \|\alpha_1 \phi_1 + \beta_1 \phi_2\| = 1.$$

Soient $x(s_0)$ un point de branchement de (2.1), $\dot{x}(s_0)$ la direction de la branche originale et $\dot{y}(s_0)$ la direction de la seconde branche.² Les points sur cette nouvelle branche sont approximés en se servant de l'algorithme présenté au tableau 3.3, avec $(u(s_0), a(s_0)) = x(s_0)$ et $(\dot{u}_0, \dot{a}_0) = \dot{y}(s_0)$. L'algorithme effectuant le changement de branche se retrouve au tableau 4.1.

²Pour calculer $\dot{y}(s_0)$, on doit évaluer $D_{xx}f(x(s_0))$. Il est possible d'éviter un tel calcul. Puisque $\phi_1 \perp \phi_2$ et $\phi_1 = \dot{x}(s_0)$, on peut, en général, exécuter l'algorithme 3.3 en se servant de ϕ_2 à la place de $\dot{y}(s_0)$ pour la première itération. On appelle cette méthode de changement de branche la **méthode de direction orthogonale**. Il est bon de noter que cette technique ne fonctionne pas toujours. De plus, l'utilisation d'un logiciel comme MATLAB entraîne parfois quelques inconvénients. (voir section 4.4)

Algorithme (CHANGEMENT DE BRANCHE DE SOLUTIONS STATIONNAIRES)

Soient $x \equiv x(s)$ une branche de solutions stationnaires de (3.1) près du point d'équilibre singulier x_0 et $\dot{x}_0 = \left. \frac{dx}{ds} \right|_{x_0}$ la direction de la branche originale. Les approximation y de $y(s_0 + \Delta s)$ et \dot{y} de $\dot{y}(s_0 + \Delta s)$ sur la nouvelle branche sont obtenue de la façon suivante :

- ENTRÉE : f : champs de vecteurs paramétré;
 x_0 : point d'équilibre singulier $x(s_0)$;
 \dot{x}_0 : direction de la branche originale $x(s)$ lorsque $s = s_0$;
 \dot{y}_0 : direction de la branche qui bifurque de $x(s)$ lorsque $s = s_0$;
 Δs : incrément du paramètre s ;
 ϵ : degré d'approximation recherché ;
 N : nombre maximal d'itérations ;
 - SORTIE : y : approximation de $y(s_0 + \Delta s)$ sur la branche $y(s)$;
 \dot{y} : approximation de $\dot{y}(s_0 + \Delta s)$ sur la branche $y(s)$; ou
 y : message d'erreur ;
-

1. $y_0 = x_0$;
 2. $y^{[0]} = y_0 + \dot{y}_0 \Delta s$;
 3. Pour $n = 0 : N$, faire les étapes 4-6 (Méthode de Newton) ;
 4. Résoudre $\begin{pmatrix} D_y f(y^{[n]}) \\ \dot{y}_0^\top \end{pmatrix} \Delta y^{[n]} = - \begin{pmatrix} f(y^{[n]}) \\ (y^{[n]} - y_0)^\top \dot{y}_0 - \Delta s \end{pmatrix}$;
 5. $y^{[n+1]} = y^{[n]} + \Delta y^{[n]}$;
 6. Si $\|\Delta y^{[n]}\| < \epsilon$, sauter à l'étape 8 ;
 7. y : message d'erreur ;
 - FIN.
 8. $y = y^{[n+1]}$;
 9. Résoudre $\begin{pmatrix} D_y f(y) \\ \dot{y}_0^\top \end{pmatrix} \dot{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
 10. $\dot{y} = \|\dot{y}\|^{-1} \dot{y}$;
- FIN.
-

TAB. 4.1 – Changement de branche de solutions stationnaires

4.3 Détection de points de branchement

Supposons que $x(s_0)$ soit un point simple singulier de (2.1), et posons

$$F(x; s) = \begin{pmatrix} f(x) \\ (x - x(s_0))^\top \dot{x}(s_0) - s \end{pmatrix}.$$

Alors

$$D_x F(x(s_0); s_0) = \begin{pmatrix} D_x f(x(s_0)) \\ \dot{x}(s_0)^\top \end{pmatrix}.$$

Comme à la section précédente, $\phi_1 = \dot{x}(s_0)$. Alors

$$D_x F(x(s_0); s_0) = \begin{pmatrix} D_x f(x(s_0)) \\ \phi_1^\top \end{pmatrix}.$$

Si $\ker D_x f(x(s_0)) = \mathbb{R}\{\phi_1, \phi_2\}$, choisissons ϕ_2 tel que $\phi_2^\top \phi_1 = 0$, ce qui implique que $\phi_2 \in \ker D_x F(x(s_0); s_0)$. Alors

$$\ker D_x F(x(s_0); s_0) \subset \ker D_x f(x(s_0)).$$

Cependant, par (4.2), $\phi_1 \notin \ker D_x F(x(s_0); s_0)$ puisque

$$\phi_1^\top \phi_1 = \|\phi_1\|^2 = 1 \neq 0.$$

Donc $\dim \ker D_x F(x(s_0); s_0) = 1$. De (4.8) nous obtenons que

$$\ker D_x F(x(s_0); s_0)^\top = \mathbb{R}\{\Psi\}, \text{ avec } \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix},$$

où ψ engendre le noyau de $D_x f(x(s_0))^\top$. Les deux théorèmes qui suivent montrent qu'il y se produit une bifurcation de solutions stationnaires au point singulier simple $x(s_0)$.

Théorème 4.4 (KELLER [23]) *Supposons que $x(s)$ soit une branche de points d'équilibre de (2.1), et que $x(s_0)$ soit un point simple singulier sur cette branche. Supposons de plus que le discriminant Δ_0 associé à l'équation algébrique de bifurcation de $x(s_0)$ soit positif, et que 0 soit une valeur propre simple de $D_x F(x(s_0); s_0)$. Alors le déterminant de $D_x F(x(s); s)$ change de signe lorsque $s = s_0$.*

Démonstration: Le déterminant de $D_x F(x(s); s)$ est donné par

$$\det(D_x F(x(s); s)) = \prod_{\lambda(s) \in A(s)} \lambda(s),$$

où $A(s) = \{\lambda(s); \lambda(s) \text{ est une valeur propre de } D_x F(x(s); s)\}$. Soit $\phi(s)$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\kappa(s)$ de $D_x F(x(s); s)$, c'est-à-dire

$$D_x F(x(s); s)\phi(s) = \kappa(s)\phi(s). \quad (4.9)$$

Puisque 0 est une valeur propre simple du jacobien, et que

$$\phi_2 \in \ker D_x F(x(s_0); s_0),$$

considérons $\kappa(s)$ et $\phi(s)$ tels que $\kappa(s_0) = 0$ et $\phi(s_0) = \phi_2$. En dérivant (4.9) par s , nous obtenons

$$D_{xx} F(x(s); s)\dot{x}(s)\phi(s) + D_x F(x(s); s)\dot{\phi}(s) = \dot{\kappa}(s)\phi(s) + \kappa(s)\dot{\phi}(s). \quad (4.10)$$

La substitution $s = s_0$ dans (4.10) donne

$$D_{xx} F(x(s_0); s_0)\phi_1\phi_2 + D_x F(x(s_0); s_0)\dot{\phi}(s_0) = \dot{\kappa}(s_0)\phi_2, \quad (4.11)$$

puisque $\kappa(s_0) = 0$ et $\dot{x}(s_0) = \phi_1$. En multipliant à gauche par Ψ^\top , (4.11) devient

$$\Psi^\top D_{xx} F(x(s_0); s_0)\phi_1\phi_2 = \Psi^\top \dot{\kappa}_0\phi_2,$$

puisque $\Psi \in \ker D_x F(x(s_0); s_0)^\top$. Donc

$$\dot{\kappa}_0 = \frac{\Psi^\top D_{xx} F(x(s_0); s_0)\phi_1\phi_2}{\Psi^\top \phi_2} = \frac{\psi^\top D_{xx} f(x(s_0))\phi_1\phi_2}{\Psi^\top \phi_2} = \frac{c_{12}}{\Psi^\top \phi_2},$$

par (4.6). Mais $c_{11} = 0$ car $\dot{x}(s_0) = \phi_1$. Donc $c_{12} \neq 0$ puisque le discriminant $\Delta_0 \neq 0$. Ceci implique que $\dot{\kappa}(s_0) \neq 0$, ce qui veut dire que $\kappa(s)$ change de signe lorsque $s = s_0$. Puisque $\kappa(s_0) = 0$ est une valeur propre simple de $D_x F(x(s_0); s_0)$, $\kappa(s)$ est la seule valeur propre qui change de signe lorsque $s = s_0$. Donc $\det(D_x F(x(s); s))$ change de signe lorsque $s = s_0$. ■

Théorème 4.5 (KELLER [22], [23]) *Supposons que $x(s)$ soit une branche de solutions stationnaires de (3.1). Si le déterminant de $D_x F(x(s); s)$ (définie plus haut) change de signe lorsque $s = s_0$, $x(s_0)$ est un point de branchement de solutions stationnaires de (3.1).*

4.4 Implémentation

Supposons que $x(s)$ soit une branche de solutions stationnaires du système (3.1). La fonction

$$\tau_{SS}(s) = \det \begin{pmatrix} D_x f(x(s)) \\ \dot{x}(s) \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

définie le long de $x(s)$ est une **fonction-test de bifurcation de solutions stationnaires**. Lorsque $\tau_{SS}(s_0) = 0$ et $\text{Rang } D_x f(x(s_0)) = n - 1$, il se produit une bifurcation de solutions stationnaires à $x(s_0)$.

Supposons que $x(s_1)$ soit un point d'équilibre de (2.1) et que l'on approxime $x(s_1 + i\Delta s)$ par x_i , pour $i = 1, \dots, M$, à l'aide de la continuation par la longueur d'arc. Si $s_{i-1} = s_1 + (i-1)\Delta s$ et $s_i = s_1 + i\Delta s$ sont tels que $\tau_{SS}(s_i)\tau_{SS}(s_{i-1}) < 0$, τ_{SS} possède une racine s_0 entre s_{i-1} et s_i . On utilise la méthode de Newton pour trouver cette racine, ainsi que les vecteurs $x(s_0)$ et $\dot{x}(s_0)$. Si $x(s_0)$ est un point singulier de (3.1), il se produit une bifurcation de solutions stationnaires.³

4.5 Modèle proie-prédateur

On illustre les résultats obtenus à l'aide d'un exemple. Plus de détails au sujet de cet exemple seront donnés au chapitre 6.

³Soit ϕ_1 l'approximation de $\dot{x}(s_0)$. Lorsque l'on calcule $\ker D_x f(x(s_0))$ à l'aide d'un logiciel tel MATLAB, il est possible que l'on obtienne

$$\ker D_x f(x(s_0)) = \mathbb{R}\{u, v\},$$

où $\phi_1 = cu + dv$ et $\phi_1 \neq u, v$. La direction de la branche qui bifurque est donnée par ϕ_2 , où $\phi_2 \in \mathbb{R}\{u, v\}$ et $\phi_1^\top \phi_2 = 0$. Comment calcule-t-on ce vecteur? Puisque $\phi_2 \in \mathbb{R}\{u, v\}$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\phi_2 = au + bv$. Cependant, $\phi_1^\top \phi_2 = 0$, d'où $a(\phi_1^\top u) + b(\phi_1^\top v) = 0$. Sous forme matricielle, ce système s'écrit

$$\begin{pmatrix} \phi_1^\top u & \phi_1^\top v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Si $(a, b) \neq (0, 0)$, le noyau de $\begin{pmatrix} \phi_1^\top u & \phi_1^\top v \end{pmatrix}$ est de dimension 1. On choisit alors

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} \phi_1^\top u & \phi_1^\top v \end{pmatrix}$$

tel que $\|(a_2, b_2)^\top\| = 1$ (ce que MATLAB fait automatiquement) et on obtient $\phi_2 = a_2 u + b_2 v$. En se servant de l'algorithme présenté au tableau 4.1, on trouve un point sur la branche qui bifurque.

