

Étude de trois questions d'approximation diophantienne

Aminata Dite Tanti KEITA

Thèse soumise à la Faculté des études supérieures et postdoctorales en vue de
l'obtention du
Doctorat ès philosophie en Mathématiques¹

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des sciences
Université d'Ottawa

© Aminata Dite Tanti KEITA, Ottawa, Canada, 2018

1. le programme de doctorat est un programme conjoint avec l'Université Carleton, administré par l'Institut en mathématiques et en statistique d'Ottawa-Carleton

Abstract

This thesis in Diophantine approximation is divided in two parts. The first is concerned with the parametric geometry of numbers, which was recently introduced by W. M. Schmidt and L. Summerer. This theory approximates the behaviour of the successive minima of those parametric families of convex bodies stemming from the problem of simultaneous rational approximation to finitely many fixed real numbers. In the case of one number, we show that knowing the qualitative behaviour of the successive minima is equivalent to knowing the continued fraction expansion of the distance from this number to its nearest integer. We also improve upon a result which was conjectured by Schmidt in 1983 and proven by N. Moshchevitin in 2012, and we show that this improvement is optimal.

The second part studies extremal numbers, introduced by D. Roy in 2003. These numbers are real transcendental, and behave similarly to real quadratic numbers with respect to certain properties of Diophantine approximation. We associate to any extremal number a canonical sequence of symmetric matrices with integer coefficients. In their paper [23], D. Roy and E. Villani consider a special class of extremal numbers and study the corresponding sequences of matrices from both an analytic point of view and an algebraic point view. We consider a subclass of those extremal numbers, called Markoff extremal numbers. We start by establishing a conjecture generalizing the results of Roy and Villani, based on empirical evidence. This conjecture depends on an integer quantity called degree, and we prove that it holds for degrees up to 6. The proof for these cases rely on a construction, itself valid in all degrees.

Résumé

Cette thèse en approximation diophantienne se divise en deux parties. La première concerne la géométrie paramétrique des nombres introduite récemment par W. M. Schmidt et L. Summerer. Cette théorie décrit, à des fonctions bornées près, le comportement des minimas successifs d'une famille de corps convexes à un paramètre, à savoir celle qui intervient naturellement dans les problèmes d'approximation rationnelle simultanée de nombres réels linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . Nous démontrons dans le cas d'un seul nombre que le comportement qualitatif des deux minima est équivalent à la donnée du développement en fraction continue de la distance de ce nombre à l'entier le plus proche. Nous nous intéressons aussi à une conjecture de Schmidt de 1983 démontrée par N. Moshchevitin en 2012, et nous l'améliorons. De plus, nous démontrons que notre amélioration est meilleure possible.

La seconde partie de la thèse concerne les nombres extrémaux introduits par D. Roy en 2003. Ces nombres sont transcendants réels et se comporte similairement aux nombres quadratiques réels quant à certaines propriétés d'approximation diophantienne. On peut leur associer une suite canonique de matrices symétriques à coefficients entiers. Dans leur papier [23], D. Roy et E. Villani considèrent une classe particulière de nombres extrémaux et étudient les suites de matrices correspondantes à la fois d'un point de vue analytique et d'un point de vue algébrique. Nous considérons ici une classe plus restreinte de nombres extrémaux, dits de type Markoff. Nous commençons par établir une conjecture qui généralise les résultats de Roy et Villani, sur la base de résultats numériques. Cette conjecture dépend d'une quantité entière

appelé degré, et nous la démontrons en degré au plus 6. La preuve dépend d'une construction, elle-même valide en tous degrés.

Remerciements

Je voudrai tout d'abord remercier Dieu pour pour la grâce et la miséricorde qu'il m'a accordée pour mener à bien cette thèse. Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes et à toutes les institutions qui ont contribué de près ou de loin à la bonne réalisation de ce travail, particulièrement à l'université d'Ottawa de m'avoir octroyée une bourse complète durant mes années d'études à Ottawa.

J'aimerais exprimer ma profonde gratitude à mes superviseurs Damien Roy et Abdellah Sebbar pour le soutien inestimable, les conseils judicieux et le support financier qu'ils m'ont offerts durant ces années. Je voudrai remercier tout particulièrement Damien Roy d'avoir dirigé cette thèse avec beaucoup de rigueur intellectuelle, de dynamisme, d'efficacité et surtout beaucoup de patience.

Je remercie aussi Dr Benoit Dionne pour son amabilité, son assistance et sa disponibilité durant ces dernières années.

Je tiens spécialement à remercier Aminata N'diaye, Sana Keita, Clemonell Bilayi-Biakana, Moussa Thiam et tous mes amis qui, en plus de leurs amitiés précieuses m'ont aidé a traverser des moments difficiles. Ils ont été présents pour me venir en aide à tout moment, me garder heureuse et me rassurer tout au long de mes études ici.

Je suis grandement redevable à ma famille pour leur soutien indéfectible tout au long de mes longues années d'études. Je remercie particulièrement Papa Ousmane Kante qui en plus d'être mon exemplaire oncle, a toujours cru en moi et m'a supportée de toutes les manières possibles. Pour finir, j'aimerais remercier mon mari Sidy Kouyate pour son soutien moral ininterrompu, sa confiance et ses nombreux conseils.

Dédicace

Je dédie cette thèse :

A ma mère Korotoumou Kante qui représente la bonté par excellence, l'exemple du dévouement et qui m'a toujours encouragé et prié pour moi. Tes prières et tes bénédictions m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Je ne te remercierai jamais assez pour tous les sacrifices que tu as fait depuis ma naissance. Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études. Que Dieu, te préserve de tout mal et t'accorde la santé, une longue vie et beaucoup de bonheur.

A mes oncles maternels : Papa Ousmane, Ichacka, Adama, Ladji Makan, Alassane pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien moral et matériel et toutes les valeurs qu'ils m'ont inculqué. Je vous suis très reconnaissante, puisse Allah, vous accorder santé, bonheur, longue vie, quiétude de l'esprit et vous protège de tout mal.

A mes frères et mes sœurs : Seydou, Sory, Mamadou, Hadizatou, Moussa et Mariama pour leur tendresse, leur complicité et leur présence malgré la distance qui nous sépare. Je vous souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, de réussite et de sérénité. Qu'Allah nous protège et nous garde ensemble très longtemps.

A ma grande mère maternelle Mama Damba qui a tant sacrifié pour nous. Merci pour ta douceur et ta gentillesse, puisse Dieu le très haut, t'accorder une longue vie et beaucoup de santé et de bonheur dans les deux vies.

A la mémoire de mon défunt père Papa N'Faly.

Table des matières

Table des figures	xi
1 Introduction	2
1.1 Géométrie paramétrique des nombres en dimension 2	2
1.2 Conjecture de Schmidt	7
1.3 Nombres extrémaux de type Markoff	11
I Géométrie paramétrique des nombres dans \mathbb{R}^m	20
2 Préliminaires	21
2.1 Fractions continues	21
2.2 Géométrie des nombres	28
2.3 Géométrie paramétrique des nombres dans \mathbb{R}^m	35
3 Géométrie paramétrique des nombres en dimension 2	39
3.1 Résultats préliminaires	39
3.2 Trajectoire d'un point	42
3.3 Le Premier Minimum	44
3.4 Le Deuxième Minimum	47
4 Sur une conjecture de Schmidt pour la géométrie paramétrique des nombres	54

4.1	Conjecture de Schmidt	54
4.2	Résultat de Moshchevitin	56
4.3	Reformulation de la conjecture de Schmidt	57
4.4	Démonstration du Théorème 4.3.2	60
 II Sur les nombres extrémaux de type Markoff		67
 5 Nombres extrémaux de type Markoff		68
5.1	Nombres extrémaux	68
5.2	Construction de nombres extrémaux de type Markoff	70
5.3	Quelques propriétés	74
5.4	Les matrices W_k	76
 6 L'anneau d'approximation du triplet $(1, \xi, \xi^2)$		81
6.1	L'anneau des suites	81
6.2	Le sous-anneau $\mathfrak{A} = \mathbb{Q}[\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}]$	82
6.3	Estimations	85
6.4	Développements asymptotiques	87
6.5	Termes initiaux des éléments de $\mathfrak{A}_{\leq d}$	94
6.6	Termes initiaux des éléments de $\mathfrak{A}_{\leq d} + \xi\mathfrak{A}_{\leq d}$	98
 7 Matrices associées aux préfixes du mot de Fibonacci		102
7.1	Monoïde des Mots	102
7.2	Suite des Mots de Fibonacci	104
7.3	Préliminaires	106
7.3.1	Quelques formules	106
7.3.2	Les ensembles Δ_ℓ	107

7.4	Démonstration du théorème 7.2.2	108
7.4.1	Les ensembles K_ℓ	108
7.4.2	Les ensembles A_ℓ	110
7.5	Construction du monoïde \overline{E}	114
7.5.1	Limite inductive de $\{E^*, f_{i,j}, \mathbb{N}\}$	115
7.5.2	Extension du morphisme de Fibonacci à \overline{E}	118
7.5.3	Préfixes du mot de Fibonacci dans \overline{E}	120
7.5.4	Extension de la notion de taille	123
7.6	Morphisme de \overline{E} vers $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A})$	126
7.6.1	Matrice associée à un préfixe de w_∞	128
7.6.2	Taille des matrices associées à un préfixe de w_∞	129
8	Preuve de la conjecture 6.6.4 en degré au plus 6	132
8.1	Estimation du degré des éléments de \mathfrak{A}	132
8.1.1	Résultat clé et quelques conséquences	133
8.1.2	Estimation du degré d'un produit	135
8.2	Quelques identités dans $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A})$	137
8.3	Construction d'éléments de $\mathfrak{A} + \xi\mathfrak{A}$	141
8.4	Preuve de la conjecture pour $d \leq 6$	144
8.4.1	<u>1^{er} Cas</u> : $m \geq 0$ et $n \neq -6$	145
8.4.2	<u>2^e Cas</u> : $m < 0$ avec $(m, n) \notin \{(-1, -5), (-2, -2)\}$ si $d = 6$	148
8.4.3	<u>3^e Cas</u> : $\alpha = -1 - 5/\gamma$ (donc $d = 6$).	153
8.4.4	<u>4^e Cas</u> : $d = 6$ et $\alpha = -2 - 2/\gamma$	153
8.4.5	<u>5^e Cas</u> : $\alpha = -6/\gamma$ (donc $d = 6$)	156
9	Étude de quelques familles de $\mathfrak{A} + \xi\mathfrak{A}$	159
9.1	Résultats préliminaires	159
9.2	Forme explicite de certains préfixes de w_∞	165

TABLE DES MATIÈRES

x

9.3	Calculs de degré	168
A	Tables des valeurs de $r_d^{(0)}(\alpha)$ pour $d \leq 11$	176
B	Tables des valeurs de $r_d^{(1)}(\alpha)$ pour $d \leq 11$	185
	Bibliographie	194
	Index	196

Table des figures

1.1	Le corps convexe $\mathcal{K}_\xi(q)$	3
2.1	Graphe conjoint de \mathbf{P} sur l'intervalle $[1, 2]$	38
3.1	Graphe de $L_{\mathbf{x}}$ si $ Q\xi - P = 0$	43
3.2	Graphe de $L_{\mathbf{x}}$ si $Q = 0$	43
3.3	Graphe de $L_{\mathbf{x}}$ si $Q \neq 0$ et $ Q\xi - P \neq 0$	43
3.4	Graphe de $L_{\mathbf{x}_n}$ sur $[q_n, q_{n+1}]$ si $0 \leq n \leq s - 1$	47
3.5	Graphe de $L_{\mathbf{x}_{s-1}}$ sur $[q_{s-1}, \infty)$ si $s < \infty$	47
3.6	Graphe de la fonction $L_{\xi,2}$ à droite de q_0	50
3.7	Graphe de la fonction $L_{\xi,2}$ sur $[q_{n-1}, q_n]$ si $2 \leq n < s - 1$	51
3.8	Graphe de la fonction $L_{\xi,2}$ au voisinage de q_{s-1} si $2 \leq s < \infty$	51
3.9	Graphe conjoint $\mathbf{\Gamma}_{3/7}$ ($3/7 = [0, 2, 3]$)	52
3.10	Graphe conjoint $\mathbf{\Gamma}_{\sqrt{2}-1}$ ($\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, \dots]$)	53
4.1	Graphe conjoint du triplet (A, B, C) sur l'intervalle $[r, u]$	61

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse est divisée en trois parties. La première concerne la géométrie des nombres en dimension 2, la deuxième porte sur une conjecture de Schmidt énoncée en 1983, et la dernière touche les nombres extrémaux de type Markoff.

1.1 Géométrie paramétrique des nombres en dimension 2

Soit $m \geq 2$ un entier. Un *corps convexe* $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^m$ est un voisinage compact convexe de l'origine 0 stable sous multiplication par -1.

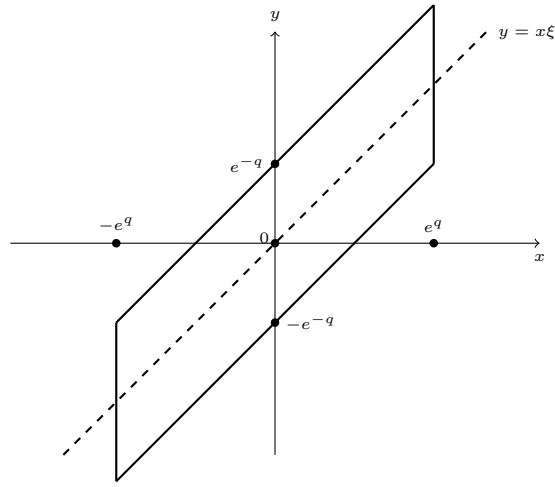
Par exemple, soient ξ et q des nombres réels avec $q \geq 0$. L'ensemble

$$\mathcal{K}_\xi(q) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq e^q, |x\xi - y| \leq e^{-q}\}$$

est un corps convexe de \mathbb{R}^2 de volume

$$\text{vol}(\mathcal{K}_\xi(q)) = 2e^q \times 2e^{-q} = 4.$$

C'est le parallélogramme illustré sur la figure ci-dessous.

FIGURE 1.1 – Le corps convexe $\mathcal{K}_\xi(q)$

Le premier théorème de Minkowski montre que si \mathcal{C} est un corps convexe de \mathbb{R}^m de volume $\text{vol}(\mathcal{C}) \geq 2^m$, alors il contient un point non nul de \mathbb{Z}^m , c'est-à-dire que

$$\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^m \neq \{0\}.$$

Dans l'exemple, comme $\text{vol}(\mathcal{K}_\xi(q)) \geq 4$, le corps convexe $\mathcal{K}_\xi(q)$ contient un point non nul de \mathbb{Z}^2 quel que soit $q \geq 0$.

Les deux premières parties de la thèse s'intéressent à l'étude du comportement des minima successifs de certaines familles de convexes. Soit \mathcal{C} un corps convexe de \mathbb{R}^m .

Définition 1.1.1. *Pour tout $j = 1, \dots, m$, on définit le j -ième minimum de \mathcal{C} , noté $\lambda_j(\mathcal{C})$ comme le minimum des $\lambda \geq 0$ tel que $\lambda\mathcal{C}$ contient au moins j éléments linéairement indépendants de \mathbb{Z}^m .*

Ces minima forment clairement une suite croissante :

$$\lambda_1(\mathcal{C}) \leq \lambda_2(\mathcal{C}) \leq \dots \leq \lambda_m(\mathcal{C}).$$

Le second théorème de Minkowski montre que le produit $\text{vol}(\mathcal{C})\lambda_1(\mathcal{C}) \cdots \lambda_m(\mathcal{C})$ est borné inférieurement et supérieurement par des constantes qui dépendent seulement

de m . Plus précisément, on a

$$\frac{2^m}{m!} \leq \text{vol}(\mathcal{C})\lambda_1(\mathcal{C}) \cdots \lambda_m(\mathcal{C}) \leq 2^m.$$

La géométrie paramétrique des nombres est une théorie qui fournit à des fonctions bornées près une description du comportement des minima successifs de certaines familles de corps convexes à un paramètre dans \mathbb{R}^m . Elle propose une nouvelle manière d'étudier les problèmes d'approximation rationnelle simultanée. Cette théorie a été initialement développée en dimension $m = 3$ dans [31] puis étendue en dimension quelconque $m \geq 2$ dans [32], et complétée dans [27]. Nous aimerions l'illustrer en dimension $m = 2$ en donnant pour ce cas, une description exacte du comportement qualitatif des minima successifs. Pour cela, nous aurons besoin de la notion de développement en fraction continue.

Soit $\xi \in [0, 1/2]$. Il admet un développement en fraction continue de la forme

$$\xi = [0, a_1, a_2, \dots, a_{s-1}] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{s-1}}}}} \quad \text{si } \xi \in \mathbb{Q},$$

$$\text{ou } \xi = [0, a_1, a_2, \dots] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}} \quad \text{si } \xi \notin \mathbb{Q},$$

pour une et une seule suite $(a_n)_{1 \leq n < s}$ dans \mathbb{N}^* avec $a_{s-1} \geq 2$ si $\xi \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

La n -ième réduite de ξ est le nombre rationnel

$$\frac{P_n}{Q_n} = [0, a_1, \dots, a_n] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \quad (1 \leq n < s),$$

Les réduites sont caractérisées par la propriété de meilleure approximation.

- Pour tout couple d'entiers (Q, P) tel que $0 < Q < Q_{n+1}$, on a

$$|Q\xi - P| \geq |Q_n\xi - P_n|.$$

Nous aimerions décrire le comportement qualitatif exact des minimas de la famille de corps convexes donnée par

$$\mathcal{K}_\xi(q) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq e^q, |x\xi - y| \leq e^{-q}\} \quad (q \geq 0),$$

pour un nombre réel ξ fixé. Pour $j = 1, 2$ et $q \geq 0$, on pose

$$L_{\xi,j}(q) = \log \lambda_j(\mathcal{K}_\xi(q)),$$

où $\lambda_j(\mathcal{K}_\xi(q))$ est le j -ième minimum de $\mathcal{K}_\xi(q)$. Pour tout $q \geq 0$, on a

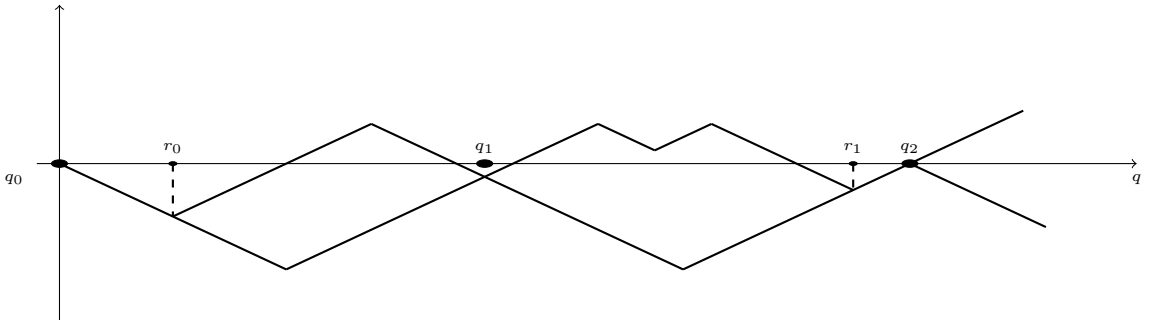
$$L_{\xi,1}(q) \leq L_{\xi,2}(q) \quad \text{et} \quad -\log 2 \leq L_{\xi,1}(q) + L_{\xi,2}(q) \leq 0.$$

La première inégalité découle du fait que les minima forment une suite croissante tandis que la deuxième inégalité résulte du second théorème de Minkowski joint au fait que $\text{vol}(\mathcal{K}_\xi(q)) = 4$ pour tout $q \geq 0$. On définit $\mathbf{L}_\xi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\mathbf{L}_\xi(q) = (L_{\xi,1}(q), L_{\xi,2}(q)) \quad (q \geq 0).$$

On appelle *graphe conjoint de la fonction \mathbf{L}_ξ* , noté Γ_ξ , l'union des graphes de $L_{\xi,1}$ et de $L_{\xi,2}$ dans $[0, \infty[\times \mathbb{R}$.

Exemple 1.1.2. Le graphe conjoint de \mathbf{L}_ξ pour $\xi = 3/7$ est illustré ci-dessous



La courbe du bas représente le graphe de la fonction $L_{3/7,1}$ tandis que celle du haut représente le graphe de la fonction $L_{3/7,2}$. Les deux fonctions coïncident sur les intervalles $[q_0, r_0]$ et $[r_1, q_2]$.

Le développement en fraction continue de ξ peut se lire sur le graphe conjoint de \mathbf{L}_ξ si $\xi \in [0, 1/2]$. Ce serait faux sans cette hypothèse car les graphes associés à $1/3$ et $2/3$ sont les mêmes bien que leurs développements en fraction continue soient différents

$$\frac{1}{3} = [0, 3] \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} = [0, 1, 2].$$

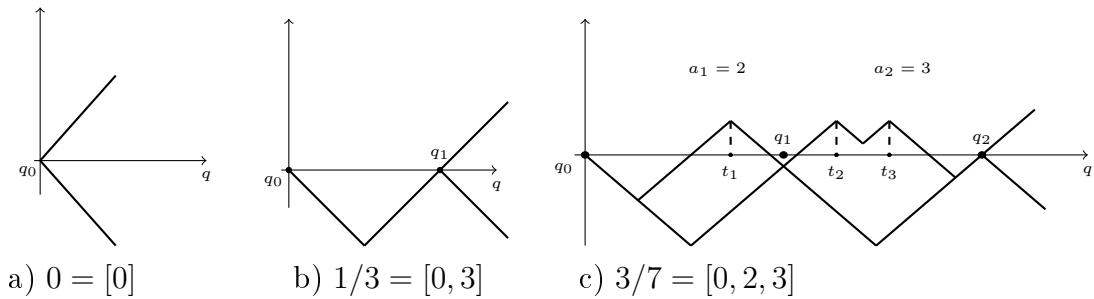
Théorème (A. Keita, 2017, JTNB).

- Soient ξ et ξ' des nombres réels. On a $\mathbf{L}_\xi = \mathbf{L}_{\xi'} \iff \xi \equiv \pm \xi' \pmod{\mathbb{Z}}$.
- Soit $\xi \in [0, 1/2]$. Désignons par $(q_n)_{0 \leq n < s}$ avec $s \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ la suite croissante des points de $[0, \infty)$ où $L_{\xi,1}$ admet un maximum local. Notons a_n le nombre des maxima locaux de la restriction de $L_{\xi,2}$ à l'intervalle $[q_{n-1}, q_n]$ pour chaque entier n avec $1 \leq n < s$. Alors on a $q_0 = 0$, et le développement en fraction continue de ξ est donné par

$$\xi = \begin{cases} [0] & \text{si } s = 1, \\ [0, a_1, a_2, \dots, a_{s-1}] & \text{si } 2 \leq s < \infty, \\ [0, a_1, a_2, \dots] & \text{si } s = \infty. \end{cases}$$

avec $a_{s-1} \geq 2$ si $2 \leq s < \infty$.

Ci-dessous quelques exemples de graphes conjoints pour illustrer le théorème.



La figure c) illustre le graphe conjoint de $L_{3/7}$. La courbe du bas représente le graphe de la fonction $L_{3/7,1}$ tandis que celle du haut représente le graphe de la fonction $L_{3/7,2}$. La fonction $L_{3/7,1}$ admet trois maxima locaux aux points q_0 , q_1 et q_2 . Entre q_0 et q_1 , la fonction $L_{3/7,2}$ admet deux maxima locaux aux points q_0 et t_1 , tandis qu'elle admet trois maxima locaux aux points t_2 , t_3 et q_2 sur l'intervalle $[q_1, q_2]$. Ainsi, on obtient $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$ et par suite, on a

$$[0, 2, 3] = 3/7.$$

1.2 Conjecture de Schmidt

Parmi les conjectures proposées par W. M. Schmidt en 1983, il y en a une qui porte en germe la géométrie paramétrique des nombres [29, Conjecture 2]. Cette conjecture a été démontrée en 2012 par N. G. Moshchevitin [16, Théorème 1]. Notre but est de montrer une version forte de la conjecture de Schmidt et qui soit le meilleur possible. Nous utilisons les notations de D. Roy dans [27] pour rappeler le résultat de Moshchevitin.

A chaque point non nul $\xi \in \mathbb{R}^{m+1}$, on associe la famille de corps convexe

$$\mathcal{C}_\xi(q) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m+1}; \|\mathbf{x}\| \leq 1, |\mathbf{x} \cdot \xi| \leq e^{-q}\} \quad (q \geq 0),$$

où $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ désigne le produit scalaire standard dans \mathbb{R}^m et où $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2}$ désigne la norme euclidienne de \mathbf{x} . Pour tout $j = 1, \dots, m+1$ et $q \geq 0$, on pose

$$L_{\xi,j}(q) = \log \lambda_j(\mathcal{C}_\xi(q)),$$

où $\lambda_j(\mathcal{C}_\xi(q))$ le j -ième minimum de $\mathcal{C}_\xi(q)$. Clairement on a

$$L_{\xi,1}(q) \leq \dots \leq L_{\xi,m+1}(q) \quad (q \geq 0).$$

De plus, comme le volume de $\mathcal{C}_\xi(e^q)$ est borné inférieurement et supérieurement par

des multiples de e^{-q} , le second théorème de Minkowski montre que

$$\left| q - \sum_{j=1}^{m+1} L_{\xi,j}(q) \right| \leq m \log m.$$

Donc la moyenne des $L_{\xi,j}$ est à peu près $q/(m+1)$. Si les coordonnées de ξ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} alors pour chaque $j = 1, \dots, m+1$, il existe des valeurs arbitrairement grandes de q telles que

$$L_{\xi,j}(q) = L_{\xi,j+1}(q)$$

(voir [31, Théorème 1]). Par contraste, on a

Théorème (Moshchevitin, 2012) = (Conjecture de Schmidt, 1983).

Pour tout $i = 2, \dots, m$, il existe un point $\xi \in \mathbb{R}^{m+1}$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} tel que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left(L_{\xi,i-1}(q) - \frac{q}{m+1} \right) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \left(L_{\xi,i+1}(q) - \frac{q}{m+1} \right) = \infty$$

Donc les fonctions $L_{\xi,i-1}(q)$ et $L_{\xi,i+1}(q)$ peuvent diverger l'une de l'autre de part et d'autre de la moyenne $q/(m+1)$. Notre résultat principal améliore ces estimations :

Théorème (A. Keita, 2016, MJCNT).

Pour tout $i = 2, \dots, m$, il existe une infinité non dénombrable de vecteurs $\xi \in \mathbb{R}^{m+1}$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} telle que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\xi,i-1}(q)}{q} = 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\xi,i+1}(q)}{q} = \frac{1}{m-i+2}.$$

Il est aussi le meilleur possible :

Théorème (A. Keita, 2016, MJCNT).

Soit i un entier avec $2 \leq i \leq m$ et soit ξ un point de \mathbb{R}^{m+1} à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} tel que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\xi,i-1}(q)}{q} = 0.$$

Alors on a

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\xi, i+1}(q)}{q} \leq \frac{1}{m-i+2}.$$

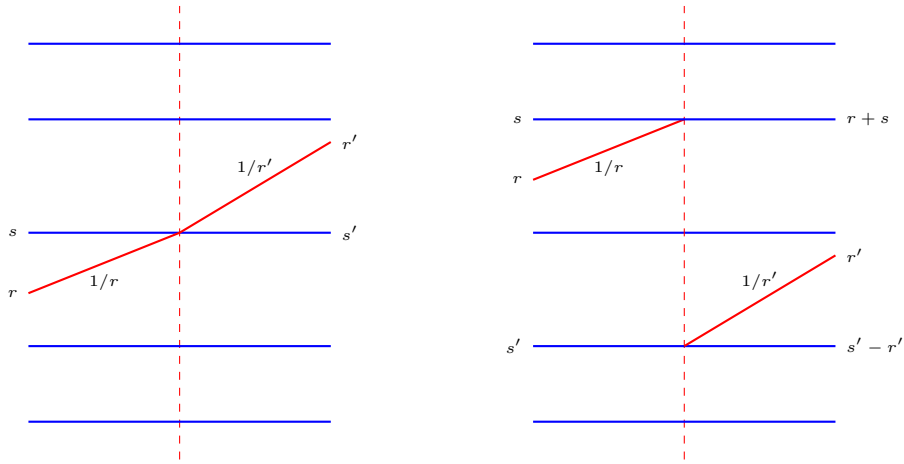
La preuve du théorème utilise la géométrie paramétrique des nombres.

Un $(m+1)$ -système généralisé $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_{m+1}) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ est une fonction

continue et linéaire par morceaux telle que, pour tout $q > 0$, on ait

$$0 \leq P_1(q) \leq \dots \leq P_{m+1}(q) \quad \text{et} \quad P_1(q) + \dots + P_{m+1}(q) = q,$$

et de plus le graphe conjoint de \mathbf{P} est un recollement de morceaux de types suivants

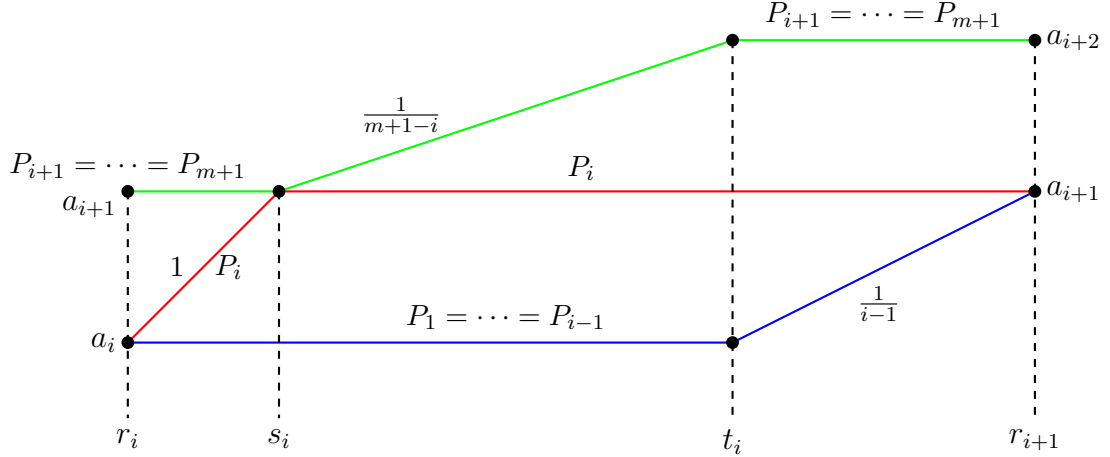


Les courbes en bleu représentent les graphes des composantes de \mathbf{P} ayant une pente nulle tandis que celles en rouge représentent les graphes des composantes de \mathbf{P} ayant une pente strictement positive. Le nombre $1/r$ (respectivement $1/r'$) accolé à un segment représente la pente du segment. C'est aussi l'inverse du nombre des composantes de \mathbf{P} dont le graphe coïncide avec ce segment de telle sorte que la somme des pentes compte tenu des multiplicités soit toujours égale à 1.

Dans son papier [28], D. Roy caractérise les $(m+1)$ -systèmes généralisés en relation aux points non nuls $\xi \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$

Théorème (D. Roy, 2016). Pour chaque vecteur non nul $\xi \in \mathbb{R}^{m+1}$, il existe $q_0 \geq 0$ et un $(m+1)$ -système généralisé \mathbf{P} sur $[q_0, \infty)$ tels que la différence $\mathbf{L}_\xi - \mathbf{P}$ soit bornée sur $[q_0, \infty)$. Réciproquement, pour chaque $(m+1)$ -système généralisé \mathbf{P} sur un intervalle $[q_0, \infty)$ avec $q_0 \geq 0$, il existe un vecteur non nul $\xi \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que la différence $\mathbf{L}_\xi - \mathbf{P}$ soit bornée sur $[q_0, \infty)$.

Ce théorème permet de ramener la preuve de notre premier théorème à la construction d'un $(m+1)$ -système généralisé $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_{m+1}) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ dont le graphe conjoint reprend le patron suivant à l'infini,



pour une suite strictement croissante $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de réels strictement positifs avec

$$a_{i+1}^2 < a_{i+2}a_i, \quad \lim_{i \rightarrow -\infty} a_i = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} a_{i+1}/a_i = +\infty.$$

La courbe en bleu représente le graphe des $(i-1)$ premières composantes de \mathbf{P} , tandis que celle en rouge représente le graphe de la i -ème composante de \mathbf{P} et celle en vert représente le graphe des $(m-i+1)$ dernières composantes de \mathbf{P} .

1.3 Nombres extrémaux de type Markoff

Un nombre *algébrique* est un nombre complexe qui satisfait à une équation polynomiale de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad (1.3.1)$$

avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$. Lorsque $a_n = 1$, alors le polynôme associée à l'équation (1.3.1) est appelé un polynôme *unitaire*. Un *entier algébrique* est un nombre complexe qui est une racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers. Un nombre complexe qui n'est pas *algébrique* est appelé un nombre *transcendant*.

Soit β un nombre algébrique, il existe un et un seul polynôme irréductible $P \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $P(\beta) = 0$. Ce polynôme P est appelé le *polynôme minimal* de β . De plus, β est un entier algébrique si et seulement si P est unitaire.

Exemple 1.3.1.

- Le nombre d'or $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est un entier algébrique ayant pour polynôme minimal

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

- Le nombre $\sqrt{13}/12$ est un entier algébrique ayant pour polynôme minimal

$$144x^2 - 13 = 0.$$

Dans cette partie, ξ désigne un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. On note $\|P\|$ la norme du polynôme $P \in \mathbb{Z}[x]$ c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues de ses coefficients et on désigne par $H(\alpha)$ la *hauteur* du nombre algébrique α c'est-à-dire la norme du polynôme minimal de α sur \mathbb{Z} . La qualité de l'approximation d'un nombre réel par les nombres algébriques de degré au plus n peut être mesurée au moyen des exposants $w_n(\xi)$ et $w_n^*(\xi)$ introduits par Mahler en 1932 (voir [14]) et Koksma en 1939 (voir [11]) respectivement, qui sont définis comme suit

- On note $w_n(\xi)$ le supremum des $w \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe une infinité de polynômes $P \in \mathbb{Z}[x]$ de degré au plus n avec

$$|P(\xi)| \leq \|P\|^{-w}.$$

- On note $w_n^*(\xi)$ le supremum des $w \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe une infinité de nombres algébriques α de degré au plus n avec

$$|\xi - \alpha| \leq H(\alpha)^{-w-1}.$$

Pour tout nombre réel ξ et tout entier $n \geq 1$, on a

$$w_n^*(\xi) \leq w_n(\xi). \tag{1.3.2}$$

De plus, il existe des réels ξ pour lesquels l'inégalité (1.3.2) est stricte. En 1965, Sprindžuk a montré que, pour entier $n \geq 1$, on a

$$w_n^*(\xi) = w_n(\xi) = n$$

pour presque tout nombre réel ξ par rapport à la mesure de Lebesgue (voir [33]).

Par ailleurs, si ξ est un nombre réel transcendant, alors le principe des tiroirs de Dirichlet implique que

$$w_n(\xi) \geq n \quad (n \geq 1).$$

L'un des problèmes ouverts est de décider si le même résultat reste vrai pour $w_n^*(\xi)$.

