

INFORMATION TO USERS

This manuscript has been reproduced from the microfilm master. UMI films the text directly from the original or copy submitted. Thus, some thesis and dissertation copies are in typewriter face, while others may be from any type of computer printer.

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted. Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleedthrough, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send UMI a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.

Oversize materials (e.g., maps, drawings, charts) are reproduced by sectioning the original, beginning at the upper left-hand corner and continuing from left to right in equal sections with small overlaps.

Photographs included in the original manuscript have been reproduced xerographically in this copy. Higher quality 6" x 9" black and white photographic prints are available for any photographs or illustrations appearing in this copy for an additional charge. Contact UMI directly to order.

Bell & Howell Information and Learning
300 North Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106-1346 USA
800-521-0600

UMI[®]



Université d'Ottawa · University of Ottawa

POLYNÔMES CENTRAUX SUR
LES MATRICES SYMÉTRIQUES

par

Marie-Claude Boutet, B.Sc.

Université de Sherbrooke

Mars 2000

Thèse présentée
à l'école des Études Supérieures
de l'Université d'Ottawa
pour l'obtention de la maîtrise ès sciences
en mathématiques¹

©Copyright 2000

par Marie-Claude Boutet, Ottawa, Canada

¹Le programme de maîtrise est un programme conjoint avec l'université Carleton, administré par l'institut Ottawa-Carleton en mathématiques et statistiques



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*

Our file *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-57090-8

Resumé

Considérons des polynômes f non-commutatifs à coefficients dans K un corps de caractéristique zéro. Nous construisons une famille de polynômes f_n tels que f_n évalué sur $H_n(K)$, les matrices symétriques d'ordre n , prend toutes ses valeurs dans le centre de $H_n(K)$, c'est-à-dire que ses valeurs sont de la forme αI_n , $\alpha \in K$. On se demande s'il existe une évaluation de f_n pour laquelle cette valeur est non-nulle. Nous montrons à l'aide de méthodes combinatoires que tel est le cas quand $n = 3$ ou $n = 4$.

à ma filleule,
Sandrine.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Michel Racine, pour sa disponibilité, sa patience et ses judicieux conseils, sans lesquels la rédaction de cette thèse n'aurait pu être possible.

Je voudrais aussi remercier M.Ibrahim Assem du département de mathématiques et d'informatique de l'Université de Sherbrooke pour m'avoir encouragée à poursuivre mes études au grade supérieur.

J'aimerais remercier Martin St-Hilaire pour son aide en programmation et sa participation à la rédaction du programme en annexe A de cette thèse.

Finalement, je tiens à remercier les gens qui ont tous contribué au bon déroulement de mes études, en particulier Valérie pour son aide et ses encouragements, mes parents et ma soeur pour leur confiance et leur appui.

En terminant, je tiens à souligner que la réalisation de cette thèse n'aurait pu être possible sans le support financier de mon directeur, Michel Racine, et du département de mathématiques et de statistiques de l'Université d'Ottawa.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Historique	1
1.2	Généralités	2
1.3	Identités polynomiales	5
1.4	Polynômes centraux	8
2	Définitions	10
2.1	Une famille de polynômes	10
2.2	Introduction à la théorie des graphes	13
2.3	Théorie des graphes vs polynômes multilinéaires	16
3	Matrices symétriques d'ordre trois	19
3.1	Préliminaires	19
3.2	Démonstration	24
3.2.1	Premier cas: Mots débutants par $(1, 1)$	26
3.2.2	Deuxième cas: Mots débutants par $(1, j)$, $j \neq 1$	28
4	Matrices symétriques d'ordre quatre	31
4.1	Élément fixé	32
4.1.1	Pas de cycle dans les $3x$ ou $3y$	33
4.1.2	Pas de cycle dans le mot $3y3x$	35

4.1.3	Les $3x$ et les $3y$ ne peuvent débiter ou finir par l'élément 1	36
4.2	Cas particulier: Premier et dernier indice des $3x$ fixés	38
4.2.1	Le graphe partiel d'ordre 7 a deux boucles	40
4.2.2	Le graphe partiel d'ordre 7 a trois boucles	41
4.2.3	Le graphe partiel d'ordre 7 a quatre boucles	43
4.3	Signature non-nulle	44
4.3.1	25 chaînes de y_i à transposition (23) près	46
4.3.2	Même signe à transposition (23) près	48
A	Programme	51
B	Résultats matrices d'ordre 3	63
C	Résultats matrices d'ordre 4	65

Chapitre 1

Introduction

1.1 Historique

Considérons un corps K et f un polynôme à coefficients dans K . Considérons maintenant une algèbre A . Si f n'est pas le polynôme identiquement nul, et si $f = 0$ pour toute substitution des éléments de A , alors on dit que f est une identité polynomiale. C'est sur ces identités polynomiales que A.S.Amitsur et J.Levitzki [1] ont travaillé dans les années 50. Plus précisément, ils se sont demandé quel était le degré minimal pour une identité sur une algèbre donnée. Un premier résultat sur l'algèbre des matrices d'ordre n montrait que le degré minimal était au moins $2n$. Par la suite ils ont montré que le degré minimal était exactement $2n$.

Au début des années 80, A.Regev [6] a formulé la conjecture suivante: Soient K un corps de caractéristique zéro et X_1, \dots, X_{n^2} et Y_1, \dots, Y_{n^2} deux

ensembles de variables distinctes. Alors le polynôme

$$f(X, Y) = \sum_{\sigma, \tau \in \mathcal{S}_{n^2}} (-1)^{\sigma\tau} X_{\sigma(1)} Y_{\tau(1)} X_{\sigma(2)} X_{\sigma(3)} X_{\sigma(4)} Y_{\tau(2)} Y_{\tau(3)} Y_{\tau(4)} \\ X_{\sigma(5)} \dots \\ X_{\sigma(n^2-2n+2)} \dots X_{\sigma(n^2)} Y_{\tau(n^2-2n+2)} \dots Y_{\tau(n^2)}$$

est central, c'est-à-dire que $f(X, Y)$ est central pour toutes les substitutions et, pour au moins une substitution, on a $f(X, Y) \neq 0$. Il a prouvé qu'il n'était pas toujours zéro pour les cas $n = 2, 3$. Mais la conjecture restait ouverte pour les cas $n \geq 4$. Elle sera prouvée par E. Formanek [3] en 1985.

Plus tard, A. Giambruno et A. Valenti [4] utilisent ce résultat afin de déterminer pour quelles partitions de n^2 un polynôme est standard sur l'algèbre des matrices d'ordre n . Ayant maintenant classifié les polynômes pour l'algèbre des matrices d'ordre n , A. Giambruno et A. Valenti [4] posent la question pour l'algèbre des matrices symétriques d'ordre n . Cette thèse tente de répondre à cette question pour les matrices symétriques d'ordre 3 et d'ordre 4.

1.2 Généralités

Soit K un corps de caractéristique zéro et considérons $K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ la K -algèbre libre associative sur les générateurs x_1, \dots, x_n , c'est-à-dire l'anneau de polynômes non-commutatifs sur K en x_1, \dots, x_n . Considérons aussi $M_n(K)$, l'algèbre des matrices d'ordre n sur K . Soit $f(x_1, \dots, x_n)$ un polynôme sur K . On s'intéresse aux valeurs possibles que peut prendre $f(x_1, \dots, x_n)$ sur $M_n(K)$ ou sur un sous-espace de $M_n(K)$.

Définition 1.2.1 *Un polynôme est linéaire en x_i si*

$$f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad \forall \lambda \in K$$

et si, pour tout j ,

$$f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n).$$

Définition 1.2.2 Un polynôme $f(x_1, \dots, x_n)$ est multilinéaire s'il est linéaire en $x_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Ceci revient à dire que chaque monôme de f contient exactement une occurrence de x_i .

Il est possible de prendre un polynôme qui n'est pas multilinéaire et de le linéariser.

Définition 1.2.3 Soit R une algèbre et $\psi(X_1, \dots, X_d) : R^d \rightarrow R$ une fonction quelconque. On définit $\Delta_{ij}\psi : R^{d+1} \rightarrow R$ par:

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}\psi(X_1, \dots, X_{d+1}) &= \psi(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i + X_j, X_{i+1}, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{d+1}) \\ &\quad - \psi(X_1, \dots, X_{i-1}, X_j, X_{i+1}, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{d+1}) \\ &\quad - \psi(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{d+1}) \end{aligned}$$

où \widehat{X}_j indique l'absence de X_j . Dans ce cas on parle de linéarisation partielle.

Définition 1.2.4 Le degré de X_i , noté \deg_{X_i} est le nombre d'occurrences de X_i dans un monôme.

Définition 1.2.5 Soit f un polynôme. On dit que f est homogène en X_i , si \deg_{X_i} est le même dans tous les monômes de f . Alors f est homogène s'il est homogène en $X_i \forall i$.

Considérons un polynôme $P(x_1, \dots, x_n)$. On peut écrire P comme une combinaison linéaire de polynômes homogènes. Si le corps K compte suffisamment d'éléments, ce qui sera toujours le cas en caractéristique zéro, chacune des composantes homogènes d'une identité polynomiale est aussi une identité polynomiale. Lorsqu'on applique la définition 1.2.3 à chacun de ces polynômes homogènes, le nombre de variables augmente, mais le degré

diminue. Alors on peut répéter le processus jusqu'à ce que le degré de chacun des x_i soit 1. On obtient alors un polynôme multilinéaire.

Exemple 1.1 Soit $f(X_1, X_2) = X_1^2 X_2$. $\Delta_{13} f = (X_1 + X_3)^2 X_2 - X_3^2 X_2 - X_1^2 X_2 = X_1 X_3 X_2 + X_3 X_1 X_2$.

Exemple 1.2 Si $f(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_3 X_2 + X_3 X_1 X_2$, alors $f(X_1, X_2, X_1) = X_1 X_1 X_2 + X_1 X_1 X_2 = 2X_1^2 X_2$, alors on peut écrire $\frac{1}{2} f(X_1, X_2, X_1) = X_1^2 X_2$ car on travaille en caractéristique zéro. C'est-à-dire qu'on peut partir d'un polynôme quelconque, le linéariser puis revenir au polynôme original.

Maintenant, sachant qu'on travaille avec les polynômes multilinéaires, on peut utiliser uniquement les substitutions des éléments d'une base fixe de notre espace de matrices. En effet, soit $H_n(K)$ l'espace des matrices symétriques d'ordre n et soit $\{b_1, \dots, b_k\}$ une base de $H_n(K)$, alors tout élément de $H_n(K)$ s'écrit $x = \sum_{j=1}^k \alpha_j b_j$. Disons qu'on décompose ainsi x_1 , alors notre polynôme devient

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_k) &= f\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j b_j, x_2, \dots, x_k\right) \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j f(b_j, x_2, \dots, x_k) \end{aligned}$$

car f est multilinéaire. Or on peut répéter ce processus pour chaque variable x_i . Donc $f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_k} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_k} f(b_{j_1}, \dots, b_{j_k})$

Définition 1.2.6 Un polynôme $f(x_1, \dots, x_n)$ est dit alterné en x_i et x_j si $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$. Un polynôme est dit alterné s'il est alterné en x_i et en $x_j \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$.

Définition 1.2.7 $S_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)}$ où S_k est le groupe symétrique sur k symboles et $(-1)^\sigma$ est la signature de σ , est appelé polynôme standard.

Afin de simplifier les notations, nous notons parfois le polynôme standard de la manière suivante: $S_n(x_1, \dots, x_n) = S_n$

Remarque: Le polynôme standard est multilinéaire et alterné.

Preuve: Nous allons montrer uniquement la deuxième affirmation. Soit $\alpha : S_n \rightarrow S_n : \sigma \mapsto \sigma\tau$ où τ est la transposition (ij) . α induit une bijection entre les termes de $S_n(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$ et ceux de $S_n(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$. Sous α on obtient un changement de signes des monômes car $(-1)^{\sigma\tau} = -(-1)^\sigma$, ainsi $S_n(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -S_n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$. \square

1.3 Identités polynomiales

Dans les années 50, A.S.Amitsur et J.Levitzki ont étudié ce qu'on appelle les identités polynomiales. Ils cherchaient à établir une manière de classer les identités polynomiales sur une algèbre de matrices. Dans cette section nous ne donnerons que les définitions et résultats de base concernant cette théorie.

Définition 1.3.1 Soit R une algèbre sur un corps K et x_1, \dots, x_n un ensemble d'indéterminées. Soit $f(x_1, \dots, x_n)$ un polynôme non-nul sur K (f est élément de l'algèbre libre $K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ engendrée par les indéterminées x_i sur K). Si $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour toutes les substitutions des éléments de R , alors f est une identité polynomiale.