Exemple 4.6 (DOEDEL ET KERNÉVEZ [12])

On considère le système

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= 3u_1(1 - u_1) - u_1u_2 - a(1 - e^{-5u_1}) \\ \dot{u}_2 &= -u_2 + 3u_1u_2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La quantité u_1 représente la population de l'espèce-proie, et u_2 celle de l'espèce-prédateur. On pose $x = (u_1, u_2, a)$. La courbe $x = (0, 0, a)^\top$ est une branche de solution de (4.13), ayant $\dot{x} = (0, 0, 1)^\top$ comme direction. Le jacobien le long de cette branche est

$$\begin{pmatrix} 3 - 5a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lorsque $a = \frac{3}{5}$, le système (4.13) possède un point singulier simple $x_0 = (0, 0, 3/5)^\top$. Le jacobien à cet endroit est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, $\ker A^\top = \mathbb{R}\{(1, 0)^\top\}$ et $\ker A = \mathbb{R}\{(0, 0, 1)^\top, (1, 0, 0)^\top\}$. Le déterminant de

$$B(a) = \begin{pmatrix} 3 - 5a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

change de signe lorsque $a = \frac{3}{5}$, et 0 est une valeur propre simple de $B(3/5)$. Les coefficients de l'équation algébrique de bifurcation sont

$$c_{11} = 0, \quad c_{12} = -5 \text{ et } c_{21} = 9.$$

L'équation algébrique de bifurcation prend donc la forme

$$9\beta^2 - 10\alpha\beta = 0.$$

Les racines sont $(\alpha_1, \beta_1) = (1, 0)$ et $(\alpha_2, \beta_2) = (9, 10)$. La direction de la branche originale au point x_0 est

$$\dot{x}_0 = (0, 0, 1)^\top,$$

et celle de la branche qui bifurque

$$\dot{y}_0 = (10, 0, 9)^\top.$$

Chapitre 5

Bifurcation de Hopf

En pratique, il est souvent important de savoir si le système (2.1) possède une solution périodique. L'apparition de solutions périodiques peut se faire via une bifurcation dite de Hopf. L'exemple qui suit est l'exemple classique de ce type de bifurcation.

Exemple 5.1 (BIFURCATION DE HOPF)

Soit le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Sous forme polaire, le système devient

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(a - \rho^2) \\ \dot{\varphi} &= 1.\end{aligned}$$

Il y a deux cas distincts :

1. $a < 0$ Il n'y a qu'un point d'équilibre $\rho_0 = 0$. Ce point d'équilibre est stable pour tout $a < 0$ puisque $D_\rho(\rho_0) = a - 3\rho_0^2 = a < 0$.
2. $a > 0$ Il y a toujours un point d'équilibre $\rho_0 = 0$. Ce point d'équilibre est instable pour tout $a > 0$ puisque $D_\rho(\rho_0) = a - 3\rho_0^2 = a > 0$. De plus, si $\rho_1 = \sqrt{a}$, $\dot{\rho} = 0$ lorsque $\rho = \rho_1$. Il existe donc une courbe invariante satisfaisant (5.1), définie par $\rho(t) = \sqrt{a}$, $\varphi(t) = t + K$. Cette courbe est stable puisque $\dot{\rho} > 0$ si $\rho < a$ et $\dot{\rho} < 0$ si $\rho > a$.

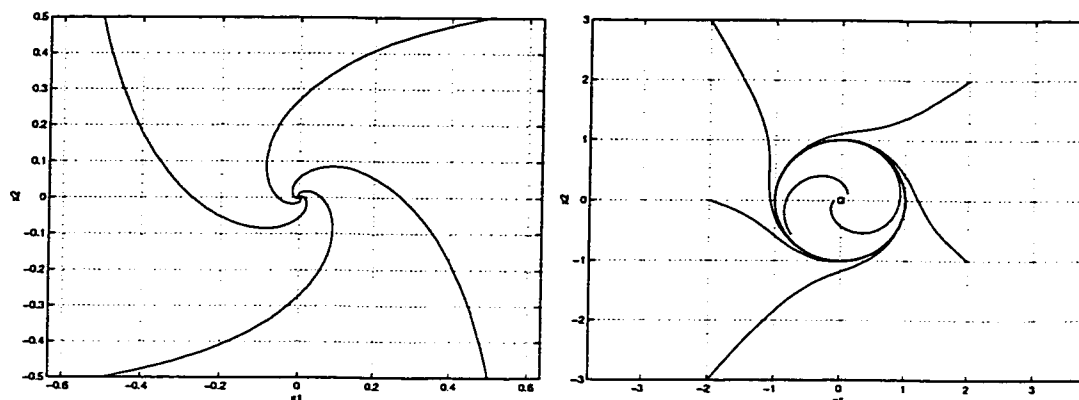


FIG. 5.1 – Diagramme de phase pour la bifurcation de Hopf supercritique.

Le diagramme de bifurcation de (5.1) est présenté à la figure 5.1.

5.1 Bifurcation de Hopf

Théorème 5.2 (BIFURCATION DE HOPF) *Soit*

$$\dot{u} = f(u, a) \tag{5.2}$$

un système d'équations différentielles, et $(u(a), a)$ une branche de solutions stationnaires de ce système. Si le jacobien $D_u f(u(a), a)$ possède une seule paire de valeurs propres complexes conjuguées $\alpha(a) \pm i\beta(a)$ et s'il existe un a_0 tel que $\alpha(a_0) = 0, \beta(a_0) \neq 0$ et $\dot{\alpha}(a_0) \neq 0$, alors une famille de solutions périodiques du système bifurque de la branche $(u(a), a)$ au point $(u(a_0), a_0)$.

Démonstration: Voir KUZNETSOV [28], pp. 84-93. ■

Supposons que $i\beta(a_0)$ soit une valeur propre simple de $D_u f(u(a_0), a_0)$ ayant ϕ_0 et ψ_0 comme vecteurs propres à droite et à gauche respectivement. Quelles hypothèses doit-on faire au sujet des dérivées de f pour qu'il se produise une bifurcation de Hopf au point $(u(a_0), a_0)$?

Puisque $i\beta(a_0)$ est simple, $\psi_0^\top \phi_0 \neq 0$.¹ Posons le problème

$$D_u f(u(a), a)\phi(a) = \kappa(a)\phi(a) \quad (5.3)$$

$$\psi^\top(a)D_u f(u(a), a) = \kappa(a)\psi^\top(a) \quad (5.4)$$

$$\psi^\top(a)\phi(a) = 1 \quad (5.5)$$

$$\phi^\top(a)\phi(a) = 1 \quad (5.6)$$

où $\kappa(a_0) = i\beta(a_0)$, $\phi(a_0) = \phi_0$ et $\psi(a_0) = \psi_0$. En dérivant (5.3), (5.4) et (5.5) par rapport à a , nous obtenons

$$\begin{aligned} D_{uu}f(u(a), a)\dot{u}(a)\phi(a) + D_{ua}f(u(a), a)\phi(a) + D_u f(u(a), a)\dot{\phi}(a) \\ = \dot{\kappa}(a)\phi(a) + \kappa(a)\dot{\phi}(a) \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \psi^\top(a)D_{uu}f(u(a), a)\dot{u}(a) + \psi^\top(a)D_{ua}f(u(a), a) + \dot{\psi}^\top(a)D_u f(u(a), a) \\ = \dot{\kappa}(a)\psi^\top(a) + \kappa(a)\dot{\psi}^\top(a) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\psi^\top(a)\dot{\phi}(a) + \dot{\psi}^\top(a)\phi(a) = 0. \quad (5.9)$$

En multipliant (5.7) à gauche par $\psi^\top(a)$ et (5.8) à droite par $\phi(a)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \psi^\top(a) [D_{uu}f(u(a), a)\dot{u}(a) + D_{ua}f(u(a), a)] \phi(a) + \psi^\top(a)D_u f(u(a), a)\dot{\phi}(a) \\ = \dot{\kappa}(a)\psi^\top(a)\phi(a) + \kappa(a)\psi^\top(a)\dot{\phi}(a) \end{aligned} \quad (5.10)$$

et

$$\begin{aligned} \psi^\top(a) [D_{uu}f(u(a), a)\dot{u}(a) + D_{ua}f(u(a), a)] \phi(a) + \dot{\psi}^\top(a)D_u f(u(a), a)\phi(a) \\ = \dot{\kappa}(a)\psi^\top(a)\phi(a) + \kappa(a)\dot{\psi}^\top(a)\phi(a). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Additionnons (5.10) à (5.11) pour obtenir

$$\begin{aligned} 2\psi^\top(a)D_{uu}f(u(a), a)\dot{u}(a)\phi(a) + 2\psi^\top(a)D_{ua}f(u(a), a)\phi(a) + \psi^\top(a)D_u f(u(a), a)\dot{\phi}(a) \\ + \dot{\psi}^\top(a)D_u f(u(a), a)\phi(a) = 2\dot{\kappa}(a)\psi^\top(a)\phi(a) + \kappa(a) \left(\dot{\psi}^\top(a)\phi(a) + \psi^\top(a)\dot{\phi}(a) \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

De (5.3), (5.4), (5.5) et (5.9) il est possible de déduire

$$2\psi^\top(a)D_{uu}f(u(a), a)\dot{u}(a)\phi(a) + 2\psi^\top(a)D_{ua}f(u(a), a)\phi(a) = 2\dot{\kappa}(a), \quad (5.13)$$

¹Dans cette section, tout comme dans celle qui suit, on utilise $^\top$ pour indiquer la transposée hermitienne d'une matrice.

et donc

$$\dot{\kappa}(a) = \psi^\top(a) [D_{uu}f(u(a), a)\dot{u}(a) + D_{ua}f(u(a), a)] \phi(a).$$

Mais $f(u(a), a) = 0$. Alors $D_u f(u(a), a)\dot{u}(a) + D_a f(u(a), a) = 0$, d'où

$$\dot{u}(a) = -[D_u f(u(a), a)]^{-1} D_a f(u(a), a). \quad (5.14)$$

Alors

$$\dot{\kappa}(a) = \psi^\top(a) [-D_{uu}f(u(a), a) (D_u f(u(a), a))^{-1} D_a f(u(a), a) + D_{ua}f(u(a), a)] \phi(a).$$

Mais

$$\kappa(a) = \alpha(a) + i\beta(a).$$

Il se produit donc une bifurcation de Hopf au point $(u(a_0), a_0)$ si

$$\Re(\psi^\top(a) [-D_{uu}f(u(a), a) (D_u f(u(a), a))^{-1} D_a f(u(a), a) + D_{ua}f(u(a), a)] \phi(a)) \neq 0. \quad (5.15)$$

Cette condition sera également nécessaire à la section 5.3.

5.2 Implémentation et produit extérieur

Supposons que $x(s) = (u(s), a(s))$ soit une branche de solutions stationnaires de (2.1). D'après le théorème de bifurcation de Hopf, il se produit une bifurcation de Hopf à $x(s_0) = (u(s_0), a(s_0))$ si le jacobien $D_u f(u(s_0), a(s_0))$ possède une paire de valeurs propres imaginaires² qui traversent l'axe imaginaire à une vitesse non-nulle.