En 1961, E. Wirsing posa le problème suivant (voir [34])

Conjecture. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout nombre réel transcendant ξ , on a

$$w_n^*(\xi) \geq n.$$

Pour $n = 1$, cette conjecture est résolue par le principe des tiroirs de Dirichlet (voir Corollaire 1B de [30]). Par ailleurs, H. Davenport et W. Schmidt montrent

en 1967 que pour $n = 2$, la conjecture est vraie. Pour étudier l'approximation des nombres réels par des entiers algébriques de degré $\leq n$, lorsque $n = 3$, Davenport et Schmidt considèrent le système d'inégalités

$$|x_0| \leq X, \quad |x_0\xi - x_1| \leq c_3 X^{-1/\gamma}, \quad |x_0\xi^2 - x_2| \leq c_3 X^{-1/\gamma}. \quad (1.3.3)$$

En supposant que ξ n'est ni un nombre rationnel ni un réel quadratique, ils montrent qu'il existe une constante $c_4 = c_4(\xi) > 0$ telle que les inégalités de (1.3.3) n'admettent pas de solution entière non nulle $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ pour des valeurs de X arbitrairement grandes (voir le théorème 1a de [6]). En combinant ce résultat avec la dualité de Mahler, ils concluent (voir le théorème 1b de [6]), qu'il existe un nombre infini d'entiers algébriques α de degré au plus 3 sur \mathbb{Q} avec

$$|\xi - \alpha| \leq c'_4 H(\alpha)^{-\gamma^2},$$

pour une certaine constante $c'_4 > 0$, d'où $w_2^*(\xi) \geq \gamma^2$.

Dans ses papiers [20] et [21], D. Roy montre que le premier résultat de Davenport et Schmidt est optimal dans le sens suivant.

Théorème (D. Roy, 2003). Il existe un nombre réel ξ qui est transcendant sur \mathbb{Q} et une constante $c_5 = c_5(\xi) > 0$ tels que les inégalités

$$|x_0| \leq X, \quad |x_0\xi - x_1| \leq c_5 X^{-1/\gamma} \quad \text{et} \quad |x_0\xi^2 - x_2| \leq c_5 X^{-1/\gamma}$$

admettent une solution non nulle $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ pour tout $X \geq 1$.

Un tel nombre ξ est appelé un *nombre extrémal*.

Théorème (D. Roy, 2011). Il existe une infinité dénombrable de nombres extrémaux ξ . En particulier, il en existe pour lesquels

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} q \|q\xi\| = \frac{1}{3}.$$

On les appelle nombres extrémaux de type Markoff.

En 2003, D. Roy montre que si ξ est un nombre extrémal d'un certain type incluant ceux de type Markoff, alors pour tout entier algébrique α de degré ≤ 3 , on a

$$|\xi - \alpha| \geq cH(\alpha)^{-\gamma^2}$$

pour une certaine constante $c > 0$ (voir [20]). De plus, D. Roy et D. Zelo montre que ce résultat reste vrai pour tout entier algébrique α de degré 4 et de trace 0 (voir [26]).

En 2010, B. Adamczewski et Y. Bugeaud montrent que, pour tout nombre extrémal ξ et tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[x]$ de degré $\leq n$, on a

$$|P(\xi)| \geq \|P\|^{-\exp\{c(\log 3n)^2(\log \log 3n)^2\}}$$

pour une certaine constante $c > 0$ (voir [1]). Une question naturelle qu'on peut se poser est de savoir si on peut améliorer l'exposant de $\|P\|$, c'est-à-dire :

$$\text{Problème : A-t-on } |P(\xi)| \geq \|P\|^{-cn} ?$$

Dans l'espoir de résoudre un jour ce genre de problème, nous nous proposons ici d'étudier les propriétés des nombres extrémaux de type Markoff.

Caractérisation des nombres extrémaux de type Markoff

Soit ξ un nombre réel fixé. Pour chaque matrice symétrique $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ dans $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, on définit

$$\|\mathbf{x}\| = \max_{0 \leq j \leq 2} |x_j|, \quad L_\xi(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq j \leq 2} |x_0 \xi^j - x_j| \asymp \|(\xi, -1)\mathbf{x}\|.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la matrice M_k par

$$M_k = \begin{pmatrix} 3 & (-1)^k \\ (-1)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Soient $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ deux suites à valeurs réelles positives. La notation $a_k \ll b_k$ signifie qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $a_k \leq cb_k$ pour chaque entier $k \geq 1$, dire que $a_k \asymp b_k$ signifie que $a_k \ll b_k$ et $b_k \ll a_k$.

Le prochain théorème dû à D. Roy fournit une caractérisation des nombres extrémaux de type Markoff.

Théorème (D. Roy, 2011). Soit ξ un nombre réel extrémal de type Markoff. Alors il existe une suite non bornée de matrices symétriques $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_{k,0} & x_{k,1} \\ x_{k,1} & x_{k,2} \end{pmatrix}$ avec $k \geq 1$ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ telle que pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$(i) \quad \det(\mathbf{x}_k) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1} M_{k+1} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k M_k \mathbf{x}_{k+1},$$

$$(ii) \quad \|\mathbf{x}_{k+1}\| \asymp \|\mathbf{x}_k\|^\gamma \quad \text{et} \quad L_\xi(\mathbf{x}_k) \asymp \|\mathbf{x}_k\|^{-1}.$$

Dans le but de comprendre l'arithmétique des suites de matrices $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$, on note \mathfrak{S} l'anneau des suites modulo les suites éventuellement nulles. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on définit une matrice symétrique

$$\mathfrak{X}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_0^{(i)} & \mathfrak{x}_1^{(i)} \\ \mathfrak{x}_1^{(i)} & \mathfrak{x}_2^{(i)} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{S})$$

en posant

$$\mathfrak{x}_j^{(i)} = \text{l'image de } (x_{2k+i,j})_{k \geq 1} \quad (j = 0, 1, 2)$$

On choisit la suite $(x_{2k+i,j})_{k \geq 1}$ plutôt que $(x_{k+i,j})_{k \geq 1}$ dans la définition de $\mathfrak{x}_j^{(i)}$ avec $(j = 0, 1, 2)$ pour pouvoir étendre les conditions (i) du théorème à $\mathfrak{X}^{(i)}$. On obtient ainsi

$$\mathfrak{X}^{(i+1)} = \mathfrak{X}^{(i)} M_i \mathfrak{X}^{(i-1)} = \mathfrak{X}^{(i-1)} M_{i-1} \mathfrak{X}^{(i)} \quad \text{et} \quad \det(\mathfrak{X}^{(i)}) = 1 \quad (i \in \mathbb{Z})$$

où $M_i = M$ pour les i pairs et $M_i = M^T$ pour les i impairs.

On désigne par \mathfrak{S}^* le groupe des unités de \mathfrak{S} c'est-à-dire l'ensemble des éléments $[(a_k)_{k \geq 1}]$ de \mathfrak{S} avec $a_k \neq 0$ pour tout entier k suffisamment grand. Étant donné des éléments $\mathfrak{U} = [(a_k)_{k \geq 1}]$ et $\mathfrak{B} = [(b_k)_{k \geq 1}]$ de \mathfrak{S}^* , on écrit $\mathfrak{U} \sim \mathfrak{B}$ si et seulement si $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k/b_k = 1$. Avec cette notation, on obtient le résultat suivant :

$$\mathfrak{x}_0^{(i+1)} \sim 3\mathfrak{x}_0^{(i)} \mathfrak{x}_0^{(i-1)} \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

On note $\mathfrak{A} = \mathbb{Q}[\mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}]$ le sous-anneau de \mathfrak{S} engendré sur \mathbb{Q} par les coefficients des matrices $\mathfrak{X}^{(0)}$ et $\mathfrak{X}^{(-1)}$. On définit

- $\mathfrak{A}_{\leq d} = \{P(\mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}); P \in \mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*]_{\leq d}\}$ pour tout $d \in \mathbb{N}$.
- $\mathfrak{X}^\alpha = \left(\mathfrak{X}_0^{(0)}\right)^m \left(\mathfrak{X}_0^{(-1)}\right)^n$ pour tout $\alpha = m + n/\gamma \in \mathbb{Z}[\gamma]$.

Théorème (Roy-Villani, 2008). Pour tout entier $d \geq 0$, on a

$$\mathfrak{A}_{\leq d} = \bigoplus_{\alpha \in E_d^{(0)}} R_d^{(0)}(\alpha)$$

où $E_d^{(0)} = \{m + n/\gamma \in \mathbb{Z}[\gamma]; m + n/\gamma \geq 0 \text{ et } |m| + |n| \leq d\}$

$$\text{et } R_d^{(0)}(\alpha) = \{\mathfrak{U} \in \mathfrak{A}_{\leq d}; |\mathfrak{U}| \asymp \mathfrak{X}^\alpha \text{ ou } \mathfrak{U} = 0\}.$$

De plus, on a

- $\dim_{\mathbb{Q}} R_d^{(0)}(\alpha) \in \{1, 3, \dots, 2d + 1\}$ pour tout $\alpha \in E_d^{(0)}$.
- Le nombre de $\alpha \in E_d^{(0)}$ tel que $\dim_{\mathbb{Q}} R_d^{(0)}(\alpha) = 2s + 1$ est

$$\chi_d^{(0)}(s) = \begin{cases} 2s + 1 & \text{si } 0 \leq s < d, \\ d + 1 & \text{si } s = d. \end{cases}$$

Nous proposons une conjecture qui généralise ce résultat.

Conjecture (A. Keita). Pour tout entier $d \geq 0$, on a

$$\mathfrak{A}_{\leq d} + \xi \mathfrak{A}_{\leq d} = \bigoplus_{\alpha \in E_d^{(1)}} R_d^{(1)}(\alpha)$$

où $R_d^{(1)}(\alpha) = \{\mathfrak{U} \in \mathfrak{A}_{\leq d} + \xi \mathfrak{A}_{\leq d}; |\mathfrak{U}| \asymp \mathfrak{X}^\alpha \text{ ou } \mathfrak{U} = 0\}$.

De plus, on a

- $\dim_{\mathbb{Q}} R_d^{(1)}(\alpha) \in \{2, 4, \dots, 2d + 2\}$ pour tout $\alpha \in E_d^{(1)}$.

- Le nombre de $\alpha \in E_d^{(1)}$ tel que $\dim_{\mathbb{Q}} R_d^{(1)}(\alpha) = 2s + 2$ est

$$\chi_d^{(1)}(s) = \begin{cases} 4s + 4 & \text{si } 0 \leq s \leq d - 2, \\ 3d & \text{si } s = d - 1, \\ d + 1 & \text{si } s = d. \end{cases}$$

Cette conjecture est vérifiée numériquement pour $d \leq 11$. Le temps de calcul augmente de manière exponentielle avec d . Pour $d = 11$, cela représente une journée de temps machine sur un ordinateur PC avec processeur INTEL 3. On n'a pas été capable de pousser les calculs plus loin.

On observe que, pour $d = 1, 2, \dots, 6$, l'ensemble $E_d^{(1)}$ est donné par

$$E_d^{(1)} = \{m + n/\gamma; m, n \in \mathbb{Z} \text{ et } |m| + |n| \leq d\} \quad (1 \leq d \leq 6).$$

Donc $E_d^{(1)}$ est représenté par l'ensemble des points entiers dans le losange $|m| + |n| \leq d$ pour $d = 1, \dots, 6$. Pour $d > 6$, ce n'est plus vrai mais on constate que le nombre de points demeure égal à celui du losange.

Ci-dessous quelques exemples pour illustrer le résultat de Roy-Villani et ma conjecture.

Exemple 1.3.2.

Table pour $\dim_{\mathbb{Q}} R_3^{(0)}(\alpha)$

		(n)					
		7					
	3	5	7				
	0	0	3	5	7		
0	0	0	1	5	5	7	(m)
	0	0	0	3	5		
		0	0	0			
			0				

Table pour $\dim_{\mathbb{Q}} R_3^{(1)}(\alpha)$

		(n)					
		8					
	6	6	8				
	4	4	6	6	8		
2	2	4	4	6	6	8	(m)
	2	2	6	4	6		
		4	4	6			
			4				

Chaque élément $\alpha = m + n/\gamma \in \mathbb{Z}[\gamma]$ peut être représenté par ses coordonnées (m, n) dans le plan. Pour pouvoir lire la dimension $\dim_{\mathbb{Q}} R_3^{(0)}(\alpha)$ sur la première

table (respectivement $\dim_{\mathbb{Q}} R_3^{(1)}(\alpha)$ sur la deuxième table), il suffit de connaître les valeurs de m et n . Par exemple, si on prend $m = 1$ et $n = -1$, cela correspond à $\alpha = 1 - 1/\gamma$, on lit sur les tables que

$$\dim_{\mathbb{Q}} R_3^{(0)}(\alpha) = 3 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{Q}} R_3^{(1)}(\alpha) = 4.$$

Pour la preuve de notre conjecture pour $d \leq 6$, on construit explicitement $R_d^{(1)}(\alpha)$, pour chaque $\alpha = m + n/\gamma$ de $\mathbb{Z}[\gamma]$ avec $|m| + |n| \leq d$.

Pour cela, on utilise la propriété suivante

$$\mathfrak{X}_i^{(-2)} \mathfrak{X}_j^{(1)} \in \mathfrak{A}_{\leq 2} \quad 0 \leq i, j \leq 2.$$

Elle est étonnante car les coefficients des matrices $\mathfrak{X}^{(-2)}$ et $\mathfrak{X}^{(1)}$ sont réalisables en degré au plus 2 donc on s'attendrait à ce que les neuf produits $\mathfrak{X}_i^{(-2)} \mathfrak{X}_j^{(1)}$ avec $1 \leq i, j \leq 2$ soient réalisables en degré au plus 4.

Ensuite, on considère des produits

$$\boxed{(\xi, -1)\mathcal{W}_{k_1}\mathcal{W}_{k_2}\cdots\mathcal{W}_{k_\ell}} \mathfrak{X}_{j_1}^{(i_1)} \cdots \mathfrak{X}_{j_s}^{(i_s)}, \quad (1.3.4)$$

où $\mathcal{W}_k = \mathfrak{X}^{(k)}M_k$, pour construire une base explicite de $R_d^{(1)}(\alpha)$. On s'appuie sur les valeurs numériques fournies dans l'annexe B pour conclure.

Le choix des suites (k_1, \dots, k_ℓ) pour former les produits $(\xi, -1)\mathcal{W}_{k_1}\mathcal{W}_{k_2}\cdots\mathcal{W}_{k_\ell}$ utilise des résultats combinatoires que nous développons au chapitre 7. Soit $E = \{a, b\}$ un alphabet de deux lettres et soit E^* le monoïde des mots sur cet alphabet. La suite des *mots de Fibonacci* $(w_i)_{i \geq -1}$ dans E^* est donnée par

$$w_{-1} = b, \quad w_0 = a \quad \text{et} \quad w_{i+1}w_iw_{i-1} \quad (i \geq 0).$$

Elle converge vers un mot infini $w_\infty = abaababaabaababaababa \cdots$ qui est stable sous le morphisme de monoïdes $\varphi : E^* \rightarrow E^*$ qui applique b sur a et a sur ab . On construit un monoïde \overline{E} qui contient E^* sur lequel le morphisme φ s'étend à un automorphisme $\Phi : \overline{E} \rightarrow \overline{E}$ tel que, pour tout $\overline{w} \in \overline{E}$, on a

$$\Phi^k(\overline{w}) \in E^* \quad \text{pour tout entier } k \geq 1 \text{ suffisamment grand.}$$

On définit un *préfixe fractionnaire* de w_∞ comme un élément \bar{w} de \bar{E} tel que $\Phi^k(\bar{w})$ soit un préfixe de w_∞ au sens ordinaire (dans le monoïde E^\star) pour tout entier k assez grand. On montre aussi qu'il existe des morphismes de monoïdes

$$\mathbf{taille} : \bar{E} \rightarrow \mathbb{Z}[\gamma]_{\geq 0} \quad \text{et} \quad \Psi : \bar{E} \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A})$$

tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on ait

$$\mathbf{taille}(\Phi^k(a)) = \gamma^k \quad \text{et} \quad \Psi(\Phi^k(a)) = \mathfrak{X}^{(k)} M_k = \mathcal{W}_k.$$

Au chapitre 7, on démontre les résultats suivants

1. La **taille** est surjective.
2. Si \bar{w} est un préfixe fractionnaire de w_∞ , on peut écrire

$$\bar{w} = \Phi^{k_1}(a) \Phi^{k_2}(a) \cdots \Phi^{k_\ell}(a)$$

pour un et un seul choix d'entiers k_1, k_2, \dots, k_ℓ avec $k_1 > k_2 > \cdots > k_\ell$ et $k_i \geq k_{i+1} + 2$ pour tout $1 \leq i \leq \ell - 1$.

3. Avec les mêmes notations, on a

$$\Psi(\bar{w}) = \mathcal{W}_{k_1} \mathcal{W}_{k_2} \cdots \mathcal{W}_{k_\ell} \tag{1.3.5}$$

$$\text{et} \quad (\xi, -1) \Psi(\bar{w}) J \sim \frac{\mathfrak{X}^{-\alpha}}{3^{m+n}} (1, \xi)$$

où $\alpha = m + n/\gamma = \mathbf{taille}(\bar{w})$.

Ce sont les produits (1.3.5) associés aux préfixes fractionnaires de w_∞ qu'on utilise dans (1.3.4).

Première partie

Géométrie paramétrique des nombres dans \mathbb{R}^m

Chapitre 2

Préliminaires

Ce chapitre a pour but de fournir au lecteur une base de la théorie entourant le développement en fraction continue, la géométrie des nombres et la géométrie paramétrique des nombres en vue des chapitres 2 et 3. Il se compose de trois parties. La première section est consacrée aux notions reliées aux fractions continues : réduites, théorème de la meilleure approximation, réduites intermédiaires, tandis que la deuxième porte sur des rappels de géométrie des nombres : premier et second théorèmes de Minkowski, et dualité de Mahler. Enfin, la troisième section regroupe des résultats sur la géométrie paramétrique des nombres notamment les résultats de W. M. Schmidt et L. Summerer et le théorème de D. Roy. Elle termine par la notion de m -systèmes généralisés.

2.1 Fractions continues

Une *fraction continue* est toute expression de la forme

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

où a_0, a_1, \dots sont des entiers avec $a_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$.

Une *fraction continue* dont les *quotients partiels* sont en nombre fini est dite *finie* et on la note

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Une *fraction continue* qui n'est pas finie est dite *infinie* et on la note $[a_0, a_1, a_2, \dots]$.

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on désigne par $[\xi]$ la partie entière de ξ et par $\{\xi\} = \xi - [\xi]$ la partie fractionnaire de ξ . Dans cette partie, on s'intéresse particulièrement au développement en fraction continue des nombres réels compris entre 0 et $1/2$. Dans ce cas, nous établissons quelques propriétés qui leurs sont reliées et dont l'importance sera clairement révélée au chapitre 2.

Supposons que $\xi \in [0, 1/2]$. Si $\xi \notin \mathbb{Q}$, on pose $s = \infty$ et on définit récursivement une suite de réels $(\xi_n)_{0 \leq n < s}$ et une suite d'entiers $(a_n)_{0 \leq n < s}$ de la manière suivante. On pose $\xi_0 = \xi$, $a_0 = [\xi_0] = 0$ et pour tout $1 \leq n < s$,

$$\xi_n = \frac{1}{\xi_{n-1} - a_{n-1}} \quad \text{et} \quad a_n = [\xi_n].$$

Comme $\xi \notin \mathbb{Q}$, on a $\xi_n \notin \mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 0$, donc $\xi_n > 0$ et l'algorithme peut être poursuivi indéfiniment. Si $\xi \in \mathbb{Q}$.

Si $\xi = 0$, on pose $\xi = [0]$ sinon les mêmes formules fournissent des suites finies $(\xi_n)_{0 \leq n < s}$ et $(a_n)_{0 \leq n < s}$ où $s \geq 2$ est le plus grand entier tel que $\xi_{s-1} \in \mathbb{Z}$. Dans ce dernier cas on a

$$\xi = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{s-1}}}}} = [0, a_1, a_2, \dots, a_{s-1}],$$

avec $a_{s-1} \geq 2$. En général

$$\xi = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\xi_n}}}}} = [0, a_1, \dots, a_{n-1}, \xi_n] \quad (1 \leq n < s).$$

Si $\xi \notin \mathbb{Q}$, on montre que

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} [0, a_1, a_2, \dots, a_n] = [0, a_1, a_2, \dots].$$

Les *quotients partiels* a_n avec $1 \leq n < s$ sont des entiers strictement positifs.

Exemple 2.1.1. Fractions continues finies

$$\frac{3}{7} = [0, 2, 3] \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} = [0, 3].$$

Exemple 2.1.2. Fractions continues infinies

$$\pi - 3 = [0, 7, 15, \dots] \quad \text{et} \quad \sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, \dots]$$

Soit $\xi \in [0, 1/2]$ et soit $(a_n)_{1 \leq n < s}$ la suite des *quotients partiels* de ξ . On pose

$$\begin{cases} P_{-1} = 1, P_0 = 0 \\ Q_{-1} = 0, Q_0 = 1 \end{cases},$$

et pour chaque entier n avec $1 \leq n < s$, on définit par récurrence

$$\begin{cases} P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases}.$$

Lemme 2.1.3. La suite $(Q_n)_{0 \leq n < s}$ est strictement positive et strictement croissante.

On dira qu'un point $\mathbf{x} = (x_0, x_1) \in \mathbb{Z}^2$ est *primitif* s'il est non nul et $\text{pgcd}(x_0, x_1) = 1$. Le prochain résultat donne une propriété importante des couples (Q_n, P_n) avec $-1 \leq n < s$.

Lemme 2.1.4. *Les couples d'entiers (Q_n, P_n) avec $0 \leq n < s$ sont des points primitifs de \mathbb{Z}^2 . Plus précisément, on a*

$$Q_n P_{n-1} - Q_{n-1} P_n = (-1)^n \quad (0 \leq n < s).$$

Par conséquent l'ensemble $\{(Q_{n-1}, P_{n-1}), (Q_n, P_n)\}$ forme une base de \mathbb{Z}^2 pour chaque entier n avec $0 \leq n < s$.

Le théorème suivant est fondamental dans la théorie des fractions continues.

Théorème 2.1.5. *Les fractions P_n/Q_n avec $(0 \leq n < s)$ sont irréductibles et on a*

$$\frac{P_n}{Q_n} = [0, a_1, \dots, a_n] \quad (0 \leq n < s).$$

La fraction réduite P_n/Q_n est appelée la n -ième réduite de ξ . On pose $Q_s = \infty$ si $s < \infty$.

Le théorème 2.1.5 admet la conséquence suivante.

Lemme 2.1.6. *Pour tout entier n avec $0 \leq n < s$, on a la relation*

$$\xi = \frac{P_n \xi_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n \xi_{n+1} + Q_{n-1}}.$$

La proposition suivante combine tous les résultats précédents.

Proposition 2.1.7. *La suite $(Q_n \xi - P_n)_{-1 \leq n < s}$ consiste de nombres réels de signes alternés sauf le dernier terme qui est nul si $s < \infty$. De plus, on a*

$$|Q_n \xi - P_n| < |Q_{n-1} \xi - P_{n-1}| \quad \text{et} \quad \left| \xi - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n^2} \quad (0 \leq n < s). \quad (2.1.1)$$

Démonstration: Soit n un entier avec $0 \leq n < s$. Si $s < \infty$ et $n = s - 1$ alors par le théorème 2.1.5, on a $P_{s-1}/Q_{s-1} = \xi$ et donc $Q_{s-1} \xi - P_{s-1} = 0$, dans ce cas les inégalités de (2.1.1) deviennent évidentes. Par le lemme 2.1.3, on a $\xi = (P_n \xi_{n+1} + P_{n-1}) / (Q_n \xi_{n+1} + Q_{n-1})$ alors

$$Q_n \xi - P_n = \frac{Q_n P_{n-1} - Q_{n-1} P_n}{Q_n \xi_{n+1} + Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n \xi_{n+1} + Q_{n-1}} \quad (2.1.2)$$

La dernière égalité de 2.1.2 découle du lemme 2.1.4 et la première affirmation s'ensuit. En prenant la valeur absolue de (2.1.2), on obtient

$$|Q_n \xi - P_n| = \frac{1}{Q_n \xi_{n+1} + Q_{n-1}} \quad (2.1.3)$$

D'une part, comme $Q_{n+1} \leq Q_n \xi_{n+1} + Q_{n-1} < Q_{n+1} + Q_n$, on déduit de (2.1.3)

$$|Q_n \xi - P_n| \leq \frac{1}{Q_{n+1}} \leq \frac{1}{Q_n + Q_{n-1}} < |Q_{n-1} \xi - P_{n-1}|,$$

D'autre part, comme $Q_n \leq Q_{n+1}$, donc on a

$$|Q_n \xi - P_n| \leq \frac{1}{Q_{n+1}} \leq \frac{1}{Q_n}.$$

■

Le théorème suivant est appelé le théorème de la meilleure approximation (voir Chap I de [30]).

Théorème 2.1.8. *Pour tout couple d'entiers (Q, P) tel que $0 < Q < Q_{n+1}$, on a*

$$|Q\xi - P| \geq |Q_n \xi - P_n|.$$

Remarque 2.1.9. Si $s < \infty$, alors pour $n = s - 1$ on a $Q_n \xi - P_n = 0$ et la relation $|Q\xi - P| \geq |Q_n \xi - P_n|$ est évidente.

Démonstration: Comme $\{(Q_n, P_n), (Q_{n+1}, P_{n+1})\}$ forme une base de \mathbb{Z}^2 , il existe des entiers a, b tels que

$$\begin{pmatrix} Q_n & Q_{n+1} \\ P_n & P_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

Si $a = 0$ alors $(Q, P) = b(Q_{n+1}, P_{n+1})$ ce qui est impossible car $0 < Q < Q_{n+1}$. Donc $a \neq 0$. Si $b = 0$ alors $(Q, P) = a(Q_n, P_n)$ et donc

$$|Q\xi - P| = |a||Q_n \xi - P_n| \geq |Q_n \xi - P_n|.$$

Supposons maintenant que $b \neq 0$. Comme $0 < aQ_n + bQ_{n+1} = Q < Q_{n+1}$ et $0 < Q_n \leq Q_{n+1}$, alors a est de signe opposé au signe de b . Par la proposition 2.1.7, on a que les nombres $Q_n\xi - P_n$ et $Q_{n+1}\xi - P_{n+1}$ sont de signes opposés, on en déduit que les nombres $a(Q_n\xi - P_n)$ et $b(Q_{n+1}\xi - P_{n+1})$ ont le même signe, donc on obtient

$$|Q\xi - P| = |a||Q_n\xi - P_n| + |b||Q_{n+1}\xi - P_{n+1}| \geq |a||Q_n\xi - P_n|.$$

On conclut grâce à $a \neq 0$ que $|Q\xi - P| \geq |Q_n\xi - P_n|$. ■

Considérons les entiers

$$Q_{n,t} = Q_{n-2} + tQ_{n-1}, \quad P_{n,t} = P_{n-2} + tP_{n-1} \quad (0 \leq t \leq a_n, 1 \leq n < s). \quad (2.1.5)$$

Les rapports $P_{n,t}/Q_{n,t}$ avec $0 < t < a_n$, s'il en existe, sont appelés les réduites intermédiaires de ξ entre P_{n-1}/Q_{n-1} et P_n/Q_n . La proposition suivante caractérise les points $\mathbf{x}_{n,t} = (Q_{n,t}, P_{n,t})$ en relation aux points $\mathbf{x}_n = (Q_n, P_n)$ avec $-1 \leq n < s$ et aux quantités

$$\Delta_n = |Q_n\xi - P_n| \quad (-1 \leq n < s) \quad \text{et} \quad \Delta_{n,t} = |Q_{n,t}\xi - P_{n,t}| \quad (0 \leq t \leq a_n, 1 \leq n < s).$$

Proposition 2.1.10. *Soit n un entier avec $1 \leq n < s$. On a*

$$Q_{n,0} = Q_{n-2} \leq Q_{n-1} \leq Q_{n,1} < \cdots < Q_{n,a_n} = Q_n, \quad (2.1.6)$$

$$\Delta_{n,a_n} = \Delta_n < \Delta_{n-1} \leq \Delta_{n,a_n-1} < \cdots < \Delta_{n,0} = \Delta_{n-2}, \quad (2.1.7)$$

avec l'égalité $Q_{n,1} = Q_{n-1}$ ssi $n = 1$ et l'égalité $\Delta_{n-1} = \Delta_{n,a_n-1}$ ssi $s < \infty$ et $n = s-1$. De plus, les points $\mathbf{x}_{n,t} = (Q_{n,t}, P_{n,t})$ avec $0 \leq t \leq a_n$ sont tous les couples d'entiers (Q, P) non nuls satisfaisant

$$\boxed{Q_{n-2} \leq Q \leq Q_n, \quad |Q\xi - P| \leq \Delta_{n-2} = |Q_{n-2}\xi - P_{n-2}|, \quad QP_{n-1} - Q_{n-1}P \neq 0.} \quad (2.1.8)$$

Enfin, si $s < \infty$, il n'existe pas de point non nul $(Q, P) \in \mathbb{Z}^2$ avec

$$\boxed{|Q\xi - P| < \Delta_{s-2} = |Q_{s-2}\xi - P_{s-2}|, \quad QP_{s-1} - Q_{s-1}P \neq 0.} \quad (2.1.9)$$

Démonstration: Comme $Q_{n-2}\xi - P_{n-2}$ et $Q_{n-1}\xi - P_{n-1}$ sont non nuls et de signes opposés, et que

$$Q_n\xi - P_n = (Q_{n-2}\xi - P_{n-2}) + a_n(Q_{n-1}\xi - P_{n-1})$$

est nul ou de même signe que $Q_{n-2}\xi - P_{n-2}$, on a

$$\Delta_{n,t} = \Delta_{n-2} - t\Delta_{n-1} \quad (0 \leq t \leq a_n),$$

et $\Delta_{n,a_n-1} = \Delta_{n,a_n} + \Delta_{n-1} = \Delta_n + \Delta_{n-1}$. La première assertion s'ensuit grâce aux propriétés du lemme 2.1.3 et de la proposition 9.1.5.

Soit $\mathbf{x} = (Q, P)$ un point non nul de \mathbb{Z}^2 satisfaisant (2.1.8). Comme les points $\mathbf{x}_{n-2} = (Q_{n-2}, P_{n-2})$ et $\mathbf{x}_{n-1} = (Q_{n-1}, P_{n-1})$ forment une base de \mathbb{Z}^2 (en vertu du lemme 2.1.4), on peut écrire

$$\mathbf{x} = r\mathbf{x}_{n-2} + t\mathbf{x}_{n-1}.$$

avec $(r, t) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$. La troisième des conditions (2.1.8) entraîne $r \neq 0$. Alors l'égalité

$$Q\xi - P = r(Q_{n-2}\xi - P_{n-2}) + t(Q_{n-1}\xi - P_{n-1})$$

jointe à la proposition 9.1.5 et à la seconde des conditions (2.1.8) implique $rt \geq 0$ et aussi que $t > a_n$ si $r > 1$. Comme $Q = rQ_{n-2} + tQ_{n-1}$, on conclut grâce au lemme 2.1.3 que $r = 1$ et $0 \leq t \leq a_n$.

Enfin si $s < \infty$ et si $\mathbf{x} = (Q, P) \in \mathbb{Z}^2$ satisfait (2.1.9), on peut écrire $\mathbf{x} = a\mathbf{x}_{s-2} + b\mathbf{x}_{s-1}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $a \neq 0$. Comme $\Delta_{s-1} = 0$, on en déduit $|Q\xi - P| = a\Delta_{s-2} \geq \Delta_{s-2}$, contre l'hypothèse. ■

2.2 Géométrie des nombres

Soit m un entier $m \geq 2$. On note \mathbb{R}^m l'espace euclidien pour le produit scalaire standard de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{z} noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{z}$.

La géométrie des nombres est un domaine de la théorie des nombres, qui a été créé à la fin du *XIX* siècle par H. Minkowski. Elle fournit un moyen d'étudier des phénomènes arithmétiques d'un point de vue géométrique. Ici, on s'intéresse spécifiquement aux théorèmes de Minkowski concernant les réseaux et les corps convexes de \mathbb{R}^m , et à la dualité de Mahler.

1°. **Réseaux.** Un *réseau* $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ est un groupe additif de la forme

$$\Lambda = \mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbb{Z}\mathbf{v}_m = \{a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_m\mathbf{v}_m; a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}\}$$

où $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ est une base de \mathbb{R}^m . L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ est appelé une base de Λ .

Le déterminant de Λ est défini comme la valeur absolue du déterminant de la matrice dont les colonnes sont formées par $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ c'est-à-dire

$$\det(\Lambda) = |\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)|.$$

Ce déterminant ne dépend pas de la base choisie.

En effet : Soit $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ une autre base de Λ alors pour tout entier j avec $1 \leq j \leq m$, il existe des entiers $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ avec $1 \leq i \leq m$ tels que

$$\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}\mathbf{v}_i.$$

De façon symétrique les éléments de $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ à coefficients entiers. Par conséquent, la matrice de transition $(a_{ij}) \in GL(m, \mathbb{Z})$ et on observe $\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) = \pm \det(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$. La conclusion suit.

2°. Corps convexe. Un *corps convexe* $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^m$ est un voisinage compact convexe de l'origine 0 stable sous multiplication par -1.

L'un des problèmes fondamentaux de la géométrie des nombres est de décider si un corps convexe \mathcal{C} de \mathbb{R}^m contient un point non nul d'un réseau $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$. Le prochain résultat dû à H. Minkowski fournit une réponse à ce problème (voir Chap 2 de [12] ou Chap II de [30]).

Théorème 2.2.1 (Premier Théorème de Minkowski). *Soient $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ un réseau et \mathcal{C} un corps convexe de \mathbb{R}^m . Si $\text{vol}(\mathcal{C}) \geq 2^m \det(\Lambda)$, alors \mathcal{C} contient un point non nul du réseau Λ , en d'autres termes*

$$\mathcal{C} \cap \Lambda \neq \{0\}.$$

Bien que la preuve de ce théorème soit assez simple, il a beaucoup d'applications dans différentes branches des mathématiques. L'une des applications est le théorème de Dirichlet sur l'approximation Diophantienne.

Théorème 2.2.2 (Théorème de Dirichlet). *Soient ξ un nombre réel et Q un entier avec $Q > 1$. Alors il existe des entiers p, q avec $0 < q \leq Q$ et*

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

Démonstration: Supposons que $Q > 1$. Considérons l'ensemble \mathcal{C} défini par

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq Q, |x\xi - y| \leq Q^{-1}\}$$

On prend $\Lambda = \mathbb{Z}^2$. Il est facile de voir que \mathcal{C} est un corps convexe de \mathbb{R}^2 de volume

$$\text{vol}(\mathcal{C}) = 4Q \times Q^{-1} = 4 = 4 \det(\Lambda).$$

Ainsi le théorème de Minkowski assure l'existence d'un couple d'entiers $(q, p) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que

$$|q| \leq Q, |q\xi - p| \leq Q^{-1}$$

Quitte à remplacer (q, p) par $(-q, -p)$, on peut supposer sans perte de généralité que $q \geq 0$.

Si $q = 0$, alors $|p| \leq Q^{-1}$ donc $p = 0$ ce qui est impossible. Par conséquent, on a $0 < q \leq Q$. ■

On introduit maintenant la notion de minima successifs de Minkowski.

Définition 2.2.3. Soient $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ un réseau et \mathcal{C} un corps convexe de \mathbb{R}^m . Pour tout entier j avec $1 \leq j \leq m$, on définit le j -ième minimum de Λ par rapport \mathcal{C} noté $\lambda_j(\mathcal{C}; \Lambda)$ comme le minimum des $\lambda \geq 0$ tel que $\lambda\mathcal{C}$ contient au moins j éléments linéairement indépendants de Λ .

Clairement, ces minima forment une suite croissante, on a

$$\lambda_1(\mathcal{C}; \Lambda) \leq \lambda_2(\mathcal{C}; \Lambda) \leq \cdots \leq \lambda_m(\mathcal{C}; \Lambda).$$

Le résultat suivant est une réécriture du théorème 2.2.1 en termes du premier minimum, aussi dû à Minkowski (voir Chap 2 de [12] ou Chap IV de [30]).