Exemple 1.3 Considérons l'algèbre de matrices $M_2(K)$. Le polynôme $[[x, y]^2, z]$ où $[,]$ est le crochet de Lie, est une identité polynomiale. On sait que toute matrice de $M_2(K)$ vérifie son polynôme caractéristique:

$$X^2 - \text{tr}(X)X + \det XI = 0.$$

Posons $X = [A, B]$. Alors on obtient $[A, B]^2 = -\det([A, B])I$. On a donc $[[A, B]^2, C] = 0 \forall A, B, C \in M_2(K)$.

Définition 1.3.2 Nous appelons unités matricielles la base de $M_n(K)$ composée des matrices e_{ij} ayant un 1 en position ij et des zéros partout ailleurs. Donc

$$e_{ij}e_{j'k} = \begin{cases} e_{ik} & \text{si } j = j' \\ 0 & \text{si } j \neq j'. \end{cases}$$

Lors de cette étude, Amitsur et Levitzki se sont intéressés au polynôme standard. Ils se sont demandé quel était le degré minimal d'une identité polynomiale sur une algèbre donnée. Sachant que la dimension de $M_n(K)$, l'anneau des matrices d'ordre n sur K , est n^2 , alors $M_n(K)$ satisfait S_{n^2+1} . La substitution $e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, \dots, e_{n-1n}, e_{nn}$ montre que $M_n(K)$ ne satisfait aucune identité polynomiale de degré inférieur à $2n$. La question à laquelle tentaient de répondre Amitsur et Levitzki est la suivante: Est-ce que $M_n(K)$ satisfait S_{2n} ?

Théorème 1.3.3 (Amitsur, Levitzki) Pour tout n , on a $S_{2n}(x) = 0$ est vérifiée dans l'algèbre de matrices $M_n(K)$

Plusieurs preuves de ce théorème ont été données. Vous pouvez consulter [1], [4],[5] ou [7] pour trouver des démonstrations de ce théorème. Ici nous ne donnerons que l'idée générale.

Lemme 1.3.4 Pour tout n , $S_{2n}(x) = 0$ est vérifié pour tous les ensembles de $2n$ unités matricielles.

Preuve:[1] □

Ce lemme est la clé de la démonstration. Le reste de la démonstration est évident.

Preuve:

Soit a_1, \dots, a_{2n} un ensemble de $2n$ matrices élément de $M_n(K)$. Nous devons montrer que

$$S_{2n}(a_1, \dots, a_{2n}) = 0 \quad (1.1)$$

Nous allons exprimer chaque a_i comme une combinaison linéaire des n^2 unités matricielles e_{jk} . Ainsi nous pouvons écrire (1.1) comme une somme de termes de la forme $\alpha S(e_{i_1 j_1}, \dots, e_{i_{2n} j_{2n}})$ où α est pris dans K . Alors par le lemme précédent, nous obtenons directement le résultat. \square

Étant donné une identité polynomiale homogène $P(x_1, \dots, x_n)$, la définition 1.2.3 montre que toute linéarisation partielle de P est aussi une identité polynomiale. Donc on obtient, à l'aide d'une suite de linéarisations partielles, une identité multilinéaire à partir de laquelle, en remontant le long des linéarisations à l'aide de substitutions comme en l'exemple 1.2, on peut retrouver l'identité $P(x_1, \dots, x_n)$. Ainsi, comme on travaille en caractéristique zéro, connaître les identités polynomiales multilinéaires revient à les connaître toutes.

Nous avons aussi les résultats suivants que nous admettrons sans démonstration.

Sachant que

$$\begin{aligned} S_{d+1}(x_1, \dots, x_{d+1}) &= \sum_i (-1)^{d+1-i} S_d(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{d+1}) x_i \\ &= \sum_i (-1)^i x_i S_d(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{d+1}), \end{aligned}$$

si S_d est une identité pour $M_n(K)$, alors S_{d+1} est aussi une identité pour $M_n(K)$.

Proposition 1.3.5 *Si $M_n(K)$ satisfait une identité de degré $m \leq 2n$, alors $m = 2n$ et cette identité est, à facteur près, le polynôme standard S_{2n} .*

Nous avons maintenant tous les résultats nécessaires pour énoncer notre problème. Ceux qui voudraient plus de détails quant aux identités polynomiales peuvent consulter [1] ou [7].

1.4 Polynômes centraux

Dans cette section nous allons introduire les définitions et résultats généraux concernant les polynômes centraux. Le prochain chapitre est presque entièrement consacré à l'étude de ces polynômes. Mais tout d'abord, rappelons quelques concepts de base.

Soit K un corps de caractéristique zéro et $K\langle X \rangle$ l'algèbre libre sur l'ensemble dénombrable d'indéterminées $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Soit $M_n(K)$ l'algèbre des matrices d'ordre n sur K .

Définition 1.4.1 *Un polynôme $f(x_1, \dots, x_k) \in K\langle X \rangle$ en k variables non-commutatives et sans terme constant est appelé polynôme central sur $M_n(K)$ si $f(a_1, \dots, a_k) \in KI_n \forall a_1, \dots, a_k \in M_n(K)$ et $f(b_1, \dots, b_k) \neq 0$ pour au moins un choix de $b_1, \dots, b_k \in M_n(K)$.*

Exemple 1.4 *Soit $M_2(K)$ l'algèbre des matrices 2×2 sur K un corps de caractéristique zéro. Puisque $[e_{12}, e_{21}]^2 = (e_{11} - e_{22})^2 = e_{11} + e_{22}$, par ce qu'on a montré à l'exemple 1.3, le polynôme suivant:*

$$[X, Y]^2$$

est un polynôme central.

Kaplansky s'est posé la question "est-ce que les polynômes centraux existent sur $M_n(K)$ pour tout n ?". Edward Formanek et Y.P. Razmyslov, chacun de son côté, ont répondu par l'affirmative à cette question.

Théorème 1.4.2 *Pour tout n il existe un polynôme central sur $M_n(K)$*

Preuve: Voir [5] □

Le lemme suivant nous permet, sachant qu'un polynôme est central sur une algèbre de matrices, de connaître son comportement sur une algèbre de degré inférieure.

Lemme 1.4.3 *Si $f(x_1, \dots, x_k)$ est un polynôme central sur $M_n(K)$ alors f est une identité polynomiale sur $M_{n-1}(K)$.*

Preuve: Plongeons $M_{n-1}(K)$ dans $M_n(K)$ de sorte que pour $A \in M_{n-1}(K)$ on ait $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_n(K)$. Alors pour $A_1, \dots, A_k \in M_{n-1}(K)$, on a $f\left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \in KI_n$. Mais

$$f\left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(A_1, \dots, A_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $f(A_1, \dots, A_k) = 0$. □

Nous avons maintenant tous les concepts de base pour poursuivre notre étude. Nous nous intéresserons aux polynômes centraux mais dans un contexte bien précis. Quelles sont les conditions pour qu'un polynôme donné soit central? Le chapitre suivant exposera plus explicitement l'objet de notre étude en introduisant les concepts et définitions nécessaires à l'énoncé du sujet.

La deuxième partie du prochain chapitre est réservée à l'introduction d'une autre théorie, la théorie des graphes, qui nous sera utile dans les chapitres subséquents. Enfin la troisième partie fait le lien entre la théorie des graphes et l'objet de notre étude, les polynômes centraux.

Chapitre 2

Définitions

2.1 Une famille de polynômes

Soit n un nombre naturel et considérons un ensemble n_1, n_2, \dots, n_t de t nombres entiers positifs tels que

$$\sum_{i=1}^t n_i = n.$$

Définition 2.1.1 *Un tel ensemble est appelé partition de n .*

Dans le cas qui nous intéresse, k sera la dimension de l'espace des matrices symétriques, c'est-à-dire que si on travaille avec les matrices d'ordre n , l'espace sera de dimension

$$k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Proposition 2.1.2 *Soit $H_n(K)$, l'espace des matrices symétriques d'ordre n et $k = \frac{n(n+1)}{2}$ la dimension d'une base d'un tel espace. Alors si n est pair on a*

$$k = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 4i - 1$$

et si n est impair on a

$$k = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} 4i + 1.$$

Preuve: Par récurrence sur n . Cas où n est pair: soit $n = 2t$. Si $n=2$, $k = \frac{2(3)}{2} = 3$ et $\sum_{i=1}^1 4i - 1 = 3$. Considérons maintenant $n+2$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\frac{n+2}{2}} 4i + 1 &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 4i - 1 + 4\left(\frac{n+2}{2}\right) - 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 4\left(\frac{n+2}{2}\right) - 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 4n + 8 - 2}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+3)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+2+1)}{2}. \end{aligned}$$

Le cas impair se montre de la même manière. □

Définition 2.1.3 On appellera une telle partition une *partition standard*.

Nous allons maintenant introduire le polynôme qui nous intéresse. Ce polynôme est une variante du polynôme standard défini au chapitre précédent.

Soit K un corps de caractéristique zéro et $H_n(K)$ l'espace des matrices $n \times n$ symétriques sur K . Soient maintenant $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ deux ensembles d'indéterminées où $k = \frac{n(n+1)}{2}$. Considérons finalement $N = (n_1, \dots, n_t)$ la partition standard de k .

Définition 2.1.4 Le *polynôme*

$$\begin{aligned} f(X, Y) = \sum_{\sigma, \tau \in S_k} (-1)^{\sigma\tau} & x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n_t)} y_{\tau(1)} \dots y_{\tau(n_1)} x_{\sigma(n_t+1)} \dots x_{\sigma(n_t+n_t-1)} \\ & y_{\tau(n_1+1)} \dots y_{\tau(n_1+n_2)} \dots x_{\sigma(k-n_1+1)} \dots x_{\sigma(k)} \\ & y_{\tau(k-n_t+1)} \dots y_{\tau(k)} \end{aligned}$$

s'appelle polynôme standard en X, Y sous la partition N .

Remarque: Comme $f(X, Y)$ est multilinéaire, alterné en X et alterné en Y et que $k = \dim H_n(K)$, il n'y a donc, à permutation près, qu'une substitution d'éléments distincts d'une base fixe de $H_n(K)$.

Exemple 2.1 Soit $H_3(K)$ l'algèbre des matrices symétriques 3×3 sur K . Alors $k = \frac{3 \times 4}{2} = 6$ et la partition standard $N = (1, 5)$. Alors le polynôme obtenu est:

$$f(X, Y) = \sum_{\sigma, \tau \in S_6} (-1)^{\sigma\tau} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(5)} y_{\tau(1)} x_{\sigma(6)} y_{\tau(2)} \dots y_{\tau(6)}$$

Si on substitue pour les x_i et les y_i des éléments de la base canonique des matrices symétriques on obtient $f(X, Y) = \pm 10I_3$ où I_3 est la matrices identité 3×3 . Donc ce polynôme est un polynôme central. Ce résultat est l'objet du chapitre 3.

Définition 2.1.5 Soit S_k le groupe symétrique sur k symboles. On appelle transposition l'échange de deux symboles i et j que l'on note (ij) . Dans notre cas les indices i et j représentent les positions de l'ordre standard des éléments de la base.

Lemme 2.1.6 Le polynôme standard sous la partition N est un polynôme central ou une identité polynomiale.

Preuve: Nous devons montrer que pour tout ensemble d'éléments $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ de $H_n(K)$ le polynôme

$$f(X, Y) = \sum_{\sigma, \tau \in S_k} (-1)^{\sigma\tau} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n_1)} y_{\tau(1)} \dots y_{\tau(n_1)} \dots x_{\sigma(k)} \dots y_{\tau(k)}$$

est un multiple de la matrice identité.

Soit $\{b_1, \dots, b_k\}$ une base de $H_n(K)$. On a k entrées en x_i (et k entrées en

y_i) et il y a k éléments dans notre base. Donc il doit y en avoir exactement un de chaque. Considérons le polynôme $f(b_1, \dots, b_k, b_1, \dots, b_k)$. Chaque b_j est une matrice symétrique d'ordre n . Chaque monôme de notre polynôme est de la forme suivante: $(-1)^{\sigma r} e_{[i_1 j_1]} \dots e_{[i_k j_k]} \dots e_{[i_{2k} j_{2k}]}$. Or pour qu'un tel produit soit non-nul on doit avoir $j_l = i_{l+1}, 1 \leq l \leq 2k - 1$. Ainsi on a $4k$ indices à placer à $4k$ emplacements en respectant la règle ci-dessus. Alors si on commence avec un élément de premier indice i_1 on doit terminer avec un élément de deuxième indice $j_{2k} = i_1$ car chaque indice apparaît en X et en Y un nombre pair de fois. Ce monôme est donc de la forme a fois une matrice d'ordre n ayant un 1 en position $i_1 i_1$ et des 0 partout ailleurs. On obtient alors une matrice diagonale.