Nous aimerions trouver une fonction-test pour identifier les points de bifurcation de Hopf. Définissons

$$\tau_h(s) = \prod_{p < q} (\lambda_p(s) + \lambda_q(s)), \quad (5.16)$$

où $\lambda_k(s)$, $k = 1, \dots, n$, sont les valeurs propres du jacobien $D_u f(u(s), a(s))$. Cette fonction, définie sur $x(s)$, s'appelle la **fonction-test de bifurcation de Hopf**. En effet, s'il existe $1 \leq p < q \leq n$ tels que $\lambda_p(s_0) = \omega i$ et $\lambda_q(s_0) = -\omega i$, alors $\tau_h(s_0) = 0$.

²C'est-à-dire complexes avec partie réelle nulle.

Cependant, lorsque $\tau_h(s_0) = 0$, il ne se produit pas nécessairement une bifurcation de Hopf. Il est possible que les valeurs propres λ_p, λ_q soient respectivement κ et $-\kappa$, où $\kappa \in \mathbb{R}$. On doit écarter de tels cas. Lorsque $\tau_h(s_0) = 0$ et $\lambda_p \neq -\lambda_q$ pour tout $\lambda_p, \lambda_q \in \mathbb{R}$, et que (5.15) est satisfaite, il se produit une bifurcation de Hopf à $x(s_0)$.

Supposons que $(u(s_1), a(s_1))$ soit un point d'équilibre de (2.1) et que l'on approxime $(u(s_1 + i\Delta s), a(s_1 + i\Delta s))$ par (u_i, a_i) , pour $i = 1, \dots, M$, à l'aide de la continuation par la longueur d'arc.

Soient $s_{i-1} = s_1 + (i-1)\Delta s$ et $s_i = s_1 + i\Delta s$ tels que $\tau_h(s_i)\tau_h(s_{i-1}) < 0$. On utilise la méthode de Newton pour trouver la racine s_0 qui se situe entre s_{i-1} et s_i , ainsi que les vecteurs (u_0, a_0) et (\dot{u}_0, \dot{a}_0) qui sont des approximations de $(u(s_0), a(s_0))$ et $(\dot{u}(s_0), \dot{a}(s_0))$ respectivement. Si le jacobien $D_u f(u_0, a_0)$ possède une paire de valeurs propres imaginaires conjugués, que $\lambda_p \neq -\lambda_q$ pour toutes les valeurs propres réelles λ_p, λ_q , et que (5.15) est satisfaite, il se produit une bifurcation de Hopf à (u_0, a_0) .

Les valeurs propres du jacobien $D_u f(u(s), a(s))$ doivent être connues afin de calculer $\tau_h(s)$, un processus qui peut s'avérer coûteux numériquement. On a recours à l'algèbre extérieure pour simplifier les calculs.

Définition 5.3 Soit V un espace vectoriel. Le **produit extérieur de V** , dénoté $V \wedge V$, est un espace vectoriel pour lequel il existe une application bilinéaire alternée³

$$\wedge : V \times V \rightarrow V \wedge V$$

satisfaisant la propriété universelle suivante : pour toute application bilinéaire alternée

$$\beta : V \times V \rightarrow U,$$

il existe une application linéaire unique $f : V \wedge V \rightarrow U$ de sorte que le diagramme

³ Une application bilinéaire $\beta : V \times V \rightarrow U$ est **alternée** si $\beta(v_1, v_2) = 0$ lorsque $v_1 = v_2$. Puisque β est bilinéaire,

$$0 = \beta(v + w, v + w) = \beta(v, v) + \beta(v, w) + \beta(w, v) + \beta(w, w) = \beta(v, w) + \beta(w, v),$$

d'où $\beta(v, w) = -\beta(w, v)$.

qui suit soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 V \times V & \xrightarrow{\wedge} & V \wedge V \\
 \downarrow \beta & \nearrow !f & \\
 U & &
 \end{array}$$

Si $\{e_i\}_{i=1}^n$ est une base de V , l'ensemble $\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq n\}$ est une base de $V \wedge V$.

Soient $A, B : V \rightarrow V$ deux applications linéaires. Définissons

$$\beta_{A,B} : V \times V \rightarrow V \wedge V$$

par

$$\beta_{A,B}(u, v) = \frac{1}{2} (Au \wedge Bv + Bu \wedge Av).$$

L'application $\beta_{A,B}$ est bilinéaire pour tout choix de A et B . L'application $\beta_{A,B}$ est aussi alternée puisque $u \wedge v = -v \wedge u$ pour tout $u, v \in V$. En effet, ceci implique

$$\beta_{A,B}(u, u) = \frac{1}{2} (Au \wedge Bu + Bu \wedge Au) = \frac{1}{2} (Au \wedge Bu - Au \wedge Bu) = 0.$$

Par la propriété universelle du produit extérieur, il existe une application linéaire unique $A \odot B : V \wedge V \rightarrow V \wedge V$ telle que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 V \times V & \xrightarrow{\beta_{A,B}} & V \wedge V \\
 \downarrow \wedge & \nearrow A \odot B & \\
 V \wedge V & &
 \end{array}$$

On appelle cette application linéaire le **produit extérieur des applications linéaires A et B** . Si $\dim V = n$, alors

$$\dim V \wedge V = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Soit δ la fonction

$$\delta(p, q) = p + \frac{(q-1)(q-2)}{2},$$

définie pour $1 \leq p < q \leq n$. Cette fonction permet d'indexer la matrice $A \odot B$. Si $\{e_i\}_{i=1}^n$ est la base canonique de V , alors $\{e_k \wedge e_l\}_{k < l}$ est une base de $V \wedge V$. Posons

$$e_{kl} = \begin{cases} e_k \wedge e_l & \text{si } k < l \\ 0 & \text{si } k = l \\ -e_l \wedge e_k & \text{si } k > l. \end{cases}$$

En appliquant $A \odot B$ à chacun des éléments de cette base, nous pouvons déterminer la forme de l'application linéaire. En effet, puisque $A \odot B(e_k \wedge e_l) = \beta_{A,B}(e_k, e_l)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \beta_{A,B}(e_k, e_l) &= \frac{1}{2} (Ae_k \wedge Be_l + Be_k \wedge Ae_l) \\ &= \sum_{p < q} \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} a_{pk} & b_{qk} \\ a_{pl} & b_{ql} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{qk} & b_{pk} \\ a_{ql} & b_{pl} \end{vmatrix} \right) e_{pq}, \end{aligned}$$

d'où

$$A \odot B_{\delta(p,q), \delta(k,l)} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} a_{pk} & b_{qk} \\ a_{pl} & b_{ql} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{qk} & b_{pk} \\ a_{ql} & b_{pl} \end{vmatrix} \right),$$

pour $1 \leq p < q \leq n$, $1 \leq k < l \leq n$. Le théorème qui suit explique l'importance du produit extérieur.

Théorème 5.4 (STÉPHANOS, [37]) *Supposons que A soit une matrice carrée de dimension n , possédant les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors les valeurs propres de $2A \odot I$ sont $\lambda_p + \lambda_q$, où $1 \leq p < q \leq n$.*

Démonstration: Soient v_1, \dots, v_n des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A . Formons

$$\begin{aligned} v_{pq} &= v_p \wedge v_q \\ \lambda_{pq} &= \lambda_p + \lambda_q \end{aligned}$$

pour $1 \leq p < q \leq n$. Nous montrons que v_{pq} est un vecteur propre de $2A \odot I$ associé

à la valeur propre λ_{pq} de $2A \odot I$. En effet, pour $1 \leq p < q \leq n$,

$$\begin{aligned}
 (2A \odot I)v_{pq} &= \beta_{2A,I}(v_p, v_q) \\
 &= \frac{1}{2}(2Av_p \wedge v_q + v_p \wedge 2Av_q) \\
 &= Av_p \wedge v_q + v_p \wedge Av_q \\
 &= \lambda_p v_p \wedge v_q + v_p \wedge \lambda_q v_q \\
 &= (\lambda_p + \lambda_q)(v_p \wedge v_q) \\
 &= (\lambda_p + \lambda_q)v_{pq}.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons alors définir (5.16) le long de $(u(s), a(s))$ par

$$\tau_h(s) = \det(2D_u f(u(s), a(s)) \odot I),$$

ce qui permet d'éviter le calcul des valeurs propres du jacobien. La matrice $2A \odot I$ est une matrice carrée de dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ dont les éléments sont

$$2A \odot I_{\delta(p,q), \delta(k,l)} = \begin{cases} -a_{pl} & \text{si } q = k, \\ a_{pk} & \text{si } k \neq p \text{ et } l = q, \\ a_{pp} + a_{qq} & \text{si } k = p \text{ et } l = q, \\ a_{ql} & \text{si } k = p \text{ et } l \neq q, \\ -a_{qk} & \text{si } l = p, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (5.17)$$

Exemple 5.5 (PRODUIT EXTÉRIEUR)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$2A \odot I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.3 Continuation (Hopf)

Soient (u_0, a_0, μ_0) un point de bifurcation de Hopf du système (3.12), ϕ_0 le vecteur propre à droite associé à la valeur propre $i\beta_0$ de $D_u f(u_0, a_0, \mu_0)$ et ψ_0 le vecteur propre à gauche associé à cette même valeur propre. Nous cherchons une branche de points de bifurcation de Hopf de (3.12) dépendant de μ et passant par (u_0, a_0, μ_0) .

5.3.1 Continuation par le paramètre

Pour ce faire, nous pouvons résoudre le système

$$\begin{aligned} f(u, a, \mu) &= 0 \\ D_u f(u, a, \mu)\phi - i\beta\phi &= 0 \\ \phi^\top \phi_0 - 1 &= 0. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Le vecteur ϕ_0 appartient à la solution de référence $(u_0, \phi_0, \beta_0, a_0, \mu_0)$ qui est, en pratique, la dernière solution calculée sur la branche. Réécrivons (5.18) sous la forme $G_{0,f}(u, \phi, \beta, a, \mu) = 0$, où

$$G_{0,f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$$

est définie par

$$G_{0,f}(u, \phi, \beta, a, \mu) = (f(u, a, \mu), D_u f(u, a, \mu)\phi - i\beta\phi, \phi^\top \phi_0 - 1).$$

Posons $Y \equiv (u, \phi, \beta, a)$. Une branche de points d'équilibre de (5.18) correspondra alors à une branche de points de bifurcation de Hopf de (3.12). Il est naturel d'essayer de continuer une solution (Y_0, μ_0) de (5.18) en utilisant μ comme paramètre de continuation. Le théorème des fonctions implicites implique l'existence d'une branche $Y(\mu)$ de solutions de (5.18) tant et aussi longtemps que

$$D_Y G_{0,f}(Y_0) = \begin{pmatrix} D_u f(u_0, a_0, \mu_0) & 0 & 0 & D_a f(u_0, a_0, \mu_0) \\ D_{uu} f(u_0, a_0, \mu_0)\phi_0 & D_u f(u_0, a_0, \mu_0) - i\beta_0 \text{Id} & -i\phi_0 & D_{ua} f(u_0, a_0, \mu_0)\phi_0 \\ 0^\top & \phi_0^\top & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

n'est pas une matrice singulière. Il existe donc une branche de solutions stationnaires $(Y(\mu), \mu)$ de (5.18) qui correspond à une branche $(u(\mu), a(\mu), \mu)$ de points de bifurcation de Hopf de (3.12).