Théorème 2.2.4. Soient $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ un réseau et \mathcal{C} un corps convexe de \mathbb{R}^m . Alors on a

$$(\lambda_1(\mathcal{C}; \Lambda))^m \leq 2^m \frac{\det(\Lambda)}{\text{vol}(\mathcal{C})}.$$

Par conséquent $\text{vol}(\mathcal{C}) \geq 2^m \det(\Lambda)$ implique $\lambda_1(\mathcal{C}; \Lambda) \leq 1$ et donc \mathcal{C} contient un point de $\Lambda \setminus \{0\}$. Par ailleurs, si on pose $\lambda = 2(\det(\Lambda)/\text{vol}(\mathcal{C}))^{1/m}$ alors on vérifie facilement que $\lambda\mathcal{C}$ est un corps convexe de volume $2^m \det(\Lambda)$. Donc par le théorème 2.2.1, $\lambda\mathcal{C}$ contient un point de $\Lambda \setminus \{0\}$ et par conséquent, on a $\lambda_1(\mathcal{C}; \Lambda) \leq \lambda$. Il s'ensuit que $(\lambda_1(\mathcal{C}; \Lambda))^m \leq 2^m (\det(\Lambda)/\text{vol}(\mathcal{C}))$.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 2.2.4.

Théorème 2.2.5 (Second Théorème de Minkowski). Soient $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ un réseau et \mathcal{C} un corps convexe de \mathbb{R}^m . Alors on a

$$\frac{2^m}{m!} \det(\Lambda)/\text{vol}(\mathcal{C}) \leq \lambda_1(\mathcal{C}; \Lambda) \cdots \lambda_m(\mathcal{C}; \Lambda) \leq 2^m \det(\Lambda)/\text{vol}(\mathcal{C}). \quad (2.2.1)$$

Les inégalités de (2.2.1) sont les meilleures possibles. Les exemples ci-dessous le montrent pour $\Lambda = \mathbb{Z}^m$.

Exemple 2.2.6. On considère le corps convexe

$$\mathcal{C}_m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m; \sum_{i=1}^m |x_i| \leq 1\}.$$

Il est facile de montrer que $\text{vol}(\mathcal{C}_m) = 2^m/(m!)$. De plus, comme \mathcal{C}_m contient la base canonique de \mathbb{Z}^m alors on a

$$\lambda_j(\mathcal{C}_m; \Lambda) = 1 \quad (1 \leq j \leq m).$$

Par conséquent la borne inférieure de (2.2.1) est atteinte par \mathcal{C}_m .

Exemple 2.2.7. Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ une suite de valeurs réelles avec $a_j \leq a_{j-1}$ pour $2 \leq j \leq m$. Considérons le corps convexe

$$\mathcal{C}_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m; |x_i| \leq a_i, \quad 1 \leq i \leq m\}.$$

Alors pour tout entier j avec $1 \leq j \leq m$, on a

$$\lambda_j(\mathcal{C}_{\mathbf{a}}; \Lambda) = 1/a_j \quad \text{et} \quad \text{vol}(\mathcal{C}_{\mathbf{a}}) = 2^m \prod_{j=1}^m a_j.$$

Par conséquent la borne supérieure de (2.2.1) est atteinte par $\mathcal{C}_{\mathbf{a}}$.

Définition 2.2.8. Soient $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$. Le réseau dual de Λ noté Λ^* est l'ensemble décrit par

$$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m; \quad \forall \mathbf{v} \in \Lambda, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemple 2.2.9. Soit m un entier avec $m \geq 2$. Soit N un réel avec $N \geq 1$ et fixons un point $\xi = (1, \xi_1, \dots, \xi_m)$ de \mathbb{R}^{m+1} . On définit $\Lambda(\xi, N)$ comme le réseau engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_0 = (N^{-1}, N^{1/m}\xi_1, \dots, N^{1/m}\xi_m), \quad \mathbf{v}_1 = (0, -N^{1/m}, \dots, 0), \dots, \mathbf{v}_m = (0, 0, \dots, -N^{1/m}).$$

Le réseau dual $\Lambda^*(\xi, N)$ de $\Lambda(\xi, N)$ est le réseau engendré par les vecteurs suivants

$$\mathbf{w}_0 = (N, 0, \dots, 0), \mathbf{w}_1 = (-N\xi_1, N^{-1/m}, \dots, 0), \dots, \mathbf{w}_m = (-N\xi_m, 0, \dots, N^{-1/m}).$$

Définition 2.2.10. *Le corps convexe dual \mathcal{C}^* d'un corps convexe \mathcal{C} est l'ensemble décrit par*

$$\mathcal{C}^* = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m; \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq 1 \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

Exemple 2.2.11. Soit \mathcal{B} le cube unité de \mathbb{R}^m c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m; |y_i| \leq 1, i = 1, \dots, m\}.$$

Il est facile de voir que \mathcal{B} est un corps convexe de \mathbb{R}^m . Le convexe dual \mathcal{B}^* de \mathcal{B} est donné par

$$\mathcal{B}^* = \left\{ (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m; \sum_{i=1}^m |y_i| \leq 1 \right\}.$$

Le prochain théorème dû à Mahler relie les minima successifs d'un corps convexe \mathcal{C} par rapport à un réseau Λ avec ceux de son dual \mathcal{C}^* par rapport Λ^* (voir section 14 du Chap 2 de [12]).

Théorème 2.2.12 (Théorème de Dualité de Mahler). *Soient $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ un réseau et \mathcal{C} un corps convexe de \mathbb{R}^m et soient Λ^* le réseau dual de Λ et \mathcal{C}^* le corps convexe dual de \mathcal{C} . Alors, on a*

$$1 \leq \lambda_j(\mathcal{C}; \Lambda) \lambda_{m+1-j}(\mathcal{C}^*; \Lambda^*) \leq (m!)^2 \quad (1 \leq j \leq m). \quad (2.2.2)$$

Soient \mathbf{x}, \mathbf{y} deux points de \mathbb{R}^m , on rappelle que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ désigne le produit scalaire standard dans \mathbb{R}^m et on note $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2}$ la norme euclidienne de \mathbf{x} . Le résultat suivant est une application particulière du théorème 2.2.12, il fournit une série d'inclusions d'ensembles qui nous seront utiles dans les chapitres 2 et 3.

Proposition 2.2.13. *Soit $\xi = (1, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})$ un point de \mathbb{R}^m . Pour chaque réel Q avec $Q \geq 1$, on définit les corps convexes*

$$\mathcal{K}_\xi(Q) := \{(x_0, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^m; |x_0| \leq Q, |x_0\xi_j - x_j| \leq Q^{-1/(m-1)}, j = 1, \dots, m-1\} \quad (2.2.3)$$

$$\mathcal{C}_\xi(Q) := \{\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^m; \|\mathbf{x}\| \leq 1, |\mathbf{x} \cdot \xi| \leq Q^{-1}\}. \quad (2.2.4)$$

Alors si on désigne par $\mathcal{K}_\xi^*(Q)$ le convexe dual de $\mathcal{K}_\xi(Q)$, on a

$$m^{-1}Q^{1/(m-1)}\mathcal{C}_\xi(Q^{m/(m-1)}) \subseteq \mathcal{K}_\xi^*(Q) \subseteq \sqrt{m} Q^{1/(m-1)}\mathcal{C}_\xi(Q^{m/(m-1)}). \quad (2.2.5)$$

La famille de corps convexes (2.2.3) est la famille sur laquelle W. M. Schmidt et L. Summerer travaillent dans leurs papiers [31] et [32] tandis que la famille de corps convexes (2.2.4) est celle qu'utilise D. Roy dans [27] et [28].

Démonstration: Soit $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_{m-1})$ un point de \mathbb{R}^m tel que $\mathbf{y} \in \mathcal{K}_\xi^*(Q)$ c'est-à-dire tel que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq 1$ pour tout $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{m-1}) \in \mathcal{K}_\xi(Q)$. On note tout d'abord que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= x_0y_0 + \dots + x_{m-1}y_{m-1} = x_0y_0 + \sum_{j=1}^{m-1} x_0y_j\xi_j - \sum_{j=1}^{m-1} x_0y_j\xi_j + \sum_{j=1}^{m-1} x_jy_j \\ &= x_0 \left(y_0 + \sum_{j=1}^{m-1} y_j\xi_j \right) + \sum_{j=1}^{m-1} y_j (x_j - x_0\xi_j) \end{aligned}$$

Le fait qu'on ait $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq 1$ pour tout \mathbf{x} avec $|x_0| \leq Q$ et $|x_0\xi_j - x_j| \leq Q^{-1/(m-1)}$ ($1 \leq j \leq m-1$) entraîne que

$$\left| y_0 + \sum_{j=1}^{m-1} y_j\xi_j \right| \leq Q^{-1} \quad \text{et} \quad |y_j| \leq Q^{1/(m-1)} \quad j = 1, \dots, m-1,$$

Autrement dit, on a $\mathcal{K}_\xi^*(Q) \subseteq \mathcal{K}'_\xi(Q)$ pour tout $Q \geq 1$, où $\mathcal{K}'_\xi(Q)$ est le corps convexe défini par

$$\mathcal{K}'_\xi(Q) = \{\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_{m-1}) \in \mathbb{R}^m; |\mathbf{y} \cdot \xi| \leq Q^{-1}, |y_j| \leq Q^{1/(m-1)}, j = 1, \dots, m-1\}.$$

De plus, si on suppose que $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_{m-1})$ est un élément de $\mathcal{K}'_\xi(Q)$, alors pour tout $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{m-1}) \in \mathcal{K}_\xi(Q)$ on a

$$\frac{1}{m} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{m} x_0 \left(y_0 + \sum_{j=1}^{m-1} y_j \xi_j \right) + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} y_j (x_j - x_0 \xi_j) \leq \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m} = 1.$$

D'où $\frac{1}{m} \mathbf{y} \in \mathcal{K}'_\xi(Q)$. Donc, on obtient

$$\frac{1}{m} \mathcal{K}'_\xi(Q) \subseteq \mathcal{K}'_\xi(Q) \subseteq \mathcal{K}'_\xi(Q). \quad (2.2.6)$$

D'autre part, on observe que $Q^{1/(m-1)} \mathcal{C}_\xi(Q^{m/(m-1)}) \subseteq \mathcal{K}'_\xi(Q)$ et aussi que pour tout $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_{m-1}) \in \mathcal{K}'_\xi(Q)$, on a

$$\begin{aligned} |\mathbf{y} \cdot \xi| &\leq Q^{-1} \quad \text{et} \quad |y_j| \leq Q^{1/(m-1)}, \quad j = 1, \dots, m-1 \\ \Rightarrow |\mathbf{y} \cdot \xi| &\leq Q^{-1} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{y}\| \leq \sqrt{m} Q^{1/(m-1)} \\ \Rightarrow \mathbf{y} &\in \sqrt{m} Q^{1/(m-1)} \mathcal{C}_\xi(Q^{m/(m-1)}). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$Q^{1/(m-1)} \mathcal{C}_\xi(Q^{m/(m-1)}) \subseteq \mathcal{K}'_\xi(Q) \subseteq \sqrt{m} Q^{1/(m-1)} \mathcal{C}_\xi(Q^{m/(m-1)}). \quad (2.2.7)$$

En combinant les inclusions de (2.2.6) avec celles de (2.2.7), on obtient le résultat souhaité. ■

La proposition 2.2.13 admet la conséquence suivante.

Corollaire 2.2.14. *Avec les mêmes notations, on a*

$$\frac{1}{m} Q^{1/(m-1)} \leq \lambda_j(\mathcal{C}_\xi(Q^{m/(m-1)}), \mathbb{Z}^m) \lambda_{m-j+1}(\mathcal{K}'_\xi(Q), \mathbb{Z}^m) \leq \sqrt{m} (m!)^2 Q^{1/(m-1)}$$

pour tout entier $j = 1, \dots, m$.

Démonstration: Les inégalités (2.2.5) de la proposition 2.2.13 impliquent

$$\begin{aligned} (\sqrt{m})^{-1} Q^{-1/(m-1)} \lambda_j (\mathcal{C}_\xi(Q^{m/(m-1)}), \mathbb{Z}^m) &\leq \lambda_j (\mathcal{K}_\xi^*(Q), \mathbb{Z}^m) \\ &\leq m Q^{-1/(m-1)} \lambda_j (\mathcal{C}_\xi(Q^{m/(m-1)}), \mathbb{Z}^m) \end{aligned}$$

pour chaque entier j avec $1 \leq j \leq m$. Il découle de ces inégalités que

$$m^{-1} Q^{1/(m-1)} \lambda_j (\mathcal{K}_\xi^*(Q), \mathbb{Z}^m) \leq \lambda_j (\mathcal{C}_\xi(Q^{m/(m-1)}), \mathbb{Z}^m) \leq \sqrt{m} Q^{1/(m-1)} \lambda_j (\mathcal{K}_\xi^*(Q), \mathbb{Z}^m).$$

En multipliant ces dernières inégalités par $\lambda_{m-j+1} (\mathcal{K}_\xi(Q), \mathbb{Z}^m)$, ensuite en appliquant le théorème 2.2.12, on obtient le résultat escompté. ■

2.3 Géométrie paramétrique des nombres dans \mathbb{R}^m

La géométrie paramétrique des nombres introduite récemment par W. M. Schmidt et L. Summerer est une théorie qui décrit, à des fonctions bornées près, le comportement des minimas successifs d'une famille de corps convexes à un paramètre, à savoir celle qui intervient naturellement dans les problèmes d'approximation rationnelle simultanée de nombres réels linéairement indépendant sur \mathbb{Q} . Cette théorie a été initialement développée en dimension $m = 3$ dans [31] puis étendue en dimension quelconque $m \geq 2$ dans [32], et complétée dans [27]. Nous en faisons une brève présentation en utilisant les notations de D. Roy dans [27], qui sont essentiellement duales à celles de Schmidt et Summerer dans [31].

Fixons un entier m avec $m \geq 2$ et un point non nul $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. On associe à \mathbf{u} la famille de corps convexe

$$\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(Q) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m ; \|\mathbf{x}\| \leq 1, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq Q^{-1} \} \quad (Q \geq 1),$$

où $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ désigne le produit scalaire standard dans \mathbb{R}^m et où $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2}$ désigne la norme euclidienne de \mathbf{x} . On définit

$$L_{\mathbf{u},j}(q) = \log \lambda_j (\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q), \mathbb{Z}^m) \quad (q \geq 0, 1 \leq j \leq m),$$

où $\lambda_j(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q), \mathbb{Z}^m)$ est le j -ième *minimum* de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)$ par rapport \mathbb{Z}^m . Clairement, on a

$$L_{\mathbf{u},1}(q) \leq \cdots \leq L_{\mathbf{u},m}(q) \quad (q \geq 0). \quad (2.3.1)$$

On considère le sous-ensemble $\Delta_m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m; x_1 \leq \cdots \leq x_m\}$ de \mathbb{R}^m et on définit la *fonction conjointe* $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} : [0, \infty) \rightarrow \Delta_m$ par

$$\mathbf{L}_{\mathbf{u}}(q) = (L_{\mathbf{u},1}(q), \dots, L_{\mathbf{u},m}(q)) \quad (q \geq 0).$$

On désigne par $\Gamma_{\mathbf{u}}$ le *graphe conjoint* de la fonction $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$ c'est-à-dire l'union des graphes de $L_{\mathbf{u},1}, \dots, L_{\mathbf{u},m}$ dans $[0, \infty[\times \mathbb{R}$.

Dans leurs travaux, Schmidt et Summerer établissent de nombreuses propriétés de la fonction $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$. En particulier, ils démontrent que ses composantes $L_{\mathbf{u},1}, \dots, L_{\mathbf{u},m}$ sont continues et linéaires par morceaux de pentes 0 et 1. De plus, on a $L_{\mathbf{u},1}(q) = L_{\mathbf{u},2}(q)$ aux points $q \in [0, \infty)$ où $L_{\mathbf{u},1}$ admet un maximum local. Il y a d'autres propriétés plus difficiles à énoncer que nous n'aborderons pas ici. Nous aurons besoin de la conséquence suivante du second théorème de Minkowski [27, §2.3].

Lemme 2.3.1. *Pour tout $q \geq 0$, on a $|L_{\mathbf{u},1}(q) + \cdots + L_{\mathbf{u},m}(q) - q| \leq m \log m$.*

Nous introduisons maintenant la notion de m -système généralisé introduite par D. Roy (voir [28]). Cette classe de fonctions a de très belles propriétés, en particulier elles fournissent de bonnes approximations des fonctions $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$ pour $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

Définition 2.3.2. *Soit I un sous-intervalle de $[0, \infty)$ d'intérieur non vide. Un m -système généralisé est une fonction $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_m) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue et linéaire par morceaux avec les propriétés suivantes*

- (G1) *Pour tout q , on a $0 \leq P_1(q) \leq \cdots \leq P_m(q)$ et $P_1(q) + \cdots + P_m(q) = q$.*
- (G2) *Si H est un sous-intervalle non vide de I sur lequel \mathbf{P} est différentiable, alors il existe des entiers \underline{r}, \bar{r} avec $1 \leq \underline{r} \leq \bar{r} \leq m$ tels que $P_{\underline{r}}, P_{\underline{r}+1}, \dots, P_{\bar{r}}$ coïncident sur tout l'intervalle H avec pour pente $1/(\bar{r} - \underline{r} + 1)$ tandis que les autres composantes P_j de \mathbf{P} sont constantes sur H .*

(G3) Si q est un point intérieur de I où P n'est pas différentiable, si $\underline{r}, \bar{r}, \underline{s}, \bar{s}$ sont des entiers pour lesquels

$$P'_j(q^-) = \frac{1}{\bar{r} - \underline{r} + 1} \quad (\underline{r} \leq j \leq \bar{r}) \quad \text{et} \quad P'_j(q^+) = \frac{1}{\bar{s} - \underline{s} + 1} \quad (\underline{s} \leq j \leq \bar{s}) \quad (2.3.2)$$

et si $\underline{r} \leq \bar{s}$, alors on a $P_{\underline{r}}(q) = P_{\underline{r}+1}(q) = \dots = P_{\bar{s}}(q)$.

Ici la notation $P'_j(q^-)$ (respectivement $P'_j(q^+)$) désigne la dérivée à gauche (respectivement la dérivée à droite) de P'_j au point q . La propriété (G2) assure que toutes les composantes P_j de pente non nulle coïncident sur un intervalle J ne contenant pas de points singulier de \mathbf{P} . Par conséquent, il existe un et un seul segment de pente non nul sur le graphe conjoint de \mathbf{P} au-dessus de tels intervalles. De plus la propriété (G3) indique qu'aux points q où la fonction \mathbf{P} n'est pas différentiable, l'extrémité gauche du segment de pente non nulle se terminant en q se situe toujours au-dessus de l'extrémité droite de celle débutant à q .

Exemple 2.3.3. Cet exemple s'inspire du lemme 4.3 de [28].

Pour tout $i = 0, \dots, 3$, on pose $q_i = 1 + i/3$ et on note que

$$1 = q_0 < q_1 < q_2 < q_3 = 2.$$

On définit la fonction $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3) : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ comme suit.

- Chaque composante P_i est continue et linéaire par morceaux sur $[1, 2]$ et on a

$$P_1(q) \leq P_2(q) \leq P_3(q) \quad \text{et} \quad P_1(q) + P_2(q) + P_3(q) = q \quad (1 \leq q \leq 2).$$

- Pour tout $j = 1, 2, 3$, la fonction P_j est constante égale à $1/3$ sur $[q_0, q_{3-j}]$, a pour pente 1 sur $[q_{3-j}, q_{4-j}]$ et constante égale à $2/3$ sur $[q_{4-j}, q_3]$.

On voit que la fonction \mathbf{P} est différentiable sur $[1, 2]$ sauf aux points q_1 et q_2 . Par construction, sur chaque intervalle $[q_0, q_1]$, $[q_1, q_2]$ et $[q_2, q_3]$, il existe une et une seule

composante qui possède une pente non nulle. Aux points $q = q_0$ et $q = q_3$, on a

$$P_1(q) = P_2(q) = P_3(q) = \frac{q}{3}.$$

Au point q_1 , la pente de P_3 passe de 1 à 0 tandis que celle de P_2 change de 0 à 1 et on a

$$P_1(q) = P_2(q) < P_3(q).$$

Au point q_2 , la fonction P_2 passe de la pente 1 à la pente 0 tandis que celle de P_1 change de 0 à 1 et on a

$$P_1(q) < P_2(q) = P_3(q).$$

Donc la fonction \mathbf{P} ainsi définie est un 3-système généralisé et son graphe conjoint est illustré sur la figure ci-dessous.

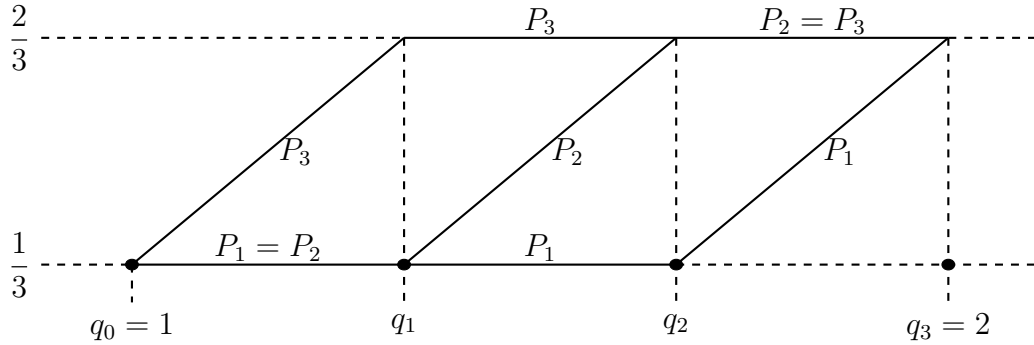


FIGURE 2.1 – Graphe conjoint de \mathbf{P} sur l'intervalle $[1, 2]$

Le Théorème suivant dû à D. Roy caractérise les m -systèmes généralisés en relation aux points non nuls $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ (pour plus de détails, voir [28]).

Théorème 2.3.4. *Pour chaque vecteur non nul $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, il existe $q_0 \geq 0$ et un m -système généralisé \mathbf{P} sur $[q_0, \infty)$ tels que la différence $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{P}$ soit bornée sur $[q_0, \infty)$. Réciproquement, pour chaque m -système généralisé \mathbf{P} sur un intervalle $[q_0, \infty)$ avec $q_0 \geq 0$, il existe un vecteur non nul $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ tel que la différence $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{P}$ soit bornée sur $[q_0, \infty)$.*

Chapitre 3

Géométrie paramétrique des nombres en dimension 2

Dans ce chapitre, nous étudions la géométrie paramétrique des nombres en dimension $m = 2$ en donnant pour ce cas, une description exacte du comportement qualitatif des minima successifs avec la normalisation de Schmidt et Summerer. Ce chapitre a fait l'objet d'un article qui été publié dans le Journal de Théorie des Nombre de Bordeaux en 2017 (voir [10]).

3.1 Résultats préliminaires

On considère la famille de corps convexes donnée par

$$\mathcal{K}_\xi(e^q) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq e^q, |x\xi - y| \leq e^{-q}\} \quad (q \geq 0), \quad (3.1.1)$$

pour un nombre réel ξ fixé. Pour $j = 1, 2$ et $q \geq 0$, on pose $L_{\xi,j}(q) = \log \lambda_j(\mathcal{K}_\xi(e^q); \mathbb{Z}^2)$.

On considère la *fonction conjointe* $\mathbf{L}_\xi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\mathbf{L}_\xi(q) = (L_{\xi,1}(q), L_{\xi,2}(q)) \quad (q \geq 0).$$

Schmidt et Summerer ont noté qu'elle jouit des propriétés suivantes (voir [31, §4]).

Lemme 3.1.1.

- Chaque composante $L_{\xi,j} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et linéaire par morceaux de pentes ± 1 .
- On a $L_{\xi,1}(q) = L_{\xi,2}(q)$ aux points $q \in [0, \infty)$ où $L_{\xi,1}$ admet un maximum local.
- Pour tout $q \geq 0$, on a $-\log 2 \leq L_{\xi,1}(q) + L_{\xi,2}(q) \leq 0$ (en vertu du théorème de Minkowski).

On désigne par $\|\xi\|$ la distance de ξ à l'entier le plus proche. Le théorème suivant montre que le *graphe conjoint* Γ_ξ de \mathbf{L}_ξ ne dépend que la distance $\|\xi\|$.

Théorème 3.1.2. *Soit $\xi \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lambda_j(\mathcal{K}_\xi(e^q); \mathbb{Z}^2) = \lambda_j(\mathcal{K}_{\|\xi\|}(e^q); \mathbb{Z}^2) \quad (j = 1, 2).$$

Par conséquent on a $\mathbf{L}_\xi = \mathbf{L}_{\|\xi\|}$.

Pour la preuve, on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.1.3. *Soit \mathcal{C} un corps convexe de \mathbb{R}^m . Si $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un isomorphisme d'espaces vectoriels tel que $\varphi(\mathbb{Z}^m) = \mathbb{Z}^m$, alors on a*

$$\lambda_j(\mathcal{C}; \mathbb{Z}^m) = \lambda_j(\varphi(\mathcal{C}); \mathbb{Z}^m) \quad (1 \leq j \leq m).$$

Démonstration: Soit $j \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq j \leq m$. Considérons $x_1, x_2, \dots, x_j \in \mathbb{Z}^m \cap \lambda_j \mathcal{C}$ linéairement indépendants. Les points

$$\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_j) \in \mathbb{Z}^m \cap \lambda_j \varphi(\mathcal{C})$$

sont linéairement indépendants. Par conséquent, on obtient

$$\lambda_j(\varphi(\mathcal{C}); \mathbb{Z}^m) \leq \lambda_j(\mathcal{C}; \mathbb{Z}^m).$$

L'autre inégalité est obtenue par le même procédé en remarquant que φ^{-1} est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels tel que $\varphi^{-1}(\mathbb{Z}^m) = \mathbb{Z}^m$. ■

Démonstration: (Théorème 3.1.2)

Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On choisit $m \in \mathbb{Z}$ et $\epsilon = \pm 1$ tels que $\xi = m + \epsilon\|\xi\|$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, \epsilon(y - mx)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels satisfaisant $\phi(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$. D'après le lemme 3.1.3, on a

$$\lambda_j(\mathcal{K}_\xi(e^q); \mathbb{Z}^2) = \lambda_j(\varphi(\mathcal{K}_\xi(e^q)); \mathbb{Z}^2) \quad (j = 1, 2).$$

Il reste à montrer que $\varphi(\mathcal{K}_\xi(e^q)) = \mathcal{K}_{\|\xi\|}(e^q)$ pour conclure. Pour cela, on note simplement que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{K}_{\|\xi\|}(e^q) &\iff |x| \leq e^q \quad \text{et} \quad |x(\|\xi\|) - y| \leq e^{-q} \\ &\iff |x| \leq e^q \quad \text{et} \quad |x(\xi - m)\epsilon - y| \leq e^{-q} \\ &\iff |x| \leq e^q \quad \text{et} \quad |x\xi - (y\epsilon + mx)| \leq e^{-q} \\ &\iff (x, y\epsilon + mx) \in \mathcal{K}_\xi(e^q) \\ &\iff \varphi^{-1}(x, y) \in \mathcal{K}_\xi(e^q) \\ &\iff (x, y) \in \varphi(\mathcal{K}_\xi(e^q)). \end{aligned}$$

■

Dans toute la suite, on supposera que $\xi = \|\xi\| \in [0, 1/2]$. Dans ce cas, nous montrerons que le développement en fraction continue de ξ peut se lire sur le graphe de \mathbf{L}_ξ . Ce serait faux sans cette hypothèse car les graphes associés à $1/3$ et $2/3$ sont les mêmes bien que leurs développements en fraction continue soient différents

$$\frac{1}{3} = [0, 3] \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} = [0, 1, 2].$$

3.2 Trajectoire d'un point

Soit ξ un nombre réel fixé. On considère la famille des corps convexes (3.1.1). Pour tout couple $\mathbf{x} = (Q, P) \in \mathbb{R}^2$ et $q \geq 0$, on définit $\lambda(\mathbf{x}, q)$ comme le minimum des $\lambda \geq 0$ tels que $\mathbf{x} \in \lambda \mathcal{K}_\xi(e^q)$.

Lemme 3.2.1. *On a*

$$\lambda(\mathbf{x}, q) = \max\{e^{-q}|Q|, e^q|Q\xi - P|\} \quad (q \geq 0).$$

Démonstration: Soit $\lambda \geq 0$ et $q \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \lambda \mathcal{K}_\xi(e^q) &\iff |Q| \leq \lambda e^q \quad \text{et} \quad |x\xi - P| \leq \lambda e^{-q} \\ &\iff e^{-q}|Q| \leq \lambda \quad \text{et} \quad e^q|Q\xi - P| \leq \lambda \\ &\iff \max\{e^{-q}|Q|, e^q|Q\xi - P|\} \leq \lambda, \end{aligned}$$

d'où la conclusion. ■

Pour un nombre réel fixé $q \geq 0$, la fonction $\lambda(\cdot, q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ définie par

$$\lambda(\mathbf{x}, q) = \max\{e^{-q}|Q|, e^q|Q\xi - P|\} \quad (\mathbf{x} = (Q, P) \in \mathbb{R}^2),$$

est appelée *fonction distance* de $\mathcal{K}_\xi(e^q)$. Si $\mathbf{x} = (Q, P) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, alors $\lambda(\mathbf{x}, q)$ est strictement positive. On définit une fonction $L_{\mathbf{x}} : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$L_{\mathbf{x}}(q) = \log \lambda(\mathbf{x}, q) = \max\{\log |Q| - q, \log |Q\xi - P| + q\} \quad (q \geq 0).$$

Le graphe de $L_{\mathbf{x}}$ est formé de segments de droite de pentes -1 ou 1 ou les deux comme illustré sur les figures ci-dessous.

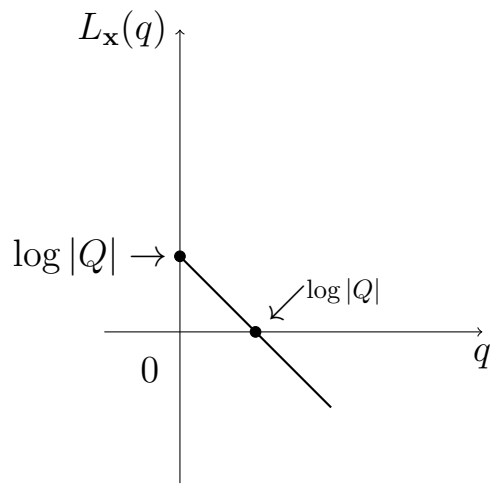


FIGURE 3.1 – Graphe de L_x si $|Q\xi - P| = 0$.

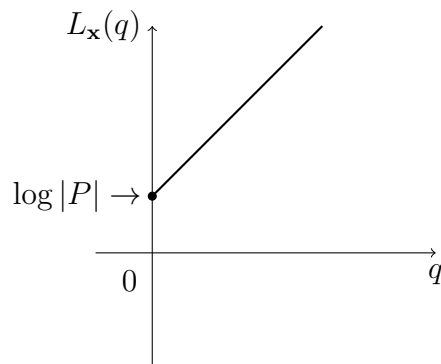


FIGURE 3.2 – Graphe de L_x si $Q = 0$.

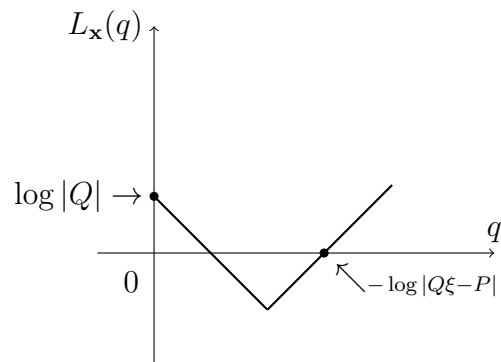


FIGURE 3.3 – Graphe de L_x si $Q \neq 0$ et $|Q\xi - P| \neq 0$.

On fixe un couple d'entiers $\mathbf{x} = (Q, P) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$. On appelle *trajectoire* de \mathbf{x} le graphe de $L_{\mathbf{x}}$ c'est-à-dire l'ensemble

$$\{(q, L_{\mathbf{x}}(q)); q \geq 0\}.$$

Il est important de noter que le graphe conjoint de $L_{\xi,1}$ et $L_{\xi,2}$ est contenu dans la réunion des trajectoires des points $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$. En particulier, on a

$$L_{\xi,1}(q) = \min \{L_{\mathbf{x}}(q); \mathbf{x} = (Q, P) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}\} \quad (q \geq 0). \quad (3.2.1)$$

3.3 Le Premier Minimum

Soit $\xi \in [0, 1/2]$. Le développement en fraction continue de $\xi \in [0, 1/2]$ est donné par (voir section 1 du chapitre 1)

$$\xi = \begin{cases} [0] & \text{si } s = 1, \\ [0, a_1, a_2, \dots, a_{s-1}] & \text{si } 2 \leq s < \infty, \\ [0, a_1, a_2, \dots] & \text{si } s = \infty. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

pour une suite $(a_n)_{1 \leq n < s}$ dans \mathbb{N}^* avec $a_{s-1} \geq 2$ si $2 \leq s < \infty$. La n -ième réduite de ξ est le nombre rationnel

$$\frac{P_n}{Q_n} = [0, a_1, \dots, a_n] \quad (1 \leq n < s),$$

où P_n et Q_n sont les entiers définis par les récurrences

$$Q_n = Q_{n-2} + a_n Q_{n-1}, \quad P_n = P_{n-2} + a_n P_{n-1} \quad (1 \leq n < s),$$

avec les valeurs initiales $P_{-1} = Q_0 = 1$ et $P_0 = Q_{-1} = 0$. On pose $Q_s = \infty$ si $s < \infty$.

Rappelons que ces nombres jouissent des propriétés suivantes

- (i) La suite $(Q_n)_{-1 \leq n < s}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs.
- (ii) La suite $(Q_n \xi - P_n)_{-1 \leq n < s}$ consiste de nombres réels de signes alternés (sauf le dernier terme qui est nul si $s < \infty$), et de valeurs absolues strictement décroissantes.

(iii) On a $Q_n P_{n-1} - Q_{n-1} P_n = (-1)^n \quad (0 \leq n < s)$.

On désigne par $\mathcal{E}_n = \{\mathbf{x}_n = (Q_n, P_n); 0 \leq n < s\}$ l'ensemble des couples d'entiers associés aux réduites de ξ . Le résultat suivant montre que le graphe $L_{\xi,1}$ est déterminé par les trajectoires des points \mathbf{x}_n associés aux réduites de ξ .

Théorème 3.3.1. *Pour tout nombre réel $q \geq 0$, on a*

$$L_{\xi,1}(q) = \min \{L_{\mathbf{x}_n}(q); 0 \leq n < s\}.$$

Plus précisément

$$L_{\xi,1}(q) = L_{\mathbf{x}_n}(q) \quad (q_n \leq q \leq q_{n+1}), \quad (3.3.2)$$

où

$$q_n = \frac{1}{2} (\log Q_n - \log |Q_{n-1}\xi - P_{n-1}|) \quad (0 \leq n < s),$$

$$\text{et } q_s = \infty \quad \text{si } s < \infty.$$

Démonstration: Soit q un nombre réel positif. On pose

$$\alpha = \min \{L_{\mathbf{x}_n}(q); 0 \leq n < s\}.$$

On note d'abord que tout couple d'entiers $\mathbf{x} = (Q, P) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ satisfait

$$L_{\xi,1}(q) \leq L_{\mathbf{x}}(q),$$

en particulier les couples $\mathbf{x}_n = (Q_n, P_n)$. Par conséquent on a $L_{\xi,1}(q) \leq \alpha$.

Pour montrer l'autre inégalité, on choisit un couple d'entiers $\mathbf{x} = (Q, P)$ avec $Q > 0$ tel que $L_1(q) = L_{\mathbf{x}}(q)$. On choisit ensuite $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q_n \leq Q < Q_{n+1}$.