Il reste à montrer qu'on obtient le même scalaire sur toute la diagonale. Or pour passer d'un élément en position (i, i) à un élément en position (j, j) , il suffit d'appliquer la transposition (ij) aux indices des $e_{[rs]}$, comme cela correspond à la même permutation des x_i et des y_j , cela revient à multiplier notre scalaire par $(-1)^2 = +1$. \square

La question qui nous intéresse est la suivante: étant donné un n , est-ce que le polynôme standard en X, Y sous la partition standard N est un polynôme central (et pas une identité polynomiale) sur $H_n(K)$. Nous tenterons de répondre à cette question dans les chapitres suivants. Mais tout d'abord, nous avons besoin d'une autre théorie, la théorie des graphes.

2.2 Introduction à la théorie des graphes

Dans cette section nous allons introduire quelques concepts de base de la théorie des graphes qui nous seront utiles pour les démonstrations des résultats des prochains chapitres.

La théorie des graphes à été introduite au 18ième siècle par le mathématicien Euler avec l'étude du problème des ponts de Koenigsberg. Les graphes sont maintenant utilisés dans une multitude de problèmes dont les réseaux électriques, la résolution d'équations différentielles, l'informatique et les problèmes de dénombrement. C'est ce dernier aspect de la théorie qui nous intéresse.

Définition 2.2.1 *Un graphe (non-orienté) est un couple $G = (X, A)$, où X est un ensemble de sommets et A un ensemble d'arêtes. Chaque élément de X est représenté par un point du plan et chaque $a \in A$ est un couple de la forme $a = \{x, y\}$ représenté par un segment reliant les points x et y . Le couple $a = \{x, x\}$ est appelé une boucle. On appelle degré d'un graphe le nombre de sommets du graphe.*

Définition 2.2.2 *Soit $U \subset A$. On appelle graphe partiel de G un graphe $H = (Y, U)$, $Y \subseteq X$, $U \subseteq A$ dont les sommets sont ceux de Y et les arêtes celles de U .*

Définition 2.2.3 *On appelle degré d'un sommet x le nombre d'arêtes incidentes à un sommet. Une boucle contribue 2 arêtes. On dit qu'un graphe est régulier si tous ses sommets sont de même degré.*

Définition 2.2.4 *Une chaîne de longueur $p > 0$ est une suite $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ d'arêtes de G tel que chaque arête de la séquence a une extrémité en commun avec l'arête précédente et l'autre extrémité en commun avec l'arête suivante.*

Définition 2.2.5 *Un graphe est connexe si pour toute paire x, y de sommets distincts, il existe une chaîne μ reliant ces deux points.*

Tous les graphes utilisés ici seront réguliers et connexes.

Exemple 2.2 Les figures 2.1 et 2.2 sont des exemples de graphes. Le premier est un graphe régulier, alors que le second ne l'est pas. Les deux graphes sont connexes.

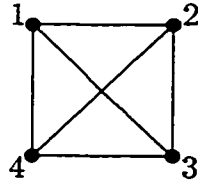


Figure 2.1: graphe régulier

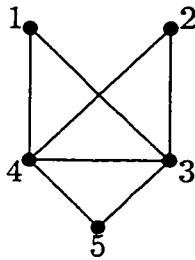


Figure 2.2: graphe non régulier

Définition 2.2.6 Un cycle est une chaîne $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ telle que:

- 1) la même arête ne figure pas deux fois dans la séquence.
- 2) les deux sommets aux extrémités de la chaîne coïncident.

Définition 2.2.7 Une chaîne eulérienne d'un graphe G est une chaîne qui passe par toutes les arêtes du graphe exactement une fois. Un cycle eulérien est un cycle qui passe par toutes les arêtes du graphe exactement une fois.

Exemple 2.3 Prenons le graphe de la figure 2.2. La chaîne

$$\{3, 5\}\{5, 4\}\{4, 1\}\{1, 3\}$$

est un cycle alors que la chaîne

$$\{5, 3\}\{3, 2\}\{2, 4\}\{4, 3\}\{3, 1\}\{1, 4\}\{4, 5\}$$

est un cycle eulérien puisqu'elle passe par toutes les arêtes du graphe.

Théorème 2.2.8 *Un graphe G admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il est connexe et si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.*

Preuve: Voir [2] □

Définition 2.2.9 *Deux graphes $(X_1, A_1), (X_2, A_2)$ sont isomorphes s'il existe une bijection de X_1 sur X_2 qui induit une bijection de A_1 sur A_2 .*

Nous avons maintenant tous les résultats nécessaires pour la démonstration de notre résultat. Ceux qui désirent en connaître plus sur la théorie des graphes peuvent consulter [2].

2.3 Théorie des graphes vs polynômes multilinéaires

À la section précédente nous avons introduit une nouvelle théorie qui sera un outil pour les démonstrations des résultats des deux prochains chapitres. Mais tout d'abord nous devons expliquer le lien entre ces deux théories.

Considérons le polynôme standard

$$S_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)}$$

et considérons $e_{[11]}, e_{[12]}, \dots, e_{[nn]}$ où

$$e_{[ij]} = \begin{cases} e_{ii} & \text{si } i = j \\ e_{ij} + e_{ji} & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

une base de l'espace des matrices $n \times n$ symétriques sur K où e_{ii} est l'unité matricielle définie au chapitre 1. Nous noterons alors $e_{[ij]}$ par le couple (i, j) .

Considérons maintenant un graphe de degré n . Alors le couple (i, j) sera représenté par l'arête $\{i, j\}$. Ainsi chercher un monôme non-nul revient à trouver une chaîne eulérienne sur le graphe correspondant.

Remarque: Bien que nos graphes ne soient pas orientés, lorsque nous trouvons une chaîne, nous fixons l'ordre des sommets dans le couple. Ainsi, la notation $\{i, j\}$ deviendra (i, j) .

Soit le polynôme standard sous la partition N ,

$$f(X, Y) = \sum_{\sigma, \tau \in S_k} (-1)^{\sigma\tau} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n_t)} y_{\tau(1)} \dots y_{\tau(n_1)} x_{\sigma(n_t+1)} \dots x_{\sigma(n_t+n_{t-1})} \\ y_{\tau(n_1+1)} \dots y_{\tau(n_1+n_2)} \dots x_{\sigma(k-n_1+1)} \dots x_{\sigma(k)} \\ y_{\tau(k-n_t+1)} \dots y_{\tau(k)}$$

Dans ce cas nous avons deux ensembles de variables X et Y , nous allons alors considérer deux graphes distincts, soient G_1 et G_2 . La partition utilisée ici possède t nombres. Le graphe G_1 sera alors décomposé en t graphes partiels. Alors pour chercher tous les monômes non nuls de notre polynôme, nous n'avons qu'à chercher les chaînes eulériennes dans chacun des graphes partiels, en indiquant le sommet de départ.

Exemple 2.4 *Reprenons le polynôme de l'exemple 2.1. Considérons les 4 parties suivantes:*

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} x_{\sigma(5)}$$

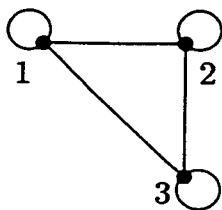
$$y_{\tau(1)}$$

$$x_{\sigma(6)}$$

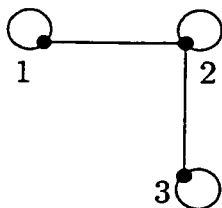
$$y_{\tau(2)} y_{\tau(3)} y_{\tau(4)} y_{\tau(5)} y_{\tau(6)}$$

Le graphe suivant est le graphe complet correspondant aux x_i de notre polynôme.

En prenant une deuxième copie de ce graphe nous obtenons le graphe complet correspondant aux y_i de notre polynôme.



Supposons que $x_{\sigma(1)}$ est l'élément e_{11} . Ainsi l'arête représentant cet élément est la boucle $(1, 1)$. À l'aide du graphe ci-haut, on trouve une chaîne, disons la chaîne $(1, 1)(1, 2)(2, 2)(2, 3)(3, 3)$. Le graphe partiel restant est l'arête $\{3, 1\}$. Le graphe des y doit donc commencer sur le sommet 3 et se terminer sur le sommet 3 ou le sommet 1. Disons que $y_{\tau(1)}$ est l'élément $e_{[31]}$, soit l'arête $(3, 1)$, alors le graphe partiel restant est:



Sachant qu'il faut débiter sur le sommet 3, on voit bien ici qu'il n'y a qu'une seule possibilité. Ainsi nous avons construit le monôme

$$(1, 1)(1, 2)(2, 2)(2, 3)(3, 3)(3, 1)(1, 3)(3, 3)(3, 2)(2, 2)(2, 1)(1, 1).$$

La théorie des graphes nous sera utile pour dénombrer les monômes dans un polynôme. la technique utilisée dans l'exemple précédent sera celle que nous utiliserons dans les deux chapitres suivants. Nous avons maintenant toutes les définitions et résultats nécessaires pour les démonstrations des deux prochains chapitres.

Chapitre 3

Matrices symétriques d'ordre trois

Ce chapitre est consacré à la démonstration du résultat annoncé dans l'exemple 2.1. Mais tout d'abord nous avons besoin de quelques résultats afin de prouver notre théorème.

3.1 Préliminaires

Définition 3.1.1 *Considérons*

$$f(X, Y) = \sum_{\sigma, \tau \in S_k} (-1)^{\sigma\tau} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n_t)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n_1)} x_{\sigma(n_t+1)} \cdots x_{\sigma(n_t+n_{t-1})} \\ y_{\tau(n_1+1)} \cdots y_{\tau(n_1+n_2)} \cdots x_{\sigma(k-n_1+1)} \cdots x_{\sigma(k)} \\ y_{\tau(k-n_t+1)} \cdots y_{\tau(k)}$$

le polynôme standard sous la partition $N = (n_1, \dots, n_t)$. Nous appellerons mot le monôme

$$x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n_t)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n_1)} x_{\sigma(n_t+1)} \cdots x_{\sigma(n_t+n_{t-1})} \\ y_{\tau(n_1+1)} \cdots y_{\tau(n_1+n_2)} \cdots x_{\sigma(k-n_1+1)} \cdots x_{\sigma(k)} y_{\tau(k-n_t+1)} \cdots y_{\tau(k)}.$$

Définition 3.1.2 *Nous appellerons ordre d'un graphe le nombre d'arêtes de ce graphe.*

Définition 3.1.3 *Soit $\{i, j\}$ une arête d'un graphe G associé à un polynôme. On sait que $\{i, j\}$ représente aussi l'élément $e_{[ij]}$ de la base de $H_n(K)$. Nous appellerons ordre standard des éléments l'ordre suivant:*

$$\{1, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, n\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n, n\}.$$

La signature d'une permutation peut-être calculée à partir des transpositions. En effet, toute permutation peut s'écrire comme un produit de transpositions. La signature est alors calculée de la manière suivante: si on a un nombre pair de transpositions, la signature est positive alors que si on a un nombre impair de transpositions, la signature est négative.

Lemme 3.1.4 *Soit $H_3(K)$ l'espace des matrices symétriques d'ordre 3 sur un corps K de caractéristique zéro. Soit $f(x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6)$ le polynôme standard sous la partition standard N . Soient maintenant G_1 et G_2 les graphes associés aux variables x_1, \dots, x_6 et y_1, \dots, y_6 respectivement. Alors, deux mots sont de signes contraires si et seulement si il y a un changement dans le nombre de boucles du graphe partiel d'ordre le plus élevé de G_1 ou de G_2 .*

Preuve: Débutons par la condition suffisante:

Soient 2 graphes partiels P_1 et P_2 d'ordre le plus élevé associés à deux mots m_1 et m_2 . Dans notre cas, l'ordre le plus élevé est 5. Chacun de ces graphes possède deux ou trois boucles car on a trois sommets et 5 arêtes. Disons que P_1 a deux boucles et P_2 a trois boucles. Nous voulons montrer que passer de P_1 à P_2 change le signe, ce qui revient à dire que pour passer de P_1 à P_2 on doit faire un nombre impair de transpositions.