Réécrivons le jacobien ci-dessus sous la forme

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & c_1 \\ C & D & -i\phi_0 & c_2 \\ 0^\top & \phi_0^\top & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

où $\ker D = \mathbb{C}\{\phi_0\}$, $\ker D^\top = \mathbb{C}\{\psi_0\}$ et $\psi_0^\top \phi_0 = \phi_0^\top \psi_0 = 1$. Nous démontrons que B n'est pas une matrice singulière en construisant une solution non-triviale $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{C}^n$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ du système

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & c_1 \\ C & D & -i\phi_0 & c_2 \\ 0^\top & \phi_0^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}, \quad \text{où } f \in \mathbb{R}^n, g \in \mathbb{C}^n, h \in \mathbb{C}. \quad (5.20)$$

Par hypothèse, A est inversible, et $Ax + c_1 z_2 = f$. Donc

$$x = A^{-1}f - z_2 A^{-1}c_1. \quad (5.21)$$

En substituant (5.21) dans la deuxième équation définie par (5.20), nous obtenons

$$CA^{-1}f - z_2 CA^{-1}c_1 + Dy - z_1 i\phi_0 + z_2 c_2 = g.$$

En multipliant à gauche par ψ_0^\top le tout devient

$$\psi_0^\top CA^{-1}f - z_2 \psi_0^\top CA^{-1}c_1 - z_1 \psi_0^\top i\phi_0 + z_2 \psi_0^\top c_2 = \psi_0^\top g, \quad (5.22)$$

puisque $\ker D^\top = \mathbb{C}\{\psi_0\}$. Posons $\tilde{f} = CA^{-1}f$, $\tilde{c}_1 = CA^{-1}c_1$. Alors (5.22) se réécrit

$$\psi_0^\top \tilde{f} - z_2 \psi_0^\top \tilde{c}_1 - iz_1 + z_2 \psi_0^\top c_2 = \psi_0^\top g,$$

puisque par hypothèse $\psi_0^\top \phi_0 = 1$, d'où

$$iz_1 + z_2 \psi_0^\top (\tilde{c}_1 - c_2) = \psi_0^\top (\tilde{f} - g). \quad (5.23)$$

Puisque $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, (5.23) devient

$$\begin{aligned} z_2 \Re(\psi_0^\top(\bar{c}_1 - c_2)) &= \Re(\psi_0^\top(\bar{f} - g)) \\ z_1 + z_2 \Im(\psi_0^\top(\bar{c}_1 - c_2)) &= \Im(\psi_0^\top(\bar{f} - g)), \end{aligned}$$

d'où

$$z_2 = \frac{\Re(\psi_0^\top(\bar{f} - g))}{\Re(\psi_0^\top(\bar{c}_1 - c_2))} \quad (5.24)$$

et

$$z_1 = -z_2 \Im(\psi_0^\top(\bar{c}_1 - c_2)) + \Im(\psi_0^\top(\bar{f} - g)). \quad (5.25)$$

Nous devons nous assurer que $\Re(\psi_0^\top(\bar{c}_1 - c_2)) \neq 0$. Mais

$$\begin{aligned} \psi_0^\top(\bar{c}_1 - c_2) &= \psi_0^\top(CA^{-1}c_1 - c_2) \\ &= \psi_0^\top(D_{uu}f(u_0, a_0, \mu_0)(\phi_0)(D_u f(u_0, a_0, \mu_0))^{-1}D_a f(u_0, a_0, \mu_0)) \\ &\quad - D_{ua}f(u_0, a_0, \mu_0)\phi_0 \\ &= \psi_0^\top(D_{uu}f(u_0, a_0, \mu_0)((D_u f(u_0, a_0, \mu_0))^{-1}D_a f(u_0, a_0, \mu_0)) \\ &\quad - D_{ua}f(u_0, a_0, \mu_0))\phi_0 \\ &= -\dot{\kappa}_0. \end{aligned}$$

Puisque (u_0, a_0, μ_0) est un point de bifurcation de Hopf, $\Re(\dot{\kappa}_0) \neq 0$, d'où

$$\Re(\psi_0^\top(\bar{c}_1 - c_2)) \neq 0.$$

En substituant z_2 dans $Ax + z_2c_1 = f$, nous obtenons x . Calculons maintenant une solution particulière y_p de

$$Dy = g - Cx + iz_1\phi_0 - z_2c_2,$$

à l'aide de la méthode de Newton. La solution homogène y_h est la solution du système

$$Dy_h = 0,$$

ce qui implique que $y_h \in \mathbb{C}\{\phi_0\}$. La solution générale est alors

$$y = y_p + y_h = y_p + k\phi_0, \quad k \in \mathbb{C}. \quad (5.26)$$

Cependant, la troisième équation dicte que $\phi_0^\top y = h$. Donc

$$\phi_0^\top (y_p + k\phi_0) = h,$$

d'où $k = h - \phi_0^\top y_p$, puisque $\phi_0^\top \phi_0 = 1$ par hypothèse. Alors

$$y = y_p + (h - \phi_0^\top y_p)\phi_0. \quad (5.27)$$

Le système (5.20) possède donc la solution unique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}f + z_2 A^{-1}c_1 \\ y_p + (h - \phi_0^\top y_p)\phi_0 \\ -z_2 \Im(\psi_0^\top (CA^{-1}c_1 - c_2)) + \Im(\psi_0^\top (CA^{-1}f - g)) \\ \frac{\Re(\psi_0^\top (CA^{-1}f - g))}{\Re(\psi_0^\top (CA^{-1}c_1 - c_2))} \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors d'implémenter l'algorithme 3.1 pour continuer le point d'équilibre (Y_0, μ_0) de (5.18) par le paramètre μ , ce qui correspond à continuer le point de bifurcation de Hopf (u_0, a_0, μ_0) de (3.12) par ce même paramètre.

5.3.2 Implémentation : continuation par le paramètre

Lorsque l'on applique l'algorithme 3.1, on doit, à l'étape 4, résoudre le système

$$D_Y G_{0,f}(Y_i^{[n]}, \mu + i\Delta\mu)\Delta Y_i^{[n]} = -G_{0,f}(Y_i^{[n]}, \mu_0 + i\Delta\mu).$$

Ce système s'écrit sous la forme (5.20). Il est aisé de le résoudre à l'aide de l'algorithme présenté au tableau 5.1.

5.3.3 Continuation par la longueur d'arc

Il est possible qu'une branche de solutions stationnaires de (5.18) possède un point limite lorsque μ est utilisé comme paramètre de continuation. Pour éviter ce problème,

Algorithme (RÉSOLUTION DU SYSTÈME LINÉAIRE (5.20))*Soit le système*

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & c_1 \\ C & D & -i\phi_0 & c_2 \\ 0^\top & \phi_0^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, $C, D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $\ker D = \{\phi_0\}$, $\ker D^\top = \mathbb{R}\{\psi_0\}$, c_1 et c_2 des vecteurs aux dimensions appropriées et $f \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{C}^n$, $h \in \mathbb{C}$. La solution de ce système est calculée de la façon suivante :

-
- ENTRÉE : A : matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ non-singulière ;
 C, D : matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$;
 c_1, f : vecteurs de $\mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$;
 c_2, ϕ, g : vecteurs de $\mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{C})$;
 h : scalaire de \mathbb{C} ;
 - SORTIE : x : vecteur de $\mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$;
 y : vecteur de $\mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{C})$;
 z_1, z_2 : scalaires de \mathbb{R} ;
-

1. Résoudre $D^\top \psi_0 = 0$;
2. Résoudre $A\hat{f} = f$;
3. $\bar{f} = C\hat{f}$;
4. Résoudre $A\hat{c}_1 = c_1$;
5. $\bar{c}_1 = C\hat{c}_1$;
6. $z_2 = \frac{\Re(\psi_0^\top(\bar{f}-g))}{\Re(\psi_0^\top(\bar{c}_1-c_2))}$;
7. $z_1 = -z_2 \Im(\psi_0^\top(\bar{c}_1 - c_2)) + \Im(\psi_0^\top(\bar{f} - g))$;
8. Résoudre $Ax = f - z_2 c_1$;
9. Trouver une solution particulière de $Dy_p = g - Cx + iz_1 \phi_0 - z_2 c_2$;
10. $\alpha = h - \phi_0 y_p$;
11. $y = y_p + \alpha \phi_0$;

FIN.

TAB. 5.1 – Résolution du système linéaire (5.20)

nous passons à la continuation par la longueur d'arc.

Soient $(u(s_0), a(s_0), \mu(s_0))$ un point de bifurcation de Hopf de (3.12),

$$\ker (D_u f(u(s_0), a(s_0), \mu(s_0)) - i\beta(s_0) \text{Id}) = \mathbb{R}\{\phi(s_0)\}$$

et

$$\ker (D_u f(u(s_0), a(s_0), \mu(s_0))^T - i\beta(s_0) \text{Id}) = \mathbb{R}\{\psi(s_0)\}.$$

Pour calculer une branche de points de bifurcation de Hopf de (3.12), nous résolvons le système

$$\begin{aligned} G_{0,f}(u, \phi, \beta, a, \mu) &= 0 \\ (u - u(s_0))^T \dot{u}(s_0) + (\phi - \phi(s_0))^T \dot{\phi}(s_0) + (\beta - \beta(s_0)) \dot{\beta}(s_0) \\ &+ (a - a(s_0)) \dot{a}(s_0) + (\mu - \mu(s_0)) \dot{\mu}(s_0) - \Delta s = 0, \end{aligned} \tag{5.28}$$

où $W \approx W(s_0 + \Delta s)$ pour $W(s) \equiv (u(s), \phi(s), \beta(s), a(s), \mu(s))$ et Δs petit.

Pour pouvoir appliquer l'algorithme de continuation par la longueur d'arc, et ainsi calculer une branche de points d'équilibre $W(s)$ de (5.28), il suffit de vérifier que

$$B = \begin{pmatrix} D_W G_{0,f}(W(s_0)) \\ \dot{W}(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_Z G_{0,f}(Z(s_0)) & D_\mu G(u(s_0), a(s_0), \mu(s_0)) \\ \dot{Z}(s_0) & \dot{\mu}(s_0) \end{pmatrix},$$

où $Z \equiv (u, \phi, \beta, a)$, est inversible.

Mais B a la forme

$$\begin{pmatrix} A & c \\ b^T & d \end{pmatrix},$$

et est donc inversible (voir tableau 3.4). On peut alors implémenter l'algorithme présenté au tableau 3.3 pour continuer le point d'équilibre $W(s_0)$ de (5.28) par la longueur d'arc, ce qui correspond à continuer le point de bifurcation de Hopf $(u(s_0), a(s_0), \mu(s_0))$ de (3.12) par la longueur d'arc.

Les solutions périodiques qui apparaissent lors d'une bifurcation de Hopf peuvent être calculées; c'est ce dont traite la prochaine section.

5.4 Calcul des solutions périodiques

Supposons que (5.2) subisse une bifurcation de Hopf lorsque $a = a_0$ de sorte que le système possède une solution T_a -périodique $u(t) = u(t; a)$ pour de petites valeurs de $a > a_0$. Comment calcule-t-on cette solution? On doit savoir où commencer les calculs, c'est-à-dire que l'on cherche la valeur pour t_0 . Si l'on connaît les bornes de l'image de $u_i(t)$ pour un certain indice i , on résoud le problème en trouvant $u(t)$ tel que

$$p(u, a) \equiv u_i(t_0) - \eta = 0, \text{ où } \eta = \eta(i, a) \in \text{Im } u_i(t).$$

Si on connaît un point critique de $u_i(t)$, c'est-à-dire un temps t_0 où $u_i(t)$ atteint un maximum ou un minimum pour un indice i quelconque, on résoud le problème en trouvant $u(t)$ de sorte que

$$p(u, a) \equiv f_i(u(t_0), a) = \dot{u}_i(t_0) = 0.$$

Dans ce cas, on peut choisir l'indice i tel que $f_i(u(0), a)$ ait la structure la plus simple qui soit. L'équation $p(u, a) = 0$ est la **condition de phase**. Il existe d'autres possibilités (voir SEYDEL [36]).