D'après le théorème de la meilleure approximation on a $|Q_n \xi - P_n| \leq |Q \xi - P|$. Donc

$$L_{\xi,1}(q) = L_{\mathbf{x}}(q) = \max \{ \log |Q| - q, \log |Q \xi - P| + q \}$$

$$\geq \max \{ \log |Q_n| - q, \log |Q_n \xi - P_n| + q \} = L_{\mathbf{x}_n}(q) \geq \alpha.$$

Donc $L_{\xi,1}(q) = L_{\mathbf{x}_n}(q)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Cela prouve la première assertion.

Soit n un entier avec $0 \leq n < s$, et soit $q \geq 0$. Si $q_n \leq q$ on a par définition de q_n

$$\log Q_n - q \leq \log |Q_{n-1} \xi - P_{n-1}| + q.$$

Par le lemme 9.1.5, on a $|Q_n \xi - P_n| < |Q_{n-1} \xi - P_{n-1}|$, on en déduit

$$L_{\mathbf{x}_n}(q) \leq \log |Q_{n-1} \xi - P_{n-1}| + q \leq L_{\mathbf{x}_k}(q) \quad \text{si } 0 \leq k < n. \quad (3.3.3)$$

Si $q \leq q_{n+1}$, par définition de q_{n+1} on observe que

$$\log |Q_n \xi - P_n| + q \leq \log |Q_{n+1}| - q,$$

puis comme $Q_n \leq Q_{n+1}$, alors

$$L_{\mathbf{x}_n}(q) \leq \log |Q_{n+1}| + q \leq L_{\mathbf{x}_k}(q) \quad \text{si } n < k. \quad (3.3.4)$$

En combinant (3.3.3) et (3.3.4), on conclut que

$$L_{\xi,1}(q) = L_{\mathbf{x}_n}(q) \quad (q_n \leq q \leq q_{n+1}).$$

■

Le graphe de $L_{\xi,1}$ est une ligne polygonale formée de segments de droite de pentes -1 et 1 . La fonction L_1 admet des maxima locaux aux points $(q_n)_{0 \leq n < s}$. Au point q_n , les trajectoires de \mathbf{x}_{n-1} et de \mathbf{x}_n se rencontrent et l'ordonnée de leur point d'intersection est

$$L_{\xi,1}(q_n) = L_{\xi,2}(q_n) = L_{\mathbf{x}_{n-1}}(q_n).$$

Le minimum local de $L_{\mathbf{x}_n}(q)$ est atteint en $q = \frac{1}{2} (\log Q_n - \log |Q_n \xi - P_n|)$ qui est un point intérieur de (q_n, q_{n+1}) (voir les figures ci-dessous).

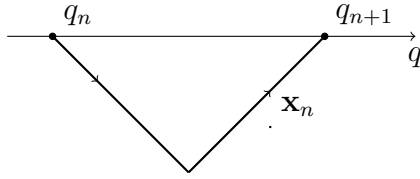


FIGURE 3.4 – Graphe de $L_{\mathbf{x}_n}$ sur $[q_n, q_{n+1}]$ si $0 \leq n \leq s - 1$.

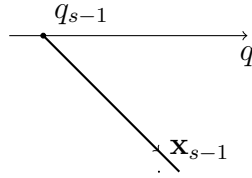


FIGURE 3.5 – Graphe de $L_{\mathbf{x}_{s-1}}$ sur $[q_{s-1}, \infty)$ si $s < \infty$.

3.4 Le Deuxième Minimum

Il résulte de la définition du deuxième minimum que pour tout réel $q \geq 0$, on a

$$L_{\xi,2}(q) = \min \{ \max\{L_{\mathbf{x}}(q), L_{\mathbf{x}'}(q)\}; \mathbf{x} = (Q, P), \mathbf{x}' = (Q', P') \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}, PQ' - P'Q \neq 0 \}.$$

Fixons un entier n avec $1 \leq n < s$. On déduit du théorème 3.3.1 que :

$$L_{\xi,1}(q) = L_{\mathbf{x}_{n-1}}(q) \quad (q_{n-1} \leq q \leq q_n).$$

Donc sur le même intervalle $[q_{n-1}, q_n]$, on a :

$$L_{\xi,2}(q) = \min \{ L_{\mathbf{x}'}(q); \mathbf{x}' = (Q', P') \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}, Q'P_{n-1} - P'Q_{n-1} \neq 0 \}.$$

En particulier, on a

$$L_{\xi,2}(q) \leq L_{\mathbf{x}_{n-2}}(q) \quad \text{et} \quad L_{\xi,2}(q) \leq L_{\mathbf{x}_n}(q) \quad (q_{n-1} \leq q \leq q_n), \quad (3.4.1)$$

Mais il faut aussi remarquer que

$$L_{\mathbf{x}_{n-2}}(q) = \log |Q_{n-2}\xi - P_{n-2}| + q \quad (q_{n-1} \leq q \leq q_n),$$

$$L_{\mathbf{x}_n}(q) = \log Q_n - q \quad (q_{n-1} \leq q \leq q_n).$$

Alors, pour chaque couple $\mathbf{x} = (Q', P') \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ avec $Q'P_{n-1} - P'Q_{n-1} \neq 0$ tel que $L_{\xi,2}(q) = L_{\mathbf{x}'}(q)$, les conditions (3.3.2) livrent

$$|Q\xi - P| \leq |Q_{n-2}\xi - P_{n-2}| \quad \text{et} \quad Q_{n-2} \leq Q' \leq Q_n.$$

Ainsi, on obtient

$$L_{\xi,2}(q) = \min \{L_{\mathbf{x}'}(q); \mathbf{x}' \in \mathcal{E}'_n\} \quad (q_{n-1} \leq q \leq q_n), \quad (3.4.2)$$

où \mathcal{E}'_n est l'ensemble formé par les couples $(Q', P') \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ satisfaisant :

$$Q_{n-2} \leq Q' \leq Q_n, \quad |Q'\xi - P'| \leq |Q_{n-2}\xi - P_{n-2}|, \quad Q'P_{n-1} - P'Q_{n-1} \neq 0.$$

On déduit de la proposition 2.1.10 de la section 1 du chapitre 1 que

$$\mathcal{E}'_n = \{\mathbf{x}_{n,t} = (Q_{n,t}, P_{n,t}), \quad 0 \leq t \leq a_n\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_s = \{\mathbf{x}_{s-2} = (Q_{s-2}, P_{s-2})\} \quad \text{si } s < \infty,$$

où les couples d'entiers $(Q_{n,t}, P_{n,t})$ avec $0 \leq t \leq a_n$ sont donnés par

$$\begin{aligned} Q_{n,t} &= Q_{n-2} + tQ_{n-1} \\ P_{n,t} &= P_{n-2} + tP_{n-1}, \end{aligned}$$

et sont associés aux *réduites intermédiaires* $P_{n,t}/Q_{n,t}$ et aux *réduites* P_n/Q_n de ξ .

On pose $q_{n,0} = q_{n-1}$ et $q_{n,a_n+1} = q_n$. On définit la suite de réels $(q_{n,t})_{1 \leq t \leq a_n}$ par

$$q_{n,t} = \frac{1}{2} (\log Q_{n,t} - \log |Q_{n,t-1}\xi - P_{n,t-1}|) \quad (1 \leq t \leq a_n).$$

Les observations précédentes conduisent au résultat suivant.

Théorème 3.4.1. *Pour tout entier n avec $1 \leq n < s$ et tout réel $q \in [q_{n-1}, q_n]$, on a*

$$L_{\xi,2}(q) = \min \{L_{\mathbf{x}_{n,t}}(q); 0 \leq t \leq a_n\}.$$

Plus précisément, on a

$$L_{\xi,2}(q) = L_{\mathbf{x}_{n,t}}(q) \quad (q_{n,t} \leq q \leq q_{n,t+1}). \quad (3.4.3)$$

$$L_{\xi,2}(q) = L_{\mathbf{x}_{s-2}}(q) \quad \text{pour tout } q \geq q_{s-1} \quad \text{si } s < \infty.$$

Démonstration: Soient n, t des entiers avec $1 \leq n < s$ et $1 \leq t \leq a_n - 1$ et soit $q \geq 0$.

- Si $q_{n,t} \leq q$, alors on a

$$\log Q_{n,t} - q \leq \log |Q_{n,t-1}\xi - P_{n,t-1}| + q.$$

et comme $|Q_{n,t}\xi - P_{n,t}| < |Q_{n,t-1}\xi - P_{n,t-1}|$ en vertu de la proposition 2.1.10, il s'ensuit que

$$L_{\mathbf{x}_{n,t}}(q) \leq \log |Q_{n,t-1}\xi - P_{n,t-1}| + q \leq L_{\mathbf{x}_{n,k}}(q) \quad \text{si } 0 \leq k < t. \quad (3.4.4)$$

- Si $q \leq q_{n,t+1}$, on observe que

$$\log |Q_{n,t}\xi - P_{n,t}| + q \leq \log |Q_{n,t+1}| - q,$$

et comme $Q_{n,t} \leq Q_{n,t+1}$ en vertu de la proposition 2.1.10, on a

$$L_{\mathbf{x}_{n,t}}(q) \leq \log |Q_{n,t+1}| + q \leq L_{\mathbf{x}_{n,k}}(q) \quad \text{si } t < k. \quad (3.4.5)$$

En combinant (3.4.4) et (3.4.5), on conclut que

$$L_{\xi,2}(q) = L_{\mathbf{x}_{n,t}}(q) \quad (q_{n,t} \leq q \leq q_{n,t+1}).$$

Les cas $t = 0$ et $t = a_n$ sont obtenus par le même procédé en remarquant

$$Q_{n-2} = Q_{n,0} \leq Q_{n,1} \quad \text{et} \quad Q_n = Q_{n,a_n} \leq Q_{n+1,1}.$$

■

Pour tout entier n avec $1 \leq n < s$, le graphe de la fonction de $L_{\xi,2}$ entre q_{n-1} et q_n est une ligne polygonale formée de segments de droites de pente -1 et 1 . La pente de $L_{\xi,2}$ change de -1 à 1 aux points $p_{n,t}$ avec $1 \leq t \leq a_n$. Par conséquent la fonction $L_{\xi,2}$ admet des maxima locaux aux points $(q_{n,t})_{1 \leq t \leq a_n}$ entre q_{n-1} et q_n pour chaque $1 \leq n < s$ comme illustré sur la Figure 3.7 . Si $n = 1$, le point $q_{1,0} = q_{1,1} = q_0$ est le premier maximum local de la fonction $L_{\xi,2}$ sur l'intervalle $[q_0, q_1]$ comme illustré sur la Figure 3.6. Si $s < \infty$ et $n = s - 1$, alors $q_{s-1, a_{s-1}} = q_{s-1}$ est le dernier maximum local de de la fonction $L_{\xi,2}$ sur l'intervalle $[q_{s-2}, q_{s-1}]$ comme illustré sur la Figure 3.8. En général si $s < \infty$, on a $L_{\xi,2}(q) = L_{\mathbf{x}_{s-2}}(q) = \log |Q_{s-2}\xi - P_{s-2}| + q$ pour tout $q \geq q_{s-1}$ et alors $L_{\xi,2}$ n'admet pas de maximal local sur $[q_{s-1}, \infty)$ comme illustré sur la Figure 3.8.

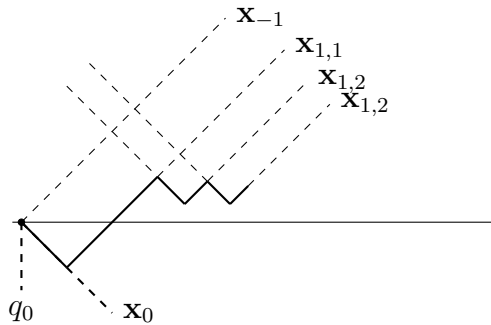


FIGURE 3.6 – Graphe de la fonction $L_{\xi,2}$ à droite de q_0 .

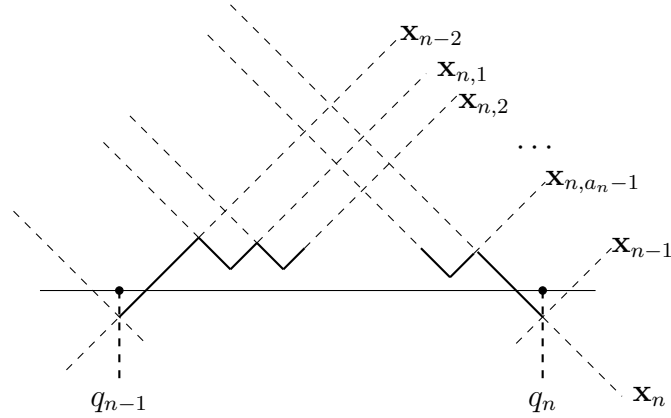


FIGURE 3.7 – Graphe de la fonction $L_{\xi,2}$ sur $[q_{n-1}, q_n]$ si $2 \leq n < s - 1$.

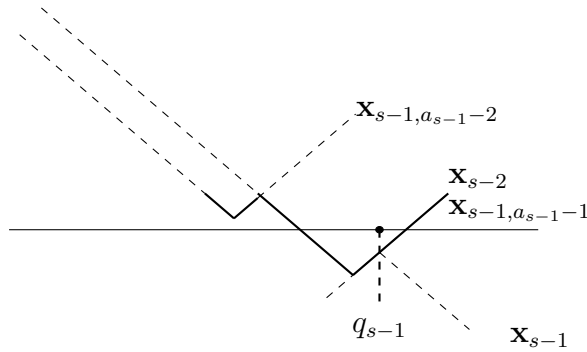


FIGURE 3.8 – Graphe de la fonction $L_{\xi,2}$ au voisinage de q_{s-1} si $2 \leq s < \infty$.

On conclut avec le résultat suivant qui montre que le développement en fraction continue d'un nombre $\xi \in \mathbb{R}$ peut se lire sur son *graphe conjoint* Γ_ξ si $\xi \in [0, 1/2]$ et qui constitue le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.4.2. *Soit $\xi \in [0, 1/2]$. Le graphe Γ_ξ est recouvert par les trajectoires des points \mathbf{x}_n avec $-1 \leq n < s$ et celles des points $\mathbf{x}_{n,t}$ avec $1 \leq n < s$ et $0 < t < a_n$. De plus, la suite $(a_n)_{1 \leq n < s}$ des quotients partiels de ξ peut se lire sur Γ_ξ . Plus précisément, pour tout entier n avec $1 \leq n \leq s$, a_n est égal au nombre de maxima locaux de la fonction L_2 entre q_{n-1} et q_n .*

La première assertion du théorème découle directement de la réunion des théorème 3.3.1 et 3.4.1 tandis la deuxième affirmation résulte du théorème 3.4.1.

Voici quelques exemples pour illustrer le théorème 3.4.2.

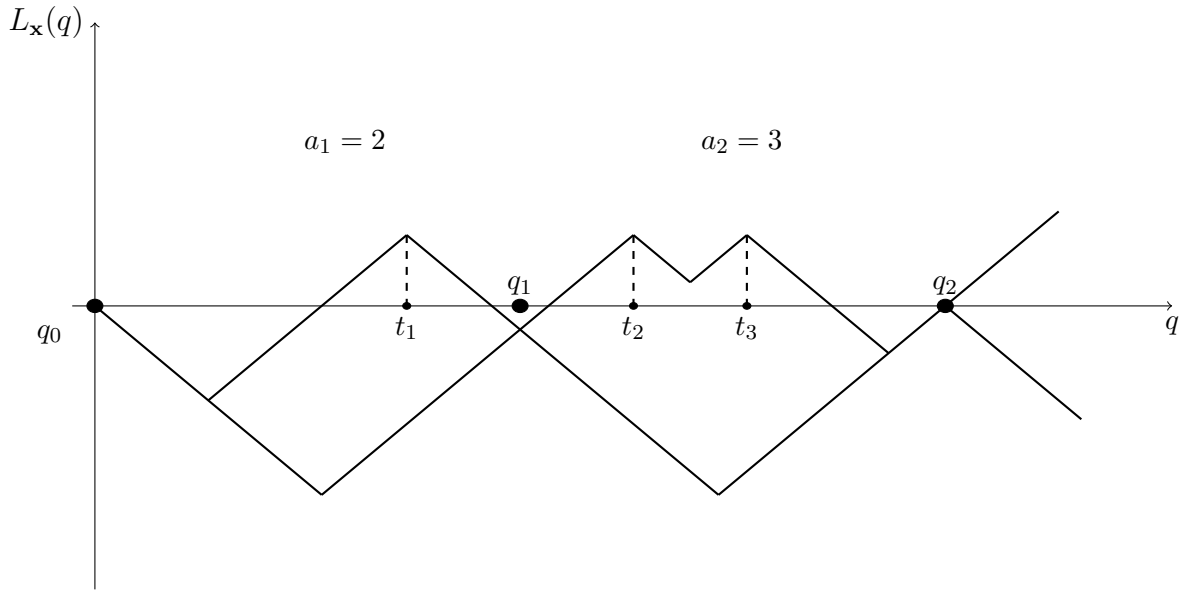


FIGURE 3.9 – Graphe conjoint $\Gamma_{3/7}$ ($3/7 = [0, 2, 3]$)

Exemple 3.4.3. La figure 3.9 illustre le graphe conjoint de $\mathbf{L}_{3/7}$. La courbe du bas représente le graphe de la fonction $L_{3/7,1}$ tandis que celle du haut représente le graphe de la fonction $L_{3/7,2}$. La fonction $L_{3/7,1}$ admet trois maxima locaux aux points q_0 , q_1 et q_2 . Entre q_0 et q_1 , la fonction $L_{3/7,2}$ admet deux maxima locaux aux points q_0 et t_1 , tandis qu'elle admet trois maxima locaux aux points t_2 , t_3 et q_2 sur l'intervalle $[q_1, q_2]$. Ainsi, on obtient $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$ et par suite, on a

$$[0, 2, 3] = 3/7.$$

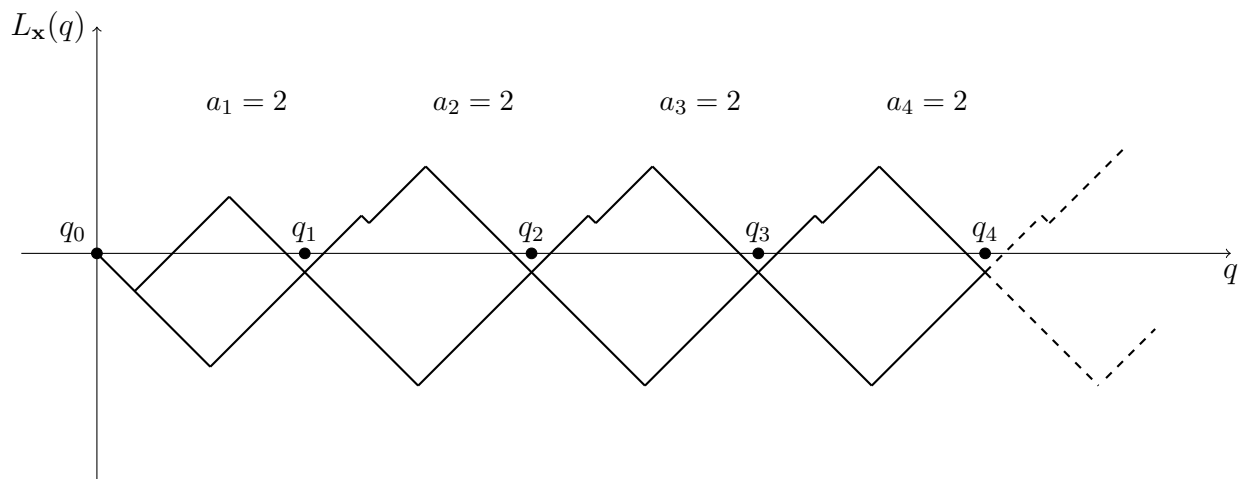


FIGURE 3.10 – Graphe conjoint $\Gamma_{\sqrt{2}-1}$ ($\sqrt{2}-1 = [0, 2, 2, \dots]$)

Exemple 3.4.4. La figure 3.10 représente le graphe conjoint de $\mathbf{L}_{\sqrt{2}-1}$. La fonction $L_{\sqrt{2}-1,1}$ admet une infinité de maxima locaux aux points $(q_n)_{n \geq 0}$. Entre deux maxima locaux consécutifs de la fonction $L_{\sqrt{2}-1,1}$, la fonction $L_{\sqrt{2}-1,2}$ admet toujours deux maxima locaux. Il s'ensuit que $a_n = 2$ pour tout entier $n \geq 1$ et donc

$$\sqrt{2}-1 = [0, 2, 2, \dots].$$

Chapitre 4

Sur une conjecture de Schmidt pour la géométrie paramétrique des nombres

Parmi les conjectures proposées par W. M. Schmidt en 1983, il y en a une qui porte en germe la géométrie paramétrique des nombres [29, Conjecture 2]. Cette conjecture a été démontrée en 2012 par N. G. Moshchevitin [16, Théorème 1]. Le but de ce chapitre est de démontrer un énoncé qui va dans le même sens et qui soit le meilleur possible. Ce chapitre a fait l'objet d'un article qui été publié dans le Journal de Combinatoire et de Théorie des Nombres de Moscou en 2016 (voir [9]).

4.1 Conjecture de Schmidt

Soit un entier $m \geq 2$. Soit un réel N avec $N \geq 1$ et soit $\xi = (1, \xi_1, \dots, \xi_m)$ un point de \mathbb{R}^{m+1} . Schmidt considère le réseau $\Lambda(\xi, N)$ engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_0 = (N^{-1}, N^{1/m}\xi_1, \dots, N^{1/m}\xi_m),$$

$$\mathbf{v}_1 = (0, -N^{1/m}, \dots, 0),$$

.....

$$\mathbf{v}_m = (0, 0, \dots, -N^{1/m}).$$

et définit

$$\mu_j(\xi, N) = \lambda_j(\mathcal{B}; \Lambda(\xi, N)) \quad (1 \leq j \leq m+1),$$

où $\mathcal{B} = \{(y_0, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m+1}; |y_i| \leq 1, i = 0, \dots, m\}$ est le cube unité de \mathbb{R}^{m+1} .

Le théorème de Minkowski donne

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \mu_1(\xi, N) \cdots \mu_{m+1}(\xi, N) \leq 1,$$

donc $\mu_1(\xi, N) \leq 1$. Si $N > 1$, cela assure l'existence d'entiers $x_0 \neq 0, x_1, \dots, x_m$ tels que

$$x_0 \mathbf{v}_0 + \cdots + x_m \mathbf{v}_m \in \mathcal{B}.$$

Compte tenu en 1983 de la connaissance très limitée sur les fonctions $\mu_k(\xi, N)$, W. M. Schmidt proposa le problème suivant (voir [29])

Conjecture 4.1.1. *Soit k un entier avec $2 \leq k \leq m$. Il existe un m -uplet $(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{k-1}(\xi, N) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{k+1}(\xi, N) = \infty.$$

La conjecture est intéressante seulement si on demande en plus que les coordonnées de $\xi = (1, \xi_1, \dots, \xi_m)$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , comme l'a observé Moshchevitin. Pour un tel point ξ , on a

$$\mu_{k-1}(\xi, N) = \mu_k(\xi, N)$$

pour des valeurs de N arbitrairement grandes. On a aussi

$$\mu_k(\xi, N) = \mu_{k+1}(\xi, N)$$

pour des valeurs de N arbitrairement grandes. Donc si un tel ξ satisfait la conjecture 4.1.1, on a

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mu_k(\xi, N) = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \mu_k(\xi, N) = \infty.$$

C'est pour cela que Schmidt choisit les indices $k-1$ et $k+1$.

4.2 Résultat de Moshchevitin

Ce problème a été résolu par N. G. Moshchevitin en 2012 (voir [16]) avec la contrainte additionnelle que $1, \xi_1, \dots, \xi_m$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{Z} sans laquelle il observa que le problème devient trivial. Par exemple, si on prend $\xi = (1, 0, 0)$ alors on a

$$\mathbf{v}_0 = (N^{-1}, 0, 0) \quad , \quad \mathbf{v}_1 = (0, -N^{1/2}, 0) \quad , \quad \mathbf{v}_2 = (0, 0, -N^{1/2}).$$

Par conséquent, on obtient $\mu_1(\xi, N) = N^{-1}$ et $\mu_2(\xi, N) = \mu_3(\xi, N) = N^{1/2}$. On en déduit

$$\mu_1(\xi, N) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \mu_3(\xi, N) \rightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad N \rightarrow \infty.$$

Dans ce contexte, le résultat de Moshchevitin s'énonce comme suit

Théorème 4.2.1 (N. G. Moshchevitin, 2012). *Soit un entier k avec $2 \leq k \leq m$. Alors il existe des réels $\xi_1, \dots, \xi_m \in [0, 1)$ tels que*

- $1, \xi_1, \dots, \xi_m$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{Z} .
- $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{k-1}(\xi, N) = 0$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{k+1}(\xi, N) = \infty$.

Dans son papier Moshchevitin commence par observer que pour tout entier $j = 1, \dots, m + 1$, on a

$$\mu_j(\xi, N) = \mu_j(\mathcal{K}_\xi(N); \mathbb{Z}^{m+1}) \quad (N \geq 1), \quad (4.2.1)$$

où $\mathcal{K}_\xi(N)$ est le corps convexe donné par

$$\mathcal{K}_\xi(N) = \{(x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}; |x_0| \leq N, |x_0 \xi_j - x_j| \leq N^{-1/m}, j = 1, \dots, m\}.$$

L'égalité (4.2.1) découle du fait que pour tout $\mathbf{x} = x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_m \mathbf{v}_m \in \Lambda(\xi, N)$, avec $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathbf{x} \in \mathcal{B} \iff |x_0 N^{-1}| \leq 1 \quad \text{et} \quad |x_0 N^{1/m} \xi_j - N^{1/m} x_j| \leq 1 \quad j = 1, \dots, m$$

$$\begin{aligned} &\iff |x_0| \leq N \quad \text{et} \quad |x_0 \xi_j - x_j| \leq N^{-1/m} \quad j = 1, \dots, m \\ &\iff (x_0, \dots, x_m) \in \mathcal{K}_\xi(N). \end{aligned}$$

Par conséquent, la dernière assertion du Théorème 4.2.1 se traduit par

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{k-1}(\mathcal{K}_\xi(N); \mathbb{Z}^{m+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{k+1}(\mathcal{K}_\xi(N); \mathbb{Z}^{m+1}) = \infty. \quad (4.2.2)$$

4.3 Reformulation de la conjecture de Schmidt

Rappelons que pour tout entier m avec $m \geq 2$ et tout réel N avec $N \geq 1$, le corollaire 2.2.14 du chapitre 1 nous donne dans ce cas

$$\frac{1}{m+1} N^{1/m} \leq \lambda_{m-j+2}(\mathcal{C}_\xi(N^{m/(m-1)}), \mathbb{Z}^{m+1}) \lambda_j(\mathcal{K}_\xi(N), \mathbb{Z}^{m+1}) \leq \sqrt{m+1} ((m+1)!)^2 N^{1/m},$$

pour chaque entier j avec $1 \leq j \leq m+1$. Ces inégalités jointes aux conditions de (4.2.2) entraînent que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1/m} \lambda_{m-k+3}(\mathcal{C}_\xi(N^{1+1/m}); \mathbb{Z}^{m+1}) &= \infty \\ \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1/m} \lambda_{m-k+1}(\mathcal{C}_\xi(N^{1+1/m}); \mathbb{Z}^{m+1}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Si on pose $N = e^{qm/(m+1)}$, alors on a

$$\mathcal{C}'_\xi(e^{qm/(m+1)}) = \mathcal{C}_\xi(e^q) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}; \|\mathbf{x}\| \leq 1, |\mathbf{x} \cdot \xi| \leq e^{-q}\}.$$

Donc les conditions de (4.3.1) se traduisent par

$$\lim_{q \rightarrow \infty} e^{-q/(m+1)} \lambda_{m-k+3}(\mathcal{C}_\xi(e^q); \mathbb{Z}^{m+1}) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow \infty} e^{-q/(m+1)} \lambda_{m-k+1}(\mathcal{C}_\xi(e^q); \mathbb{Z}^{m+1}) = 0. \quad (4.3.2)$$

En prenant le logarithme dans (4.3.2), on obtient

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left(L_{\xi, m+3-k}(q) - \frac{q}{m+1} \right) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \left(L_{\xi, m+1-k}(q) - \frac{q}{m+1} \right) = -\infty.$$

Par conséquent, le théorème de Moschevitin s'énonce ainsi en termes des fonctions

$$L_{\xi, j}(q).$$

Théorème 4.3.1 (N. G. Moshchevitin, 2012). *Pour chaque entier k avec $2 \leq k \leq m$, il existe un point $\xi \in \mathbb{R}^{m+1}$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} tel que*

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left(L_{\xi, k-1}(q) - \frac{q}{m+1} \right) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \left(L_{\xi, k+1}(q) - \frac{q}{m+1} \right) = \infty$$

Le prochain théorème améliore ces estimations.

Théorème 4.3.2. *Pour chaque entier k avec $2 \leq k \leq m$, il existe une infinité non dénombrable de vecteurs $\xi \in \mathbb{R}^{m+1}$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} telle que*

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\xi, k-1}(q)}{q} = 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\xi, k+1}(q)}{q} = \frac{1}{m-k+2}.$$

Ce résultat est le meilleur possible au sens suivant

Théorème 4.3.3. *Soit k un entier avec $2 \leq k \leq m$ et soit ξ un point de \mathbb{R}^{m+1} à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} tel que*

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\xi, k-1}(q)}{q} = 0.$$

Alors on a

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\xi, k+1}(q)}{q} \leq \frac{1}{m-k+2}.$$

Pour la preuve du théorème 4.3.3, on introduit en suivant le modèle de Schmidt et Summerer dans [31, §1], les quantités

$$\underline{\varphi}_{\mathbf{u}, j} = \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\mathbf{u}, j}(q)}{q} \quad \text{et} \quad \overline{\varphi}_{\mathbf{u}, j} = \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\mathbf{u}, j}(q)}{q} \quad (1 \leq j \leq m+1).$$

pour un point $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m+1}$ fixé. Comme les fonctions $L_{\mathbf{u}, j}(q)$ avec $1 \leq j \leq m+1$ forment une suite croissante, il s'ensuit que

$$\underline{\varphi}_{\mathbf{u}, 1} \leq \cdots \leq \underline{\varphi}_{\mathbf{u}, m+1}, \quad \overline{\varphi}_{\mathbf{u}, 1} \leq \cdots \leq \overline{\varphi}_{\mathbf{u}, m+1}. \quad (4.3.3)$$

D'autre part, on a

$$0 \leq \underline{\varphi}_{\mathbf{u}, j} \leq \overline{\varphi}_{\mathbf{u}, j} \leq 1 \quad (1 \leq j \leq m+1), \quad (4.3.4)$$

car les fonctions $L_{\mathbf{u},j}(q)$ sont continues et linéaires par morceaux de pente 0 et 1. De plus, si on suppose que les coordonnées de \mathbf{u} sont linéairement indépendants sur \mathbb{Z} , alors on a (voir [31, §5])

$$\underline{\varphi}_{\mathbf{u},j+1} \leq \overline{\varphi}_{\mathbf{u},j} \quad (1 \leq j \leq m). \quad (4.3.5)$$

Cette observation découle principalement du fait que lorsque les coordonnées de \mathbf{u} sont linéairement indépendants sur \mathbb{Z} alors il existe des valeurs de $q \geq 0$ assez large telles que

$$L_{\mathbf{u},j}(q) = L_{\mathbf{u},j+1}(q),$$

pour tout $j = 1, \dots, m$ (voir [31, §2]) et aussi du fait que pour tout $q \geq 0$, les fonctions $L_{\mathbf{u},j}(q)$ forment une suite croissante.

Démonstration: (Théorème 4.3.3)

Fixons un point $\xi \in \mathbb{R}^{m+1}$ à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . Soit $k \in \mathbb{Z}$ avec $2 \leq k \leq m$ tel que $\overline{\varphi}_{\xi,k-1} = \underline{\varphi}_{\xi,k-1} = 0$.

Les inégalités de (4.3.3) et (4.3.4) entraînent que

$$\underline{\varphi}_{\xi,j} = \overline{\varphi}_{\xi,j} = 0 \quad (1 \leq j \leq k-1).$$

Pour tout $j = 1, \dots, m+1$, on définit la fonction $M_{\xi,j} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$M_{\xi,j}(q) = L_{\xi,1}(q) + \dots + L_{\xi,j}(q) \quad (q \geq 0).$$

Le lemme 2.3.1 implique

$$M_{\xi,m+1}(q) = q + O(1) \quad (q \geq 0).$$

Par conséquent, on a $\lim_{q \rightarrow \infty} M_{\xi,m+1}(q)/q = 1$. Comme les coordonnées de ξ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , alors l'inégalité (4.3.5) appliquée à $j = k$ entraîne que $\underline{\varphi}_{\xi,k+1} \leq \overline{\varphi}_{\xi,k}$. Ainsi pour conclure, il suffit de majorer $\overline{\varphi}_{\xi,k}$.

Pour cela, on note simplement que

$$(m - k + 2)\bar{\varphi}_{\xi,k} \leq \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\xi,k}(q) + \cdots + L_{\xi,m+1}(q)}{q} = \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{M_{\xi,m+1}(q) - M_{\xi,k-1}(q)}{q} = 1$$

Donc $\bar{\varphi}_{\xi,k} \leq \frac{1}{m-k+2}$. La conclusion suit. ■

4.4 Démonstration du Théorème 4.3.2

Le théorème 2.3.4 permet de ramener la preuve du théorème 4.3.2 à la construction de $(m + 1)$ -systèmes généralisés avec les propriétés requises. Elle se fonde sur la construction élémentaire suivante.

Proposition 4.4.1. *Soient $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$ avec $a < b < c$. Il existe un et un seul choix de nombres réels $r, s, t, u \in (0, \infty)$ avec $r < s < t < u$ et un seul triplet de fonctions continues et linéaires par morceaux (A, B, C) sur $[r, u]$ dont la réunion des graphes est comme sur la Figure 4.1, c'est-à-dire que*

i) pour tout $q \in [r, u]$, on a

$$A(q) \leq B(q) \leq C(q) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha}A(q) + \frac{1}{\beta}B(q) + \frac{1}{\gamma}C(q) = q; \quad (4.4.1)$$

ii) la fonction A est constante égale à a sur $[r, t]$, de pente α sur $[t, u]$ et satisfait

$$A(u) = b;$$

iii) la fonction B a pour pente β sur $[r, s]$, est constante égale à b sur $[s, u]$ et

$$\text{satisfait } B(r) = a;$$

iv) la fonction C est constante égale à b sur $[r, s]$, de pente γ sur $[s, t]$ et est constante égale à c sur $[t, u]$.

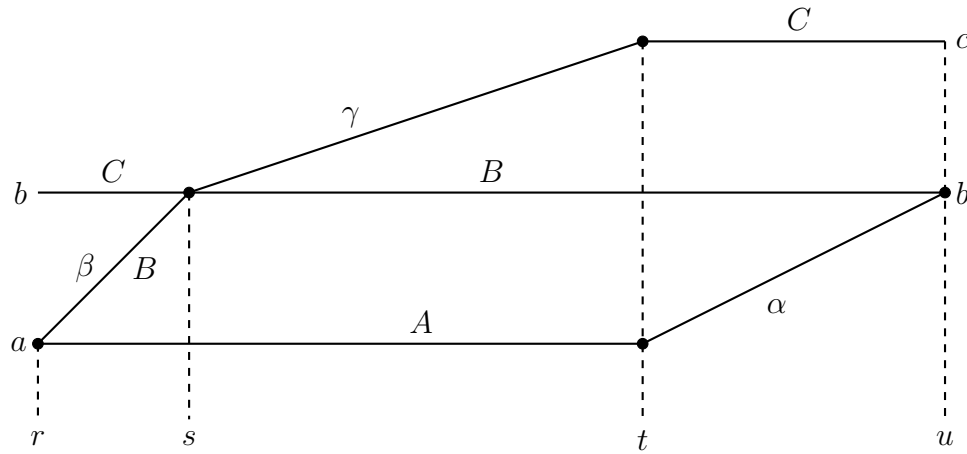


FIGURE 4.1 – Graphe conjoint du triplet (A, B, C) sur l'intervalle $[r, u]$

Démonstration: Si de tels nombres réels r, s, t, u et de telles fonctions A, B, C existent, alors en remplaçant respectivement q par r, s, t, u dans la deuxième condition de (4.4.1), on obtient

$$r = \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\beta} + \frac{b}{\gamma}, \quad s = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{b}{\gamma}, \quad t = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}, \quad u = \frac{b}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}, \quad (4.4.2)$$

ce qui les détermine entièrement.