À isomorphisme près, le graphe P_1 est le seul graphe partiel d'ordre 5 possédant 2 boucles et les graphes P_2 et P_3 sont les seuls graphes d'ordre

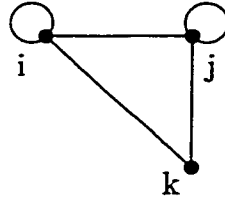


Figure 3.1: Graphe partiel P_1

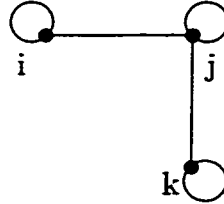


Figure 3.2: Graphe partiel P_2

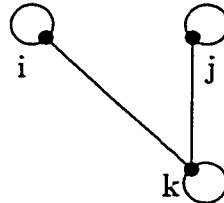


Figure 3.3: Graphe partiel P_3

5 possédant 3 boucles sachant qu'on débute soit sur le sommet i ou sur le sommet k . Il suffit donc de montrer que passer de P_1 à P_2 ou de P_1 à P_3 change le signe de la permutation. Nous allons considérer 2 cas: Notre chaîne débute sur un sommet qui a une boucle (soit les sommets i ou j) ou notre chaîne débute sur le sommet k . Alors si on débute sur le sommet i on obtient:

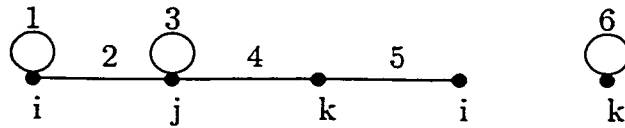


Figure 3.4:

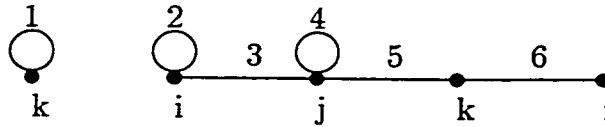


Figure 3.5:

La figure 3.4 représente les $6x$ et la figure 3.5 représente les $6y$. Or on peut étudier uniquement les x_i car pour passer de la figure 3.4 à la figure 3.5 il suffit de faire les transpositions (12)(13)(14)(15)(16) puis pour revenir on fait le même nombre de transpositions, donc, en tout, on en fait un nombre pair. Donc considérons uniquement le cas de la figure 3.4. Pour ajouter la boucle (k, k) , on doit faire la transposition (56). On obtient alors le graphe de la figure 3.6

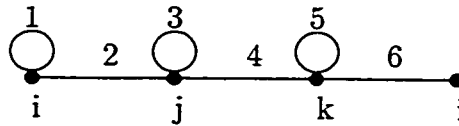


Figure 3.6:

Maintenant on doit enlever une arête qui n'est pas une boucle. On a alors 2 possibilités: on peut enlever l'arête $\{k, i\}$ ou l'arête $\{i, j\}$. Dans le premier cas (figure 3.2) on n'a rien à faire. Dans le second cas (figure 3.3), on doit faire les transpositions (23)(24)(25)(26). Donc dans les deux cas on fait un nombre impair de transpositions, donc le signe change.

Considérons maintenant le cas où on débute notre chaîne sur le sommet k . Le graphe suivant illustre cette situation pour les $6x$. Pour la même raison que dans le cas précédent, on peut ne considérer que les $6x$:

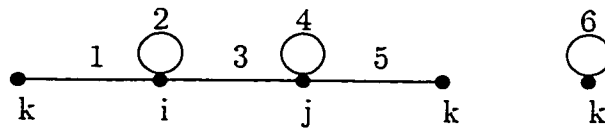


Figure 3.7:

Dans ce cas, pour ajouter la boucle k , on n'a rien à faire et on obtient le graphe suivant:

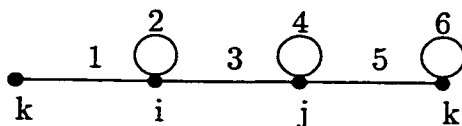


Figure 3.8:

Alors pour obtenir un graphe isomorphe à ceux des figures 3.2 ou 3.3, on doit enlever l'arête $\{k, i\}$ ou l'arête $\{k, j\}$ respectivement. Pour enlever l'arête $\{k, i\}$ on fait les transpositions $(12)(13)(14)(15)(16)$, alors que pour enlever l'arête $\{k, j\}$ on doit faire la transposition (56) . Or dans les deux cas, on fait un nombre impair de transpositions, donc on change le signe de la permutation.

Pour la condition nécessaire, procédons par la contraposée: Supposons qu'on ait deux graphes partiels ayant le même nombre de boucles. On veut montrer que si on passe d'un graphe à un autre ayant le même nombre de boucles alors le signe ne change pas. On doit considérer deux cas: Nos graphes ont deux boucles ou nos graphes ont 3 boucles.

1) Deux boucles:

On a alors 2 graphes isomorphes au graphe P_1 de la figure 3.1.

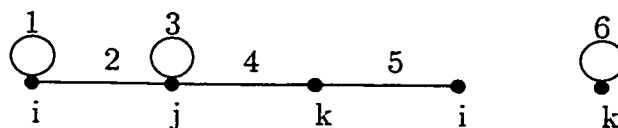


Figure 3.9:

Alors pour ajouter la boucle (k, k) on doit faire la transposition (65) . Maintenant on peut enlever soit la boucle (i, i) ou la boucle (j, j) . Pour enlever la boucle (i, i) on doit faire les transpositions $(12)(13)(14)(16)(15)$ et pour enlever la boucle (j, j) on doit faire les transpositions $(34)(36)(35)$.

Dans les deux cas on fait, en tout, un nombre pair de transpositions, donc le signe ne change pas. Maintenant supposons que le graphe ne change pas, mais qu'on débute sur une arête différente. Supposons qu'on débute sur l'arête n (n choisis entre 2 et 5). Alors on commence par mettre l'arête 1 à la place de l'arête 5. Pour ce faire on doit effectuer les transpositions (12)(13)(14)(15) puis, si nécessaire, on refait la même chose avec l'arête 2 avec les transpositions (23)(24)(25)(21), ainsi de suite jusqu'à ce qu'on débute sur la bonne arête. Or chaque fois on affectue un nombre pair de transpositions, donc en tout, on a un nombre pair de transpositions et le signe ne change pas.

2) 3 boucles:

On veut alors passer du graphe P_2 au graphe P_3 sur les figures 3.2 et 3.3 respectivement. Numérotons nos arêtes comme précédemment:

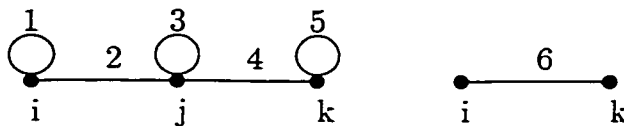


Figure 3.10:

Alors pour ajouter l'arête (i, k) , on n'a rien à faire, pour enlever l'arête $\{i, j\}$ on doit faire les transpositions (23)(24)(25)(26). En tout on a un nombre pair de transposition, donc le signe ne change pas. \square

3.2 Démonstration

Nous allons maintenant démontrer le résultat de l'exemple 2.1.

Théorème 3.2.1 *Soit $H_3(K)$ l'espace des matrices symétriques sur K , un corps de caractéristique zéro. Soient $x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6$ deux ensembles*

d'indéterminées sur $H_3(K)$. Soit maintenant $N = (1, 5)$ la partition standard de $k = 6$. Considérons le polynôme standard sous la partition N :

$$f(X, Y) = \sum_{\sigma, \tau \in S_6} (-1)^{\sigma\tau} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(5)} y_{\tau(1)} x_{\sigma(6)} y_{\tau(2)} \cdots y_{\tau(6)}.$$

Alors f est un polynôme central.

Preuve:

Nous avons montré au chapitre précédent que toutes les évaluations du polynôme sont centrales; nous voulons alors montrer que ce n'est pas une identité polynomiale. Ainsi nous savons que pour toute substitution des x_i et des y_i , nous obtenons un multiple de la matrice identité. Il suffit de montrer que, pour une substitution donnée, ce multiple est non-nul. Le caractère alterné du polynôme f fait, qu'à permutation près, il n'y a qu'une substitution des éléments de la base standard de $H_3(K)$.

Nous ne considérons que les mots débutants par les éléments $(1, j)$ où $j = 1, 2, 3$, car comme nous l'avons montré dans le lemme 2.1.5, on obtient le même scalaire sur toute la diagonale. Il y a donc deux cas à étudier: Les mots débutants par $(1, 1)$ et ceux débutants par $(1, j)$ où $j = 2, 3$. Soient G_1 et G_2 les graphes associés aux x_i et aux y_i respectivement.

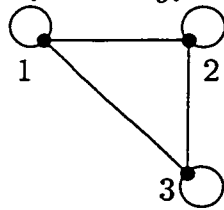


Figure 3.11: Graphe G_1

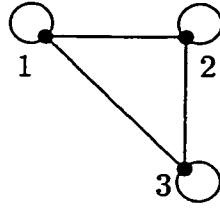


Figure 3.12: Graphe G_2

3.2.1 Premier cas: Mots débutants par $(1, 1)$

Les cinq premiers éléments sont pris dans l'ensemble (x_1, \dots, x_6) . Les deux premiers éléments sont $(1, 1)(1, j)$ où $j = 2, 3$. Il reste donc deux boucles et deux arêtes (ici par arête on entend une arête qui n'est pas une boucle). Si on fixe j , On a trois manières d'obtenir une chaîne eulérienne. Ici $\{j, k\} = \{2, 3\}$.

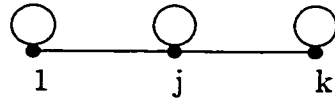


Figure 3.13: graphe partiel 1

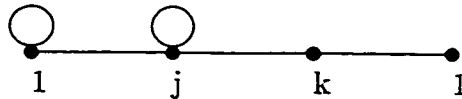


Figure 3.14: graphe partiel 2

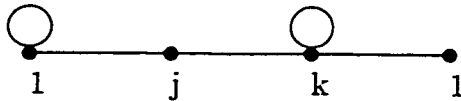


Figure 3.15: graphe partiel 3

Analysons chacun de ces graphes.

Premier graphe:

Il nous reste l'arête $\{1, k\}$. On veut maintenant évaluer les possibilités pour

les éléments y_1, \dots, y_6 . Soit $y_{\tau(1)} = (k, 1)$ ou soit $y_{\tau(1)} = (k, k)$. Dans le premier cas on obtient le graphe partiel de G_2 :

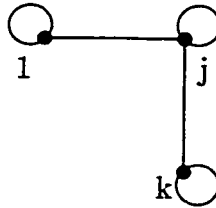


Figure 3.16:

Sachant qu'on débute sur le sommet k , il nous reste une seule possibilité d'obtenir une chaîne eulérienne.

Dans le second cas on obtient comme graphe partiel de G_2 le graphe suivant:

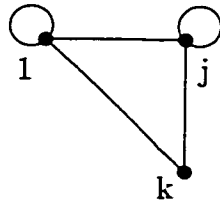


Figure 3.17:

Sachant qu'on débute sur le sommet 1, il y a quatre possibilités.

Deuxième graphe:

Dans ce cas, il nous reste la boucle (k, k) . Alors $y_{\tau(1)} = (1, k)$. Ce qui nous donne le graphe suivant:

Sachant qu'on débute sur le sommet k , il n'y a qu'une seule possibilité.

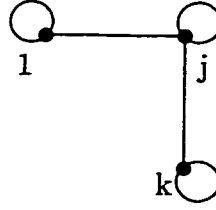


Figure 3.18:

Troisième graphe:

Ici, il nous reste la boucle (j, j) . Le graphe restant est isomorphe au graphe de la figure 3.18, donc on n'a qu'une seule possibilité.

En tout et pour tout, on trouve 7 possibilités. Chacun de ces mots a une signature de ± 1 , et comme il y en a un nombre impair, la somme des signatures est non-nulle. Disons que cette somme est a . Si on répète le même processus avec k , on obtient le même résultat, donc au total on a que la somme des signatures est $2a \neq 0$.

3.2.2 Deuxième cas: Mots débutants par $(1, j)$, $j \neq 1$

Fixons j . Dans ce cas, il nous reste 3 boucles et 2 arêtes ce qui nous donne encore une fois 3 manières d'obtenir une chaîne eulérienne:

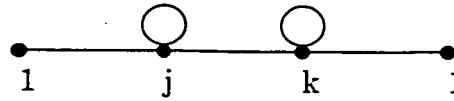


Figure 3.19: graphe partiel 1

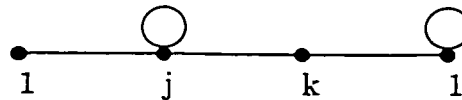


Figure 3.20: graphe partiel 2

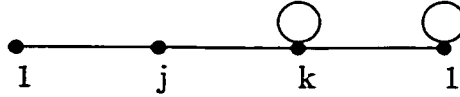
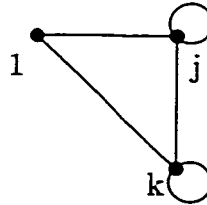


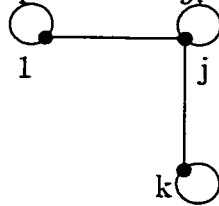
Figure 3.21: graphe partiel 3

Dans la figure 3.19, il nous reste la boucle $(1, 1)$. Alors $y_{\tau(1)} = (1, 1)$. Ainsi le graphe partiel restant des y_i est le suivant:



Sachant qu'on débute sur le sommet 1, il y a deux possibilités de chaîne eulérienne.