La période T d'une solution périodique $u(t)$ n'est généralement pas connue. Elle se calcule en même temps que la solution périodique elle-même. Lorsque l'on a une condition de phase, on impose un condition de périodicité,

$$u(0) - u(T) = 0,$$

ce qui permet de fixer la période T . Les solutions périodiques $u(t)$ de période T sont calculées en résolvant le système

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u, a) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec les conditions aux bornes

$$\begin{pmatrix} u(0) - u(T) \\ p(u, a) \end{pmatrix} = 0.$$

En général, on renormalise l'intervalle de périodicité, de sorte que $T = 1$. Le système à résoudre devient alors

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tf(u, a) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec les conditions aux bornes

$$\begin{pmatrix} u(0) - u(1) \\ p(u, a) \end{pmatrix} = 0,$$

où $0 \leq t \leq 1$. En écrivant

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u \\ T \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(\tilde{u}, a) = \begin{pmatrix} Tf(u, a) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{r} = \begin{pmatrix} u(0) - u(1) \\ p(u, a) \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\tilde{u}' = \tilde{f}(\tilde{u}, a), \quad \tilde{r}(\tilde{u}(0), \tilde{u}(1)) = 0. \quad (5.29)$$

On peut alors aisément résoudre (5.29) en utilisant les méthodes disponibles⁴ pour les problèmes aux valeurs limites (KELLER [24], KUZNETSOV [28]).

⁴Différences finies, collocation orthogonale, *shooting* et *multi-shooting*, etc...

Chapitre 6

Exemples et applications

Les résultats obtenus sont implémentés avec MATLAB par l'algorithme `hopfss.m`, dont le préambule est

```
function [hopf,steady]=hopfss(F,D_xF,x_0,s_0,Delta_s,epsilon,lim,M)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% This script finds a branch of solutions to the parametrized problem      %
% F(x)=0, F:R^(n+1) --> R^n, with initial solution x_0, using a          %
% pseudo arc length continuation algorithm.                                %
%                                                                            %
% INPUT                                                                      %
%     F := name of the M-file function containing F      (column vector) %
%     Dx F := name of the M-file function containing D_x F (matrix)      %
%     x_0 := known value of stationnary solution        (column vector) %
%     s_0 := starting value, usually 0                  (scalar)        %
%     Delta_s := increment for continuation              (positive scalar) %
%     epsilon := tolerance in Newton's method           (positive scalar) %
%     lim := maximum number of iterations in Newton's method (positive integer) %
%     M := number of solutions to find on branch        (positive integer) %
% OUTPUT                                                                      %
%     figure(1) := bifurcation diagram, for each component                %
%     figure(2) := graph of test functions for fold, hopf and steady-state %
%     figure(3) := bifurcation diagram, with norm of solutions            %
%     hopf := possible hopf bifurcation points on branch                  %
%     steady := possible steady-state bifurcation points on branch        %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Nous utilisons cet algorithme pour résoudre 3 types de problèmes :

1. un système typique de la forme

$$\dot{u} = f(u, a), \quad u, \dot{u} \in \mathbb{R}^n, \quad a \in \mathbb{R};$$

2. un système pour lequel l'algorithme doit être modifié, et
3. un système où l'espace des paramètres est de dimension deux.

6.1 Modèle proie-prédateur

Examinons en détail le système

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= 3u_1(1 - u_1) - u_1u_2 - a(1 - e^{-5u_1}) \\ \dot{u}_2 &= -u_2 + 3u_1u_2. \end{aligned} \tag{6.1}$$

présenté à la section 4.5.

6.1.1 Analyse numérique

Posons $x = (u_1, u_2, a)$. Il est clair que $(0, 0, 0)$ est une solution stationnaire régulière de (6.1). On calcule $M = 40$ solutions sur la branche de solutions stationnaires passant par $(0, 0, 0)$, avec $s_0 = 0$, $\Delta s = \pi/50$, $\epsilon = 0.001$, et en faisant au plus 200 itérations de Newton.

```
>> [h,s]=hopfss('ppF','ppDxF',[0;0;0],0,pi/50,0.001,200,40)
```

```
Warning: One or more output arguments not assigned during call to 'hopfss'.
```

```
s =
```

```
 -0.0628
```

```
      0
```

```
  0.5428
```

L'algorithme calcule les fonctions-test τ_h (5.16) et τ_{SS} (4.12) qui déterminent la présence de bifurcations. D'après la figure 6.1, il peut se produire une bifurcation de Hopf ainsi qu'une bifurcation de solutions stationnaires sur cette branche. Dans le premier cas, l'algorithme détermine que la racine de la fonction-test est due à la présence d'une paire de valeurs propres réelles de signe opposé, et donc qu'il ne se produit pas de bifurcation de Hopf. Ce résultat est indiqué par l'apparition de la ligne

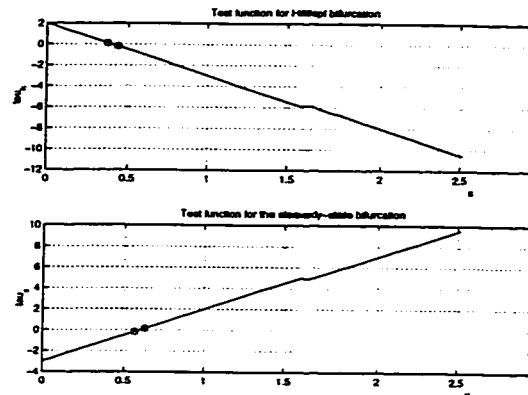


FIG. 6.1 – Fonctions-tests pour le système (6.1); première branche.

Warning: One or more output arguments not assigned during call to 'hopfss'.
à l'écran. L'algorithme détermine également qu'il se produit une bifurcation de so-

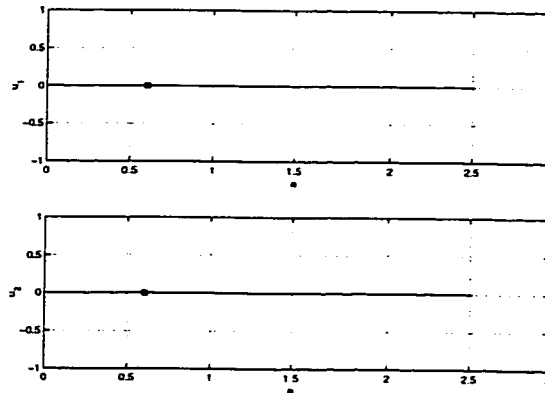


FIG. 6.2 – Diagramme de bifurcation du système (6.1).

lutions stationnaires, trouve l'endroit exacte où elle se produit, et l'indique par une boîte à la figure 6.2. Il calcule de plus un point sur la branche de solutions stationnaires qui bifurque, et le place en mémoire dans le vecteur s . Le vecteur h est un vecteur vide puisqu'il ne se produit pas de bifurcation de Hopf sur la branche.

On se sert de s comme point de départ et on obtient

```
>> [h1,s1]=hopfss('ppF','ppDxF',s,0,pi/50,0.001,200,40)
```

Warning: One or more output arguments not assigned during call to 'hopfss'.

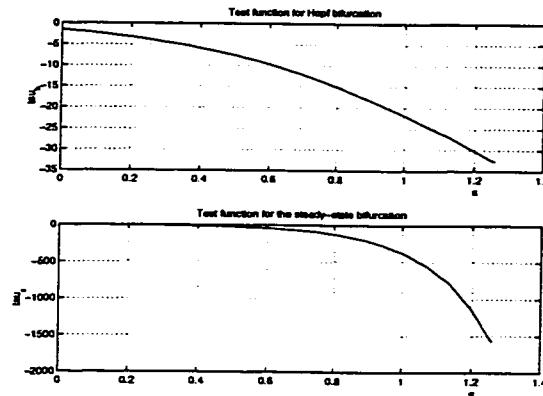


FIG. 6.3 – Fonctions-tests pour le système (6.1); deuxième branche.

L'algorithme calcule de nouveau les fonctions qui déterminent la présence de bifurcations. D'après la figure 6.3, il ne se produit aucune bifurcation, d'où la ligne

Warning: One or more output arguments not assigned during call to 'hopfss'.

Les vecteurs `h1` et `s1` sont tous deux vides.

En se servant du même point de départ, mais en se dirigeant dans la direction opposée, on obtient

```
>> [h1,s1]=hopfss('ppF','ppDxF',s,0,-pi/50,0.001,200,40)
```

Warning: One or more output arguments not assigned during call to 'hopfss'.

`s1 =`

```
-0.0000    0.3333
 0.0000   -0.0584
 0.6845    0.8459
```

L'algorithme calcule encore une fois les fonctions qui déterminent la présence de bifurcations. D'après la figure 6.4, il peut se produire deux bifurcation de Hopf ainsi que deux bifurcation de solutions stationnaires. L'algorithme détermine qu'il ne se produit pas de bifurcation de Hopf, d'où la ligne

Warning: One or more output arguments not assigned during call to 'hopfss'.

L'algorithme détermine qu'il se produit effectivement deux bifurcations de solutions stationnaires, trouve exactement où elles se produisent, les indique à l'aide d'une boîte à la figure 6.5, calcule un point sur chacune des branches de solutions stationnaires

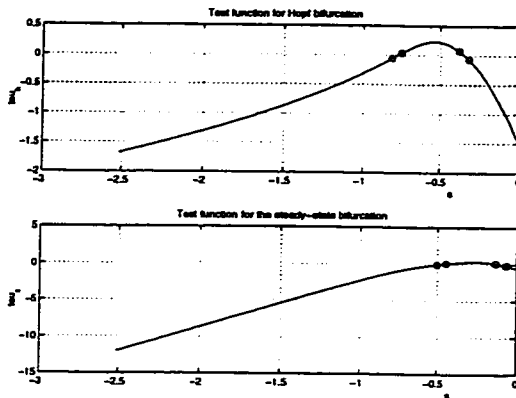


FIG. 6.4 – Fonctions-tests pour le système (6.1) ; deuxième branche.

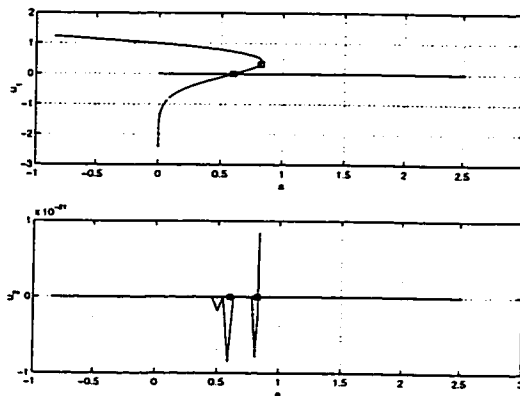


FIG. 6.5 – Diagramme de bifurcation du système (6.1).

qui bifurquent et les place en mémoire dans la matrice $s1$. On ne considère cependant que la deuxième colonne, puisque la première colonne correspond à la bifurcation de la première branche à la deuxième branche. On se sert maintenant de $s1(:,2)$ comme point de départ, et on obtient

```
>> [h2,s2]=hopfss('ppF','ppDxF',s1(:,2),0,pi/50,0.001,200,40)
```

```
h2 =
    0.3333
    0.3658
    0.6716
```

```
s2 =
    0.3957
   -0.0000
    0.8325
```

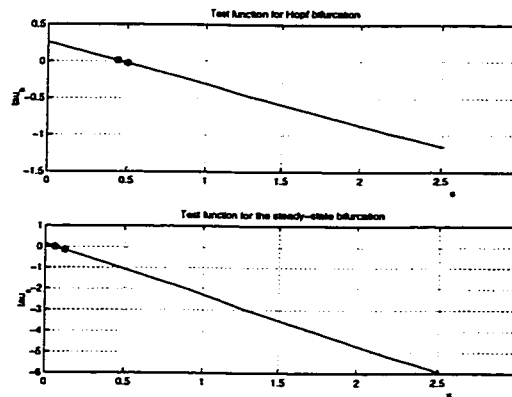


FIG. 6.6 – Fonctions-tests pour le système (6.1); troisième branche.

L'algorithme calcule les fonctions qui déterminent la présence de bifurcations. D'après la figure 6.6, il peut se produire une bifurcation de Hopf ainsi qu'une bifurcation de solutions stationnaires. L'algorithme détermine qu'il se produit effectivement une bifurcation de solution stationnaire, calcule l'emplacement exact de cette bifurcation, calcule un nouveau point sur la branche qui bifurque et le place en mémoire dans la matrice `s2`. Cependant, cette bifurcation correspond à la bifurcation de la deuxième branche à la troisième branche et a déjà été identifiée. L'algorithme détermine qu'il se produit de plus une bifurcation de Hopf sur la troisième branche, en calcule l'emplacement exact (qu'il préserve dans le vecteur `h2`) et l'indique par un cercle à la figure 6.7. On recommence finalement avec le même point de départ sur la troisième branche, mais dans la direction opposée et on obtient