Maintenant, soient r, s, t, u donnés par (4.4.2). Comme $r < s < t < u$, il existe un et un seul triplet de fonctions continues (A, B, C) sur $[r, u]$ de pentes constantes sur $[r, s]$, $[s, t]$ et $[t, u]$ avec

$$A(r) = A(s) = A(t) = a \quad \text{et} \quad A(u) = b,$$

$$B(r) = a \quad \text{et} \quad B(s) = B(t) = B(u) = b,$$

$$C(r) = C(s) = b \quad \text{et} \quad C(t) = C(u) = c.$$

Alors la fonction $F = \frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B + \frac{1}{\gamma}C$ est continue de pente constante sur chacun des intervalles $[r, s]$, $[s, t]$, $[t, u]$. Par construction, on a $F(q) = q$ si $q = r, s, t, u$. Donc

$$F(q) = q \quad \text{pour tout} \quad q \in [r, u].$$

Comme A et C sont constantes sur $[r, s]$, cela implique que B a pour pente β sur $[r, s]$. De même, on trouve que la pente de C est égale à γ sur $[s, t]$ et que celle de A est égale à α sur $[t, u]$. ■

Proposition 4.4.2. *Avec les mêmes notations, supposons que $b/a < c/b$. Alors on a*

$$\max_{q \in [r, u]} \frac{A(q)}{q} = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \min_{q \in [r, u]} \frac{C(q)}{q} = \frac{b}{s}. \quad (4.4.3)$$

Démonstration: Grâce à (4.4.2), on note tout d'abord que

$$\frac{a}{t} < \frac{b}{u} < \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \frac{b}{s} < \frac{b}{r} < \frac{c}{u} < \frac{c}{t}.$$

Comme $a/r < \alpha$ et que $b/s < \gamma$, il s'ensuit que le rapport $A(q)/q$ décroît sur $[r, t]$ et puis croît sur $[t, u]$ et aussi que $C(q)/q$ décroît sur $[r, s]$, croît sur $[s, t]$ et puis décroît sur $[t, u]$. La conclusion suit. ■

On désigne par Δ l'ensemble des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de réels strictement positifs avec

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} < a_{n+2}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \quad (n \in \mathbb{Z}), \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Le résultat suivant combine les propositions précédentes.

Proposition 4.4.3. *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Delta$ et soient $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$. On définit*

$$r_n = \frac{a_n}{\alpha} + \frac{a_n}{\beta} + \frac{a_{n+1}}{\gamma} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (4.4.5)$$

Alors il existe un et un seul triplet de fonctions continues et linéaires par morceaux (A, B, C) sur $(0, \infty)$ dont la restriction à chaque intervalle $[r_n, r_{n+1}]$ remplit les conditions de la proposition 4.4.1 avec $a = a_n$, $b = a_{n+1}$ et $c = a_{n+2}$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$.

De plus, on a

$$\lim_{q \rightarrow \infty} A(q) = \infty, \quad \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{A(q)}{q} = 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{C(q)}{q} = \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma} \quad (4.4.6)$$

Démonstration: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Delta$. On définit

$$s_n = \frac{a_n}{\alpha} + \frac{a_{n+1}}{\beta} + \frac{a_{n+1}}{\gamma} \quad \text{et} \quad t_n = \frac{a_n}{\alpha} + \frac{a_{n+1}}{\beta} + \frac{a_{n+2}}{\gamma} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (4.4.7)$$

Avec le choix de $a = a_n$, $b = a_{n+1}$ et $c = a_{n+2}$, la proposition 4.4.1 et les égalités de (4.4.2) fournissent un triplet de fonctions continues et linéaires par morceaux $(A^{(n)}, B^{(n)}, C^{(n)})$ sur $[r, u] = [r_n, r_{n+1}]$. Comme les triplets $(A^{(n-1)}, B^{(n-1)}, C^{(n-1)})$ et $(A^{(n)}, B^{(n)}, C^{(n)})$ coïncident au point r_n et sont égaux à (a_n, a_n, a_{n+1}) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il découle que la suite de triplets de fonctions $(A^{(n)}, B^{(n)}, C^{(n)})$ avec $n \in \mathbb{Z}$ détermine un et un seul triplet de fonctions continues et linéaires par morceaux (A, B, C) sur $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [r_n, r_{n+1}] = (0, \infty)$. La proposition 4.4.2 donne

$$\max_{q \in [r_n, r_{n+1}]} \frac{A(q)}{q} = \frac{a_n}{r_n} \quad \text{et} \quad \min_{q \in [r_n, r_{n+1}]} \frac{C(q)}{q} = \frac{a_{n+1}}{s_n} \quad (4.4.8)$$

Par conséquent, on a

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{A(q)}{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{r_n} = 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{C(q)}{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{s_n} = \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma}.$$

■

Fixons un entier $m \geq 2$. La proposition précédente admet la conséquence suivante.

Proposition 4.4.4. *Soit k un entier avec $2 \leq k \leq m$. Avec les notations de la proposition 4.4.3, supposons $\alpha = 1/(k-1)$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1/(m+1-k)$. Pour tout $q > 0$, posons*

$$P_1(q) = \cdots = P_{k-1}(q) = A(q), \quad P_k(q) = B(q) \quad \text{et} \quad P_{k+1}(q) = \cdots = P_{m+1}(q)$$

Alors la fonction $\mathbf{P} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ définie par

$$\mathbf{P}(q) := (P_1(q), \dots, P_{m+1}(q)) \quad (q > 0)$$

est un $(m + 1)$ -système généralisé sur $(0, \infty)$. De plus, on a

$$\lim_{q \rightarrow \infty} P_1(q) = \infty, \quad \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{P_{k-1}(q)}{q} = 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{P_{k+1}(q)}{q} = \frac{1}{m - k + 2}.$$

Démonstration: Les composantes P_1, \dots, P_{m+1} de \mathbf{P} sont continues et linéaires par morceaux sur $(0, \infty)$. Elles satisfont

$$0 \leq P_1(q) \leq \dots \leq P_{m+1}(q) \quad \text{et} \quad P_1(q) + \dots + P_{m+1}(q) = q \quad (q > 0).$$

La fonction \mathbf{P} est différentiable sur l'intervalle $(0, \infty)$ sauf aux points r_n, s_n, t_n donnés par (4.4.5) et (4.4.7). Sur chaque intervalle $[r_n, s_n], [s_n, t_n], [t_n, r_{n+1}]$, les composantes P_1, \dots, P_{m+1} sont constantes sauf un certain nombre h d'entre elles qui coïncident sur l'intervalle avec pour pente $1/h$. Au point r_n , la pente de P_1, \dots, P_{k-1} passe de $1/(k-1)$ à 0 tandis que celle de P_k change de 0 à 1 et toutes ses fonctions coïncident, c'est-à-dire

$$P_1(r_n) = \dots = P_k(r_n) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Au point s_n , la fonction P_k passe de la pente 1 à la pente 0 tandis que celle de P_{k+1}, \dots, P_{m+1} change de 0 à $1/(m-k+1)$ et toutes ses fonctions coïncident, c'est-à-dire

$$P_k(s_n) = P_{k+1}(s_n) = \dots = P_{m+1}(s_n) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Finalement au point t_n , la pente de P_{k+1}, \dots, P_{m+1} change de $1/(m+k-1)$ à 0 alors que celle de P_1, \dots, P_{k-1} passe de 0 à $1/(k-1)$ et on a

$$P_1(t_n) = \dots = P_{k-1}(t_n) < P_k(t_n) < P_{k+1}(t_n) = \dots = P_{m+1}(t_n) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Cela montre que la fonction \mathbf{P} ainsi définie est un $(m + 1)$ -système généralisé sur $(0, \infty)$. La deuxième affirmation de la proposition découle de (4.4.6). ■

Démonstration du Théorème 4.3.2

Soit $\mathbf{P} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ le $(m+1)$ -système généralisé donné par la proposition 4.4.4 pour le choix d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dans Δ (c'est-à-dire une suite qui satisfait (4.4.4)). D'après le théorème 2.3.4, il existe un point non nul ξ de \mathbb{R}^{m+1} tel que la différence $\mathbf{L}_\xi - \mathbf{P}$ soit bornée. Donc, on a

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\xi,j}(q)}{q} = \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{P_j(q)}{q} \quad \text{et} \quad \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\xi,j}(q)}{q} = \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{P_j(q)}{q} \quad (1 \leq j \leq m+1).$$

Par conséquent, on a

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\xi,k-1}(q)}{q} = 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\xi,k+1}(q)}{q} = \frac{1}{m-k+2}. \quad (4.4.9)$$

Comme $\lim_{q \rightarrow \infty} P_1(q) = \infty$, cela implique que la fonction $L_{\xi,1}$ est non bornée, donc les coordonnées de ξ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . Par suite ξ vérifie toutes les conditions du théorème 4.3.2.

Pour conclure, il reste à montrer qu'on peut construire une infinité non dénombrable de tels points ξ . Pour chaque $\theta \in (0, \infty)$, on définit

$$a_n^{(\theta)} = \theta 2^{n^3} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

de sorte que les conditions de (4.4.4) de la page 42 soient satisfaites. Alors la suite $(a_n^{(\theta)})_{n \in \mathbb{Z}}$ appartient à Δ , et les propositions 4.4.3 et 4.4.4 lui associent comme ci-dessus un $(m+1)$ -système généralisé $\mathbf{P}^{(\theta)}$ sur $(0, \infty)$ et un point $\xi^{(\theta)}$ de \mathbb{R}^{m+1} . Avec les notations évidentes, on a

$$\begin{aligned} r_n^{(\theta)} &= k a_n^{(\theta)} + (m-k+1) a_{n+1}^{(\theta)} < (m+1) a_{n+1}^{(\theta)} \\ t_n^{(\theta)} &= (k-1) a_n^{(\theta)} + a_{n+1}^{(\theta)} + (m-k+1) a_{n+2}^{(\theta)} > a_{n+2}^{(\theta)} \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et le rapport $t_n^{(\theta)}/r_n^{(\theta)}$ tend vers l'infini avec n . Donc si $\theta, \theta' \in (0, \infty)$ avec $\theta < \theta'$, on a

$$r_n^{(\theta)} < r_n^{(\theta')} = (\theta'/\theta) r_n^{(\theta)} < t_n^{(\theta)},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ suffisamment grand, et alors

$$\|\mathbf{P}^{(\theta')}(r_n^{(\theta')}) - \mathbf{P}^{(\theta)}(r_n^{(\theta')})\| \geq |P_1^{(\theta')}(r_n^{(\theta')}) - P_1^{(\theta)}(r_n^{(\theta')})| = |a_n^{(\theta')} - a_n^{(\theta)}| = (\theta' - \theta)2^{n^3}.$$

Cela signifie que la différence $\mathbf{P}^{(\theta')} - \mathbf{P}^{(\theta)}$ est non bornée. Donc les points $\xi^{(\theta')}$ et $\xi^{(\theta)}$ sont distincts, et par conséquent l'application $\theta \mapsto \xi^{(\theta)}$ est injective sur $(0, \infty)$. Son image est donc de la cardinalité de \mathbb{R} .

Deuxième partie

Sur les nombres extrémaux de type Markoff

Chapitre 5

Nombres extrémaux de type Markoff

5.1 Nombres extrémaux

Dans cette section, nous commençons par définir un nombre extrémal, ensuite nous en donnons quelques propriétés.

Définition 5.1.1. Soit $\xi \in \mathbb{R}$ un nombre irrationnel non quadratique. On dira que ξ est un nombre extrémal s'il existe une constante $c = c(\xi) > 0$ telle que les inégalités

$$|x_0| \leq X, \quad |x_0\xi - x_1| \leq cX^{-1/\gamma} \quad \text{et} \quad |x_0\xi^2 - x_2| \leq cX^{-1/\gamma}$$

admettent une solution non nulle $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ pour tout $X \geq 1$.

Soit ξ un nombre réel fixé. Pour chaque matrice symétrique $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ dans $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, on définit

$$\|\mathbf{x}\| = \max_{0 \leq j \leq 2} |x_j|, \quad L(\mathbf{x}) = L_\xi(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq j \leq 2} |x_0\xi^j - x_j|.$$

Grâce à la propriété de multilinéarité du déterminant, on a

$$|\det(\mathbf{x})| = \left| \begin{vmatrix} x_0 & x_1 - x_0\xi \\ x_1 & x_2 - x_1\xi \end{vmatrix} \right| \ll \|\mathbf{x}\|L(\mathbf{x}).$$

On désigne par \mathcal{P} l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients entiers premiers entre eux. Soient \mathbf{y}_1 et \mathbf{y}_2 deux éléments de \mathcal{P} , on définit

$$\mathbf{y}_1 * \mathbf{y}_2 = c^{-1}\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2$$

où c le plus grand diviseur commun des coefficients du produit matriciel $\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2$. On montre facilement que \mathcal{P} muni du produit $*$ est un groupe. De plus, le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ est un sous groupe de \mathcal{P} et on a

$$\mathbf{y}_1 * \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 \quad \text{pour tous } \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Soient $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ deux suites à valeurs réelles positives. La notation $a_k \ll b_k$ signifie qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $a_k \leq cb_k$ pour chaque entier $k \geq 1$, dire que $a_k \asymp b_k$ signifie que $a_k \ll b_k$ et $b_k \ll a_k$.

Le prochain théorème dû à D. Roy (voir proposition 2.1 de [25]) fournit une caractérisation des *nombres extrémaux*.

Théorème 5.1.2. *Soit ξ un nombre réel extrémal. Alors il existe une suite non bornée de matrices symétriques $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ dans \mathcal{P} telle que*

$$\|\mathbf{x}_{k+1}\| \asymp \|\mathbf{x}_k\|^\gamma, \quad L_\xi(\mathbf{x}_k) \asymp \|\mathbf{x}_k\|^{-1} \quad \text{et} \quad |\det(\mathbf{x}_k)| \asymp 1. \quad (5.1.1)$$

De plus, pour une telle suite $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$, il existe une matrice $M \in \mathcal{P}$ avec $M \neq \pm M^T$ telle que pour tout $k \geq 1$ suffisamment grand, on a

$$\mathbf{x}_{k+2} = \pm \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} * M * \mathbf{x}_k & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \mathbf{x}_{k+1} * M^T * \mathbf{x}_k & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Réciproquement, si $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ est une suite non bornée de matrices symétriques de \mathcal{P} qui satisfait (5.1.2) pour une certaine matrice non symétrique $M \in \mathcal{P}$ et si on a

$$\|\mathbf{x}_{k+2}\| \gg \|\mathbf{x}_{k+1}\| \|\mathbf{x}_k\| \quad \text{et} \quad |\det(\mathbf{x}_k)| \ll 1. \quad (5.1.3)$$

Alors, il existe un nombre extrémal ξ tel que la suite $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ satisfait les estimations de (5.1.1).

Cette suite $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ est essentiellement déterminée de façon univoque (section 4 de [22]). Plus précisément, toute autre suite satisfaisant les propriétés du théorème 5.1.2 est obtenue par un décalage d'indice de la suite $(\pm \mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$.

La matrice M est alors dite *associée* à ξ . Pour une matrice M donnée, on désigne par $\mathcal{E}(M)$ l'ensemble des nombres réels extrémaux ξ qui admettent M pour matrice *associée*.

Dans la prochaine section, on construit une classe particulière de nombre extrémaux suivant le modèle de [20, 22]. Nous établirons quelques propriétés que satisfont leurs suites associées au sens du théorème 5.1.2 et nous serons utiles par la suite.

5.2 Construction de nombres extrémaux de type Markoff

Définition 5.2.1. Soit $\xi \in \mathbb{R}$ un nombre extrémal. On dira que ξ est de type Markoff si sa suite $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ associée au sens du théorème 5.1.2 satisfait

$$\det(\mathbf{x}_k) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1} M_{k+1} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k M_k \mathbf{x}_{k+1} \quad (k \geq 1) \quad (5.2.1)$$

où

$$M_k = \begin{pmatrix} 3 & (-1)^k \\ (-1)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier, un nombre extrémal de *type Markoff* appartient à $\mathcal{E}(M)$ où

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour construire un tel nombre, on choisit par exemple deux matrices symétriques

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{1,0} & x_{1,1} \\ x_{1,1} & x_{1,2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{2,0} & x_{2,1} \\ x_{2,1} & x_{1,2} \end{pmatrix} \quad \text{de } \mathcal{P} \text{ telles que}$$

$$(i) \quad 0 \leq x_{1,2} \leq x_{1,1} \leq x_{1,0} \leq 3x_{1,1} \quad \text{et} \quad 0 \leq x_{2,2} \leq x_{2,1} \leq x_{2,0} \leq 3x_{2,1}$$

$$(ii) \quad \det(\mathbf{x}_1) = \det(\mathbf{x}_2) = 1,$$

$$(iii) \quad \mathbf{x}_2 M \mathbf{x}_1 \text{ soit symétrique.}$$

Les conditions (ii) et (iii) sont remplies pour toute suite $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ qui satisfait (5.2.1) mais pas nécessairement la condition (i).

Ensuite, on construit récursivement la matrice \mathbf{x}_k (à priori non symétrique) avec $k \geq 3$ en posant

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} M_{k-1} \mathbf{x}_{k-2} \quad (k \geq 3). \quad (5.2.2)$$

En effet, on peut montrer par récurrence sur k , que la matrice la matrice \mathbf{x}_k est symétrique pour tout $k \geq 1$ et on a aussi

$$\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1} M_{k+1} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k M_k \mathbf{x}_{k+1} \quad \text{et} \quad \det(\mathbf{x}_k) = 1 \quad (k \geq 1). \quad (5.2.3)$$

Donc, la suite $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ satisfait les conditions de la définition 5.2.1. Nous allons montrer qu'elle est associée à un nombre extrémal de type Markoff.

L'exemple ci-dessous donne un choix possible de \mathbf{x}_1 et de \mathbf{x}_2 .

Exemple 5.2.2. Si on prend $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$. Alors on a

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 433 & 179 \\ 179 & 74 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 37666 & 15571 \\ 15571 & 6437 \end{pmatrix}, \dots$$

Pour la simplicité, on pose

$$X_k := \|\mathbf{x}_k\| = \max\{|x_{k,0}|, |x_{k,1}|, |x_{k,2}|\}.$$

Pour la preuve du lemme ci-dessous, on utilise les formules suivantes.

Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ sont trois matrices symétriques

telles que $\mathbf{z} = \mathbf{x} M \mathbf{y}$, alors

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3x_0y_0 + x_0y_1 - x_1y_0 & 3x_0y_1 + x_0y_2 - x_1y_1 \\ 3x_1y_0 + x_1y_1 - x_2y_0 & 3x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \quad (5.2.4)$$

Donc, pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a

$$z_0 - az_1 = 3(y_0 - ay_1)x_0 + (y_1 - ay_2)x_0 + (ay_1 - y_0)x_1 \quad (5.2.5)$$

$$z_1 - az_2 = 3(y_0 - ay_1)x_1 + (y_1 - ay_2)x_1 + (ay_1 - y_0)x_2 \quad (5.2.6)$$

Lemme 5.2.3. *Pour tout entier k avec $k \geq 1$, on a*

- a) $0 \leq x_{k,2} \leq x_{k,1} \leq x_{k,0} \leq 3x_{k,1}$ et $X_k = \mathbf{x}_{k,0}$,
- b) $X_{k+2} \geq (7/3)X_{k+1}X_k$,
- c) $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = +\infty$.

Démonstration: Pour montrer les assertions de a), on procède par récurrence sur k . Les cas $k = 1$ et $k = 2$ découlent directement de la condition (i) dans la construction de la suite $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$. On suppose maintenant que pour un certain entier $k \geq 2$, on ait

$$0 \leq x_{h,2} \leq x_{h,1} \leq x_{h,0} \leq 3x_{h,1} \quad \text{et} \quad X_h = \mathbf{x}_{h,0} \quad \text{pour } h = 1, \dots, k. \quad (5.2.7)$$

La relation $x_{h,0}x_{h,2} - x_{h,1}^2 = 1$ jointe aux inégalités ci-dessus entraînent que

$$x_{h,2} \leq x_{h,1} \leq 3x_{h,2} \quad (1 \leq h \leq k). \quad (5.2.8)$$

• Si k est impair, on utilise $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k-1}M\mathbf{x}_k$ et on applique les relations (5.2.5) et (5.2.6) avec $a = 1$ (respectivement $a = 3$), $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{k-1}$ et $\mathbf{y} = \mathbf{x}_k$. Alors $\mathbf{z} = \mathbf{x}_{k+1}$ et les hypothèses de récurrence (5.2.7) jointes à (5.2.8) entraînent que

$$\begin{aligned} x_{k+1,0} - x_{k+1,1} &= 3(x_{k,0} - x_{k,1})x_{k-1,0} + (x_{k,1} - x_{k,2})x_{k-1,0} + (x_{k,1} - x_{k,0})x_{k-1,1} \geq 0 \\ x_{k+1,1} - x_{k+1,2} &= 3(x_{k,0} - x_{k,1})x_{k-1,1} + (x_{k,1} - x_{k,2})x_{k-1,1} + (x_{k,1} - x_{k,0})x_{k-1,2} \geq 0 \\ x_{k+1,0} - 3x_{k+1,1} &= 3(x_{k,0} - 3x_{k,1})x_{k-1,0} + (x_{k,1} - 3x_{k,2})x_{k-1,0} + (3x_{k,1} - x_{k,0})x_{k-1,1} \leq 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$0 \leq x_{k+1,2} \leq x_{k+1,1} \leq x_{k+1,0} \leq 3x_{k+1,1}$$

et par suite, on a $X_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1,0}$.

• Si k est pair, on obtient les mêmes conclusions en utilisant $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_kM\mathbf{x}_{k-1}$. Cela démontre la partie a).

Comme $\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_kM\mathbf{x}_{k+1}$ si k est pair et $\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1}M\mathbf{x}_k$ si k est impair, on déduit de l'égalité (5.2.4) que

$$x_{k+2,0} = \begin{cases} (3x_{k,0} - x_{k,1})x_{k+1,0} + x_{k+1,1}x_{k,0} & \text{si } k \text{ pair,} \\ (3x_{k+1,0} - x_{k+1,1})x_{k,0} + x_{k+1,0}x_{k,1} & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases}$$

A l'aide des inégalités de a), on en déduit que

$$x_{k+2,0} \geq 2x_{k+1,0}x_{k,0} + \frac{1}{3}x_{k+1,0}x_{k,0} = \frac{7}{3}x_{k+1,0}x_{k,0} \quad (k \geq 1).$$

La troisième affirmation du lemme est une conséquence de b). ■

On déduit de la partie b) du lemme 5.2.3 que

$$X_{k+2} > X_{k+1} \quad (k \geq 1).$$

Dans toute la suite, on va supposer que $X_2 > X_1$, alors la suite $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs.

En particulier, la suite $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ est non bornée, satisfait les conditions (5.1.2) et (5.1.3) du théorème 5.1.2, et on a

$$X_k = \mathbf{x}_{k,0} \quad (k \geq 1).$$

Ces observations nous conduisent au résultat suivant.

Théorème 5.2.4. *Pour la suite $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ construite ci-dessus, il existe un nombre extrémal de type Markoff $\xi \in \mathbb{R}$ tel que*

$$X_{k+1} \asymp X_k^\gamma, \quad L_\xi(\mathbf{x}_k) \asymp X_k^{-1} \quad \text{et} \quad |\det(\mathbf{x}_k)| = 1 \quad (k \geq 1). \quad (5.2.9)$$

Le théorème 5.1.2 montre qu'il existe un nombre extrémal ξ qui satisfait (5.2.9). Comme notre suite $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ satisfait aussi les conditions de la définition 5.2.1, ce nombre ξ est de type Markoff. Cette construction ne fournit pas tous les nombres extrémaux de type Markoff à cause de l'hypothèse (i) faite au début de la section 5.2. En effet, cette hypothèse implique que

$$0 \leq x_{k,2} \leq x_{k,1} \leq x_{k,0} \leq 3x_{k,1}$$

pour tout $k \geq 1$, donc $\xi \in (1/3, 1)$ car $\xi \notin \mathbb{Q}$.

5.3 Quelques propriétés

Dans cette section, on fixe un nombre extrémal ξ de type Markoff. On fixe aussi une suite $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ de triplets d'approximation comme au théorème 5.1.2 et on garde les mêmes notations. On pose

$$X_k = \|\mathbf{x}_k\| \quad (k \geq 1).$$

Alors $L_\xi(\mathbf{x}_k) \asymp X_k^{-1}$, et par suite on a

$$x_{k,j} = x_{k,0}\xi^j + O(X_k^{-1}) \quad (j = 0, 1, 2). \quad (5.3.1)$$

La proposition suivante, due à D.Roy est démontrée dans la section 2 de [20], elle regroupe deux conséquences des formules de récurrence (5.2.2). Nous en donnons une démonstration ci-dessous pour illustrer la technique utilisée. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On utilise le fait que si \mathbf{x}, \mathbf{y} et \mathbf{z} sont des matrices symétriques, alors

$$\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \text{trace}(J\mathbf{x}J\mathbf{z}J\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{x}J\mathbf{x} = \det(\mathbf{x})J \quad (5.3.2)$$

où I désigne la matrice identité (voir section 2 de [21]).

Proposition 5.3.1. *Pour tout entier k avec $k \geq 2$, on a*

- (i) $\mathbf{x}_{k+2} = 3x_{k,0}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k-1}$,
- (ii) $\mathbf{x}_{k-1} = -JM_{k-1}\mathbf{x}_k J\mathbf{x}_{k+1}$,
- (iii) $\det(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+2}) = (-1)^k 2$.

Démonstration: On déduit de la relation (5.2.2) que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+2} &= \mathbf{x}_k M_k \mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{x}_k M_k)^2 \mathbf{x}_{k-1} \\ &= (\text{trace}(\mathbf{x}_k M_k) \mathbf{x}_k M_k - \det(\mathbf{x}_k M_k) I) \mathbf{x}_{k-1} \quad (\text{Cayley-Hamilton}) \\ &= (3x_{k,0} \mathbf{x}_k M_k - I) \mathbf{x}_{k-1} \end{aligned}$$

La dernière égalité découle du fait que $\text{trace}(\mathbf{x}_i M_i) = 3x_{i,0}$ et $\det(\mathbf{x}_i M_i) = 1$ pour tout $i \geq 1$. On conclut grâce à l'égalité $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k M_k \mathbf{x}_{k-1}$ que

$$\mathbf{x}_{k+2} = 3x_{k,0} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k-1}.$$

La relation de récurrence $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k M_k \mathbf{x}_{k-1}$ jointe à la deuxième l'égalité de (5.3.2) entraînent que

$$\begin{aligned} JM_{k-1} \mathbf{x}_k J \mathbf{x}_{k+1} &= JM_{k-1} \mathbf{x}_k J \mathbf{x}_k M_k \mathbf{x}_{k-1} \\ &= JM_{k-1} J M_k \mathbf{x}_{k-1} = -\mathbf{x}_{k-1}. \end{aligned}$$

La dernière égalité découle du fait que $JA^T J A = -I$ pour toute matrice $A \in SL(2, \mathbb{Z})$.

On déduit de (5.3.2) que

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+2}) &= \text{trace}(J \mathbf{x}_k J \mathbf{x}_{k+2} J \mathbf{x}_{k+1}) \\ &= \text{trace}(J \mathbf{x}_k J \mathbf{x}_k M_k \mathbf{x}_{k+1} J \mathbf{x}_{k+1}) \quad \text{car } \mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_k M_k \mathbf{x}_{k+1} \\ &= -\text{trace}(M_k J) \\ &= (-1)^k 2. \end{aligned}$$

■

La partie (i) de la proposition 5.3.1 admet la conséquence suivante.

Corollaire 5.3.2. *Pour tout entier $k \geq 2$, on a*

$$\boxed{X_{k+1} = 3X_k X_{k-1} \left[1 + O\left(\frac{1}{X_{k-1}^2}\right) \right]}.$$

Démonstration: On rappelle que $X_k = x_{k,0}$ pour tout $k \geq 1$. Si $k \geq 3$, la partie (i) de la proposition 5.3.1 livre

$$X_{k+1} = 3X_{k-1} X_k - X_{k-2} \asymp X_{k-1} X_k$$

Comme la suite $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite croissante non bornée, on en déduit que $X_{k+1} \asymp X_k X_{k-1}$ pour tout $k \geq 2$, donc aussi $X_k \asymp X_{k-1} X_{k-2}$ pour $k \geq 3$ et par suite

$$\frac{X_{k+1}}{3X_{k-1} X_k} = 1 - \frac{X_{k-2}}{3X_{k-1} X_k} = 1 + O\left(\frac{1}{X_{k-1}^2}\right)$$

C'est aussi vrai pour $k \geq 2$. ■

Le prochain résultat dû à D. Roy (lemme 3.3 de [25]) est aussi une conséquence des formules de récurrence (5.2.2).

Proposition 5.3.3. *Chaque triplet $(x_{k+1,0}, x_{k,0}, x_{k-1,0})$ satisfait à l'équation de Markoff, c'est-à-dire*

$$x_{k+1,0}^2 + x_{k,0}^2 + x_{k-1,0}^2 = 3x_{k+1,0}x_{k,0}x_{k-1,0}.$$

5.4 Les matrices W_k

Pour tout $k \geq 1$, on définit

$$W_k := \mathbf{x}_k M_k \in SL(2, \mathbb{Z}),$$

comme dans [24]. Alors la relation de récurrence $\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1} M_{k+1} \mathbf{x}_k$ devient

$$W_{k+2} = W_{k+1} W_k \quad (k \geq 1). \quad (5.4.1)$$

A l'aide de ces matrices, on peut préciser l'estimation $L_\xi(\mathbf{x}_k) = \|(\xi, -1)\mathbf{x}_k\| \asymp X_k^{-1}$ de la manière suivante.

Lemme 5.4.1. *Pour tout entier $k \geq 2$, on a*

$$(\xi, -1)W_k = \frac{1}{3X_k}(\xi, -1) + O\left(\frac{1}{X_{k+1}X_{k-1}}\right).$$

Démonstration: On rappelle que $X_k = x_{k,0}$ pour tout $k \geq 1$ (lemme 5.2.3). Il découle de l'égalité (5.3.1) que

$$\begin{aligned} (\xi, -1) &= \frac{1}{X_{k+1}}(x_{k+1,1}, -x_{k+1,0}) + O\left(\frac{1}{X_{k+1}^2}\right) \\ &= -\frac{1}{X_{k+1}}(1, 0)\mathbf{x}_{k+1}J + O\left(\frac{1}{X_{k+1}^2}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$(\xi, -1)W_k = -\frac{1}{X_{k+1}}(1, 0)_{\mathbf{x}_{k+1}}JW_k + O\left(\frac{\|W_k\|}{X_{k+1}^2}\right)$$

Comme $\|W_k\| \ll X_k$ et $X_{k+1} \asymp X_k X_{k-1}$, on déduit que

$$\begin{aligned} (\xi, -1)W_k &= -\frac{1}{X_{k+1}}(1, 0)_{\mathbf{x}_{k+1}}JW_k + O\left(\frac{1}{X_{k+1}X_{k-1}}\right) \\ &= -\frac{1}{X_{k+1}}(1, 0)_{\mathbf{x}_{k-1}}J + O\left(\frac{1}{X_{k+1}X_{k-1}}\right) \quad \text{car } \mathbf{x}_{k+1}JW_k = \mathbf{x}_{k-1}J \\ &= -\frac{X_{k-1}}{X_{k+1}}(1, 0) \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} J + O\left(\frac{1}{X_{k+1}X_{k-1}}\right) \quad \text{grâce à la relation (5.3.1)} \\ &= \frac{X_{k-1}}{X_{k+1}}(\xi, -1) + O\left(\frac{1}{X_{k+1}X_{k-1}}\right). \end{aligned}$$

Grâce au corollaire 5.3.2, on a

$$\frac{X_{k-1}}{X_{k+1}} = \frac{1}{3X_k} \left[1 + O\left(\frac{1}{X_{k-1}^2}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{3X_k} \left[1 + O\left(\frac{1}{X_{k-1}^2}\right)\right] = \frac{1}{3X_k} + O\left(\frac{1}{X_{k-1}X_{k+1}}\right),$$

et la conclusion suit. ■

Par la suite, on aura besoin de considérer des produits $W_{k_1}W_{k_2} \cdots W_{k_\ell}$ pour des suite (k_1, \dots, k_ℓ) comme ci-dessous.

Théorème 5.4.2. *Soit $k_1 > \dots > k_\ell$ une suite d'entiers telle que $k_i \geq k_{i+1} + 2$ pour tout indice i avec $1 \leq i \leq \ell - 1$. Alors on a*

$$\begin{aligned} a) \quad & X_{k_1}X_{k_2} \cdots X_{k_\ell} \ll \frac{X_{k_1+1}}{X_{k_\ell-1}}, \\ b) \quad & W_{k_1}W_{k_2} \cdots W_{k_\ell} = 3^{\ell-1}X_{k_1}X_{k_2} \cdots X_{k_\ell} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_{k_\ell} + O\left(\frac{X_{k_1}X_{k_2} \cdots X_{k_\ell}}{X_{k_\ell}^2}\right), \end{aligned}$$

$$c) (\xi, -1)W_{k_1}W_{k_2} \cdots W_{k_\ell} = \frac{1}{3^\ell X_{k_1}X_{k_2} \cdots X_{k_\ell}}(\xi, -1) + O\left(\frac{1}{X_{k_1}X_{k_2} \cdots X_{k_\ell}X_{k_{\ell-1}}^2}\right),$$

avec des constantes implicites qui ne dépendent que de ξ et de ℓ .

La condition $k_i \geq k_{i+1} + 2$ ($1 \leq i \leq \ell - 1$) signifie que la suite (k_1, \dots, k_ℓ) est strictement décroissante et ne contient pas de paire d'entiers consécutifs. La preuve donnée ci-dessous s'inspire de la section 5 de [24].

Démonstration: On procède par récurrence sur ℓ .

Pour $\ell = 1$, on a un seul entier $k = k_1 \geq 2$. Le corollaire 5.3.2 livre

$$X_{k+1} \asymp X_k X_{k-1},$$

donc

$$X_k \asymp \frac{X_{k+1}}{X_{k-1}}. \quad (5.4.2)$$

Par ailleurs, on déduit de (5.3.1) que

$$\mathbf{x}_k = x_{k,0} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{X_k}\right),$$

donc

$$W_k = X_k \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_k + O\left(\frac{1}{X_k}\right). \quad (5.4.3)$$

Cela démontre a) et b) tandis que c) découle du lemme 5.4.1.

On suppose maintenant que $\ell \geq 2$ et que les conditions a)–c) sont vraies pour la suite $k_2 > \dots > k_\ell$. Grâce à (5.4.2), on obtient

$$X_{k_1}X_{k_2} \cdots X_{k_\ell} \asymp \frac{X_{k_1+1}}{X_{k_1-1}}X_{k_2} \cdots X_{k_\ell} \ll \frac{X_{k_1+1}}{X_{k_1-1}} \cdot \frac{X_{k_2+1}}{X_{k_2-1}} \ll \frac{X_{k_1+1}}{X_{k_\ell-1}}$$

car on a $X_{k_2+1} \leq X_{k_1-1}$ puisque $k_2 + 1 \leq k_1 - 1$. Cela démontre a).