Pour la figure 3.20, il nous reste la boucle (k, k) , ainsi $y_{\tau(1)} = (1, k)$, ce qui nous donne comme graphe partiel des y_i :



Et sachant qu'on débute sur le sommet k , il n'y a qu'une seule possibilité. Pour la troisième figure, il nous reste la boucle (j, j) . le graphe partiel des y_i est isomorphe au graphe précédent, donc il y a ici aussi qu'une seule possibilité. En tout on a 4 possibilités. Les graphes partiels associés aux x_i ont le même nombre de boucles, donc aucun changement de signe par le lemme 3.1.5. Maintenant si on regarde les graphes associés aux y_i , on a deux possibilités du même signe et deux possibilités de signe opposé par le lemme 3.1.5. On obtient que la somme des signatures ne peut-être que zéro. Si on recommence en fixant l'autre sommet, soit le sommet k , on obtient de la même manière 4 possibilités. Alors la somme totale des signatures ne peut

être que zéro. Nous obtenons le résultat car dans le premier cas la somme est non-nulle. Alors le polynôme standard sous la partition standard N est un polynôme central et pas une identité polynomiale. \square

En annexe B, vous trouverez les possibilités de mots débutant par $(1, 1)$ et par $(1, j)$ pour $j = 2, 3$ qui ont été calculées à l'aide d'un ordinateur. On trouve que le polynôme est un polynôme central et $f(X, Y) = 10I_3$. De plus, $10 = 2 \times 5$, alors notre polynôme est central dans tout corps de caractéristique différente de 2 et 5. Le programme utilisé pour ce calcul se trouve en annexe A.

Chapitre 4

Matrices symétriques d'ordre quatre

Au chapitre 3, nous avons montré que le polynôme standard sous la partition standard N est un polynôme central pour $H_3(K)$. Nous voulons maintenant montrer le même résultat pour $H_4(K)$, soit avec les matrices symétriques d'ordre 4.

Théorème 4.0.2 *Soit $H_4(K)$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 4 sur un corps K de caractéristique zéro. Soit $N = \{3, 7\}$ la partition standard pour $k = 10$. Le polynôme:*

$$f(X, Y) = \sum_{\sigma, \tau \in S_{10}} (-1)^{\sigma\tau} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(7)} y_{\tau(1)} y_{\tau(2)} y_{\tau(3)} x_{\sigma(8)} x_{\sigma(9)} x_{\sigma(10)} y_{\tau(4)} \cdots y_{\tau(10)}.$$

est un polynôme central.

La démonstration de ce théorème sera l'objet de ce chapitre. Chacune des sections représente une partie de la démonstration. Mais tout d'abord, voici le plan du chapitre, soit l'idée générale de la démonstration.

Considérons un mot non nul débutant par $(1, j)$ pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Encore une fois, nous pouvons considérer uniquement les cas où les mots débutent par un 1 par le lemme 2.1.5:

$$\begin{aligned}
& (1, j_1)(j_1, j_2)(j_2, j_3)(j_3, j_4)(j_4, j_5)(j_5, j_6)(j_6, j_7) \\
& \qquad \qquad \qquad (j_7, i_1)(i_1, i_2)(i_2, i_3) \\
& \qquad \qquad \qquad (i_3, j_8)(j_8, j_9)(j_9, j_{10}) \\
& (j_{10}, i_4)(i_4, i_5)(i_5, i_6)(i_6, i_7)(i_7, i_8)(i_8, i_9)(i_9, 1)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Pour notre démonstration nous allons fixer les éléments i_3 et j_{10} :

- 1) Nous allons tout d'abord montrer qu'il y a 6 manières de fixer ces deux éléments, c'est le sujet de la première section.
- 2) La deuxième section s'intéresse à un de ces 6 cas. On veut dénombrer les chaînes possibles de x_i , on en trouvera 50.
- 3) finalement on veut montrer que la somme des signatures de ces 50 chaînes est non-nulle, ce que nous ferons à la troisième section.

Tout au long de ce chapitre, les démonstration seront faite uniquement pour les x_i . Nous pouvons montrer que les résultats sont les mêmes pour les y_i en considérant la symétrie de notre polynôme.

4.1 Élément fixé

Considérons la partition standard $N = \{3, 7\}$ pour $k = 10$. Nous noterons $7x, 3x, 3y, 7y$ les graphes partiels (ou chaînes) associés aux 7 premiers éléments des x_i , aux 3 derniers éléments des x_i , aux 3 premiers éléments des y_i et aux 7 derniers éléments des y_i respectivement.

Afin de compter les manières de fixer i_3 et j_{10} , nous allons premièrement montrer qu'il est impossible d'avoir un cycle dans les $3x$ ou dans les $3y$, ce qui revient à montrer qu'on ne peut pas avoir $i_3 = j_{10}$ pour les $3x$ ou $j_7 = i_3$ pour les $3y$. Ensuite nous montrerons qu'il est impossible d'avoir $j_7 = j_{10}$ et,

finalement, la dernière sous-section montre que les $3x$ et les $3y$ ne peuvent débiter ou finir par un 1 .

4.1.1 Pas de cycle dans les $3x$ ou $3y$

Nous voulons tout d'abord montrer qu'il est impossible d'obtenir un cycle dans les $3x$ ou dans les $3y$, c'est-à-dire qu'on ne peut pas avoir $i_3 = j_{10}$ ou $j_7 = i_3$ respectivement. Sans perte de généralité, nous pouvons montrer le résultat uniquement pour les $3x$. Considérons le graphe suivant:

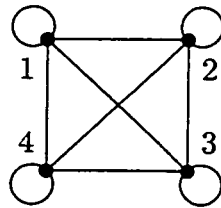


Figure 4.1: graphe des x_i

Définition 4.1.1 Nous appellerons *degré total* d'un graphe la somme des degrés des sommets du graphe.

Par exemple le graphe de la figure 4.1 est de degré total 20. Puisqu'on débute avec une chaîne de longueur 7, le graphe partiel associé aux $3x$ est de degré total 6. Regardons les possibilités de degré des sommets de ce graphe partiel. Nous allons dénombrer les suites ordonnées de degrés possibles. Précisons tout d'abord ce que signifient ces chiffres. Par exemple si on a la suite suivante: a_1, a_2, a_3 alors on a le premier sommet de degré a_1 , le second de degré a_2 et le troisième est de degré a_3 . Il est clair que pour qu'un sommet soit au milieu d'une suite, il doit être de degré pair et pour avoir un cycle, tous les sommets doivent être de degré pair. Donc on a trois cas à

étudier: si le graphe partiel d'ordre 3 a deux, trois ou quatre sommets.

S'il a deux sommets, les possibilités de degré sont:

$$\begin{aligned} a- & 1, 5 \\ b- & 2, 4 \\ c- & 3, 3 \end{aligned}$$

Les cas a- et b- sont clairement impossibles, alors que le cas c- n'est pas un cycle puisque les sommets sont de degré impair.

S'il reste 3 sommets, alors les possibilités de degrés sont:

$$\begin{aligned} a- & 1, 1, 4 \\ b- & 1, 2, 3 \\ c- & 2, 2, 2 \end{aligned}$$

Les cas a- et b- ne sont pas des cycles puisque les degrés ne sont pas tous pairs. Étudions maintenant le cas c. Supposons qu'on ait cette possibilité. Alors pour le graphe partiel de degré total 4 on a la suite suivante de degrés des sommets: 5,3,3,3. Or il est impossible d'obtenir une chaîne avec 4 sommets ayant des degrés impairs.

S'il reste 4 sommets, alors les possibilités de degrés sont:

$$\begin{aligned} a- & 1, 1, 2, 2 \\ b- & 1, 1, 1, 3 \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on n'a pas de cycle puisqu'on a des sommets de degré impair.

Finalement, ceci montre qu'il est impossible d'obtenir un cycle dans les $3x$ ou les $3y$.

4.1.2 Pas de cycle dans le mot $3y3x$

On veut montrer qu'il est impossible d'avoir un cycle dans la chaîne $3y3x$, c'est-à-dire qu'on ne peut obtenir $j_7 = j_{10}$. Supposons qu'on ait un tel cycle et considérons deux cas:

$-j_7 \neq 1$: Comme on débute la chaîne $3y$ par le sommet j_7 , on doit finir la chaîne $7x$ par le sommet j_7 . Alors le degré du sommet j_7 (dans le graphe partiel des $7x$) est impair (puisque $j_7 \neq 1$). Donc ce sommet est de degré pair dans le graphe partiel des $3x$. Or comme il termine les $3x$ (car $j_7 = j_{10}$ par hypothèse), il doit donc aussi débiter les $3x$. On obtient alors un cycle ce qui contredit la section 4.1.1.

$-j_7 = 1$: Alors $j_{10} = 1$, donc le degré du sommet 1 dans les $3x$ est 1 ou 3 (car on ne peut avoir un cycle dans les $3x$), ce qui implique que le degré du sommet 1 dans les $7x$ est 4 ou 2.

a) supposons que le degré est 4: Le degré total du graphe partiel des $7x$ est 14, alors si le sommet 1 est de degré 4, il reste 10 degrés à placer sur 2 ou 3 sommets. Chaque sommet doit être de degré pair car on débute et on termine les $7x$ par le sommet 1. Or si on distribue 10 degrés sur 2 sommets (de degrés maximum 5 chacun) la seule possibilité est que chacun de ces sommets soit de degré 5, ce qui est impossible. Maintenant si on veut distribuer 10 degrés sur 3 sommets en respectant la règle de la parité, la seule manière de faire est d'avoir deux sommets de degré 4 et un sommet de degré 2. Or dans ce cas, sur le graphe $3x$, on a 3 sommets de degré 1 et un sommet de degré 3 ce qui ne nous donne pas une chaîne.

b) supposons maintenant que le degré du sommet 1 est 2: Alors il reste 12 degrés à placer sur deux ou trois sommets. Sur deux sommets, c'est impossible car le degré maximum d'un sommet est 5. Sur trois sommets la seule possibilité, en respectant la règle de la parité, est d'avoir trois sommets de degré 4. Or dans ce cas, sur le graphe des $3x$, on obtient encore une fois trois

sommets de degré 1 et un sommet de degré 3.

Ainsi $j_7 \neq j_{10}$, ce qui veut dire qu'il est impossible d'obtenir un cycle dans les $3y3x$.

4.1.3 Les $3x$ et les $3y$ ne peuvent débuter ou finir par l'élément 1

Maintenant on veut montrer que lorsque la chaîne débute sur le sommet i , il est impossible que les $3x$ ou les $3y$ débutent ou finissent par le sommet i . Nous pouvons, sans perte de généralité, ne montrer ce résultat que pour les chaînes débutant sur le sommet 1.

On veut montrer que j_7, j_{10} et $i_3 \neq 1$.

a) supposons que $j_7 = 1$:

Alors les $7x$ débutent et finissent sur le sommet 1. Ce qui implique que le degré du sommet 1 (dans les $7x$) est pair, donc 2 ou 4. Ainsi le degré du sommet 1, dans les $3x$ est 3 ou 1. Considérons ces deux cas:

- Si le degré est 1: Alors soit $i_3 = 1$ ou $j_{10} = 1$. dans le premier cas on obtient un cycle dans les $3y$ ce qui contredit la section 4.1.1. Dans le second cas, on obtient un cycle dans les $3y3x$ ce qui contredit la section 4.1.2.

- Si le degré est 3: Alors soit qu'on a $i_3 = 1$ ou $j_{10} = 1$ et ces deux cas sont impossibles pour les mêmes raisons que précédemment.

b) Supposons que $j_{10} = 1$:

Alors les $7y$ débutent et se terminent sur le sommet 1, on revient au cas a) à cause de la symétrie de notre polynôme.

c) Supposons que $i_3 = 1$:

Alors le degré du sommet 1 dans les $7x$ doit être 4 ou 2 car on ne peut avoir pour les $3x$ que les trois possibilités suivantes:

$(1, a)(a, b)(b, c)$ avec $a, b, c \neq 1$ car si $c = 1$ on contredit la section 4.1.1.

$(1, 1)(1, a)(a, b)$ avec $a, b \neq 1$.