```
>> [h3,s3]=hopfss('ppF','ppDxF',s1(:,2),0,-pi/50,0.001,200,40)
```

Warning: One or more output arguments not assigned during call to 'hopfss'.

L'algorithme calcule de nouveau les fonctions qui déterminent la présence de bifurcations. D'après la figure 6.8, il ne se produit aucune bifurcation, d'où la ligne

Warning: One or more output arguments not assigned during call to 'hopfss'.

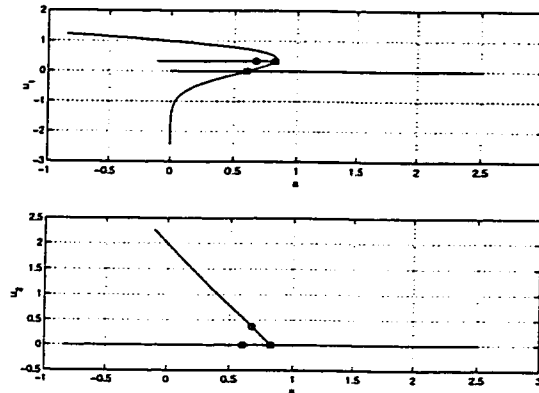


FIG. 6.7 – Diagramme de bifurcation du système (6.1).

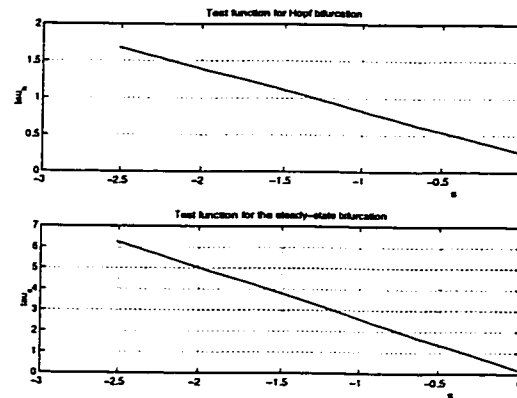


FIG. 6.8 – Fonctions-tests pour le système (6.1); troisième branche.

Les vecteurs h_3 et s_3 sont tous deux vides. Finalement, on présente le diagramme de bifurcation obtenu à la figure 6.9. Puisque le système (6.1) est planaire, on peut également présenter un diagramme de bifurcation dans l'espace (cf. figure 6.10).

6.1.2 Analyse algébrique

Est-ce que l'algorithme identifie toutes les bifurcations qui se produisent? On procède à l'analyse de (6.1). Le jacobien du champs de vecteurs par rapport à (u_1, u_2)

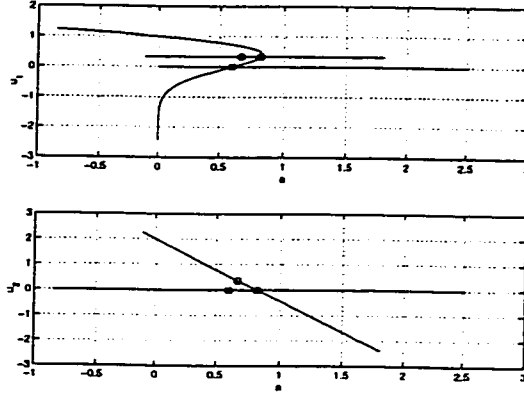


FIG. 6.9 – Diagramme de bifurcation du système (6.1).

est

$$\begin{pmatrix} 3 - 6u_1 - u_2 - 5ae^{-5u_1} & -u_1 \\ 3u_2 & -1 + 3u_1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Les valeurs propres de (6.2) sont

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} (2 - 3u_1 - u_2 - 5ae^{-5u_1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{5ae^{-5u_1} (24u_1 + 2u_2 + 5ae^{-5u_1} - 8) + 81u_1^2 + 6u_1u_2 + u_2^2 - 72u_1 - 8u_2 + 16}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} (2 - 3u_1 - u_2 - 5ae^{-5u_1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{5ae^{-5u_1} (24u_1 + 2u_2 + 5ae^{-5u_1} - 8) + 81u_1^2 + 6u_1u_2 + u_2^2 - 72u_1 - 8u_2 + 16}. \end{aligned}$$

Un point d'équilibre de (6.1) doit satisfaire à

$$3u_1(1 - u_1) = u_1u_2 + a(1 - e^{-5u_1}) \quad (6.3)$$

$$3u_1u_2 = u_2. \quad (6.4)$$

Si $u_2 \neq 0$, alors $u_1 = \frac{1}{3}$. En substituant dans (6.3), on obtient $u_2 = 2 - 3a(1 - e^{-5/3})$, d'où

$$x(a) = \left(\frac{1}{3}, 2 - 3a(1 - e^{-5/3}), a \right)$$

est une branche de solutions stationnaires de (6.1), où le paramètre de continuation est a . Il ne se produira pas de bifurcation en point limite, puisque la branche est linéaire.

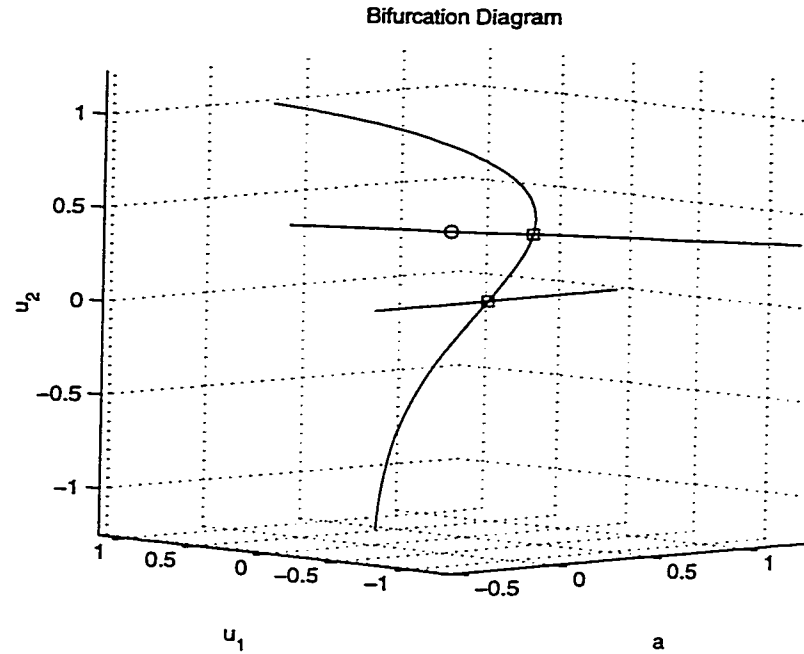


FIG. 6.10 – Diagramme de bifurcation du système (6.1) dans l'espace.

En fait, cette branche correspond à la troisième branche calculée précédemment. Les valeurs propres de (6.2) sur cette branche sont

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2} (1 + a(3 - 8e^{-5/3})) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{-7 + 6a + 4ae^{-5/3} + 9a^2 - 48a^2e^{-5/3} + 64a^2e^{-10/3}}, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} (1 + a(3 - 8e^{-5/3})) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{-7 + 6a + 4ae^{-5/3} + 9a^2 - 48a^2e^{-5/3} + 64a^2e^{-10/3}}. \end{aligned}$$

Il se produit une bifurcation de Hopf sur cette branche lorsque les valeurs propres traversent l'axe imaginaire. Lorsque

$$a = \frac{1}{3 - 8e^{-5/3}}$$

les valeurs propres sont $\lambda_1 = -0.6047822224i$ et $\lambda_2 = 0.6047822224i$. Il se produit donc une bifurcation de Hopf supercritique lorsque

$$u_1 = \frac{1}{3} = 0.3333, \quad u_2 = 2 + 3 \frac{1 - e^{-5/3}}{8e^{-5/3} - 3} = 0.3658, \quad a = \frac{1}{3 - 8e^{-5/3}} = 0.6716.$$

Sur cette même branche, le déterminant de

$$\begin{pmatrix} D_x f(x(a)) \\ \dot{x}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a(1 - e^{-5/3}) - 5ae^{-5/3} - 1 & -\frac{1}{3} & e^{-5/3} - 1 \\ 6 - 9a(1 - e^{-5/3}) & 0 & 0 \\ 0 & 3e^{-5/3} - 3 & 1 \end{pmatrix}$$

est

$$(6 - 9a(1 - e^{-5/3})) \left(\frac{10}{3} - 6e^{-5/3} + 3e^{-10/3} \right).$$

Ce déterminant est nul lorsque

$$a = \frac{2}{3(1 - e^{-5/3})}.$$

Le signe du déterminant change pour cette valeur de a puisque le déterminant est linéaire. On a $x = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3(1 - e^{-5/3})} \right)$ pour cette valeur de a . Or

$$D_x f(x) = \begin{pmatrix} 1 - 4.109521727e^{-5/3} & -\frac{1}{3} & -1 + e^{-5/3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où il se produit une bifurcation stationnaire. La branche qui bifurque est en fait la deuxième branche calculée précédemment.

Si $u_2 = 0$, il y a plusieurs possibilités. Considérons le système

$$\dot{u} = y(u, a) \equiv -a + 3u - 3u^2 + ae^{-5u} \tag{6.5}$$

provenant de (6.1). Le diagramme de bifurcation de (6.5) est identique au diagramme de bifurcation du système (6.1) dans le plan $u_2 = 0$. Posons $y(u, a) = y_a(u)$. On remarque que $u = 0$ est un point fixe de (6.5) pour toutes les valeurs de a . Les 4 premières dérivées de $y_a(u)$ sont

$$\begin{aligned} D_u y_a(u) &= 3 - 6u - 5ae^{-5u}, \\ D_{uu} y_a(u) &= -6 + 25ae^{-5u}, \\ D_{uuu} y_a(u) &= -125ae^{-5u}, \\ D_{uuuu} y_a(u) &= 625ae^{-5u}. \end{aligned}$$

Supposons que $a = 0$. Alors $y_0(u) = 3u - 3u^2$ possède deux racines, soient $u = 0$ et $u = 1$. Si $a < 0$, la fonction exponentielle $D_{uu}y_a$ est croissante, concave vers le bas et négative. Alors $D_u y_a$ est décroissante et concave vers le haut. Puisque

$$D_u y_a(0) = 3 - 5a > 0,$$