De même, on trouve

$$W_{k_1}W_{k_2} \cdots W_{k_\ell} = X_{k_1} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_{k_1}W_{k_2} \cdots W_{k_\ell} + O\left(\frac{\|W_{k_2} \cdots W_{k_\ell}\|}{X_{k_1}}\right)$$

grâce à (5.4.3). Comme

$$\|W_{k_2} \cdots W_{k_\ell}\| \ll \|W_{k_2}\| \cdots \|W_{k_\ell}\| \ll X_{k_2} \cdots X_{k_\ell},$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} W_{k_1} W_{k_2} \cdots W_{k_\ell} &= X_{k_1} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_{k_1} W_{k_2} \cdots W_{k_\ell} + O\left(\frac{X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_\ell}}{X_{k_1}^2}\right) \\ &= X_{k_1} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_{k_1} \left[3^{\ell-2} X_{k_2} \cdots X_{k_\ell} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_{k_\ell} + O\left(\frac{X_{k_2} \cdots X_{k_\ell}}{X_{k_\ell}^2}\right) \right] \\ &\quad + O\left(\frac{X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_\ell}}{X_{k_1}^2}\right) \\ &= 3^{\ell-2} X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_\ell} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_{k_1} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_{k_\ell} \\ &\quad + O\left(\frac{X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_\ell}}{X_{k_1}^2}\right) + O\left(\frac{X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_\ell}}{X_{k_\ell}^2}\right) \\ &= 3^{\ell-2} X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_\ell} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_{k_1} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_{k_\ell} + O\left(\frac{X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_\ell}}{X_{k_\ell}^2}\right) \end{aligned}$$

car on a $X_{k_1} \geq X_{k_\ell}$. Par ailleurs, comme

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_{k_1} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} (1, \xi) M_{k_1} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} (1, \xi) = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} (1, \xi) = 3 \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$W_{k_1} W_{k_2} \cdots W_{k_\ell} = 3^{\ell-1} X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_\ell} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_{k_\ell} + O\left(\frac{X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_\ell}}{X_{k_\ell}^2}\right)$$

Cela démontre b).

Pour conclure, il reste à montrer c). On déduit du lemme 5.4.1 que

$$(\xi, -1) W_{k_1} W_{k_2} \cdots W_{k_\ell} = \frac{1}{3X_{k_1}} (\xi, -1) W_{k_2} \cdots W_{k_\ell} + O\left(\frac{X_{k_2} \cdots X_{k_\ell}}{X_{k_1+1} X_{k_1-1}}\right).$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$\begin{aligned}
(\xi, -1)W_{k_1}W_{k_2}\cdots W_{k_\ell} &= \frac{1}{3X_{k_1}} \left[\frac{1}{3^{\ell-1}X_{k_2}\cdots X_{k_\ell}}(\xi, -1) + O\left(\frac{1}{X_{k_2}\cdots X_{k_\ell}X_{k_\ell-1}^2}\right) \right] \\
&\quad + O\left(\frac{X_{k_2}\cdots X_{k_\ell}}{X_{k_1+1}X_{k_1-1}}\right) \\
&= \frac{1}{3^\ell X_{k_1}X_{k_2}\cdots X_{k_\ell}}(\xi, -1) \\
&\quad + O\left(\frac{1}{X_{k_1}X_{k_2}\cdots X_{k_\ell}X_{k_\ell-1}^2}\right) + O\left(\frac{X_{k_2}\cdots X_{k_\ell}}{X_{k_1+1}X_{k_1-1}}\right)
\end{aligned}$$

Grâce à la partie a), on a

$$X_{k_2}\cdots X_{k_\ell} \ll \frac{X_{k_2+1}}{X_{k_\ell-1}} \leq \frac{X_{k_1-1}}{X_{k_\ell-1}},$$

Il s'ensuit que

$$(X_{k_2}\cdots X_{k_\ell})^2 \ll \frac{X_{k_1-1}^2}{X_{k_\ell-1}^2} \asymp \frac{X_{k_1+1}X_{k_1-1}}{X_{k_1}X_{k_\ell-1}^2}$$

Par conséquent, on a

$$\frac{X_{k_2}\cdots X_{k_\ell}}{X_{k_1+1}X_{k_1-1}} \ll \frac{1}{X_{k_1}X_{k_2}\cdots X_{k_\ell}X_{k_\ell-1}^2}.$$

Donc

$$(\xi, -1)W_{k_1}W_{k_2}\cdots W_{k_\ell} = \frac{1}{3^\ell X_{k_1}X_{k_2}\cdots X_{k_\ell}}(\xi, -1) + O\left(\frac{1}{X_{k_1}X_{k_2}\cdots X_{k_\ell}X_{k_\ell-1}^2}\right),$$

ce qui démontre c). ■

Chapitre 6

L'anneau d'approximation du triplet $(1, \xi, \xi^2)$

On reprend les notations de la section 5.3. En particulier ξ désigne un nombre extrémal de type Markoff, et $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ une suite correspondante de triplets d'approximation satisfaisant (5.2.1).

On commence par introduire le formalisme de l'anneau des suites de [23] (D. Roy et E. Villani, 2008). On construit ensuite un sous-anneau de cet anneau comme dans le papier cité mais pour le cas particulier des *nombres extrémaux de type Markoff*. On démontre l'existence d'un développement asymptotique pour les éléments de ce sous-anneau. Ensuite, on énonce le résultat principal de [23] avec une esquisse de la preuve. On termine avec une conjecture relative à une situation un peu plus générale, et qui fera l'objet des chapitres ultérieurs.

6.1 L'anneau des suites

On désigne par S l'anneau des suites à valeurs réelles $(a_k)_{k \geq 1}$ muni de l'addition et de la multiplication composante par composante, et on désigne par S_0 l'idéal des suites éventuellement nulles.

On note \mathfrak{S} l'anneau quotient de S par S_0 c'est-à-dire

$$\mathfrak{S} = S/S_0.$$

C'est un anneau commutatif pour les opérations suivantes

- Addition : $[(a_k)_{k \geq 1}] + [(b_k)_{k \geq 1}] = [(a_k + b_k)_{k \geq 1}]$,
- Multiplication : $[(a_k)_{k \geq 1}] \times [(b_k)_{k \geq 1}] = [(a_k b_k)_{k \geq 1}]$,

où $[(a_k)_{k \geq 1}]$ désigne la classe d'une suite $(a_k)_{k \geq 1}$.

De plus, \mathfrak{S} est une \mathbb{R} -algèbre car il contient \mathbb{R} comme sous-anneau en identifiant chaque élément $a \in \mathbb{R}$ à la classe de la suite constante $(a)_{k \geq 1}$.

Par ailleurs, en restreignant les scalaires à \mathbb{Q} , on obtient que \mathfrak{S} est une \mathbb{Q} -algèbre, ainsi on peut former la sous- \mathbb{Q} -algèbre $\mathbb{Q}[\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n]$ engendrée par des éléments $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ de \mathfrak{S} .

Dans l'anneau quotient \mathfrak{S} , on peut associer une classe à toute suite $(x_k)_{k \geq k_0}$ dont les termes sont définis seulement à partir d'un certain rang k_0 à savoir la classe de n'importe quelle suite $(y_k)_{k \geq 1}$ telle que $y_k = x_k$ pour tout $k \geq k_0$.

6.2 Le sous-anneau $\mathfrak{A} = \mathbb{Q}[\mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}]$.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on définit une matrice symétrique

$$\mathfrak{X}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_0^{(i)} & \mathfrak{X}_1^{(i)} \\ \mathfrak{X}_1^{(i)} & \mathfrak{X}_2^{(i)} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{S})$$

en posant

$$\mathfrak{X}_j^{(i)} = [(x_{2k+i,j})_{k \geq 1}] \quad (j = 0, 1, 2)$$

et en étendant la définition de $x_{i,j}$ comme on voudra pour $i \leq 0$, par exemple en posant $x_{i,j} = 0$ si $i \leq 0$. Suivant les besoins, on considère aussi $\mathfrak{X}^{(i)}$ comme un triplet $(\mathfrak{X}_0^{(i)}, \mathfrak{X}_1^{(i)}, \mathfrak{X}_2^{(i)}) \in \mathfrak{S}^3$. Le contexte permettra de décider le sens de la notation $\mathfrak{X}^{(i)}$.

On choisit la suite $(x_{2k+i,j})_{k \geq 1}$ plutôt que $(x_{k+i,j})_{k \geq 1}$ dans la définition de $\mathfrak{X}_j^{(i)}$ avec $(j = 0, 1, 2)$ pour pouvoir étendre la relation de récurrence dans (5.2.1) à $\mathfrak{X}^{(i)}$. On obtient ainsi

$$\mathfrak{X}^{(i+1)} = \mathfrak{X}^{(i)} M_i \mathfrak{X}^{(i-1)} = \mathfrak{X}^{(i-1)} M_{i-1} \mathfrak{X}^{(i)} \quad \text{et} \quad \det(\mathfrak{X}^{(i)}) = 1 \quad (i \in \mathbb{Z}) \quad (6.2.1)$$

où $M_i = M$ pour les i pairs et $M_i = M^T$ pour les i impairs. Par ailleurs, la proposition 5.3.1(ii) livre

$$\mathfrak{X}^{(i-1)} = -JM_{i+1}\mathfrak{X}^{(i)}J\mathfrak{X}^{(i+1)} \quad (i \in \mathbb{Z}). \quad (6.2.2)$$

Cette relation se déduit aussi de (6.2.1) en notant que $(\mathfrak{X}^{(i)}M_i)^{-1} = -JM_{i+1}\mathfrak{X}^{(i)}J$.

Définition 6.2.1. On note $\mathfrak{A} = \mathbb{Q}[\mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}]$ le sous-anneau de \mathfrak{S} engendré sur \mathbb{Q} par les coefficients des matrices $\mathfrak{X}^{(0)}$ et $\mathfrak{X}^{(-1)}$.

On définit de même $\mathbb{Q}[\mathfrak{X}^{(i)}, \mathfrak{X}^{(i-1)}]$ pour tout entier i . Alors les formules (6.2.1) et (6.2.2) impliquent par récurrence

$$\mathbb{Q}[\mathfrak{X}^{(i)}, \mathfrak{X}^{(i-1)}] = \mathfrak{A} \quad (i \in \mathbb{Z}),$$

indépendamment de i . En particulier \mathfrak{A} contient les coefficients de la matrice $\mathfrak{X}^{(i)}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

On utilisera aussi les formules des propositions 5.3.1(i) et 5.3.3 de la section 5.3 sous la forme suivante.

Lemme 6.2.2. Soit $i \in \mathbb{Z}$.

a) On a $\mathfrak{X}^{(i+1)} = 3\mathfrak{X}_0^{(i-1)}\mathfrak{X}^{(i)} - \mathfrak{X}^{(i-2)}$.

b) Le triplet $(\mathfrak{X}_0^{(i+1)}, \mathfrak{X}_0^{(i)}, \mathfrak{X}_0^{(i-1)})$ satisfait l'équation de Markoff

$$\left(\mathfrak{X}_0^{(i+1)}\right)^2 + \left(\mathfrak{X}_0^{(i)}\right)^2 + \left(\mathfrak{X}_0^{(i-1)}\right)^2 = 3\mathfrak{X}_0^{(i+1)}\mathfrak{X}_0^{(i)}\mathfrak{X}_0^{(i-1)}. \quad (6.2.3)$$

Définition 6.2.3. On note $\mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*]$ l'anneau des polynômes à 6 variables

$$\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{X}^* = (X_0^*, X_1^*, X_2^*),$$

et on forme l'homomorphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*] &\longrightarrow \mathfrak{A} = \mathbb{Q}[\mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}] \\ \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*) &\longmapsto \mathbf{P}(\mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}) \end{aligned}$$

Comme π est surjectif, il induit un isomorphisme d'anneaux

$$\bar{\pi}: \mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*] / \ker \pi \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$$

où $\ker \pi$ désigne le noyau de π . Comme $\det(\mathfrak{x}^{(0)}) = 1$ et $\det(\mathfrak{x}^{(-1)}) = 1$, cet idéal contient les polynômes

$$L_1(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*) = \det(\mathbf{X}) - 1 \quad \text{et} \quad L_2(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*) = \det(\mathbf{X}^*) - 1.$$

Par ailleurs le fait que $\mathfrak{x}^{(1)} = \mathfrak{x}^{(0)} M \mathfrak{x}^{(-1)}$ est symétrique, se traduit par la relation

$$3 \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_0^{(-1)} & \mathfrak{x}_1^{(-1)} \\ \mathfrak{x}_0^{(0)} & \mathfrak{x}_1^{(0)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1^{(-1)} & \mathfrak{x}_2^{(-1)} \\ \mathfrak{x}_0^{(0)} & \mathfrak{x}_1^{(0)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_0^{(-1)} & \mathfrak{x}_1^{(-1)} \\ \mathfrak{x}_1^{(0)} & \mathfrak{x}_2^{(0)} \end{vmatrix} = 0.$$

Donc $\ker \pi$ contient aussi le polynôme

$$L_3(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*) = 3 \begin{vmatrix} \mathbf{X}_0^* & \mathbf{X}_1^* \\ \mathbf{X}_0 & \mathbf{X}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{X}_1^* & \mathbf{X}_2^* \\ \mathbf{X}_0 & \mathbf{X}_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{X}_0^* & \mathbf{X}_1^* \\ \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \end{vmatrix},$$

Proposition 6.2.4 (Roy-Villani, 2008). *On a $\ker \pi = (L_1, L_2, L_3)$.*

Une des preuves données dans [23, Section 6] consiste à montrer que $I = (L_1, L_2, L_3)$ est un idéal premier de rang 3 de $\mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*]$ et que le degré de transcendance de $\mathbb{Q}[\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}]$ est au moins 3. Comme $\ker \pi$ contient I et que le degré de transcendance de $\mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*]$ est 6, les deux idéaux sont égaux. L'autre preuve donne davantage de renseignements sur l'anneau \mathfrak{A} et utilise les notions suivantes.

Définition 6.2.5. *Pour tout entier $d \geq 0$, on désigne par $\mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*]_{\leq d}$ le sous- \mathbb{Q} -espace vectoriel de $\mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*]$ des polynômes de degré au plus d , et par $\mathfrak{A}_{\leq d}$ son image sous π , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de \mathfrak{A} de la forme $P(\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)})$ où $P \in \mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*]_{\leq d}$. On dit qu'un élément de \mathfrak{A} est réalisable en degré au plus d s'il appartient à $\mathfrak{A}_{\leq d}$.*

On peut facilement majorer $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{A}_{\leq d}$ pour tout entier $d \geq 0$ grâce au calcul de fonction d'Hilbert suivant (voir [23, Lemma 2.9]).

Proposition 6.2.6 (Roy-Villani, 2008). *Pour tout entier $d \geq 0$, on a*

$$\dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*, U]/I_1 \right)_d = (4d^3 + 6d^2 + 8d + 3)/3,$$

où U est une nouvelle variable et où I_1 est l'idéal homogène de $\mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*, U]$ engendré par $\det(\mathbf{X}) - U^2$, $\det(\mathbf{X}^*) - U^2$ et L_3 .

On en déduit immédiatement.

Corollaire 6.2.7. *Pour tout entier $d \geq 0$, on a*

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{A}_{\leq d} \leq (4d^3 + 6d^2 + 8d + 3)/3. \quad (6.2.4)$$

Démonstration: La composée

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*, U]/I_1 & \longrightarrow & \mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*]/I & \longrightarrow & \mathfrak{A} \\ P(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*, U) + I_1 & \longmapsto & P(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*, 1) + I & \longmapsto & P(\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}, 1) \end{array}$$

est un homomorphisme d'anneaux surjectif. Pour chaque entier $d \geq 0$, elle induit un homomorphisme surjectif d'espaces vectoriels de $(\mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*, U]/I_1)_d$ dans $\mathfrak{A}_{\leq d}$. Par suite $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{A}_{\leq d}$ est au plus égal à $\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*, U]/I_1)_d$. ■

En vertu de [23, Theorem 2.10], on a en fait l'égalité dans (6.2.4) pour tout $d \geq 0$, et cela fournit une seconde preuve du fait que $\ker \pi = I$. On reviendra sur cet argument plus loin.

6.3 Estimations

On désigne par \mathfrak{S}^* le groupe des unités de \mathfrak{S} c'est-à-dire l'ensemble des éléments $[(a_k)_{k \geq 1}]$ de \mathfrak{S} avec $a_k \neq 0$ pour tout entier k suffisamment grand. Étant donné des éléments $\mathfrak{U} = [(a_k)_{k \geq 1}]$ et $\mathfrak{B} = [(b_k)_{k \geq 1}]$ de \mathfrak{S}^* , on écrit $|\mathfrak{U}| \ll |\mathfrak{B}|$ ou $|\mathfrak{B}| \gg |\mathfrak{U}|$ s'il existe une constante $c > 0$ telle que $|a_k| \leq c|b_k|$ pour chaque entier k suffisamment grand. Par exemple, le corollaire 5.3.2 donne

$$|\mathfrak{x}_j^{(i+1)}| \asymp |\mathfrak{x}_0^{(i-1)}| |\mathfrak{x}_j^{(i)}| \quad (i \in \mathbb{Z}, 0 \leq j \leq 2).$$

On définit une relation d'équivalence \sim sur \mathfrak{S}^* en posant

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \iff \lim_{k \rightarrow \infty} a_k/b_k = 1.$$

Avec cette notation, on obtient le résultat suivant qui se déduit de la relation $x_{k,h} = \xi^h x_{k,0} + O(X_k^{-1})$ et du corollaire 5.3.2.

Lemme 6.3.1. *Pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$ et tout entier $j = 0, 1, 2$, on a*

$$\mathfrak{x}_j^{(i)} \sim \xi^j \mathfrak{x}_0^{(i)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{x}_0^{(i+1)} \sim 3\mathfrak{x}_0^{(i-1)} \mathfrak{x}_0^{(i)}. \quad (6.3.1)$$

Pour la suite, on note $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la fonction déterminée par les conditions

$$f(0) = f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(i+2) = f(i+1) + f(i) \quad (i \in \mathbb{Z}). \quad (6.3.2)$$

Alors $(f(i))_{i \in \mathbb{N}}$ est la suite de *Fibonacci*. Cette fonction f jouit de la propriété suivante

$$f(-i-2) = (-1)^i f(i) \quad (i \in \mathbb{Z}), \quad (6.3.3)$$

qu'on démontre facilement par récurrence sur i .

Cela permet de donner le comportement asymptotique de $\mathfrak{x}_j^{(i)}$.

Lemme 6.3.2. *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout entier $j = 0, 1, 2$, on a*

$$\boxed{\mathfrak{x}_j^{(i)} \sim 3^{f(i+1)-1} \xi^j \left(\mathfrak{x}_0^{(0)}\right)^{f(i)} \left(\mathfrak{x}_0^{(-1)}\right)^{f(i-1)}}. \quad (6.3.4)$$

Cela se démontre facilement par récurrence sur i en utilisant les résultats du lemme 6.3.1.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on définit la matrice \mathcal{W}_k par

$$\mathcal{W}_k := \mathfrak{x}^{(k)} M_k.$$

La relation de récurrence $\mathfrak{x}^{(k+2)} = \mathfrak{x}^{(k+1)} M_{k+1} \mathfrak{x}^{(k)}$ implique que

$$\mathcal{W}_{k+2} = \mathcal{W}_{k+1} \mathcal{W}_k \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (6.3.5)$$

On étend la relation \sim aux paires d'éléments de $(\mathfrak{S}^*)^2$, en posant

$$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \sim (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) \iff \mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{B}_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}_2 \sim \mathfrak{B}_2.$$

De même, si $\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_1 & \mathfrak{U}_2 \\ \mathfrak{U}_3 & \mathfrak{U}_4 \end{pmatrix}$ et $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 \\ \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{B}_4 \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{S})$, la notation $\mathfrak{U} \sim \mathfrak{B}$ signifie que

$$\mathfrak{U}_1 \sim \mathfrak{B}_1, \mathfrak{U}_2 \sim \mathfrak{B}_2, \mathfrak{U}_3 \sim \mathfrak{B}_3 \quad \text{et} \quad \mathfrak{U}_4 \sim \mathfrak{B}_4.$$

Les résultats b) et c) du théorème 5.4.2 admettent les conséquences suivantes.

Théorème 6.3.3. *Soit $k_1 > \dots > k_\ell$ une suite d'entiers telle que $k_i \geq k_{i+1} + 2$ pour tout indice i avec $1 \leq i \leq \ell - 1$. Alors on a*

$$\mathcal{W}_{k_1} \mathcal{W}_{k_2} \cdots \mathcal{W}_{k_\ell} \sim 3^{\ell-1} \mathfrak{x}^{(k_1)} \mathfrak{x}^{(k_2)} \cdots \mathfrak{x}^{(k_\ell)} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_{k_\ell} \quad (6.3.6)$$

$$(\xi, -1) \mathcal{W}_{k_1} \mathcal{W}_{k_2} \cdots \mathcal{W}_{k_\ell} \sim \frac{1}{3^\ell} (\mathfrak{x}^{(k_1)} \mathfrak{x}^{(k_2)} \cdots \mathfrak{x}^{(k_\ell)})^{-1} (\xi, -1). \quad (6.3.7)$$

6.4 Développements asymptotiques

Cette section est basée sur un document non publié de D. Roy que nous développons en détails. Le but est d'associer un développement asymptotique à chaque élément de l'anneau $\mathbb{Q}[\xi, \mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}]$. Pour y parvenir et pour énoncer le résultat principal de cette section, on a besoin des notions suivantes, où $\gamma = (1 + \sqrt{5})/2$ désigne le nombre d'or.

1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{Z}[\gamma]$. On dit que A est *admissible* si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments α de A avec $\alpha > t$. De manière équivalente, A est admissible s'il est fini ou si on peut ranger ses éléments en une suite décroissante $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots$ qui tend vers $-\infty$. Dans ce cas, tout sous-ensemble de A est admissible et A contient un élément maximal noté $\max A$. De plus si $B \subset \mathbb{Z}[\gamma]$ est admissible, alors $A \cup B$ et l'ensemble $A + B = \{\alpha + \beta; \alpha \in A \text{ et } \beta \in B\}$ sont aussi admissibles.

2. On pose

$$\mathfrak{x}^\alpha := \left(\mathfrak{x}_0^{(0)} \right)^m \left(\mathfrak{x}_0^{(-1)} \right)^n \quad \text{pour tout } \alpha = m + n/\gamma \in \mathbb{Z}[\gamma],$$

et on désigne par $\overline{\mathcal{F}}$ l'ensemble des séries formelles

$$f = \sum_{\alpha \in A} p_\alpha(\xi) \mathfrak{X}^\alpha$$

où A est un sous-ensemble admissible de $\mathbb{Z}[\gamma]$ et où $p_\alpha(\xi) \in \mathbb{Q}[\xi]$ pour tout $\alpha \in A$. Le *support* d'une telle série est

$$\text{supp}(f) = \{\alpha \in A; p_\alpha(\xi) \neq 0\}.$$

On convient que des éléments

$$f = \sum_{\alpha \in A} p_\alpha(\xi) \mathfrak{X}^\alpha \quad \text{et} \quad g = \sum_{\alpha \in B} q_\alpha(\xi) \mathfrak{X}^\alpha$$

de $\overline{\mathcal{F}}$ sont égaux si et seulement si d'une part ils ont le même support et d'autre part $p_\alpha(\xi) = q_\alpha(\xi)$ pour tout $\alpha \in \text{supp}(f) = \text{supp}(g)$. Pour f et g comme ci-dessus, on définit aussi

$$f + g = \sum_{\alpha \in A} p_\alpha(\xi) \mathfrak{X}^\alpha + \sum_{\alpha \in B} q_\alpha(\xi) \mathfrak{X}^\alpha \quad \text{et} \quad fg = \sum_{\substack{\alpha \in A \\ \beta \in B}} p_\alpha(\xi) q_\beta(\xi) \mathfrak{X}^{\alpha+\beta}.$$

Ce sont encore des éléments de $\overline{\mathcal{F}}$ car $A \cap B$ et $A + B$ sont admissibles. Pour ces opérations, $\overline{\mathcal{F}}$ est un anneau, et son sous-ensemble \mathcal{F} formé des éléments de support fini en est un sous-anneau.

3. Les classes \mathfrak{X}^α avec $\alpha \in \mathbb{Z}[\gamma]$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{R} dans \mathfrak{S} . Alors \mathcal{F} s'identifie naturellement au sous-anneau de \mathfrak{S} donné par

$$\mathbb{Q} \left[\xi, \mathfrak{X}_0^{(0)}, (\mathfrak{X}_0^{(0)})^{-1}, \mathfrak{X}_0^{(-1)}, (\mathfrak{X}_0^{(-1)})^{-1} \right] = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}[\gamma]} \mathbb{Q}[\xi] \mathfrak{X}^\alpha \subseteq \mathfrak{S}.$$

Pour tout $f = \sum_{\alpha \in A} p_\alpha(\xi) \mathfrak{X}^\alpha \in \overline{\mathcal{F}}$, on définit

$$\|f\| = \begin{cases} e^t & \text{où } t = \max\{\alpha \in A; p_\alpha(\xi) \neq 0\} \text{ si } f \neq 0, \\ 0 & \text{si } f = 0. \end{cases}$$

Alors $\|\cdot\|$ est une valeur absolue sur $\overline{\mathcal{F}}$ et \mathcal{F} est dense dans $\overline{\mathcal{F}}$ pour cette valeur absolue. Enfin, on observe que $\overline{\mathcal{F}}$ est complet pour cette valeur absolue. En effet, soit $(f_i)_{i \geq 1}$

une suite de Cauchy dans \mathcal{F} . Posons $A_i = \text{supp}(f_i)$ et écrivons $f_i = \sum_{\alpha \in A_i} p_\alpha^{(i)}(\xi) \mathfrak{x}^\alpha$ pour tout $i \geq 1$. Pour tout $t \in \mathbb{Z}[\gamma]$, il existe un entier N tel que $\|f_i - f_j\| \leq e^t$ quels que soient $i, j \geq N$. On en déduit que A_i et A_j possèdent les mêmes éléments α avec $\alpha > t$ et que, pour chacun d'eux, on a $p_\alpha^{(i)}(\xi) = p_\alpha^{(j)}(\xi)$. Soit A l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}[\gamma]$ qui sont communs à tous les A_i sauf peut-être un nombre fini de i . Pour chaque $\alpha \in A$, on note $p_\alpha(\xi)$ la valeur commune des $p_\alpha^{(i)}(\xi)$ pour i assez grand. Alors A est admissible et la suite $(f_i)_{i \geq 1}$ converge vers $f = \sum_{\alpha \in A} p_\alpha(\xi) \mathfrak{x}^\alpha$. Ainsi $\overline{\mathcal{F}}$ est le complété de \mathcal{F} pour la valeur absolue $\| \cdot \|$.

Théorème 6.4.1 (D. Roy). *Soit $\mathfrak{u} \in \mathbb{Q}[\xi, \mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}]$. Il existe une et une seule série formelle*

$$\overline{\mathfrak{u}} = \sum_{\alpha \in A} p_\alpha(\xi) \mathfrak{x}^\alpha \in \overline{\mathcal{F}}$$

telle que, pour tout $t \in \mathbb{Z}[\gamma]$, on ait

$$\left| \mathfrak{u} - \sum_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha > t}} p_\alpha(\xi) \mathfrak{x}^\alpha \right| \ll |\mathfrak{x}^t|. \quad (6.4.1)$$

L'application $\mathfrak{u} \mapsto \overline{\mathfrak{u}}$ ainsi définie est un homomorphisme de \mathbb{Q} -algèbres Θ de $\mathbb{Q}[\xi, \mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}]$ dans $\overline{\mathcal{F}}$, qui est *injectif* sur $\mathbb{Q}[\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}]$.

On dira que $\overline{\mathfrak{u}}$ constitue le *développement asymptotique* de \mathfrak{u} .

Démonstration: La condition (6.4.1) se réécrit

$$\left\| \mathfrak{u} - \sum_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha > t}} p_\alpha(\xi) \mathfrak{x}^\alpha \right\| \leq e^t \quad (6.4.2)$$

pour tout $t \in \mathbb{Z}[\gamma]$. Si elle admet une solution $\overline{\mathfrak{u}} = \sum_{\alpha \in A} p_\alpha(\xi) \mathfrak{x}^\alpha$ dans $\overline{\mathcal{F}}$, cette solution est unique. On note \mathcal{R} l'ensemble des éléments \mathfrak{u} de $\mathbb{Q}[\xi, \mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}]$ pour lesquels une telle solution existe. Alors \mathcal{R} est une sous- \mathbb{Q} -algèbre de $\mathbb{Q}[\xi, \mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}]$ et l'application $\Theta: \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}$ qui envoie \mathfrak{u} sur $\overline{\mathfrak{u}}$ est un homomorphisme de \mathbb{Q} -algèbres. Il reste à montrer que $\mathcal{R} = \mathbb{Q}[\xi, \mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}]$ et que Θ est injective sur $\mathbb{Q}[\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}]$.

1. On montre d'abord que $\mathfrak{x}_0^{(i)} \in \mathcal{R}$ et que $\overline{\mathfrak{x}_0^{(i)}}$ est un élément inversible de $\overline{\mathcal{F}}$ pour tout entier $i \geq -1$.

Pour cela on procède par récurrence sur i . C'est clair pour $i = -1$ et pour $i = 0$ car

$$\mathfrak{x}_0^{(-1)} = \mathfrak{x}^{1/\gamma} \quad \text{et} \quad \mathfrak{x}_0^{(0)} = \mathfrak{x}^1.$$

Pour $i = 1$, on utilise la relation

$$x_{j+1,0}^2 + x_{j,0}^2 + x_{j-1,0}^2 = 3x_{j+1,0}x_{j,0}x_{j-1,0} \quad (j \geq 1).$$

En appliquant cette formule avec $j = 2k$ et $j = 2k - 1$, pour un entier $k \geq 2$, on trouve que $x_{2k+1,0}$ et $x_{2k-2,0}$ sont racines de l'équation polynomiale :

$$T^2 - (3x_{2k,0}x_{2k-1,0})T + (x_{2k,0}^2 + x_{2k-1,0}^2) = 0.$$

Comme $x_{2k-2,0} < x_{2k+1,0}$, on en déduit que

$$x_{2k+1,0} = \frac{3}{2}x_{2k,0}x_{2k-1,0} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{9}((x_{2k,0})^{-2} + (x_{2k-1,0})^{-2})} \right).$$

Fixons un entier $N \geq 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| \leq 1/2$, on trouve

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x} &= \sum_{n=0}^N \binom{1/2}{n} x^n + \mathcal{O}(|x|^{N+1}) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n} + \mathcal{O}(|x|^{N+1}). \end{aligned}$$

Donc, pour $k \geq 2$, on obtient

$$x_{2k+1,0} = 3x_{2k,0}x_{2k-1,0} \left(1 - \sum_{n=1}^N \frac{1}{4n-2} \binom{2n}{n} ((3x_{2k,0})^{-2} + (3x_{2k-1,0})^{-2})^n \right) + \delta_{N,k}$$

avec $|\delta_{N,k}| \ll (x_{2k-1,0})^{-2N-2}$. En passant aux classes d'équivalence de suites dans \mathfrak{S} , cela signifie que

$$\mathfrak{x}_0^{(1)} = 3\mathfrak{x}_0^{(0)}\mathfrak{x}_0^{(-1)} \left(1 - \sum_{n=1}^N \frac{1}{4n-2} \binom{2n}{n} \left((3\mathfrak{x}_0^{(0)})^{-2} + (3\mathfrak{x}_0^{(-1)})^{-2} \right)^n \right) + \mathfrak{E}_N$$

avec $\|\mathfrak{E}_N\| = e^{-(2N+2)/\gamma}$. Donc, $\mathfrak{x}_0^{(1)} \in \mathcal{R}$ et

$$\bar{\mathfrak{x}}_0^{(1)} = 3\mathfrak{x}_0^{(0)}\mathfrak{x}_0^{(-1)} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-2} \binom{2n}{n} \left((3\mathfrak{x}_0^{(0)})^{-2} + (3\mathfrak{x}_0^{(-1)})^{-2} \right)^n \right).$$

En particulier, $\overline{\mathfrak{X}_0^{(1)}}$ est de la forme $3\mathfrak{X}_0^{(0)}\mathfrak{X}_0^{(-1)}(1-f)$ pour une série $f \in \overline{\mathcal{F}}$ de valeur absolue $\|f\| = e^{-2/\gamma} < 1$. Comme $\overline{\mathcal{F}}$ est complet, $1-f$ est inversible avec $(1-f)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} f^n$. Comme $\mathfrak{X}_0^{(0)}$ et $\mathfrak{X}_0^{(-1)}$ sont aussi des unités de $\overline{\mathcal{F}}$, on conclut que $\overline{\mathfrak{X}_0^{(1)}}$ est inversible.

Supposons maintenant que $\mathfrak{X}_0^{(-1)}, \mathfrak{X}_0^{(0)}, \dots, \mathfrak{X}_0^{(i)}$ appartiennent tous à \mathcal{R} , pour un entier $i \geq 1$, et que leurs images dans $\overline{\mathcal{F}}$ soient inversibles. Comme \mathcal{R} est une \mathbb{Q} -algèbre,

$$\mathfrak{X}_0^{(i+1)} = 3\mathfrak{X}_0^{(i-1)}\mathfrak{X}_0^{(i)} - \mathfrak{X}_0^{(i-2)}$$

appartient aussi à \mathcal{R} . Les séries $\overline{\mathfrak{X}_0^{(i-1)}}$ et $\overline{\mathfrak{X}_0^{(i)}}$ étant inversibles, on en déduit que

$$\overline{\mathfrak{X}_0^{(i+1)}} = 3\overline{\mathfrak{X}_0^{(i-1)}}\overline{\mathfrak{X}_0^{(i)}}(1-f)$$

avec $f \in \overline{\mathcal{F}}$ et $\|f\| = \|\mathfrak{X}_0^{(i-2)}\|/\|3\mathfrak{X}_0^{(i-1)}\mathfrak{X}_0^{(i)}\| = e^{\gamma^{i-2}-\gamma^{i-1}-\gamma^i} < 1$. Donc, $\overline{\mathfrak{X}_0^{(i+1)}}$ est inversible, et cela complète la preuve par récurrence.