$(1, a)(a, 1)(1, c)$ avec $a, c \neq 1$.

Supposons donc que le sommet 1 est de degré 2 ou 4 dans les $7x$. Alors on doit finir les $7x$ par le sommet 1 car on commence par le sommet 1 et il est de degré pair. Ainsi on obtient que $j_7 = 1$ et ceci nous donne un cycle dans les $3y$, en contradiction avec 4.1.1.

Avec les résultats des 3 sous-sections précédentes, on est en mesure de simplifier notre problème de départ. Utilisons un peu de combinatoire afin de compter le nombre de manières de fixer nos premiers et derniers éléments de la chaîne $3x$.

On obtient $\underline{3} \underline{2} = 6$ où le premier chiffre représente le nombre de possibilités (entre 1 et 4) pour i_3 sachant, par la section 4.1.3 que la chaîne $3x$ ne peut commencer par 1. Ainsi les 2 chiffres si-haut représentent les possibilités pour i_3 et j_{10} respectivement. Il y a donc 6 manières de fixer notre chaîne $3x$. En fait, on remarque que fixer les $3x$ revient à fixer aussi les $3y$. En effet, supposons qu'on fixe i_3 et j_{10} . Alors j_7 doit être différent de i_3 , sinon on aurait un cycle dans les $3y$, différent de j_{10} , sinon on aurait un cycle dans les $3y3x$, et différent de 1 par la section 4.1.3. Donc ne il reste qu'une seule possibilité pour j_7 . Donc on doit étudier 6 cas où les $3x$ et les $3y$ sont fixés. Pour chaque cas, on a le même nombre de chaînes et la même signature car pour passer d'une à l'autre il suffit d'effectuer la transposition (ij) aux x_i et aux y_i . Voici les 6 cas trouvés:

$$\begin{aligned}
& (1, j_1) \dots (j_6, 2)(2, i_1)(i_1, i_2)(i_2, 3)(3, j_8)(j_8, j_9)(j_9, 4)(4, i_4) \dots (i_9, 1) \\
& (1, j_1) \dots (j_6, 2)(2, i_1)(i_1, i_2)(i_2, 4)(4, j_8)(j_8, j_9)(j_9, 3)(3, i_4) \dots (i_9, 1) \\
& (1, j_1) \dots (j_6, 3)(3, i_1)(i_1, i_2)(i_2, 2)(2, j_8)(j_8, j_9)(j_9, 4)(4, i_4) \dots (i_9, 1) \\
& (1, j_1) \dots (j_6, 3)(3, i_1)(i_1, i_2)(i_2, 4)(4, j_8)(j_8, j_9)(j_9, 2)(2, i_4) \dots (i_9, 1) \\
& (1, j_1) \dots (j_6, 4)(4, i_1)(i_1, i_2)(i_2, 2)(2, j_8)(j_8, j_9)(j_9, 3)(3, i_4) \dots (i_9, 1) \\
& (1, j_1) \dots (j_6, 4)(4, i_1)(i_1, i_2)(i_2, 3)(3, j_8)(j_8, j_9)(j_9, 2)(2, i_4) \dots (i_9, 1)
\end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons considérer une seule possibilité et montrer que dans ce cas la somme des signatures est non-nulle.

4.2 Cas particulier: Premier et dernier indice des $3x$ fixés

On veut maintenant compter le nombre de chaînes sachant que les $3x$ commencent par 3 et finissent par 4, qui est un des 6 cas calculé à la section précédente. Regardons les degrés des sommets du graphe des $3x$. Pour former une chaîne de longueur 3, on doit enlever 6 degrés au graphe. On va alors regarder les manières d'enlever 6 degrés et les conséquences sur le graphe partiel associé aux $7x$ sachant que les $7x$ débutent sur le sommet 1 et finissent sur le sommet 2. On obtient 5 cas à étudier:

- 1— 3, 3
- 2— 1, 4, 1
- 3— 1, 2, 3
- 4— 2, 2, 2
- 5— 1, 2, 2, 1

Regardons maintenant les conséquences sur le graphe partiel des $7x$ pour chacun de ces cas. Nous allons énumérer les suites de degrés possibles pour chaque sommet. Chaque suite de 4 nombres représente les degrés des sommets 1, 2, 3 et 4 respectivement et l'on sait que les degrés des sommets 1 et 2 sont impairs.

1- Le graphe partiel doit avoir des sommets de degrés 5,5,2,2, c'est-à-dire qu'il y a deux boucles sur ce graphe, ces deux boucles étant sur les sommets 1 et 2 car on débute notre chaîne sur le sommet 1 et on la termine sur le sommet 2.

2- Il nous reste deux possibilités:

$$a- 5, 1, 4, 4$$

$$b- 1, 5, 4, 4$$

Dans ces deux cas, il y a trois boucles.

3- Ici, on remarque tout d'abord qu'il y a deux permutations des degrés dans les graphe partiel des $3x$, soient 1,2,3 et 3,2,1. Pour ces deux possibilités on obtient 4 manières de placer les degrés sur le graphe partiel des $7x$:

$$a- 5, 3, 4, 2$$

$$b- 3, 5, 4, 2$$

$$c- 5, 3, 2, 4$$

$$d- 3, 5, 2, 4$$

Dans chacun de ces cas, on a 3 boucles. On doit avoir une boucle sur le sommet 1 et une autre sur le sommet 2 car sinon on aurait une boucle sur le sommet 1 ou le sommet 2 sur le graphe partiel des $3x$, or ce sommet est de degré 2 dans les $3x$, ce qui serait impossible.

4- Cet arrangement est impossible car le graphe partiel des $7x$ possède alors 4 degrés impairs et il serait donc impossible d'obtenir une chaîne eulérienne.

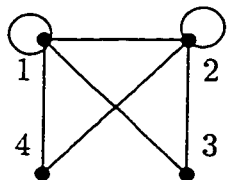
5- On obtient alors une seule possibilité de degré 3,3,4,4, or on peut permuter les deux 4, ce qui nous donne en fait deux possibilités. Dans ces deux cas il

nous reste 4 boucles.

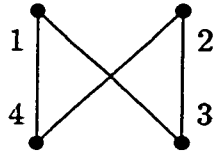
Nous avons maintenant toutes les possibilités, il ne nous reste plus qu'à dénombrer combien de chaînes sont possibles en tout. Pour ce faire, nous allons calculer le nombre de graphes partiels d'ordre 7 que nous obtenons en imposant des restrictions sur le nombre de boucles. Le graphe partiel d'ordre 7 doit avoir au minimum deux boucles. En effet, si le graphe partiel d'ordre 7 possède une seule boucle, il faudrait que le graphe partiel d'ordre 3 possède 3 boucles puisque le graphe total a 4 boucles. Or le graphe partiel d'ordre 3 est de degré total 6, ce qui impliquerait que ce graphe serait constitué uniquement de ces trois boucles ce qui ne forme évidemment pas une chaîne. Examinons donc les trois cas restants.

4.2.1 Le graphe partiel d'ordre 7 a deux boucles

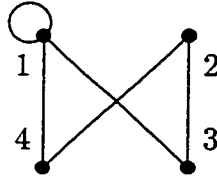
Si le graphe partiel d'ordre 7 a deux boucles, il doit avoir 5 arêtes qui ne sont pas des boucles. Le graphe suivant est un graphe représentant cette situation (sachant qu'on débute sur le sommet 1 et qu'on termine sur le sommet 2). En fait tous les autres graphes partiels d'ordre 7 ayant deux boucles sont isomorphes à ce graphe:



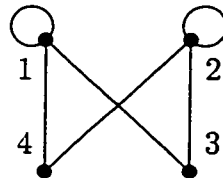
Considérons le graphe partiel auquel on enlève une arête incidente au sommet 2 et toutes les boucles. On obtient le graphe suivant:



On remarque alors qu'il y a deux chaînes eulériennes possibles sachant qu'on débute sur le sommet 1. Si on ajoute une boucle, on obtient:



Il y a maintenant quatre chaînes eulériennes possibles. Finalement, si on ajoute la dernière boucle on obtient:



Ce qui nous donne 8 possibilités. Or il y a trois manières d'enlever une arête incidente au sommet 2, donc en tout on a $3 \times 8 = 24$ possibilités si on a deux boucles dans le graphe partiel d'ordre 7.

4.2.2 Le graphe partiel d'ordre 7 a trois boucles

S'il y a trois boucles dans le graphe partiel des $7x$, alors il y a quatre arêtes qui ne sont pas des boucles. Encore une fois, on suppose qu'on débute sur le sommet 1 et qu'on termine sur le sommet 2. Nous allons considérer 4 cas. Le cas 1 représentant la possibilité 2-a, le cas 2, la possibilité 2-b, le cas 3, les possibilités 3-a-c, et le cas 4, les possibilités 3-b-d de la section 4.2:

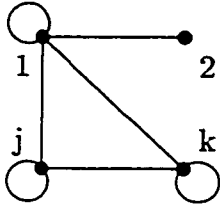


Figure 4.2: Cas 1

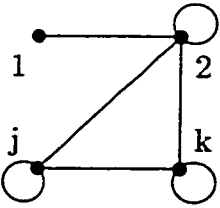


Figure 4.3: Cas 2

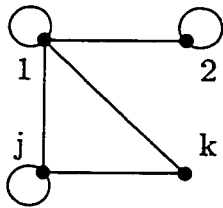


Figure 4.4: Cas 3

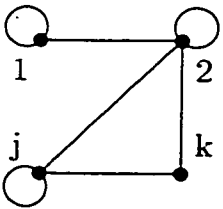
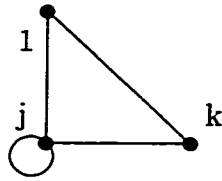
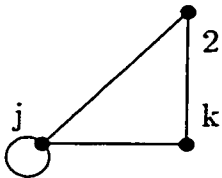


Figure 4.5: Cas 4

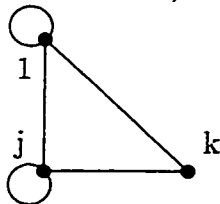
Sachant qu'on doit débiter sur le sommet 1, on peut alors considérer le graphe partiel suivant pour les cas 1 et 3:



et le graphe partiel suivant pour les cas 2 et 4:



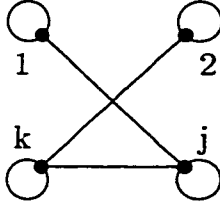
On a alors 2 manières d'obtenir un cycle eulérien en débutant sur le sommet 1. Si on ajoute maintenant la boucle sur le sommet 1 du premier graphe partiel ou sur le sommet 2 du deuxième graphe partiel, on obtient 4 possibilités comme représenté sur le graphe ci-dessous (le graphe partiel associé aux graphes des cas 2 et 4 étant isomorphe à celui associé aux graphes des 1 et 3, on obtient les mêmes résultats):



Ceci montre que si le graphe partiel d'ordre 7 a trois boucles, on a 4 chaînes eulériennes possibles. Or comme on a calculé 6 possibilités à la section 4.2, on obtient en tout $4 \times 6 = 24$ possibilités si on a 3 boucles dans le graphe partiel des $7x$.

4.2.3 Le graphe partiel d'ordre 7 a quatre boucles

Ce cas est le plus simple. Voici le graphe représentant cette situation:



On voit clairement qu'il n'y a qu'une seule possibilité d'obtenir une chaîne eulérienne à partir de ce graphe.

Nous avons donc étudié tous les cas possibles, alors si on veut dénombrer les chaînes eulériennes lorsque le premier et le dernier indice des $3x$ est fixe, on obtient le résultat suivant:

Dans le cas 1-, on avait 2 boucles, donc 24 possibilités.

Dans les cas 2- et 3-, on avait 3 boucles et 6 manières d'avoir ces 3 boucles. Or on a trouvé que pour 3 boucles, il y avait 4 possibilités, alors en tout on a $4 \times 6 = 24$ chaînes possibles.

Le cas 5- nous donnait 4 boucles on on avait trouvés deux manières d'avoir ces quatres boucles, donc on a deux chaînes possibles.

Finalement on a 50 chaînes pour les x_i lorsqu'on fixe le premier et le dernier indice des $3x$. Or on sait que lorsqu'on fixe les $3x$, le premier et le dernier indice des $3y$ se fixent automatiquement. Ainsi pour chaque chaîne des x_i on a 50 chaînes de y_i , ce qui nous donne $50^2 = 2500$ chaînes possibles pour chaque cas trouvés à la section 4.1. Alors il nous reste à montrer que la somme des signatures pour ces 2500 chaînes est non-nulle. C'est le sujet de la prochaine section.