il existe $\mu_a > 0$ tel que $D_u y_a(\mu_a) = 0$ et $D_u y_a(u) < 0$ si $u > \mu_a$. Automatiquement, y_a possède un maximum local à μ_a . Puisque $y_a(0) = 0$ et que y_a est concave vers le bas, il existe $\nu_a > \mu_a$ tel que $y_a(\nu_a) = 0$. Posons $\nu_0 = 1$. Le système (6.5) possède donc deux points fixes lorsque $a \leq 0$: $u = 0$ et $u = \nu_a$.

Supposons maintenant $a > 0$. La fonction exponentielle $D_{uu}y_a$ est décroissante et concave vers le haut, et elle possède une seule racine

$$\zeta_a = -\frac{1}{5} \ln \left(\frac{6}{25a} \right) = \begin{cases} < 0 & \text{si } a < 6/25 \\ 0 & \text{si } a = 6/25, \\ > 0 & \text{si } a > 6/25 \end{cases}$$

d'où ζ_a est un maximum local de $D_u y_a$ et $D_u y_a$ est concave vers le bas. De plus

$$D_u y_a(\zeta_a) = \frac{3}{5} \left(3 + 2 \ln \left(\frac{6}{25a} \right) \right) = \begin{cases} < 0 & \text{si } a > 6e^{3/2}/25 \\ 0 & \text{si } a = 6e^{3/2}/25 \\ > 0 & \text{si } a < 6e^{3/2}/25 \end{cases}$$

et

$$D_u y_a(0) = 3 - 5a = \begin{cases} < 0 & \text{si } a > 3/5 \\ 0 & \text{si } a = 3/5. \\ > 0 & \text{si } 3/5 \end{cases}$$

Également,

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} y_a = +\infty \text{ et } \lim_{u \rightarrow +\infty} y_a = -\infty.$$

En utilisant ce qui précède, on obtient :

1. $0 < a < 6/25$: $D_u y_a$ possède deux racines α_a et β_a telles que

$$\alpha_a < \zeta_a < 0 < \beta_a$$

puisque $D_u y_a(0) > 0$. La fonction y_a a donc un point d'inflexion à ζ_a , un minimum local à α_a , un maximum local à β_a , ainsi que trois racines γ_a , δ_a et 0 satisfaisant

$$\gamma_a < \alpha_a < \zeta_a < 0 < \beta_a < \delta_a.$$

2. $a = 6/25$: $D_u y_a$ possède deux racines α_a et β_a telles que

$$\alpha_a < \zeta_a = 0 < \beta_a$$

puisque $D_u y_a(0) > 0$. La fonction y_a a donc un point d'inflexion à $\zeta_a = 0$, un minimum local à α_a , un maximum local à β_a , ainsi que trois racines γ_a , δ_a et 0 satisfaisant

$$\gamma_a < \alpha_a < \zeta_a = 0 < \beta_a < \delta_a.$$

3. $6/25 < a < 3/5$: $D_u y_a$ possède deux racines α_a et β_a telles que

$$\alpha_a < 0 < \zeta_a < \beta_a$$

puisque $D_u y_a(0) > 0$. La fonction y_a a donc un point d'inflexion à ζ_a , un minimum local à α_a , un maximum local à β_a , ainsi que trois racines γ_a , δ_a et 0 satisfaisant

$$\gamma_a < \alpha_a < 0 < \zeta_a < \beta_a < \delta_a.$$

4. $a = 3/5$: $D_u y_a$ possède deux racines α_a et β_a telles que

$$\alpha_a = 0 < \zeta_a < \beta_a$$

puisque $D_u y_a(0) = 0$. La fonction y_a a donc un point d'inflexion à ζ_a , un minimum local à α_a , un maximum local à β_a , ainsi que deux racines δ_a et $0 = \gamma_a$ satisfaisant

$$\gamma_a = \alpha_a = 0 < \zeta_a < \beta_a < \delta_a.$$

5. $a = 6/25e^{3/2}$: $D_u y_a$ possède une racine $\zeta_a > 0$, puisque $D_u y_a(0) < 0$. La fonction y_a a donc un point d'inflexion et un maximum local à ζ_a , et une seule racine : 0.

6. $6/25e^{3/2} < a$: $D_u y_a(u) < 0$ pour tout u . La fonction y_a n'a donc pas de point d'inflexion, ni d'extrémum. Elle ne possède que la racine 0.

Lorsque $3/5 < a < 6/25e^{3/2}$, le nombre de racines de y_a passe de trois à un. On s'attend donc à ce qu'il se produise une bifurcation en point limite à (u_0, a_0) , pour $3/5 < a_0 < 6/25e^{3/2}$. Si c'est le cas

$$y_{a_0}(u_0) = 3u_0(1 - u_0) - a_0(1 - e^{-5u_0}) = 0 \quad (6.6)$$

$$D_u y_{a_0}(u_0) = 3 - 6u_0 - 5a_0 e^{-5u_0} = 0 \quad (6.7)$$

$$D_{uu} y_{a_0}(u_0) = -6 + 25a_0 e^{-5u_0} \neq 0 \quad (6.8)$$

$$D_a y_{a_0}(u_0) = -1 + e^{-5u_0} \neq 0. \quad (6.9)$$

En isolant a_0 dans (6.7), on obtient

$$a_0 = \frac{(3 - 6u_0)e^{5u_0}}{5}. \quad (6.10)$$

On substitue cette valeur dans (6.6) pour obtenir

$$3 + 9u_0 - 15u_0^2 - 3e^{5u_0} + 6u_0 e^{5u_0} = 0. \quad (6.11)$$

Posons $y(u) = 3 + 9u - 15u^2 - 3e^{5u} + 6ue^{5u}$. Puisque

$$y'(u) = (9 - 30u)(1 - e^{5u}),$$

les points critiques de y se retrouvent à $(0, 0)$ et $(\frac{3}{10}, \frac{87}{20} - \frac{6}{5}e^{3/2})$. Remarquons de plus que

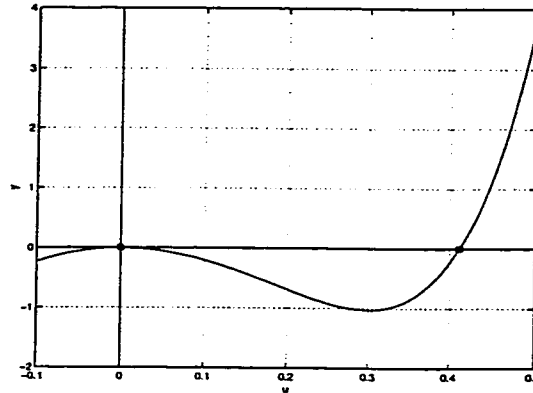
$$\lim_{u \rightarrow -\infty} y = -\infty, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

et

$$y''(u) = -15(2 + e^{5u} + 10ue^{5u}).$$

Puisque $y''(0) < 0$ et $y''(3/10) > 0$, le point $(0, 0)$ est un maximum local, tandis que $(\frac{3}{10}, \frac{87}{20} - \frac{6}{5}e^{3/2})$ est un minimum local. En utilisant ces renseignements, il est possible de dresser le portrait de y (cf. figure 6.11). L'équation (6.11) possède donc exactement deux solutions. La solution $(0, 0)$ est éliminée puisque $D_a y_0(0) = 0$. On obtient la seconde,

$$u_0 = 0.4111615608,$$

FIG. 6.11 - $y = 3 + 9u - 15u^2 - 3e^{5u} + 6ue^{5u}$

en utilisant la méthode de Newton. En ressubstituant dans (6.10), on obtient

$$a_0 = 0.8329293222.$$

Les conditions (6.8) et (6.9) étant respectées, le système (6.5) subit une bifurcation en point limite lorsque $u = 0.4111615608$, et $a = 0.8329293222$.

6.2 Bifurcation en 2-fourche

On considère le système

$$\dot{u} = f(u, a) \equiv (u^2 - 2a)(u^2 - a)u, \quad (6.12)$$

où $u, a \in \mathbb{R}$.

Vérifions les résultats obtenus par l'algorithme.¹ Lorsque $a = -0.5$, $x = 0$ est un point d'équilibre. En appliquant l'algorithme, nous obtenons