2. On montre ensuite que $\mathfrak{X}_1^{(-1)}$ et $\mathfrak{X}_1^{(0)}$ appartiennent à \mathcal{R} .

Pour cela, on utilise l'identité $\mathbf{x}_{j+2}J\mathbf{x}_{j+1} = -\mathbf{x}_jM_jJ$ valide pour tout entier $j \geq 1$. En comparant les coefficients de la ligne 1 et de la colonne 1 de ces deux produits matriciels, on trouve

$$(-1)^j x_{j,0} = x_{j+2,0}x_{j+1,1} - x_{j+2,1}x_{j+1,0},$$

donc

$$\frac{x_{j+1,1}}{x_{j+1,0}} = (-1)^j \frac{x_{j,0}}{x_{j+1,0}x_{j+2,0}} + \frac{x_{j+2,1}}{x_{j+2,0}}. \quad (6.4.3)$$

Par suite, pour tout entier $N \geq 1$, on obtient

$$\frac{x_{j+1,1}}{x_{j+1,0}} = \frac{x_{j+N+1,1}}{x_{j+N+1,0}} + \sum_{n=1}^N (-1)^{j+n-1} \frac{x_{j+n-1,0}}{x_{j+n,0}x_{j+n+1,0}},$$

donc

$$\frac{x_{j+1,1}}{x_{j+1,0}} = \xi + \sum_{n=1}^N (-1)^{j+n-1} \frac{x_{j+n-1,0}}{x_{j+n,0}x_{j+n+1,0}} + \delta_{N,j}$$

avec $|\delta_{N,j}| \ll (x_{j+N+1,0})^{-2}$. En appliquant cette formule avec $j = 2k - 1$ pour un entier $k \geq 1$, et en passant aux classes dans \mathfrak{S} , on en déduit

$$\frac{\mathfrak{x}_1^{(0)}}{\mathfrak{x}_0^{(0)}} = \xi + \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{\mathfrak{x}_0^{(n-2)}}{\mathfrak{x}_0^{(n-1)} \mathfrak{x}_0^{(n)}} + \mathfrak{E}_N$$

avec $\|\mathfrak{E}_N\| \leq \|(\mathfrak{x}_0^{(N)})^{-2}\| = e^{-2\gamma^N}$. Comme $\overline{\mathfrak{x}}_0^{(i)}$ est inversible dans $\overline{\mathcal{F}}$ pour tout $i \geq -1$, que $\overline{\mathcal{F}}$ est complet, et que la suite de réels

$$\frac{\|\mathfrak{x}_0^{(n-2)}\|}{\|\mathfrak{x}_0^{(n-1)}\| \|\mathfrak{x}_0^{(n)}\|} = e^{\gamma^{n-2} - \gamma^{n-1} - \gamma^n} = e^{-2\gamma^{n-1}} \quad (n \geq 1)$$

est sommable, on conclut que $\mathfrak{x}_1^{(0)}$ appartient à \mathcal{R} avec

$$\overline{\mathfrak{x}}_1^{(0)} = \overline{\mathfrak{x}}_0^{(0)} \left(\xi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\overline{\mathfrak{x}}_0^{(n-2)}}{\overline{\mathfrak{x}}_0^{(n-1)} \overline{\mathfrak{x}}_0^{(n)}} \right).$$

Pour traiter $\mathfrak{x}_1^{(-1)}$, on applique la formule (6.4.3) avec $j = 2k - 2$ pour un entier $k \geq 2$. En passant aux classes dans \mathfrak{S} , on en tire

$$\frac{\mathfrak{x}_1^{(-1)}}{\mathfrak{x}_0^{(-1)}} = \frac{\mathfrak{x}_0^{(-2)}}{\mathfrak{x}_0^{(-1)} \mathfrak{x}_0^{(0)}} + \frac{\mathfrak{x}_1^{(0)}}{\mathfrak{x}_0^{(0)}}.$$

Comme $\mathfrak{x}_0^{(-2)} = 3\mathfrak{x}_0^{(-1)} \mathfrak{x}_0^{(0)} - \mathfrak{x}_0^{(1)}$ et $\mathfrak{x}_1^{(0)}$ appartiennent à \mathcal{R} et que $\overline{\mathfrak{x}}_0^{(-1)}$ et $\overline{\mathfrak{x}}_0^{(0)}$ sont inversibles dans $\overline{\mathcal{F}}$, on en déduit que $\mathfrak{x}_1^{(-1)} \in \mathcal{R}$.

3. Les égalités $\det \mathfrak{x}^{(-1)} = \det \mathfrak{x}^{(0)} = 1$ livrent

$$\mathfrak{x}_2^{(-1)} = \frac{1 + (\mathfrak{x}_1^{(-1)})^2}{\mathfrak{x}_0^{(-1)}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{x}_2^{(0)} = \frac{1 + (\mathfrak{x}_1^{(0)})^2}{\mathfrak{x}_0^{(0)}}.$$

Comme les séries $\overline{\mathfrak{x}}_0^{(-1)}$ et $\overline{\mathfrak{x}}_0^{(0)}$ sont toutes deux inversibles, cela montre que $\mathfrak{x}_2^{(-1)}$ et $\mathfrak{x}_2^{(0)}$ appartiennent à \mathcal{R} . Ainsi \mathcal{R} contient les six générateurs $\mathfrak{x}_j^{(i)}$ ($i = -1, 0$ et $j = 0, 1, 2$) de la \mathbb{Q} -algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}]$. Comme il contient aussi la constante ξ , on a $\mathcal{R} = \mathbb{Q}[\xi, \mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}]$.

4. Il est facile de voir que $\overline{\mathfrak{x}}_0^{(0)}$, $\overline{\mathfrak{x}}_0^{(-1)}$ et $\overline{\mathfrak{x}}_1^{(-1)}$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} et $\overline{\mathcal{F}}$. En effet, pour tout polynôme non nul $P(x, y, z) = \sum_{0 \leq i, j, k \leq N} p_{i,j,k} x^i y^j z^k$ à

coefficients dans \mathbb{Q} , on a

$$P\left(\mathfrak{X}_0^{(0)}, \mathfrak{X}_0^{(-1)}, \mathfrak{X}_1^{(-1)}\right) \sim \left(\sum_{\substack{0 \leq i, j, k \leq N \\ i+(j+k)/\gamma = \alpha}} p_{i,j,k} \xi^k \right) \mathfrak{X}^\alpha,$$

où $\alpha = \max\{i + (j + k)/\gamma; p_{i,j,k} \neq 0\}$, donc $\|P\left(\overline{\mathfrak{X}}_0^{(0)}, \overline{\mathfrak{X}}_0^{(-1)}, \overline{\mathfrak{X}}_1^{(-1)}\right)\| = e^\alpha \neq 0$. Comme $\mathbb{Q}[\mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}]$ est un anneau intègre de degré de transcendance 3 sur \mathbb{Q} (voir [23, Corollary 6.2]), on conclut que Θ est injectif sur cet anneau. ■

Les considérations ci-dessus permettent de calculer, à l'ordinateur, les développements asymptotiques des générateurs $\mathfrak{X}_j^{(i)}$ ($i = -1, 0$ et $j = 0, 1, 2$) de $\mathbb{Q}[\mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}]$ à la précision voulue. On trouve ainsi les développements initiaux suivants :

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{X}}_0^{(0)} &= \mathfrak{X}, \\ \overline{\mathfrak{X}}_0^{(-1)} &= \mathfrak{X}^{1/\gamma}, \\ \overline{\mathfrak{X}}_1^{(0)} &= \xi \mathfrak{X} + \frac{1}{3} \mathfrak{X}^{-1} + \frac{1}{3^3} \mathfrak{X}^{-3} + \frac{2}{3^5} \mathfrak{X}^{-3-2/\gamma} + \frac{2}{3^5} \mathfrak{X}^{-5} + \frac{4}{3^7} \mathfrak{X}^{-3-4/\gamma} + \dots \\ \overline{\mathfrak{X}}_1^{(-1)} &= \xi \mathfrak{X}^{1/\gamma} - \frac{1}{3} \mathfrak{X}^{-1/\gamma} - \frac{1}{3^3} \mathfrak{X}^{-3/\gamma} - \frac{2}{3^3} \mathfrak{X}^{-2-1/\gamma} - \frac{2}{3^5} \mathfrak{X}^{-5/\gamma} - \frac{2}{3^5} \mathfrak{X}^{-2-3/\gamma} + \dots \\ \overline{\mathfrak{X}}_2^{(0)} &= \xi^2 \mathfrak{X} + \frac{2\xi + 3}{3} \mathfrak{X}^{-1} + \frac{2\xi + 3}{3^3} \mathfrak{X}^{-3} + \frac{4\xi}{3^5} \mathfrak{X}^{-3-2/\gamma} + \frac{4\xi + 6}{3^5} \mathfrak{X}^{-5} + \dots \\ \overline{\mathfrak{X}}_2^{(-1)} &= \xi^2 \mathfrak{X}^{1/\gamma} - \frac{2\xi - 3}{3} \mathfrak{X}^{-1/\gamma} - \frac{2\xi - 3}{3^3} \mathfrak{X}^{-3/\gamma} - \frac{4\xi}{3^3} \mathfrak{X}^{-2-1/\gamma} - \frac{2(2\xi - 3)}{3^5} \mathfrak{X}^{-5/\gamma} + \dots \end{aligned}$$

Remarque 6.4.2. L'ensemble $\overline{\mathcal{F}}_0$ des éléments de $\overline{\mathcal{F}}$ qui possèdent un développement asymptotique de la forme $\sum_{\alpha \in A} p_\alpha \mathfrak{X}^\alpha$ à coefficients p_α dans \mathbb{Q} forme un sous-anneau de $\overline{\mathcal{F}}$ qui est complet pour $\|\cdot\|$. La partie 1 de la preuve du théorème montre que $\mathfrak{X}_0^{(-1)}$, $\mathfrak{X}_0^{(0)}$ et $\mathfrak{X}_0^{(1)}$ ont leur développements asymptotiques dans ce sous-anneau $\overline{\mathcal{F}}_0$. Donc, il en va de même pour tout élément de $\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0^{(-1)}, \mathfrak{X}_0^{(0)}, \mathfrak{X}_0^{(1)}]$ et en particulier pour $\mathfrak{X}_0^{(i)}$ quel que soit $i \in \mathbb{Z}$. La partie 2 de la preuve montre aussi que, pour $i = -1, 0$, l'expression $\mathfrak{X}_1^{(i)} - \xi \mathfrak{X}_0^{(i)}$ a son développement dans $\overline{\mathcal{F}}_0$, comme on l'observe bien sur les développements limités ci-dessus.

Remarque 6.4.3. Il est fort probable que l'homomorphisme Θ soit injectif sur tout l'anneau $\mathbb{Q}[\xi, \mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}]$. Soit \mathfrak{U} un élément de cet anneau, représenté par une suite

$(u_k)_{k \geq 1}$. Pour montrer la conjecture, il suffirait d'établir que, pour tout entier k assez grand, la série formelle $\overline{\mathfrak{U}}$ converge absolument vers u_k quand on remplace $\mathfrak{X}_0^{(0)}$ par $x_{2k,0}$ et $\mathfrak{X}_0^{(-1)}$ par x_{2k-1} . La partie 1 de la preuve montre que c'est le cas pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{X}_0^{(i)}$ pour $i = -1, 0, 1$. Donc c'est aussi le cas pour tous les éléments de $\mathbb{Q}[\xi, \mathfrak{X}_0^{(-1)}, \mathfrak{X}_0^{(0)}, \mathfrak{X}_0^{(1)}]$. La difficulté est de le montrer pour $\mathfrak{X}_1^{(0)}$.

Le théorème 6.4.1 admet la conséquence suivante qui précise [23, Corollary 2.12].

Corollaire 6.4.4. *Pour tout élément non nul \mathfrak{U} de $\mathbb{Q}[\mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}]$ il existe un nombre $\alpha \in \mathbb{Z}[\gamma]$ et un polynôme non nul $p(\xi) \in \mathbb{Q}[\xi]$ tels que*

$$\mathfrak{U} \sim p(\xi)\mathfrak{X}^\alpha.$$

En effet, il suffit de prendre le terme initial du développement asymptotique $\overline{\mathfrak{U}}$ de \mathfrak{U} . Si la conjecture de la remarque 2 est vraie alors le corollaire s'étend en fait à tout élément non nul de $\mathbb{Q}[\xi, \mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}]$.

Définition 6.4.5. *Si un élément \mathfrak{U} de $\mathbb{Q}[\xi, \mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}]$ possède un développement asymptotique non nul, on définit son ordre comme étant le nombre α de $\mathbb{Z}[\gamma]$ tel que $\|\mathfrak{U}\| = e^\alpha$.*

6.5 Termes initiaux des éléments de $\mathfrak{A}_{\leq d}$

Soit $d \geq 0$ un entier. L'espace vectoriel $\mathfrak{A}_{\leq d}$ étant de dimension finie sur \mathbb{Q} (voir section 6.2), il admet une base $(\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_N)$. Quitte à ajouter à chaque élément de cette base une combinaison linéaire des éléments précédents, on peut supposer que les termes initiaux de leurs développements asymptotiques sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} ou que leurs développements asymptotiques sont nuls. En vertu du Corollaire 6.4.4, la seconde éventualité est exclue. On a donc

$$\mathfrak{U}_i \sim p_i(\xi)\mathfrak{X}^{\alpha_i} \quad (1 \leq i \leq N),$$

pour des éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ de $\mathbb{Z}[\gamma]$ et des polynômes non nuls $p_1(\xi), \dots, p_N(\xi)$ de $\mathbb{Q}[\xi]$. Par le même procédé, on peut aussi supposer que les couples $(\alpha_i, \deg(p_i))$ sont

distincts. Enfin, quitte à permuter les indices, on peut ordonner ces couples par ordre lexicographique de sorte que, pour tout choix d'indices $1 \leq i < j \leq N$, on ait ou bien $\alpha_i < \alpha_j$, ou bien $\alpha_i = \alpha_j$ et $\deg(p_i) < \deg(p_j)$.

L'ensemble résultant ne dépend pas du choix de la base car on peut en donner la description suivante.

Proposition 6.5.1. *Avec les notations ci-dessus, $\{(\alpha_i, \deg(p_i)); 1 \leq i \leq N\}$ coïncide avec l'ensemble $F_d^{(0)}$ des couples $(\alpha, n) \in \mathbb{Z}[\gamma] \times \mathbb{Z}$ pour lesquels il existe $\mathfrak{U} \in \mathfrak{A}_{\leq d}$ et un polynôme non nul $p(\xi) \in \mathbb{Q}[\xi]$ de degré n tels que $\mathfrak{U} \sim p(\xi)\mathfrak{X}^\alpha$.*

Démonstration: Soit \mathfrak{U} un élément non nul de $\mathfrak{A}_{\leq d}$. On peut écrire $\mathfrak{U} = \sum_{i=1}^N c_i \mathfrak{U}_i$ pour des nombres rationnels c_1, \dots, c_N non tous nul. On note j le plus grand indice pour lequel $c_j \neq 0$, et i le plus petit indice parmi $1, \dots, j$ tel que $\alpha_i = \alpha_j$. Comme les couples $(\alpha_k, \deg(p_k))$ sont rangés par ordre lexicographique, on obtient

$$\mathfrak{U} \sim p(\xi)\mathfrak{X}^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \alpha_j \quad \text{et} \quad p(\xi) = \sum_{k=i}^j c_k p_k(\xi),$$

donc $\deg(p) = \deg(p_j)$, et par suite $(\alpha, \deg(p)) = (\alpha_j, \deg(p_j))$. Cela montre que $F_d^{(0)}$ est contenu dans $\{(\alpha_k, \deg(p_k)); 1 \leq k \leq N\}$. Comme l'inclusion réciproque est claire, ces deux ensembles sont égaux. ■

Pour analyser la situation plus à fond, on introduit encore les notations suivantes.

Définition 6.5.2. *Soit $d \geq 0$ un entier.*

- On note $E_d^{(0)}$ l'ensemble des nombres $\alpha \in \mathbb{Z}[\gamma]$ pour lesquels il existe $\mathfrak{U} \in \mathfrak{A}_{\leq d}$ avec $|\mathfrak{U}| \asymp |\mathfrak{X}^\alpha|$ ou, ce qui revient au même, avec $\|\mathfrak{U}\| = e^\alpha$.
- Pour tout $\alpha \in E_d^{(0)}$, on désigne par $R_d^{(0)}(\alpha)$ l'ensemble des polynômes $p(\xi) \in \mathbb{Q}[\xi]$ pour lesquels il existe $\mathfrak{U} \in \mathfrak{A}_{\leq d}$ tel que $\|\mathfrak{U} - p(\xi)\mathfrak{X}^\alpha\| < e^\alpha$, et on pose

$$r_d^{(0)}(\alpha) = \dim_{\mathbb{Q}} R_d^{(0)}(\alpha).$$

Proposition 6.5.3. *Avec les notations précédentes, $E_d^{(0)}$ est l'ensemble $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ des premières composantes des éléments de $F_d^{(0)}$. Pour tout $\alpha \in E_d^{(0)}$, l'ensemble $R_d^{(0)}(\alpha)$ est le sous-espace de $\mathbb{Q}[\xi]$ engendré par les polynômes $p_i(\xi)$ pour les indices $i \in \{1, \dots, N\}$ tels que $\alpha = \alpha_i$, et sa dimension $r_d^{(0)}(\alpha)$ est le nombre de ces indices.*

Démonstration: La preuve de la proposition précédente montre que tout élément non nul \mathfrak{U} de $\mathfrak{A}_{\leq d}$ satisfait $\mathfrak{U} \sim p(\xi)\mathfrak{X}^{\alpha_j}$ pour un polynôme $p(T) \in \mathbb{Q}[T]$ non nul et un indice $j \in \{1, \dots, N\}$, donc $\|\mathfrak{U}\| = e^{\alpha_j}$. Donc, $E_d^{(0)}$ est contenu dans $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$. L'inclusion réciproque étant claire, on a l'égalité.

Soit $\alpha \in E_d^{(0)}$. L'ensemble des éléments \mathfrak{U} de $\mathfrak{A}_{\leq d}$ avec $\|\mathfrak{U}\| \leq e^\alpha$ (resp. $\|\mathfrak{U}\| < e^\alpha$) est le sous- \mathbb{Q} -espace vectoriel de $\mathfrak{A}_{\leq d}$ engendré par les \mathfrak{U}_i avec $\alpha_i \leq \alpha$ (resp. $\alpha_i < \alpha$). Donc $R_d^{(0)}(\alpha)$ est le sous- \mathbb{Q} -espace vectoriel de $\mathbb{Q}[\xi]$ qui admet pour base les $p_i(\xi)$ d'indices i tels que $\alpha_i = \alpha$. ■

La construction d'une base $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_N$ comme décrite au début de la section se réalise facilement à l'ordinateur pour les petites valeurs de d , disons pour $d \leq 11$. Ensuite les calculs deviennent rapidement trop lourds.

L'appendice A montre les valeurs de $r_d^{(0)}(\alpha)$ obtenues à l'ordinateur pour chacun des degrés $d = 1, \dots, 11$. Pour d fixé, on peut lire la valeur de $r_d^{(0)}(\alpha)$ au point de la table de coordonnées entières (m, n) telles que $\alpha = m + n/\gamma$. Quand il n'y a pas de valeur indiquée au point (m, n) , c'est que $r_d^{(0)}(m + n/\gamma) = 0$. Ainsi, pour $d = 1$, il n'y a que trois valeurs non nulles de $r_1^{(0)}(\alpha)$, à savoir

$$r_1^{(0)}(0) = 1, \quad r_1^{(0)}(1) = 3 \quad \text{et} \quad r_1^{(0)}(1/\gamma) = 3,$$

donc $E_1^{(0)} = \{0, 1, 1/\gamma\}$.

L'observation des résultats numériques suggère l'énoncé suivant, démontré dans [23].

Théorème 6.5.4 (Roy-Villani, 2008). *Soit $d \geq 1$ un entier.*

(i) *On a $E_d^{(0)} = \{m + n/\gamma \in \mathbb{Z}[\gamma]; m + n/\gamma \geq 0 \text{ et } |m| + |n| \leq d\}$.*

(ii) Pour tout $\alpha \in E_d^{(0)}$, l'entier $r_d^{(0)}(\alpha)$ est impair compris entre 1 et $2d + 1$, et $R_d^{(0)}(\alpha)$ est le sous-espace de $\mathbb{Q}[\xi]$ formé des polynômes en ξ de degré au plus $r_d^{(0)}(\alpha) - 1$.

(iii) Pour tout $s = 0, \dots, d$, le nombre de $\alpha \in E_d^{(0)}$ tels que $r_d^{(0)}(\alpha) = 2s + 1$ est

$$\chi_d^{(0)}(s) = \begin{cases} 2s + 1 & \text{si } 0 \leq s < d, \\ d + 1 & \text{si } s = d. \end{cases}$$

Pour chaque degré $d = 1, \dots, 11$, l'appendice A contient aussi une table qui permet de vérifier aisément la troisième partie de la proposition.

Démonstration: On reprend les grandes lignes de l'argument de [23]. Par récurrence, la formule (6.2.2) montre que les coefficients $\mathfrak{X}_j^{(-i)}$ ($0 \leq j \leq 2$) de la matrice $\mathfrak{X}^{(-i)}$ sont réalisables en degré au plus $f(i)$ pour tout entier $i \geq 0$. Par ailleurs, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $\gamma^i = f(i) + f(i-1)/\gamma$ et par suite le lemme 6.3.2 livre

$$\mathfrak{X}_j^{(i)} \sim 3^{f(i+1)-1} \xi^j \mathfrak{X}^{\gamma^i}.$$

Soit $\alpha = m + n/\gamma \in \mathbb{Z}[\gamma]$. Le Corollaire 4.4 de [23] montre qu'il existe des entiers $i_1, i_2, \dots, i_s \geq 0$ tels que

$$\alpha = \gamma^{-i_1} + \gamma^{-i_2} + \dots + \gamma^{-i_s} \quad \text{et} \quad f(i_1) + \dots + f(i_s) \leq d \quad (6.5.1)$$

si et seulement si $\alpha \geq 0$ et $|m| + |n| \leq d$ (avec la convention qu'une somme vide est nulle). Supposons qu'il existe de tels entiers. Pour chaque $j = 0, \dots, 2s$, on peut trouver $j_1, \dots, j_s \in \{0, 1, 2\}$ de somme égale à j . Alors, le produit

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{X}_{j_1}^{(-i_1)} \dots \mathfrak{X}_{j_s}^{(-i_s)}$$

est un élément de $\mathfrak{A}_{\leq d}$ qui satisfait $\mathfrak{M} \sim a \xi^j \mathfrak{X}^\alpha$ pour un nombre rationnel a non nul. Donc, $R_d^{(0)}(\alpha)$ contient l'espace vectoriel $\mathbb{Q}[\xi]_{\leq 2s}$ des polynômes en ξ de degré au plus $2s$.

Enfin, soit E_d l'ensemble des points $\alpha = m + n/\gamma$ de $\mathbb{Z}[\gamma]$ avec $\alpha \geq 0$ et $|m| + |n| \leq d$. Pour chacun de ces α , on not $s_d(\alpha)$ le plus grand entier $s \geq 0$ pour lequel il existe des entiers $i_1, \dots, i_s \geq 1$ satisfaisant (6.5.1). Le théorème 2.1 de

[23] montre que, pour chaque entier $s = 0, \dots, d$, le nombre de $\alpha \in E_d$ avec $s_d(\alpha) = s$ est donné par la fonction $\chi_d^{(0)}(s)$ définie en (iii). On en déduit que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{A}_{\leq d} &\geq \sum_{\alpha \in E_d} \dim_{\mathbb{Q}} R_d^{(0)}(\alpha) \geq \sum_{\alpha \in E_d} (2s_d(\alpha) + 1) \\ &= \sum_{s=0}^d (2s + 1) \chi_d^{(0)}(s) \\ &= (d + 1)(2d + 1) + \sum_{s=0}^{d-1} (2s + 1)^2 \\ &= (4d^3 + 6d^2 + 8d + 3)/3. \end{aligned}$$

Comme le corollaire 6.2.7 donne $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{A}_{\leq d} \leq (4d^3 + 6d^2 + 8d + 3)/3$, les inégalités ci-dessus sont toutes des égalités. Cela implique que $E_d^{(0)} = E_d$ et que pour chaque $\alpha \in E_d$, l'espace vectoriel $R_d^{(0)}(\alpha)$ est le sous-espace de $\mathbb{Q}[\xi]$ des polynômes degré au plus $2s_d(\alpha)$, donc $r_d^{(0)}(\alpha) = 2s_d(\alpha) + 1$. Les affirmations (i) à (iii) de la proposition s'ensuivent. \blacksquare

La preuve du théorème montre aussi que l'inégalité (6.2.4) du Corollaire 6.2.7 est en fait une égalité, à savoir

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{A}_{\leq d} = (4d^3 + 6d^2 + 8d + 3)/3 \quad (d \geq 0), \quad (6.5.2)$$

et par suite le noyau de l'homomorphisme $\pi: \mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*] \rightarrow \mathfrak{A}$ de la définition 6.2.3 est $\ker \pi = I = (L_1, L_2, L_3)$.

6.6 Termes initiaux des éléments de $\mathfrak{A}_{\leq d} + \xi \mathfrak{A}_{\leq d}$

Soit $d \geq 0$ un entier. On considère l'espace vectoriel

$$\mathfrak{A}_{\leq d} + \xi \mathfrak{A}_{\leq d} = \{\mathfrak{U} + \xi \mathfrak{U}' ; \mathfrak{U}, \mathfrak{U}' \in \mathfrak{A}_{\leq d}\}.$$

Comme les éléments de \mathfrak{A} sont représentés par des suites à valeurs rationnelles et que ξ est transcendant sur \mathbb{Q} , donc irrationnel, la formule (6.5.2) donne

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathfrak{A}_{\leq d} + \xi \mathfrak{A}_{\leq d}) = 2 \dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{A}_{\leq d} = 2(4d^3 + 6d^2 + 8d + 3)/3. \quad (6.6.1)$$

Notons N cette dimension. En reprenant l'argument de la section précédente, on peut construire une base $(\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_N)$ de $\mathfrak{A}_{\leq d} + \xi\mathfrak{A}_{\leq d}$ telle que, pour un entier M avec $1 \leq M \leq N$, les développements asymptotiques de $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_M$ soient non nuls et linéairement indépendants sur \mathbb{Q} tandis que ceux de $\mathfrak{U}_{M+1}, \dots, \mathfrak{U}_N$ sont tous nuls. On peut aussi supposer que

$$\mathfrak{U}_i \sim p_i(\xi)\mathfrak{X}^{\alpha_i} \quad (1 \leq i \leq M),$$

pour des éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ de $\mathbb{Z}[\gamma]$ et des polynômes non nuls $p_1(\xi), \dots, p_M(\xi)$ de $\mathbb{Q}[\xi]$ tels que les couples $(\alpha_1, \deg(p_1)), \dots, (\alpha_M, \deg(p_M))$ soient distincts et forment une suite croissante pour l'ordre lexicographique c'est-à-dire que, pour tout choix d'indices $1 \leq i < j \leq M$, on a ou bien $\alpha_i < \alpha_j$, ou bien $\alpha_i = \alpha_j$ et $\deg(p_i) < \deg(p_j)$.

Ici encore, l'ensemble de ces couples ne dépend pas du choix de la base car il admet la description suivante.

Proposition 6.6.1. *Avec les notations ci-dessus, $\{(\alpha_i, \deg(p_i)); 1 \leq i \leq M\}$ coïncide avec l'ensemble $F_d^{(1)}$ des couples $(\alpha, n) \in \mathbb{Z}[\gamma] \times \mathbb{Z}$ pour lesquels il existe $\mathfrak{U} \in \mathfrak{A}_{\leq d} + \xi\mathfrak{A}_{\leq d}$ et un polynôme non nul $p(\xi) \in \mathbb{Q}[\xi]$ de degré n tels que $\mathfrak{U} \sim p(\xi)\mathfrak{X}^\alpha$.*

On omet la preuve car elle est semblable à celle de la proposition 6.5.1.

On introduit encore les notations suivantes.

Définition 6.6.2. *Soit $d \geq 0$ un entier.*

- On note $E_d^{(1)}$ l'ensemble des nombres $\alpha \in \mathbb{Z}[\gamma]$ pour lesquels il existe $\mathfrak{U} \in \mathfrak{A}_{\leq d} + \xi\mathfrak{A}_{\leq d}$ avec $|\mathfrak{U}| \asymp |\mathfrak{X}^\alpha|$ ou, ce qui revient au même, avec $\|\mathfrak{U}\| = e^\alpha$.
- Pour tout $\alpha \in E_d^{(1)}$, on désigne par $R_d^{(1)}(\alpha)$ l'ensemble des polynômes $p(\xi) \in \mathbb{Q}[\xi]$ pour lesquels il existe $\mathfrak{U} \in \mathfrak{A}_{\leq d} + \xi\mathfrak{A}_{\leq d}$ tel que $\|\mathfrak{U} - p(\xi)\mathfrak{X}^\alpha\| < e^\alpha$, et on pose

$$r_d^{(1)}(\alpha) = \dim_{\mathbb{Q}} R_d^{(1)}(\alpha).$$

Comme dans la section précédente, on peut calculer ces objets grâce à la connaissance des couples $(\alpha_i, \deg(p_i))$. La preuve de la proposition suivante est omise car elle est semblable à celle de la proposition 6.5.3.

Proposition 6.6.3. *Avec les notations précédentes, $E_d^{(1)}$ est l'ensemble $\{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$ des premières composantes des éléments de $F_d^{(1)}$. Pour tout $\alpha \in E_d^{(1)}$, l'ensemble $R_d^{(1)}(\alpha)$ est le sous-espace de $\mathbb{Q}[\xi]$ engendré par les polynômes $p_i(\xi)$ pour les indices $i \in \{1, \dots, M\}$ tels que $\alpha = \alpha_i$, et sa dimension $r_d^{(1)}(\alpha)$ est le nombre de ces indices.*

A l'aide de l'ordinateur, on a construit des bases $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_N$ de $\mathfrak{A}_{\leq d} + \xi\mathfrak{A}_{\leq d}$, comme ci-dessus, pour chaque degré $d = 1, 2, \dots, 11$. L'appendice B montre les valeurs de $r_d^{(1)}(\alpha)$ sous forme de tableaux. Pour d fixé, on peut lire la valeur de $r_d^{(1)}(\alpha)$ au point de la table de coordonnées entières (m, n) telles que $\alpha = m + n/\gamma$.

On observe que, pour $d = 1, 2, \dots, 6$, l'ensemble $E_d^{(1)}$ des points α avec $r_d^{(1)}(\alpha) \neq 0$ est donné par

$$E_d^{(1)} = \{m + n/\gamma; m, n \in \mathbb{Z} \text{ et } |m| + |n| \leq d\} \quad (1 \leq d \leq 6).$$

Donc $E_d^{(1)}$ est représenté par l'ensemble des points entiers dans le losange $|m| + |n| \leq d$ pour $d = 1, \dots, 6$. Pour $d > 6$, ce n'est plus vrai mais on constate que le nombre de points demeure égal à celui du losange. Tout ce passe comme si

- a) un certain nombre de points $m + n/\gamma$ du losange avec n autour de $-d$ étaient remplacés par un nombre égal de points $m' + n'/\gamma$ hors du losange, dans le second quadrant (c'est-à-dire avec $m' < 0$ et $n' > 0$),
- b) un certain nombre de points $m + n/\gamma$ du losange avec m autour de $-d$ étaient remplacés par un nombre égal de points $m' + n'/\gamma$ hors du losange, dans le troisième quadrant (c'est-à-dire avec $m' < 0$ et $n' < 0$).

En particulier, le nombre d'éléments de $E_d^{(1)}$ est égal au nombre de points entiers dans le losange $|m| + |n| \leq d$ qui est $2d^2 + 2d + 1$.

Cela explique la première affirmation dans la conjecture ci-dessous.

Conjecture 6.6.4. *Soit $d \geq 1$ un entier.*

- (i) *La cardinalité de $E_d^{(1)}$ est $\text{card}(E_d^{(1)}) = 2 \text{card}(E_d^{(0)}) - 1 = 2d^2 + 2d + 1$.*
- (ii) *Pour tout $\alpha \in E_d^{(1)}$, l'entier $r_d^{(1)}(\alpha)$ est pair compris entre 2 et $2d + 2$, et $R_d^{(1)}(\alpha)$ est le sous-espace de $\mathbb{Q}[\xi]$ formé des polynômes en ξ de degré au plus $r_d^{(1)}(\alpha) - 1$.*

(iii) Pour tout $s = 0, \dots, d$, le nombre de $\alpha \in E_d^{(1)}$ tels que $r_d^{(1)}(\alpha) = 2s + 2$ est

$$\chi_d^{(1)}(s) = \begin{cases} 4s + 4 & \text{si } 0 \leq s \leq d - 2, \\ 3d & \text{si } s = d - 1, \\ d + 1 & \text{si } s = d. \end{cases}$$

(iv) Tout élément non nul \mathfrak{U} de $\mathfrak{A}_{\leq d} + \xi\mathfrak{A}_{\leq d}$ possède un développement asymptotique non nul, donc satisfait $\mathfrak{U} \sim p(\xi)\mathfrak{X}^\alpha$ pour un α dans $E_d^{(1)}$ et un polynôme non nul $p(\xi) \in \mathbb{Q}[\xi]$ de degré au plus $r_d^{(1)}(\alpha) - 1$.

Cette conjecture est vérifiée numériquement pour $d \leq 11$. Le temps de calcul augmente de manière exponentielle avec d . Pour $d = 11$, cela représente une journée de temps machine sur un ordinateur PC avec processeur INTEL 3. On n'a pas été capable de pousser les calculs plus loin.

La partie (iv) de la conjecture est une conséquence de (ii) et (iii) car selon ces assertions, on a

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{A}_{\leq d} + \xi\mathfrak{A}_{\leq d}) &\geq \sum_{\alpha \in E_d^{(1)}} \dim_{\mathbb{Q}} R_d^{(1)}(\alpha) \\ &= \sum_{s=0}^d (2s + 2)\chi_d^{(1)}(s) \\ &= (d + 1)(2d + 2) + (3d)(2d) + \sum_{s=0}^{d-2} (4s + 4)(2s + 2) \\ &= 2(4d^3 + 6d^2 + 8d + 3)/3 = \dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{A}_{\leq d} + \xi\mathfrak{A}_{\leq d}. \end{aligned} \tag{6.6.2}$$

Donc on a l'égalité dans la première inégalité. Dans les notations ci-dessus, cela signifie que $M = N$, c'est-à-dire que tout élément non nul de $\mathfrak{A}_{\leq d} + \xi\mathfrak{A}_{\leq d}$ possède un développement asymptotique non nul.

Dans la suite, on va démontrer des cas particuliers de cette conjecture en construisant explicitement des éléments avec des termes initiaux linéairement indépendants en nombre égal à la dimension de l'espace.

Pour $d = 1, \dots, 5$, on y parvient en utilisant la formule (6.3.6) du théorème 6.3.3. Pour $d = 6$, cela fonctionne pour tous les points sauf deux qu'on doit traiter séparément. Pour $d > 6$, les choses se compliquent encore. On étudie aussi certains points hors du losange en degré arbitrairement grand.

Chapitre 7

Matrices associées aux préfixes du mot de Fibonacci

Dans ce chapitre, on commence par introduire le monoïde des mots E^* sur un alphabet $E = \{a, b\}$ de deux lettres a et b , et on définit la notion de préfixe d'un mot de E^* . On construit ensuite le mot de Fibonacci sur E comme limite d'une suite de mots obtenus par itération du morphisme de Fibonacci sur E^* . On note $\mathbb{Z}[\gamma]_{\geq 0}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}[\gamma]$ qui sont positifs ou nuls. C'est un monoïde pour l'addition. On appelle *taille* le morphisme de monoïdes de E^* dans $\mathbb{Z}[\gamma]_{\geq 0}$ qui applique a sur 1 et b sur $1/\gamma$ où γ désigne le nombre d'or. On construit aussi le plus petit monoïde \overline{E} contenant E^* sur lequel le morphisme de Fibonacci s'étend à en un automorphisme. La taille se prolonge de manière unique en un morphisme de monoïdes de \overline{E} vers $\mathbb{Z}[\gamma]_{\geq 0}$, et on montre que ce morphisme est surjectif. Par ailleurs, le morphisme naturel de monoïdes de E^* vers $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A})$ qui applique a sur \mathcal{W}_0 et b sur \mathcal{W}_{-1} s'étend aussi de manière unique en un morphisme de monoïdes de \overline{E} vers $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A})$. Cela permet d'associer une matrice de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A})$ à chaque préfixe du mot de Fibonacci dans \overline{E} . En multipliant ces matrices à gauche par le vecteur ligne $(\xi, -1)$, on obtient de nombreux éléments de $\mathfrak{A} + \xi\mathfrak{A}$ d'ordre négatif.

7.1 Monoïde des Mots

Soit $E = \{a, b\}$ un alphabet de deux lettres.