4.3 Signature non-nulle

À la section précédente, nous avons montré que pour chaque chaîne de x_i

fixée, on a 50 chaînes de y_i possibles. Fixons une chaîne de x_i :

$$1j_1 j_1j_2 \dots j_62 \ 2i_1 \ i_1i_2 \ i_23 \ 33 \ 34 \ 44 \ 4i_4 \ i_4i_5 \dots i_91$$

où les indices j_k sont fixes. On veut maintenant montrer que la somme des 50 signatures est non-nulle. Supposons que la somme des signatures pour une telle chaîne de x_i fixée est $n \neq 0$, alors si on fixait à la place les y_i , on aurait que la somme des signatures est aussi $n \neq 0$. Donc au total, pour une chaîne où i_3 et j_{10} sont fixés, la somme des signatures est $n^2 \neq 0$.

Considérons le graphe partiel des $7y$. **Supposons que:**

- 1) Si on fait la transposition (23)(ici la transposition se fait sur les indices et non pas sur les positions de l'ordre standard), la nouvelle chaîne a le même signe. En général, on doit parler de transposition (j_7i_3) .
- 2) Pour une permutation fixe des x_i , on a 25 chaînes à transposition (23) près dans la chaîne des $10y$.
- 3) On additionne donc 25 signatures, ce qui ne peut nous donner zéro. Disons que la somme somme de ces signatures est m .
- 4) Alors pour une chaîne fixe des x_i , la somme des signatures est $2m \neq 0$.
- 5) Alors la somme des signatures pour une chaîne avec seulement i_3 et j_{10} fixés est $(2m)^2 = 4m^2 \neq 0$, comme expliqué plus haut.
- 6) Comme on a 6 manières de fixer le premier et le dernier élément des $3x$, la somme des signatures est $4m^2 \times 6 = 24m^2 \neq 0$.
- 7) Ainsi le polynôme étudié est un polynôme central et pas une identité polynomiale.

Il nous reste donc à montrer les parties 1) et 2).

4.3.1 25 chaînes de y_i à transposition (23) près

Prenons la chaîne telle qu'écrite plus haut. Alors la chaîne des $7y$ débute sur le sommet 4 et se termine sur le sommet 1. Nous avons déjà montré (à la section précédente) qu'il existe 50 chaînes de y_i . Voici les graphes représentant ces 50 possibilités à isomorphisme près:

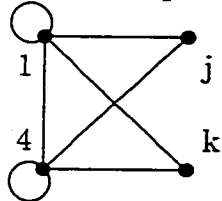


Figure 4.6: Cas a

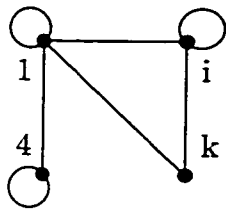


Figure 4.7: Cas b

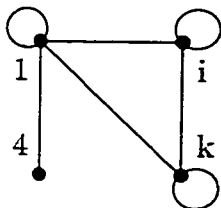


Figure 4.8: Cas b'

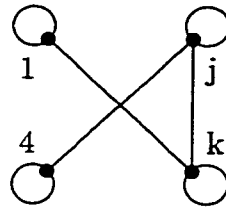


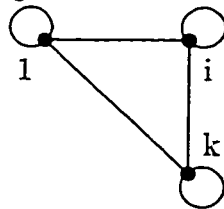
Figure 4.9: Cas c

Analysons chacun de ces trois cas.

a) Dans ce cas, lorsqu'on arrive sur le sommet 1, on peut choisir le sommet 2 ou le sommet 3 (soit j ou k). C'est donc dire qu'étant donné une chaîne où on choisit le sommet 2, il suffit de faire la transposition (23) pour obtenir la chaîne où on aurait choisit le sommet 3. Or dans ce cas, on avait calculé 24 possibilités, donc si on considère seulement les chaînes où, au départ, on choisit le sommet 2 disons, on a 12 possibilités.

b) Pour ce cas, soit on a une boucle sur le sommet 2 ou on a une boucle sur le sommet 3. Or pour passer d'un graphe à l'autre, on doit faire la transposition (23) aux indices. On avait montré qu'il y avait 12 chaînes possibles dans ce cas (cas 3 et 4 de la sous-section 4.2.2), alors il y en a 6 à transposition (23) près.

b') Si on regarde le graphe partiel suivant,



On voit qu'il est symétrique. Alors partant du sommet 1, on peut choisir le sommet 2 ou 3 indifferemment et obtenir l'autre chaîne en effectuant la

transposition (23). Comme on avait 12 chaînes pour ce cas (cas 1 et 2 de la sous-section 4.2.2), on peut n'en considérer que 6 à transposition (23) près.

c) Pour ce cas on a deux graphes possibles:

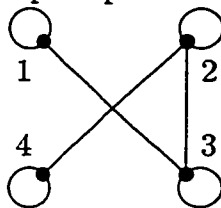


Figure 4.10: graphe i

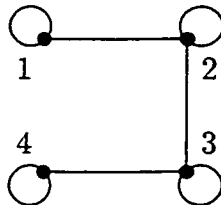


Figure 4.11: graphe ii

Or pour passer de i à ii, il suffit de faire la transposition (23). On peut donc ne considérer qu'un seul des 2 graphes.

Ainsi, pour une chaîne fixe des x_i , on a 25 chaînes de y_i à transposition (23) près.

4.3.2 Même signe à transposition (23) près

On veut maintenant montrer que lorsqu'on fait subir une transposition (23) au graphe partiel des $7y$ le signe ne change pas. Considérons l'ordre standard des éléments de la base: $(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(2,2)(2,3)(2,4)(3,3)(3,4)(4,4)$ qu'on va noter $\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\}$ où chacun de ces nombres représente la position d'un élément de la base dans l'ordre standard. Alors pour effectuer

la transposition (23) aux **indices** des éléments de la base, on doit effectuer les trois transpositions (23)(58)(79) aux **positions** de l'ordre standard. Puis on doit faire une transposition dans les $3y$ afin de débiter la chaîne des $3y$ sur le sommet 2 et la terminer sur le sommet 3. Donc en tout on fait 4 transpositions, alors le signe ne change pas.

Nous avons donc montré que le polynôme est un polynôme central. En annexe C on retrouve les 50 chaînes possibles lorsqu'on prend une chaîne fixe de x_i qui ont été calculées à l'aide du programme en annexe A. En effet, on a calculé que la somme des signatures des 25 chaînes (à permutation (23) près) où on a fixé les x_i est 15. Ainsi la somme des signatures pour une chaîne fixé des x_i est $2 \times 15 = 30$. Ce qui nous donne $30^2 = 900$ comme somme de signature pour une chaîne où on a fixé i_3 et j_{10} . alors $f(X, Y) = (900 \times 6)I_4$, c'est-à-dire, $f(X, Y) = 5400I_4$. Finalement, on a que $5400 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$. Ainsi notre résultat est valide dans tout corps de caractéristique différente de 2, 3 ou 5.

Conclusion

La conjecture qui avait été proposée étant: Pour tout n , le polynôme standard sous la partition standard sur l'algèbre des matrices symétriques d'ordre n est un polynôme central et pas une identité polynomiale, cette thèse n'a su répondre qu'aux cas $n = 3$ et $n = 4$. La méthode utilisée ici ne semble pas adéquate pour la généralisation. En effet, on remarque que le nombre de cas à étudier grandit considérablement. Pour $n = 3$ on obtenait 22 chaînes, pour $n = 4$, 15000 chaînes et nous avons calculé que pour le cas $n = 5$, on devrait étudier 482 669 184 chaînes. La question reste donc ouverte pour les cas $n \geq 5$. Nous avons calculé que, pour $n = 5$, notre polynôme est bien un polynôme central et pas une identité polynomiale. En effet on obtient $f(X, Y) = -5443200I_5$. Il est possible que des méthodes algébriques, telles que celles de E. Formanek [3], soient mieux adaptées à l'étude de ce problème pour un n quelconque.

Annexe A

Programme

```
//definition de la classe element

#include <iostream.h>
class element

{

public:

int i;
int j;
int k;

// constructeurs

element ()

{
```

```
i=0;  
j=0;  
k=0;
```

```
}
```

```
element (int x, int y,int z)
```

```
{
```

```
i=x;  
j=y;  
k=z;
```

```
}
```

```
friend bool compare ( element a, element b)
```

```
{
```

```
return (a.j==b.i || a.j == b.j);
```

```
}
```

```
friend bool compare1(element a,element b)
```

```
{
```

```
return a.k<b.k;
```

```
}
```

```
friend bool compare2(element a, element b)
```

```
{
```

```
return (a.j == b.j);
```

```
}
```

```
friend bool compare3(element a, int b)
```

```
{
```

```
return( a.i== b);
```

```
}
```

```
friend bool compare4(element a, int b)
```

```
{
```

```
return ( a.j == b);
```

```
}
```

```
//surcharge des operateurs
```

```
friend ostream &operator<<(ostream& sortie, element x)
```

```
{
```

```
sortie<< "("<<x.i<<" "<<x.j<<"")";
```

```
return sortie;
```

```
}
```

```

friend bool operator==(element x, element y)

{
return (x.i==y.i && x.j==y.j);

}

friend bool operator!=(element x,element y)
{
return (x.i!=y.i || x.j!=y.j);
}

}; // fin de la classe

#include <fstream.h>
#include <stdio.h>
#define dim 4
#define decomposition 2
int somme_signature = 0;
int cpt =0;

//declaration des fonctions
void trier_chaine(ofstream&, element[],int,int,int[]);

```

```
void printer_chaine(ofstream&, element[],int dec[]);
```

```
void main()
```

```
{
```

```
    element chaine[dim*(dim+1)];
```

```
    int position1=1;
```

```
    int position2=0;
```

```
    int k=0;
```

```
    int pos;
```

```
    int d1[decomposition];
```

```
    int d2[decomposition];
```

```
    int dec[dim*(dim+1)];
```

```
//creer fichier de sortie
```

```
    ofstream sortie("a:resultats.txt");
```

```
//creer le tableau
```

```
for (int i=1; i<=dim; i++)
```

```
for (int j=i; j<=dim; j++)
```

```
{
```

```
    chaine[k] = element(i,j,k);
```

```
    k++;
```

```
}
```

```
int k1=0;
```

```
for (i=1; i<=dim; i++)
```

```
for (int j=i; j<=dim; j++)
```

```
{
```

```

chaine[k] = element(i,j,k1);
k++;
k1++;
}

//permuter deux elements

cout<<"qu'elle est la position du premier element?"<<endl;
cin>>pos;
element temp = chaine[pos];
for(i=pos; i>0;i--)
chaine[i]=chaine[i-1];
chaine[0]=temp;

// chercher les decomposition
int test;

do
{
test=0;
cout<<" entrer la premiere decomposition";
for(i=0;i<decomposition;i++)
cin>>d1[i];

//verifier si la decomposition est valide

for(i=0;i<decomposition;i++)
test=test + d1[i];

```

```

}
while(test!=dim*(dim+1) /2);
// chercher la deuxieme decomposition

do
{
test=0;
cout<<" entrer la deuxieme decomposition";

for(i=0;i<decomposition;i++)
cin>>d2[i];

//verifier si la decomposition est valide

for(i=0;i<decomposition;i++)
test=test + d2[i];

}
while(test!=dim*(dim+1)/2);

//creer tableau de decomposition
k1=0;
for(i=0;i<decomposition;i++)
{
for(k=0;k<d1[i];k++)
{
dec[k1]=0;
k1++;
}
}

```

```

for(k=0;k<d2[i];k++)
{
dec[k1]=1;
k1++;
}

```

```

}

```

```

trier_chaine(sortie, chaine, position1, position2,dec);
// affiche le resultat a l'ecran
cout<<"la somme des signatures est:"<<somme_signature<<endl;
cout<<"le nombre de chaine est " << cpt<<endl;
//affiche le resultat sur disquette
sortie<<"la somme des signatures est:"<<somme_signature<<endl;
sortie<<"le nombre de chaine est " << cpt<<endl;
}

```

```

void trier_chaine(ofstream& sortie, element chaine[],
int position1,int position2, int dec[])
{

```

```

int compteur;
int compteur1;
element chaine_temp[dim*(dim+1)];
element el;

```

```

if(dec[position1+position2-1]==0)
    el=chaine[position1-1];

```

```

else
el=chaine[dim*(dim+1)/2+position2-1];

if(dec[position1+position2]==0)
{
compteur1=dim*(dim+1)/2;
compteur=position1;
}
else
{
compteur1=dim*(dim+1);
compteur=dim*(dim+1)/2+position2;
}
element el_temp;

//Cherche le prochain element de la chaine a partir de position
for (int k=compteur; k<compteur1; k++)
{

if (compare(el, chaine[k]))
{
if(compare2(el, chaine[k]))
{
int temp = chaine[k].i;
chaine[k].i=chaine[k].j;
chaine[k].j=temp;
}
if (compteur==dim*(dim+1)-1)
{