```
>> [h,s,st]=hopfss('F','DxF',[0;-0.5],0,pi/50,0.001,200,20)
```

Warning: One or more output arguments not assigned during call to 'hopfss'.

¹Nous utilisons un algorithme modifié qui permet de trouver une racine s_0 de τ_{SS} où $\tau'_{SS}(s_0) = 0$.

st =
 -0.0628
 0.0018

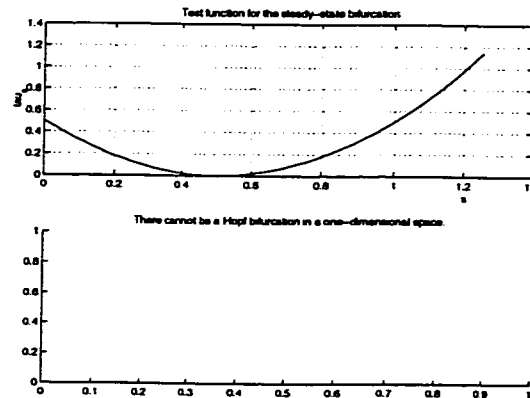


FIG. 6.12 – Fonctions-tests pour le système (6.12) ; première branche.

Remarquons que lorsque s approche 0.5 dans la figure 6.12, la fonction-test approche 0. L'algorithme original ne peut détecter la racine puisqu'il se sert du théorème des valeurs intermédiaires. Cependant l'algorithme modifié trouve un candidat, c'est-à-dire st . En utilisant ce nouveau point de départ, nous obtenons un diagramme de bifurcation partiel de (6.12) (voir figure 6.13). Cependant, une analyse algébrique de

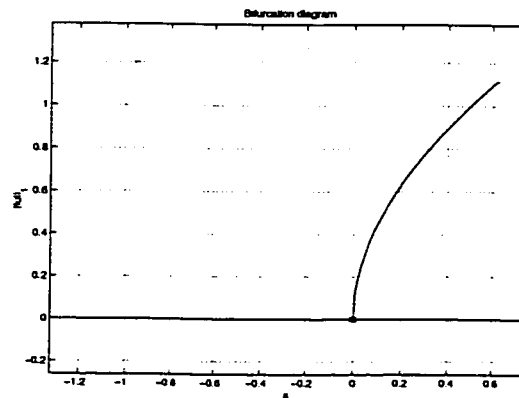


FIG. 6.13 – Diagramme de bifurcation du système (6.12).

(6.12) indique que le diagramme de bifurcation de (6.12) est en réalité celui présenté

à la figure 6.14. Notre algorithme ne détecte qu'une seule des branches de solutions

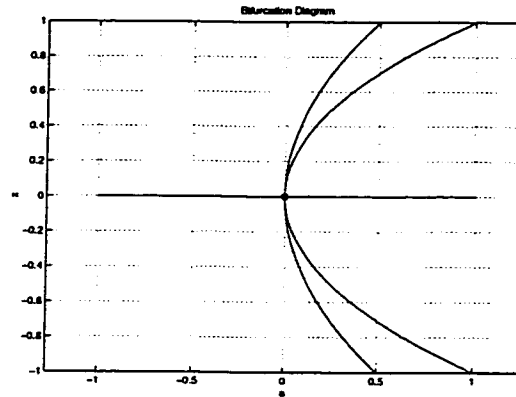


FIG. 6.14 – Diagramme de bifurcation du système (6.12).

stationnaires qui bifurquent, puisque il est basé sur les résultats du chapitre 4, où nous ne considérons que le cas où deux branches se coupent.

6.3 Bifurcation de Bautin

Nous indiquons maintenant comment calculer un diagramme de bifurcation partiel lorsque le système comprend au moins deux paramètres distingués. Considérons, par exemple, le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - y + \mu x(x^2 + y^2) + x(x^2 + y^2)^2 \\ \dot{y} &= x + ay + \mu y(x^2 + y^2) + y(x^2 + y^2)^2.\end{aligned}\tag{6.13}$$

Les paramètres sont α et μ . Ce système subit une bifurcation de Bautin à l'origine. Une étude approfondie est effectuée dans KUZNETSOV [28], pp. 265-272. Pour calculer des courbes sur lesquelles il se produit (respectivement) une bifurcation de Hopf ou

une bifurcation en point limite, nous introduisons les systèmes suivants :

$$\begin{aligned}
 ax - y + \mu x(x^2 + y^2) + x(x^2 + y^2)^2 &= 0 \\
 x + ay + \mu y(x^2 + y^2) + y(x^2 + y^2)^2 &= 0 \\
 \left(\begin{array}{cc} a + \mu(3x^2 + y^2) + (5x^2 + y^2)(x^2 + y^2) & -1 + 2xy(\mu + 2x^2 + 2y^2) \\ 1 + 2xy(\mu + 2x^2 + 2y^2) & a + \mu(x^2 + 3y^2) + (x^2 + 5y^2)(x^2 + y^2) \end{array} \right) \phi - i\beta\phi &= 0 \\
 \phi^\top \phi_0 - 1 &= 0
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 ax - y + \mu x(x^2 + y^2) + x(x^2 + y^2)^2 &= 0 \\
 x + ay + \mu y(x^2 + y^2) + y(x^2 + y^2)^2 &= 0 \\
 \left(\begin{array}{cc} a + \mu(3x^2 + y^2) + (5x^2 + y^2)(x^2 + y^2) & -1 + 2xy(\mu + 2x^2 + 2y^2) \\ 1 + 2xy(\mu + 2x^2 + 2y^2) & a + \mu(x^2 + 3y^2) + (x^2 + 5y^2)(x^2 + y^2) \end{array} \right) \phi &= 0 \\
 \phi^\top \phi_* - 1 &= 0
 \end{aligned}$$

Appelons le premier système $G_f = 0$ et le second $F_f = 0$. Supposons que

$$G_f(x_0, y_0, \phi_0, \beta_0, a_0, \mu_0) = 0$$

et

$$F_f(x_*, y_*, \phi_*, a_*, \mu_*) = 0.$$

Il est donc possible de continuer les branches de points d'équilibre de G_f et F_f à l'aide de hopfss,² ce qui nous donne (respectivement) des branches de points de bifurcations de Hopf et de points limites de (6.13). En traçant le graphe de α en fonction de μ sur ces branches, nous obtenons le diagramme de bifurcation de la bifurcation de Bautin, présenté à la figure 6.15. La courbe $--$ est une courbe de points de bifurcation de Hopf tandis que la courbe $- \cdot - \cdot$ est une courbe de points de bifurcation en point limite.

²Quoi que très simple en théorie, il est à noter qu'en pratique le calcul et l'implémentation des jacobien de G_f et F_f peut s'avérer très frustrant.

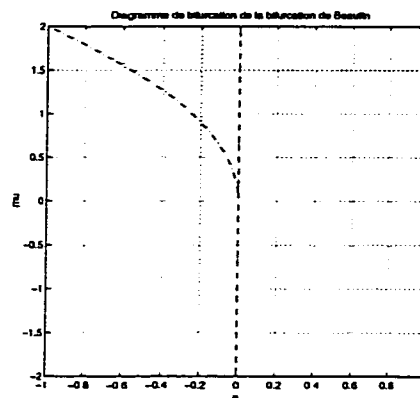


FIG. 6.15 – Diagramme de bifurcation de la bifurcation de Bautin.

Chapitre 7

Conclusion

Soit

$$\dot{u} = f(u, a), \quad (7.1)$$

où $u \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$, $n, m < \infty$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est suffisamment continûment différentiable. Nous sommes partiellement en mesure d'identifier numériquement, à l'aide de fonctions-test appropriées, les points de bifurcation de codimension 1 de (7.1), c'est-à-dire les bifurcations en point limite; en fourche; transcritiques et de Hopf. Nous pouvons aussi tracer un diagramme de bifurcation de (7.1), à l'aide, entre autres, de la continuation par la pseudo longueur d'arc.

En théorie, il est possible d'appliquer les résultats que nous avons obtenu à des bifurcations de codimension plus élevée, par exemple les bifurcations de Bautin et de Bogdanov-Takens. Il suffit de trouver une fonction-test correspondant à chacune de ces bifurcations, ce qui, à notre connaissance, n'a pas été fait. En pratique cependant, ces fonctions-test doivent calculer les valeurs propres de $D_u f$, ce qui peut s'avérer coûteux lorsque la dimension de (7.1) est élevée. Il n'est pas toujours possible d'éliminer cette étape comme nous l'avons fait pour la bifurcation de Hopf en introduisant le produit extérieur. Le problème de détection de ces bifurcations devient donc un problème de calcul numérique de valeurs propres.

Si le système (7.1) possède la symétrie d'un groupe de Lie Γ , c'est-à-dire que

$$f(\gamma u, a) = \gamma f(u, a) \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma,$$

il est impossible d'appliquer les résultats que nous avons obtenu directement puisque la multiplicité des valeurs propres du jacobien $D_u f$ est généralement plus grande que 1. Le théorème de Hopf, par exemple, doit être modifié pour tenir compte de cette multiplicité élevée. L'analyse de bifurcation est donc plus compliquée¹ mais l'analyse numérique est simplifiée grâce à la structure en bloc de $D_u f$ sous la symétrie de Γ .

Il serait bon d'adapter les algorithmes de notre thèse afin qu'ils tirent avantage de la symétrie du système; ce qui a déjà été fait par DELLNITZ [6, 7]. Par contre, il serait intéressant de créer un super-algorithme qui tracerait automatiquement un diagramme local de bifurcation de (7.1), lorsque ce dernier possède la symétrie du groupe de Lie Γ .

¹Quoiqu'il soit possible de prédire l'existence de branches de solutions stationnaires (*Equivariant Branching Lemma*) et de solutions périodiques possédant la symétrie de certains sous-groupes de $\Gamma \times S^1$.

Bibliographie

- [1] Allgower, E. et Georg, K. [1990]. *Numerical Continuation Methods : an Introduction*, Springer-Verlag, Berlin.
- [2] Allgower, E. et Georg, K. [1993]. Continuation and path following, *Acta Numerica*, 1-64.
- [3] Arnol'd, V.I. [1984]. *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin.
- [4] Buono, P.-L. [1999]. Models of Central Pattern Generators for Quadruped Locomotion : II. Secondary Gaits, *à paraître*.
- [5] Carr, J. [1981]. *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer-Verlag, New-York.
- [6] Dellnitz, M. [1990]. A computational method and path following for periodic solutions with symmetry, *Continuation and Bifurcations : Numerical Techniques and Applications*, 153-167, Kluwer Academic Publishers.
- [7] Dellnitz, M. [1992]. Computational bifurcation of periodic solutions in systems with symmetry, *NMA Journal of Numerical Analysis* **12**, 429-455.
- [8] Dellnitz, M. et Werner, B. [1989]. Computational methods with symmetries - with special attention to steady state and Hopf bifurcation points, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **26** (1), 493-520.
- [9] Deuffhard, P., Fielder, B. et Kunkel, P. [1987]. Efficient numerical path following beyond critical points, *SIAM J. Numer. Anal.* **24** (4), 912-927.
- [10] Doedel, E., Keller H.B. et Kernévez, J.P. [1991]. Numerical Analysis and Control of Bifurcation Problems, (I) Bifurcations in Finite Dimensions, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **1**, 493-520.

- [11] Doedel, E., Keller H.B. et Kernévez, J.P. [1991]. Numerical Analysis and Control of Bifurcation Problems, (II) Bifurcations in Infinite Dimensions, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **1**, 745-772.
- [12] Doedel, E. et Kernévez, J.P. [1986]. AUTO : Software for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations, *Applied Mathematics Report*, California Institute of Technology.
- [13] Fulton, W. et Harris, J. [1991]. *Representation Theory : A First Course*, Springer-Verlag, Berlin.
- [14] Golubitsky, M. et al. [1998]. A modular network for legged locomotion, *Physica D* **115**, 56-72.
- [15] Golubitsky, M. et Buono, P.-L. [1999]. Models of Central Pattern Generators for Quadruped Locomotion : I. Primary Gaits, *à paraître*.
- [16] Golubitsky, M. et Schaeffer, D.G. [1985]. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Volume I*, Springer-Verlag, Berlin.
- [17] Golubitsky, M., Stewart, I. et Schaeffer, D.G. [1988]. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Volume II*, Springer-Verlag, Berlin.
- [18] Guckenheimer, J. et Holmes, P. [1983]. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, Berlin.
- [19] Guckenheimer, J. et Meyers, M. [1993]. Computing Hopf Bifurcations II : Three exemples from neurophysiology. Preprint. Cornell University.
- [20] Hirsh, M.W., Smale, S. [1974]. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, San Diego.
- [21] Keller, H.B. [1977]. Numerical solutions of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems, *Applications of Bifurcation Theory*, 359-384.
- [22] Keller, H.B. [1978]. Global homotopies and Newton methods, *Recent Advances in Numerical Analysis*, pp. 73-94, Academic Press.
- [23] Keller, H.B. [1987]. Lectures on numerical methods in bifurcation problems, Notes by Nandakumaran, A.K. et Ramaswamy, M., Indian Institute of Science, Bangalore, Springer-Verlag, Berlin.

- [24] Keller, H.B. [1992]. *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*, Dover Publications, New-York.
- [25] Kelley, A. [1967]. Stability of the center-stable manifold, *Journal of Differential Equations* 3, 546-570.
- [26] Khibnik, A. [1990]. LINLBF : A program for continuation and bifurcation analysis of equilibria up to codimension three, *Continuation and Bifurcations : Numerical Techniques and Applications*, Kluwer, Dordrecht, 283-296.
- [27] Kubiček, M. [1976]. Algorithm 502 : Dependence of solutions of nonlinear systems on a parameter, *ACM Trans. Math. Software* 2, 98-107.
- [28] Kuznetsov, Y. [1995]. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, Berlin.
- [29] Lambert, J.D. [1991]. *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems : The Initial Value Problem*, Wiley, New-York.
- [30] Lorenz, E.N. [1963]. Deterministic non-periodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141.
- [31] Prigogine, I. et Lefever, R. [1974]. *Stability and self-organization in open systems, Membranes, Dissipative Structures, and Evolution*, Wiley, New-York.
- [32] Rheinboldt, W. [1986]. *Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations*, John Wiley and Sons, Inc., New-York.
- [33] Rheinboldt, W. et Burkardt, J. [1983]. Algorithm 596 : A program for locally-parametrized continuation process, *ACM Trans. Math. Software* 9, 236-241.
- [34] Roose, D. et Hlaváček, V. [1985]. A direct method for the computation of Hopf bifurcation points, *SIAM J. Appl. Anal.* 45 (6), 879-894.
- [35] Schwartz, J.T. [1969]. *Nonlinear Functional Analysis*, Gordon and Breach Science Publishers, New-York
- [36] Seydel, R. [1988]. *From Equilibrium to Chaos : Practical Bifurcation and Stability Analysis*, Elsevier, New-York.
- [37] Stéphanos, C. [1900]. Sur une extension du calcul des substitutions linéaires, *J. Math. Pures Appl.*, 6, 73-128.

- [38] Vanderbauwhede A. [1989]. Centre Manifolds, Normal Forms and Bifurcations, *Dynamics Reported, Vol. 2*, John Wiley and Sons, New-York.
- [39] Vanderbauwhede A. [1982]. *Local Bifurcation Theory and Symmetry*, Pitman, London.
- [40] Werner, B. [1988]. Computational methods for bifurcation problems with symmetries and applications to steady states of n -box reaction-diffusion models, *1987 Dundee Conference on Numerical Analysis*, Pitman, 279-293.
- [41] Werner, B. et Spence, A. [1984]. The computation of symmetry-breaking bifurcation points, *SIAM J. Numer. Anal.* **21** (2), 388-399.
- [42] Wiggins S. [1990]. *Introduction to Applied Non-Linear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New-York.