```

```

// La chaine est complete
printer_chaine(sortie, chaine,dec);
}
else
{
// Cree une copie temp. de la chaine
for (int s=0;s<dim*(dim+1);s++)
chaine_temp[s]=chaine[s];
// Permutation
el_temp=chaine[k];
for (int r=k; r>compteur; r--)
{
chaine[r]=chaine[r-1];
}
chaine[compteur]=el_temp;
// recursivite
if(dec[position1+position2]==0)
trier_chaine(sortie, chaine, position1+1,position2,dec);
else
trier_chaine(sortie, chaine,position1,position2+1,dec);
// Rappelle la chaine temporaire
for (s=0;s<dim*(dim+1);s++)
chaine[s]=chaine_temp[s];

}
}
}
return;
}

```

```

//imprimer la chaine

void printer_chaine(ofstream& sortie,element chaine[],int dec[])
{
int k1=0;
int k2=dim*(dim+1)/2;
// Pour les matrice d'ordre 4, imprime et calcule
//uniquement les chaines de notre cas particulier
if ( compare3(chaine[7],3)&& compare4(chaine[9],4))
{
cpt++;
for(int l=0;l<dim*(dim+1);l++)
{
if(dec[l]==0)
{
sortie<<chaine[k1];
k1++;
}
else
{
sortie<<chaine[k2];
k2++;
}

}

//calculer la signature

```

```

int signature;
int signature1=0;
int signature2=0;

for(int i=0;i<dim*(dim+1)/2;i++)
for(int j=i+1;j<dim*(dim+1)/2;j++)
if(compare1(chaine[i],chaine[j]))
signature1++;

for(i=dim*(dim+1)/2;i<dim*(dim+1);i++)
for(int j=i+1;j<dim*(dim+1);j++)
if(compare1(chaine[i],chaine[j]))
signature2++;

if(signature1%2==0)
signature1=1;
else
signature1=-1;
if(signature2%2==0)
signature2=1;
else
signature2=-1;

signature=signature1*signature2;
sortie<<"la signature est:"<<signature<<endl;
somme_signature= somme_signature + signature;
}
}

```

Annexe B

Résultats matrices d'ordre 3

(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,3)(3,3)(3,3)(3,2)
(2,2)(2,1)(1,1)la signature est:1

(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,3)(3,1)(1,3)(3,3)(3,2)
(2,2)(2,1)(1,1)la signature est:-1

(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,3)(3,3)(3,1)(1,1)(1,2)
(2,2)(2,3)(3,1)la signature est:1

(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,3)(3,3)(3,1)(1,1)(1,3)
(3,2)(2,2)(2,1)la signature est:1

(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,3)(3,3)(3,1)(1,2)(2,2)
(2,3)(3,1)(1,1)la signature est:1

(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,3)(3,3)(3,1)(1,3)(3,2)
(2,2)(2,1)(1,1)la signature est:1

(1,1)(1,2)(2,3)(3,3)(3,1)(1,2)(2,2)(2,2)(2,3)
(3,3)(3,1)(1,1)la signature est:1

(1,1)(1,3)(3,2)(2,2)(2,1)(1,3)(3,3)(3,3)(3,2)
(2,2)(2,1)(1,1)la signature est:1

(1,1)(1,3)(3,3)(3,2)(2,1)(1,2)(2,2)(2,2)(2,3)
(3,3)(3,1)(1,1)la signature est:1

(1,1)(1,3)(3,3)(3,2)(2,2)(2,1)(1,2)(2,2)(2,3)
 (3,3)(3,1)(1,1)la signature est:-1
 (1,1)(1,3)(3,3)(3,2)(2,2)(2,2)(2,1)(1,1)(1,2)
 (2,3)(3,3)(3,1)la signature est:1
 (1,1)(1,3)(3,3)(3,2)(2,2)(2,2)(2,1)(1,1)(1,3)
 (3,3)(3,2)(2,1)la signature est:1
 (1,1)(1,3)(3,3)(3,2)(2,2)(2,2)(2,1)(1,2)(2,3)
 (3,3)(3,1)(1,1)la signature est:1
 (1,1)(1,3)(3,3)(3,2)(2,2)(2,2)(2,1)(1,3)(3,3)
 (3,2)(2,1)(1,1)la signature est:1
 (1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,1)(1,3)(3,3)(3,3)(3,2)
 (2,2)(2,1)(1,1)la signature est:1
 (1,2)(2,2)(2,3)(3,3)(3,1)(1,1)(1,1)(1,2)(2,2)
 (2,3)(3,3)(3,1)la signature est:-1
 (1,2)(2,2)(2,3)(3,3)(3,1)(1,1)(1,1)(1,3)(3,3)
 (3,2)(2,2)(2,1)la signature est:-1
 (1,2)(2,3)(3,3)(3,1)(1,1)(1,2)(2,2)(2,2)(2,3)
 (3,3)(3,1)(1,1)la signature est:1
 (1,3)(3,2)(2,2)(2,1)(1,1)(1,3)(3,3)(3,3)(3,2)
 (2,2)(2,1)(1,1)la signature est:1
 (1,3)(3,3)(3,2)(2,1)(1,1)(1,2)(2,2)(2,2)(2,3)
 (3,3)(3,1)(1,1)la signature est:1
 (1,3)(3,3)(3,2)(2,2)(2,1)(1,1)(1,1)(1,2)(2,2)
 (2,3)(3,3)(3,1)la signature est:-1
 (1,3)(3,3)(3,2)(2,2)(2,1)(1,1)(1,1)(1,3)(3,3)
 (3,2)(2,2)(2,1)la signature est:-1

Annexe C

Résultats matrices d'ordre 4

Dans cette annexe, on retrouve les 50 possibilités de chaînes lorsqu'on fixe les x_i . Les couples en gras sont les couples associés au y_i . Finalement, on peut remarquer qu'il y a effectivement 25 chaînes à permutation (23) près en associant les chaînes 2 à 2 comme suit: Les 24 premières sont les chaînes ayant 2 boucles dans les $7y$ comme calculé à la section 4.2.1

1-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,1)(1,1)(1,2)(2,4)(4,4)(4,3)(3,1)

la signature est:1

2-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,1)(1,1)(1,3)(3,4)(4,4)(4,2)(2,1)

la signature est:1

3-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,1)(1,2)(2,4)(4,4)(4,3)(3,1)(1,1)

la signature est:-1

4-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,1)(1,3)(3,4)(4,4)(4,2)(2,1)(1,1)

la signature est:-1

5-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,2)(2,1)(1,1)(1,3)(3,4)(4,4)(4,1)

la signature est:1

6-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,3)(3,1)(1,1)(1,2)(2,4)(4,4)(4,1)

la signature est:1

7-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,2)(2,1)(1,1)(1,4)(4,4)(4,3)(3,1)

la signature est:1

8-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,3)(3,1)(1,1)(1,4)(4,4)(4,2)(2,1)

la signature est:1

9-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,2)(2,1)(1,3)(3,4)(4,4)(4,1)(1,1)

la signature est:1

10-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,3)(3,1)(1,2)(2,4)(4,4)(4,1)(1,1)

la signature est:1

11-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,2)(2,1)(1,4)(4,4)(4,3)(3,1)(1,1)

la signature est:1

12-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,3)(3,1)(1,4)(4,4)(4,2)(2,1)(1,1)

la signature est:1

13-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,1)(1,1)(1,2)(2,4)(4,3)(3,1)

la signature est:1

14-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,1)(1,1)(1,3)(3,4)(4,2)(2,1)

la signature est:1

15-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,1)(1,2)(2,4)(4,3)(3,1)(1,1)

la signature est:1

16-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,1)(1,3)(3,4)(4,2)(2,1)(1,1)

la signature est:1

17-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,2)(2,1)(1,1)(1,3)(3,4)(4,1)

la signature est:-1

18-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,3)(3,1)(1,1)(1,2)(2,4)(4,1)

la signature est:-1

19-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,2)(2,1)(1,1)(1,4)(4,3)(3,1)

la signature est:1

20-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,3)(3,1)(1,1)(1,4)(4,2)(2,1)

la signature est:1

21-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,2)(2,1)(1,3)(3,4)(4,1)(1,1)
la signature est:1

22-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,3)(3,1)(1,2)(2,4)(4,1)(1,1)
la signature est:1

23-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,2)(2,1)(1,4)(4,3)(3,1)(1,1)
la signature est:-1

24-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,1)(1,1)
la signature est:-1

Les 24 suivantes sont les chaînes ayant trois boucles dans les $7y$ comme
calculé à la section 4.2.2

25-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,1)(1,1)(1,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)(3,4)(4,4)(4,1)
la signature est:-1

26-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,1)(1,1)(1,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,3)(3,3)(3,2)(2,2)(2,4)(4,4)(4,1)
la signature est:-1

27-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,1)(1,1)(1,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)(3,4)(4,1)
la signature est:1

28-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,1)(1,1)(1,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,3)(3,3)(3,2)(2,2)(2,4)(4,1)
la signature est:1

29-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,1)(1,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,4)(4,4)(4,1)(1,1)

la signature est:1

30-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,1)(1,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,3)(3,3)(3,2)(2,4)(4,4)(4,1)(1,1)

la signature est:1

31-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,1)(1,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,3)(3,2)(2,2)(2,4)(4,4)(4,1)(1,1)

la signature est:1

32-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,1)(1,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,2)(2,3)(3,3)(3,4)(4,4)(4,1)(1,1)

la signature est:1

33-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,1)(1,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,4)(4,1)(1,1)

la signature est:1

34-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,1)(1,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,3)(3,3)(3,2)(2,4)(4,1)(1,1)

la signature est:1

35-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,1)(1,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,3)(3,2)(2,2)(2,4)(4,1)(1,1)

la signature est:1

36-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,1)(1,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,2)(2,3)(3,3)(3,4)(4,1)(1,1)

la signature est:1

37-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,4)(4,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,1)(1,1)(1,2)(2,3)(3,3)(3,1)

la signature est:1

38-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,4)(4,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,1)(1,1)(1,3)(3,2)(2,2)(2,1)

la signature est:1

39-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,4)(4,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,1)(1,1)(1,3)(3,3)(3,2)(2,1)

la signature est:1

40-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,4)(4,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,1)(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)

la signature est:1

41-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,4)(4,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,1)(1,2)(2,3)(3,3)(3,1)(1,1)

la signature est:1

42-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,4)(4,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,1)(1,3)(3,2)(2,2)(2,1)(1,1)

la signature est:1

43-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,2)(2,4)(4,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,1)(1,3)(3,3)(3,2)(2,1)(1,1)

la signature est:1

44-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,4)(4,3)(3,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,1)

la signature est:1

45-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,4)(4,4)(4,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,1)(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,3)(3,1)

la signature est:-1

46-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,4)(4,4)(4,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,1)(1,1)(1,3)(3,3)(3,2)(2,2)(2,1)

la signature est:-1

47-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,4)(4,4)(4,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,3)(3,1)(1,1)

la signature est:1

48-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,4)(4,4)(4,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,1)(1,3)(3,3)(3,2)(2,2)(2,1)(1,1)

la signature est:1

Les 2 dernières sont les chaînes ayant 4 boucles dans les $7y$ comme calculé
à la section 4.2.3

49-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,1)(1,4)(4,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,2)(2,2)(2,3)(3,3)(3,1)(1,1)

la signature est:1

50-(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(3,1)(1,4)(4,2)(2,4)(4,1)(1,3)
(3,3)(3,4)(4,4)(4,4)(4,3)(3,3)(3,2)(2,2)(2,1)(1,1)

la signature est:1

Bibliographie

- [1] A.S. Amitsur and J. Levitzki, Minimal identities for algebras, Proc. of The American Mathematical Society no1 (1950),449–463
- [2] C. Berge, Graphes, Bordas, Paris, (1983), 400p
- [3] E. Formanek, A Conjecture of Regev about the Capelli Polynomial, Journal Of Algebra, vol.109, No.1(1987),93–114
- [4] A. Giambruno and A. Valenti, Central Polynomials and Matrix Invariants, Israel Journal Of Mathematics (1996),281–297
- [5] I.N.Herstein, Rings with involution, Chicago lectures in mathematics,35–42
- [6] A. Regev, The polynomial identities of matrices in characteristic zero, Communications in algebra, (1980), 1417–1467
- [7] L. H. Rowen, Polynomial Identities in Ring Theory, Academic Press, New York, (1980), 365p