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 102

Définition 7.1.1. *Un mot sur E est une suite finie de lettres (possiblement vide) de E qui sont accolées. L'ensemble des mots sur E est noté E^* .*

Exemple 7.1.2. *$aa, aba, bba, aaa, abbaa$ sont des mots sur E .*

On désigne par ε le mot vide c'est à dire la suite vide de lettres. Soient u, v deux mots sur E , le mot obtenu en prenant d'abord les lettres de u puis les lettres de v est appelé la *concaténation* des mots u et v , on le note uv . Cette opération possède les propriétés suivantes

$$w = w\varepsilon = \varepsilon w \quad \text{et} \quad (uv)w = u(vw).$$

En d'autres termes, la *concaténation* est associative et admet le mot vide ε comme élément neutre. Ainsi, l'ensemble E^* des mots sur E muni de la *concaténation* est un monoïde.

Soit $w \in E^*$. On définit par la k -ième puissance du mot w par

$$w^k = ww \cdots w \quad (k \text{ fois}).$$

En particulier, on a

$$w^0 = \varepsilon.$$

On désigne par $|w|$ la longueur de w c'est à dire le nombre de lettres apparaissant dans w et par $|w|_a$ (respectivement $|w|_b$) le nombre d'occurrences de la lettre a (respectivement b) dans le mot w . On définit la taille de w par

$$\text{taille}(w) = |w|_a + |w|_b/\gamma.$$

Propriétés 7.1.3. Les applications

$$\begin{aligned} |\cdot|: E^* &\rightarrow \mathbb{N} & \text{et} & & \text{taille}(\cdot): E^* &\rightarrow \mathbb{Z}[\gamma] \\ w &\mapsto |w| & & & w &\mapsto \text{taille}(w) \end{aligned}$$

sont des morphismes de monoïdes. En d'autres termes, pour tout $u, v \in E^*$, on a

$$\begin{aligned} |uv| &= |u| + |v|, \\ \text{taille}(uv) &= \text{taille}(u) + \text{taille}(v). \end{aligned}$$

Définition 7.1.4. Soient $u, w \in E^*$. On dira que u est un préfixe de w s'il existe $v \in E^*$ tel que

$$w = uv.$$

Propriétés 7.1.5.

- Le mot vide ε est un préfixe de tout mot (car $w = \varepsilon w$ pour tout $w \in E^*$).
- La relation de préfixe est réflexive et transitive. Car pour tout $u, v, w \in E^*$, on a

i) $w = w\varepsilon$,

ii) $v = uv'$ et $w = vw' \Rightarrow w = u(v'w')$.

Exemple 7.1.6. Soit $w = abaaba$ un mot sur E . Ses préfixes sont

$$\varepsilon, \quad a, \quad ab, \quad aba, \quad abaa, \quad abaab, \quad abaaba = w.$$

Soit $w \in E^*$, on désigne par $P(w)$ l'ensemble des préfixes propres de w c'est-à-dire

$$P(w) = \{u \in E^*; u \neq w \text{ et } u \text{ préfixe de } w\}.$$

Par construction, il existe exactement $|w|$ préfixes propres de w . Donc, on a

$$\text{card}(P(w)) = |w|. \tag{7.1.1}$$

7.2 Suite des Mots de Fibonacci

Le morphisme de Fibonacci $\varphi : E^* \rightarrow E^*$ est le morphisme de monoïdes dont la restriction à E est donnée par

$$\varphi(a) = ab \quad \text{et} \quad \varphi(b) = a.$$

A l'aide de ce morphisme, on définit la suite des *mots de Fibonacci* $(w_i)_{i \geq -1}$ récursivement en posant

$$w_{-1} = b \quad \text{et} \quad w_{i+1} = \varphi(w_i) \quad (i \geq -1).$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 104

En particulier, on a

$$w_0 = a, \quad w_1 = ab, \quad w_2 = aba, \quad w_3 = abaab, \quad w_4 = abaababa, \quad \dots$$

On trouve que

$$w_{i+1} = \varphi^i(w_1) = \varphi^i(w_0 w_{-1}) = w_i w_{i-1} \quad (i \geq 0). \quad (7.2.1)$$

Par conséquent, le mot w_i est un préfixe de w_{i+1} pour tout $i \geq 0$. Grâce à cette propriété, il s'ensuit que la suite des *mots de Fibonacci* $(w_i)_{i \geq -1}$ converge vers un mot infini

$$w_\infty = abaababaabaababaababa \dots$$

qu'on appelle le *mot de Fibonacci*.

Lemme 7.2.1. *L'application taille est injective sur $P(w_\ell)$. De plus, pour tout $w \in E^*$, on a*

$$\text{taille}(\varphi(w)) = \gamma \text{taille}(w).$$

Démonstration: Soient $w, w' \in P(w_\ell)$ tels que $\text{taille}(w) = \text{taille}(w')$. Il s'ensuit que

$$|w|_a = |w'|_a \quad \text{et} \quad |w|_b = |w'|_b,$$

Par ailleurs, comme $|w| = |w|_a + |w|_b$, on trouve que $|w| = |w'|$. Donc les mots w et w' sont deux préfixes de w_ℓ de même longueur, d'où on a $w = w'$ et la première assertion suit.

Comme $\text{taille}(a) = 1$ et $\text{taille}(b) = \gamma^{-1}$, il découle des relations $\varphi(a) = ab$ et $\varphi(b) = a$ que

$$\text{taille}(\varphi(a)) = \gamma = \gamma \text{taille}(a) \quad \text{et} \quad \text{taille}(\varphi(b)) = 1 = \gamma \text{taille}(b) \quad (7.2.2)$$

Soit w un mot sur E de longueur $n \geq 0$. Si $n > 0$, il existe $u_1, \dots, u_n \in \{a, b\} = E$ tels que

$$w = u_1 \cdots u_n$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 105

Il découle de (7.2.2) que $\text{taille}(\varphi(u_i)) = \gamma \text{taille}(u_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Par ailleurs, comme φ est un morphisme de monoïdes, il s'ensuit que

$$\varphi(w) = \varphi(u_1) \cdots \varphi(u_n).$$

Par conséquent, on a

$$\text{taille}(\varphi(w)) = \sum_{i=1}^n \text{taille}(\varphi(u_i)) = \sum_{i=1}^n \gamma \text{taille}(u_i) = \gamma \text{taille}(u_1 \cdots u_n) = \gamma \text{taille}(w).$$

C'est encore vrai si $n = 0$ car alors $w = \varepsilon$ et $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$. ■

Le premier objectif de ce chapitre est de montrer le théorème suivant.

Théorème 7.2.2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}[\gamma]$ avec $0 \leq \alpha < 1$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ et $w \in P(w_\ell)$ tels que*

$$\alpha = \frac{\text{taille}(w)}{\text{taille}(w_\ell)}.$$

7.3 Préliminaires

7.3.1 Quelques formules

Le prochain lemme fournit quelques propriétés fondamentales de la suite des *mots de Fibonacci* $(w_i)_{i \geq 0}$ en termes de la fonction f et de γ .

Lemme 7.3.1. *Pour tout entier $\ell \geq 0$, on a*

$$|w_\ell| = f(\ell + 1) \quad \text{et} \quad \text{taille}(w_\ell) = \gamma^\ell.$$

Démonstration: La relation $|w_\ell| = f(\ell + 1)$ découle directement de la relation $w_{i+1} = w_i w_{i-1}$ pour tout $i \geq 0$ jointe au fait que la longueur est un morphisme de monoïdes combiné à la relation (6.3.3) tandis que la relation $\text{taille}(w_\ell) = \gamma^\ell$ découle du lemme 7.2.1 jointe à la relation de récurrence $w_i = \varphi(w_{i-1})$. ■

Le prochain lemme fournit une propriété de la fonction f qui nous sera très utile pour la suite.

Lemme 7.3.2. *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{i=0}^j f(2i) = f(2j+1) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^j f(2i-1) = f(2j) - 1.$$

Démonstration: De la relation $f(i+1) = f(i) + f(i-1)$ avec $i \geq 0$, on déduit

$$f(2i) = f(2i+1) - f(2i-1) \quad \text{et} \quad f(2i-1) = f(2i) - f(2i-2)$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{i=0}^j f(2i) = \sum_{i=0}^j (f(2i+1) - f(2i-1)) = \sum_{i=0}^j f(2i+1) - \sum_{i=1}^{j-1} f(2i+1) = f(2j+1)$$

D'autre part, on a aussi

$$\sum_{i=1}^j f(2i-1) = \sum_{i=1}^j (f(2i) - f(2i-2)) = \sum_{i=1}^j f(2i) - \sum_{i=0}^{j-1} f(2i) = f(2j) - f(0)$$

Comme $f(0) = 1$ et la conclusion suit. ■

7.3.2 Les ensembles Δ_ℓ

Définition 7.3.3. *Pour chaque entier $\ell \geq 0$, on note Δ_ℓ l'ensemble des $(\ell+1)$ -uplets $(a_0, \dots, a_{\ell-1}, 0) \in \{0, 1\}^{\ell+1}$ avec la propriété que si $a_k = 1$ pour un entier k avec $1 \leq k \leq \ell-1$, alors on a $a_{k+1} = 0$.*

Les trois premiers ensembles Δ_ℓ sont

$$\Delta_0 = \{(0)\}, \quad \Delta_1 = \{(0,0), (1,0)\} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)\} \quad (7.3.1)$$

Ces ensembles satisfont la relation de récurrence suivante où le symbole \sqcup représente l'union disjointe.

Lemme 7.3.4. *Pour tout entier $\ell \geq 1$, on a*

$$\Delta_{\ell+1} = (\Delta_\ell \times \{0\}) \sqcup (\Delta_{\ell-1} \times \{(1,0)\}). \quad (7.3.2)$$

De plus, la cardinalité de Δ_ℓ est $\text{card}(\Delta_\ell) = f(\ell+1)$ pour tout $\ell \geq 0$.

Démonstration: Pour $(a_0, \dots, a_\ell, 0) \in \{0, 1\}^{\ell+2}$ avec $\ell \geq 1$, on note que

$$(a_0, \dots, a_\ell, 0) \in \Delta_{\ell+1}$$

$$\iff (a_0, \dots, a_\ell, 0) = \begin{cases} (a_0, \dots, a_{\ell-1}, 0, 0) & \text{avec } (a_0, \dots, a_{\ell-1}, 0) \in \Delta_\ell, \\ \text{ou} \\ (a_0, \dots, a_{\ell-2}, 0, 1, 0) & \text{avec } (a_1, \dots, a_{\ell-2}, 0) \in \Delta_{\ell-1}, \end{cases}$$

$$\iff (a_0, \dots, a_\ell, 0) \in (\Delta_\ell \times \{0\}) \sqcup (\Delta_{\ell-1} \times \{(1, 0)\}),$$

l'égalité (7.3.2) s'ensuit.

Grâce à (7.3.1) on a

$$\text{card}(\Delta_\ell) = f(\ell + 1) \quad (0 \leq \ell \leq 2).$$

On suppose maintenant que pour un certain entier $\ell \geq 2$, on a

$$\text{card}(\Delta_k) = f(k + 1) \quad \text{pour tout } k = 0, \dots, \ell.$$

Il découle de l'égalité (7.3.2) que

$$\text{card}(\Delta_{\ell+1}) = \text{card}(\Delta_\ell \times \{0\}) + \text{card}(\Delta_{\ell-1} \times \{(1, 0)\}) = f(\ell + 1) + f(\ell) = f(\ell + 2).$$

Donc, on a $\text{card}(\Delta_\ell) = f(\ell + 1)$ pour tout $\ell \geq 0$. ■

7.4 Démonstration du théorème 7.2.2

7.4.1 Les ensembles K_ℓ

Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Pour la preuve du théorème, on introduit l'ensemble

$$K_\ell = \left\{ \frac{\text{taille}(w)}{\text{taille}(w_\ell)}; \quad w \in P(w_\ell) \right\},$$

et on définit

$$K = \{\alpha \in \mathbb{Z}[\gamma]; \quad 0 \leq \alpha < 1\} \subseteq [0, 1).$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 108

Démontrer le théorème 7.2.2 revient à montrer que

$$K = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} K_{\ell}. \quad (7.4.1)$$

On commence par l'observation suivante.

Proposition 7.4.1. *Pour tout entier $\ell \geq 0$, on a*

$$\text{card}(K_{\ell}) = f(\ell + 1) \quad \text{et} \quad K_{\ell} \subseteq K.$$

Démonstration: On rappelle que pour tout $w \in E^*$, on a

$$\text{card}(P(w)) = |w|.$$

Le lemme 7.3.1 et le fait que l'application taille est injective sur $P(w_{\ell})$ entraînent que

$$\text{card}(K_{\ell}) = \text{card}(P(w_{\ell})) = |w_{\ell}| = f(\ell + 1).$$

D'où la première assertion de la proposition. Pour conclure, il reste à montrer que $K_{\ell} \subseteq K$. Pour cela, on note tout d'abord que

$$K_{\ell} \subseteq [0, 1) \quad (7.4.2)$$

car $0 \leq \text{taille}(w) < \text{taille}(w_{\ell}) = \gamma^{\ell}$ pour tout $w \in P(w_{\ell})$.

Soit $w \in P(w_{\ell})$. Comme $\gamma \in \mathbb{Z}[\gamma]^*$ et que $\text{taille}(w) = |w|_a + |w|_b \gamma^{-1} \in \mathbb{Z}[\gamma]$, il s'ensuit que

$$\frac{\text{taille}(w)}{\gamma^{\ell}} \in \mathbb{Z}[\gamma]. \quad (7.4.3)$$

Donc $K_{\ell} \subseteq \mathbb{Z}[\gamma] \cap [0, 1) = K$. ■

Le prochain résultat établit une bijection entre K et \mathbb{Z} qui fournit la clé de la démonstration de (7.4.1).

Lemme 7.4.2. *La fonction*

$$\begin{aligned} \Psi : \quad K &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ m + n/\gamma &\mapsto n \end{aligned} \quad \text{est une bijection.}$$

Démonstration: Soit $n \in \mathbb{Z}$. Il existe un et un seul entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$0 \leq m + n/\gamma < 1.$$

Donc Ψ est bijective. ■

7.4.2 Les ensembles A_ℓ

Pour chaque entier $\ell \geq 0$ on définit

$$A_\ell := \begin{cases} \{n \in \mathbb{Z}; 1 - f(\ell) \leq n \leq f(\ell - 1)\} & \text{si } \ell \text{ est pair,} \\ \{n \in \mathbb{Z}; 1 - f(\ell - 1) \leq n \leq f(\ell)\} & \text{si } \ell \text{ est impair.} \end{cases}$$

La suite $(A_\ell)_{\ell \geq 0}$ est une suite croissante d'ensembles. De plus on a

$$\text{card}(A_\ell) = f(\ell + 1) \quad \text{et} \quad \mathbb{Z} = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} A_\ell. \quad (7.4.4)$$

Notre objectif est de montrer que $\Psi(K_\ell) = A_\ell$ pour tout $\ell \geq 0$. Si on admet ce résultat, on obtient (7.4.1), ce qui complète la preuve du théorème 7.2.2. En effet, on trouve alors

$$\Psi \left(\bigcup_{\ell=0}^{\infty} K_\ell \right) = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} A_\ell = \mathbb{Z} = \Psi(K)$$

donc $\bigcup_{\ell=0}^{\infty} K_\ell = K$ puisque Ψ est bijective. On commence par établir le lemme suivant.

Lemme 7.4.3. *Pour tout entier $\ell \geq 0$. On a*

$$P(w_\ell) = \{w_{\ell-1}^{a_{\ell-1}} \cdots w_0^{a_0}; (a_0, \dots, a_{\ell-1}, 0) \in \Delta_\ell\}. \quad (7.4.5)$$

En vertu de la définition de Δ_ℓ , cela signifie que les préfixes propres de w_ℓ sont les produits $w_{k_1} w_{k_2} \cdots w_{k_m}$ où k_1, \dots, k_m sont des entiers avec

$$\ell > k_1 > k_2 > \cdots > k_m \geq 0 \quad \text{et} \quad k_i \geq k_{i+1} + 2 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, m - 1.$$

Démonstration: Posons

$$Q_\ell = \{w_{\ell-1}^{a_{\ell-1}} \cdots w_0^{a_0}; (a_0, \dots, a_{\ell-1}, 0) \in \Delta_\ell\}.$$

On rappelle tout d'abord que

$$\Delta_0 = \{(0)\}, \quad \Delta_1 = \{(0, 0), (1, 0)\} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

Alors on a $Q_0 = \{\varepsilon\}$, $Q_1 = \{\varepsilon, w_0\}$ et $Q_2 = \{\varepsilon, w_0, w_1\}$. Par conséquent, on a

$$P(w_\ell) = Q_\ell \quad (0 \leq \ell \leq 2).$$

On suppose maintenant que pour un certain entier $\ell \geq 2$, on a

$$P(w_k) = Q_k \quad \text{pour tout entier } k \text{ avec } 0 \leq k \leq \ell.$$

On déduit de la relation $\Delta_{\ell+1} = (\Delta_\ell \times \{0\}) \sqcup (\Delta_{\ell-1} \times \{(1, 0)\})$ que

$$\begin{aligned} Q_{\ell+1} &= \{w_\ell^{a_\ell} \cdots w_0^{a_0}; (a_0, \dots, a_\ell, 0) \in \Delta_{\ell+1}\} \\ &= \{w_{\ell-1}^{a_{\ell-1}} \cdots w_0^{a_0}; (a_0, \dots, a_{\ell-1}, 0) \in \Delta_\ell\} \\ &\quad \cup \{w_\ell w_{\ell-2}^{a_{\ell-2}} \cdots w_0^{a_0}; (a_0, \dots, a_{\ell-2}, 0) \in \Delta_{\ell-1}\} \\ &= P(w_\ell) \cup (w_\ell P(w_{\ell-1})) \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= P(w_{\ell+1}). \end{aligned}$$

La dernière égalité découle du fait que $P(w_{\ell+1}) = P(w_\ell) \sqcup (w_\ell P(w_{\ell-1}))$ pour tout $\ell \geq 1$. En effet, comme $w_{\ell+1} = w_\ell w_{\ell-1}$, les préfixes propres de $w_{\ell+1}$ sont les préfixes propres de w_ℓ ou les préfixes de la forme $w_\ell p'$ où p' est un préfixe propre de $w_{\ell-1}$. Donc, on a $P(w_\ell) = Q_\ell$ pour tout $\ell \geq 0$ et la conclusion suit. ■

Ce lemme admet la conséquence suivante.

Lemme 7.4.4. *Pour tout entier ℓ avec $\ell \geq 0$, on a*

$$K_\ell = \left\{ \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i \gamma^{i-\ell}; (a_0, \dots, a_{\ell-1}, 0) \in \Delta_\ell \right\}.$$

avec la convention qu'une somme vide est égale à zéro.

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 111

Démonstration: Soit $\vartheta \in K_\ell$. Comme l'application taille est injective sur $P(w_\ell)$, il existe un et un seul $w \in P(w_\ell)$ tel que

$$\vartheta = \frac{\text{taille}(w)}{\gamma^\ell}.$$

Le lemme 7.4.3 assure l'existence d'un et d'un seul ℓ -uplet $(a_0, \dots, a_{\ell-1}, 0) \in \Delta_\ell$ tel que

$$w = w_{\ell-1}^{a_{\ell-1}} \cdots w_0^{a_0}.$$

Par conséquent, on a $\vartheta = \text{taille}(w_{\ell-1}^{a_{\ell-1}} \cdots w_0^{a_0})/\gamma^\ell$. La relation $\text{taille}(w_i) = \gamma^i$ jointe au fait que la taille est un morphisme de monoïdes entraîne que

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{\ell-1} a_i \gamma^{i-\ell}.$$

■

On conclut avec le résultat annoncé.

Proposition 7.4.5. *Pour tout entier $\ell \geq 0$, on a*

$$\Psi(K_\ell) = A_\ell.$$

Démonstration: L'égalité $\text{card}(K_\ell) = \text{card}(A_\ell)$ jointe au fait que la fonction Ψ est bijective entraînent que

$$\text{card}(\Psi(K_\ell)) = \text{card}(A_\ell).$$

Ainsi pour prouver l'égalité $\Psi(K_\ell) = A_\ell$, il suffit de montrer que $\Psi(K_\ell) \subseteq A_\ell$.

Soit $\vartheta \in K_\ell$. Le lemme 7.4.4 nous assure d'un unique $(\ell+1)$ -uplet $(a_0, \dots, a_{\ell-1}, 0) \in \Delta_\ell$ tel que

$$\vartheta = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i \gamma^{i-\ell} = \sum_{k=0}^{\ell-1} a_k f(i-\ell) + \left(\sum_{i=0}^{\ell-1} a_i f(i-\ell-1) \right) \gamma^{-1}.$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 112

Comme $f(i - \ell - 1) = (-1)^{\ell+1-i} f(\ell - i - 1)$ (propriété de symétrie de f), il s'ensuit que

$$\Psi(\vartheta) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i f(i - \ell - 1) = (-1)^{\ell+1} \sum_{i=0}^{\ell-1} (-1)^i a_i f(\ell - i - 1).$$

Comme $a_i \in \{0, 1\}$ et que $f(\ell - i - 1) \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, \ell - 1$, on a forcément

$$-\sum_{i=1}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} f(\ell - 2i) \leq \sum_{i=0}^{\ell-1} (-1)^i a_i f(\ell - i - 1) \leq \sum_{i=0}^{\lfloor (\ell-1)/2 \rfloor} f(\ell - 2i - 1) \quad (7.4.6)$$

Si ℓ est pair, on a $\ell = 2\ell'$ pour un certain $\ell' \in \mathbb{N}^*$. Des inégalités de (7.4.6), on déduit que

$$-\sum_{i=0}^{\ell'-1} f(2\ell' - 2i - 1) \leq \Psi(\vartheta) = -\sum_{i=0}^{\ell-1} (-1)^i a_i f(\ell - i - 1) \leq \sum_{i=1}^{\ell'} f(2\ell' - 2i)$$

Comme

$$\sum_{i=0}^{\ell'-1} f(2\ell' - 2i - 1) = \sum_{i=1}^{\ell'} f(2i - 1) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\ell'} f(2\ell' - 2i) = \sum_{i=1}^{\ell'-1} f(2i),$$

on conclut grâce au lemme 7.3.2 que

$$1 - f(\ell) \leq \Psi(\vartheta) \leq f(\ell - 1).$$

Si ℓ est impair, on a $\ell = 2\ell' - 1$ pour un certain $\ell' \in \mathbb{N}^*$ et alors

$$-\sum_{i=1}^{\ell'-1} f(2\ell' - 2i - 1) \leq \Psi(\vartheta) = \sum_{i=0}^{\ell-1} (-1)^i a_i f(\ell - i - 1) \leq \sum_{i=0}^{\ell'-1} f(2\ell' - 2i - 2)$$

De plus, comme

$$\sum_{i=1}^{\ell'-1} f(2\ell' - 2i - 1) = \sum_{i=1}^{\ell'-1} f(2i - 1) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{\ell'-1} f(2\ell' - 2i - 2) = \sum_{i=0}^{\ell'-1} f(2i)$$

alors le lemme 7.3.2 joint au fait que $\ell = 2\ell' - 1$ entraînent que

$$1 - f(\ell - 1) \leq \Psi(\vartheta) \leq f(\ell).$$

Par conséquent, on a $\Psi(\vartheta) \in A_\ell$ pour tout $\vartheta \in K_\ell$. D'où $\Psi(K_\ell) \subseteq A_\ell$. ■

7.5 Construction du monoïde \overline{E}

On commence par rappeler la notion de limite inductive de monoïdes.

Soit $I = (I, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné filtrant à droite, c'est-à-dire un ensemble partiellement ordonné avec la propriété que pour tous $i, j \in I$, il existe un élément $k \in I$ tel que $i \leq k$ et $j \leq k$. Soit $\{M_i\}_{i \in I}$ une collection de monoïdes indexée par I .

On suppose que, pour chaque $(i, j) \in I^2$ avec $i \leq j$, la fonction $f_{i,j} : M_i \rightarrow M_j$ est un morphisme de monoïdes satisfaisant les propriétés

(A) Pour tout $i \in I$, on a $f_{i,i} = id_{M_i}$

(B) Pour tout triplet $(i, j, k) \in I^3$ avec $i \leq j \leq k$, on a $f_{i,k} = f_{j,k} \circ f_{i,j}$.

Alors la collection $\{M_i, f_{i,j}, I\}$ est appelée un *système inductif* de monoïdes.

Exemple 7.5.1. On pose $I = \mathbb{N}$ et $M_i = E^*$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ avec $i \leq j$, on définit l'application

$$\begin{aligned} f_{i,j} : E^* &\rightarrow E^* \\ w &\mapsto \varphi^{j-i}(w), \end{aligned}$$

où φ^n désigne la n -ième composée du morphisme de Fibonacci. Clairement, $f_{i,j}$ est un morphisme de monoïdes. Pour tout $i \in I$, on a

$$f_{i,i}(w) = \varphi^0(w) = w \quad (w \in E^*).$$

Soient $i, j, k \in \mathbb{N}$ avec $i \leq j \leq k$ et soit $w \in E^*$, on a

$$f_{j,k} \circ f_{i,j}(w) = f_{j,k}(\varphi^{j-i}(w)) = \varphi^{k-j}(\varphi^{j-i}(w)) = \varphi^{k-i}(w) = f_{i,k}(w).$$

Il s'ensuit que $\{E^*, f_{i,j}, \mathbb{N}\}$ est un *système inductif* de monoïdes.

Définition 7.5.2. Soit $\{M_i, f_{i,j}, I\}$ un système inductif de monoïdes. Soit M un monoïde et soit $\{f_i : M_i \rightarrow M\}_{i \in I}$ une collection de morphismes indexée par I avec la propriété

$$f_i = f_j \circ f_{i,j} \quad \text{pour tout } i \leq j.$$

On dira que $\{M, f_i, I\}$ est une limite inductive du système inductif $\{M_i, f_{i,j}, I\}$ et on note

$$\{M, f_i, I\} = \lim_{\rightarrow} \{M_i, f_{i,j}, I\}$$

si la propriété suivante est satisfaite

(LI) **Propriété universelle de la limite inductive** : S'il existe un monoïde N et des morphismes de monoïdes $g_i : M_i \rightarrow N$ tels que

$$g_i = g_j \circ f_{i,j} \quad \text{pour tout } i \leq j,$$

alors il existe un et un seul morphisme de monoïdes $g : M \rightarrow N$ tel que $g_i = g \circ f_i$.

La limite inductive de $\{M_i, f_{i,j}, I\}$ existe toujours et elle est unique au sens suivant : si $\{M, f_i, I\}$ et $\{M', f'_i, I\}$ sont deux limites, alors il existe un et un seul isomorphisme de monoïdes $f : M \rightarrow M'$ tel que $f'_i = f \circ f_i$ pour tout $i \in I$ (voir le chapitre 1 de [18]).

7.5.1 Limite inductive de $\{E^*, f_{i,j}, \mathbb{N}\}$

Dans cette sous-section, nous allons construire la limite inductive de $\{E^*, f_{i,j}, \mathbb{N}\}$ (où $f_{i,j} : E^* \rightarrow E^*$ est donnée dans l'exemple 7.5.1) que l'on notera \overline{E} .

On pose $F = \{(w, i); \quad w \in E^*, \quad i \in \mathbb{N}\}$ et on définit une relation \sim sur F comme suit :

$$(w, i) \sim (w', j) \quad \text{si} \quad w' = \varphi^{j-i}(w),$$

pour tous $(w, i), (w', j) \in F$ avec $i \leq j$. Il est facile de voir que la relation \sim est une relation d'équivalence. On note par $[w, i]$ la classe d'équivalence de (w, i) et on pose

$$\overline{E} = \{[w, i]; \quad w \in E^*, \quad i \in \mathbb{N}\}.$$

Soient $[w, i]$ et $[w', j]$ deux éléments de \overline{E} . On définit le produit de $[w, i]$ et $[w', j]$ par

$$\begin{aligned} [w, i][w', j] &= [\varphi^{k-i}(w), k][\varphi^{k-j}(w'), k] \\ &= [\varphi^{k-i}(w)\varphi^{k-j}(w'), k] \end{aligned}$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 115

pour tout entier k avec $k \geq \max\{i, j\}$. On montre facilement que cette opération est bien définie, que \overline{E} muni de ce produit est un monoïde, et qu'il admet $[\varepsilon, 0]$ comme élément neutre.

Soit $i \in \mathbb{N}$. On considère l'application $f_i : E^* \rightarrow \overline{E}$ définie par

$$f_i(w) = [w, i] \quad (w \in E^*).$$

On note tout d'abord que f_i est un morphisme de monoïdes pour chaque $i \in \mathbb{N}$ car pour tous $w, w' \in E^*$, on a

$$f_i(ww') = [ww', i] = [w, i][w', i] = f_i(w)f_i(w').$$

De plus, pour tout $i \leq j$ on a

$$f_j \circ f_{i,j}(w) = f_j(\varphi^{j-i}(w)) = [\varphi^{j-i}(w), j] = [w, i] = f_i(w),$$

par la définition de la relation d'équivalence. Par conséquent, on a

$$f_j \circ f_{i,j} = f_i \quad \text{pour tout } i \leq j.$$

Lemme 7.5.3. *La collection $\{\overline{E}, f_i, \mathbb{N}\}$ est une limite inductive du système $\{E^*, f_{i,j}, \mathbb{N}\}$.*

Démonstration: Soit N un monoïde et soient $g_i : E^* \rightarrow N$ ($i \in \mathbb{N}$) des morphismes de monoïdes tels que $g_i = g_j \circ f_{i,j}$ pour tout $i \leq j$.

On considère la fonction $g : \overline{E} \rightarrow N$ définie par

$$g([w, i]) = g_i(w) \quad \text{pour tout } [w, i] \in \overline{E}.$$

On note tout d'abord que g est bien définie car si $[w, i] = [w', j]$ avec $i \leq j$ alors on a $w' = \varphi^{j-i}(w)$. Il s'ensuit que

$$g_i(w) = g_j(\varphi^{j-i}(w)) = g_j(w').$$

Cette observation jointe à la définition implique que g est un morphisme de monoïdes.

On note aussi que

$$g_i = g \circ f_i \quad (i \in \mathbb{N}).$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 116

Pour conclure, il reste à montrer l'unicité de g . Pour cela, on suppose que $g' : \overline{E} \rightarrow N$ est un morphisme satisfaisant $g_i = g' \circ f_i$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$. Alors, on a

$$g'([w, i]) = g'(f_i(w)) = g_i(w) = g([w, i]) \quad (w \in E^*, i \in \mathbb{N}).$$

D'où $g = g'$ et la conclusion suit. ■

Soit $\iota : E^* \hookrightarrow \overline{E}$ le morphisme injectif définie par

$$\iota(w) = [w, 0] \quad (w \in E^*)$$

Grâce à cette injection, nous identifions E^* au sous-ensemble de \overline{E} donné par

$$E^* = \{[w, 0]; \quad w \in E^*\}.$$

Ainsi avec cette nouvelle notation, le morphisme de Fibonacci est défini comme suit

$$\begin{aligned} \varphi : \quad E^* &\rightarrow E^* \\ [w, 0] &\mapsto [\varphi(w), 0] \end{aligned}$$

On étend maintenant la notion de préfixe dans \overline{E} .

Définition 7.5.4. *Soient $\bar{u}, \bar{w} \in \overline{E}$. On dira que \bar{u} est un préfixe de \bar{w} s'il existe $\bar{v} \in \overline{E}$ tel que*

$$\bar{w} = \bar{u}\bar{v}.$$

Tout comme dans le monoïde E^* , le préfixe dans \overline{E} définit une relation d'ordre sur \overline{E} c'est-à-dire une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple 7.5.5.

- $[a, 1]$ est un préfixe de a car

$$a = [a, 0] = [\varphi(a), 1] = [ab, 1] = [a, 1][b, 1].$$

- $[b, 1]$ et $[b, 2]$ sont des préfixes de b car

$$b = [b, 0] = [a, 1] = [ab, 2] = [a, 2][b, 2] = [b, 1][b, 2]$$

et

$$[b, 1] = [a, 2] = [ab, 3] = [a, 3][b, 3] = [b, 2][b, 3].$$

7.5.2 Extension du morphisme de Fibonacci à \overline{E}

Proposition 7.5.6. *Il existe un et un seul automorphisme de monoïdes $\Phi : \overline{E} \rightarrow \overline{E}$ tel que*

$$\Phi([w, 0]) = [\varphi(w), 0] \quad (w \in E^*).$$

Pour cet automorphisme, on a

$$\Phi([w, i]) = [\varphi(w), i] \quad \text{et} \quad \Phi^{-1}([w, i]) = [w, i + 1] \quad (w \in E^*, i \in \mathbb{N}).$$

Démonstration: Soit $i \in \mathbb{N}$. On considère l'application $g_i : E^* \rightarrow \overline{E}$ définie par

$$g_i(w) = [\varphi(w), i] \quad (w \in E^*).$$

C'est un morphisme de monoïdes. De plus, pour tout $w \in E^*$ et tout $j \in \mathbb{N}$ avec $i \leq j$, on a

$$g_j \circ f_{i,j}(w) = g_j(\varphi^{j-i}(w)) = [\varphi(\varphi^{j-i}(w)), j] = [\varphi^{j-i}(\varphi(w)), j] = [\varphi(w), i] = g_i(w)$$

D'où $g_j \circ f_{i,j} = g_i$ pour tout $i \leq j$.

Pour cette collection $\{\overline{E}, g_i, \mathbb{N}\}$, la propriété universelle de la limite inductive nous garantit l'existence d'un unique morphisme de monoïdes $\Phi : \overline{E} \rightarrow \overline{E}$ tel que $g_i = \Phi \circ f_i$ pour tout entier $i \geq 0$. Donc, pour tout $w \in E^*$ et tout $i \in \mathbb{N}$ on a

$$\Phi([w, i]) = \Phi \circ f_i(w) = g_i(w) = [\varphi(w), i].$$

Nous allons maintenant montrer que le morphisme Φ ainsi défini est un automorphisme c'est-à-dire montrer que Φ est bijective.

Pour cela, on considère la fonction $g : \overline{E} \rightarrow \overline{E}$ définie par

$$g([w, i]) = [w, i + 1] = f_{i+1}(w) \quad (w \in E^*, i \in \mathbb{N}).$$

On note tout d'abord que g est bien définie car si $[w, i] = [w', j]$ avec $i \leq j$, alors on a $w' = \varphi^{j-i}(w)$. Il s'ensuit que

$$[w', j + 1] = [\varphi^{j-i}(w), j + 1] = [w, i + 1].$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 118

Par ailleurs, comme f_i est un morphisme pour tout $i \in \mathbb{N}$, on en déduit que g est un morphisme de monoïdes. De plus, pour tout $w \in E^*$ et tout $i \in \mathbb{N}$ on a

$$g \circ \Phi([w, i]) = g([\varphi(w), i]) = [\varphi(w), i + 1] = [w, i]$$

et

$$\Phi \circ g([w, i]) = \Phi([w, i + 1]) = [\varphi(w), i + 1] = [w, i]$$

D'où Φ est bijective et pour tout $[w, i] \in \overline{E}$ on a

$$\Phi^{-1}([w, i]) = g([w, i]) = [w, i + 1]$$

Pour conclure, il reste à montrer que Φ est entièrement déterminée par la condition

$$\Phi([w, 0]) = [\varphi(w), 0] \quad (w \in E^*).$$

Comme Φ est un morphisme et que E^* est engendré par a et b comme monoïde, il suffit de prouver que pour tout entier $i \geq 1$, on a

$$\Phi([a, i]) = [\varphi(a), i] \quad \text{et} \quad \Phi([b, i]) = [\varphi(b), i], \quad (7.5.1)$$

sachant que $\Phi(a) = [\varphi(a), 0]$ et $\Phi(b) = [\varphi(b), 0]$.

Si on suppose que les égalités de (7.5.1) sont vérifiées pour un certain entier $i \geq 0$, on a

$$\Phi([a, i + 1]) = \Phi([b, i]) = [\varphi(b), i] = [a, i] = [\varphi(a), i + 1]$$

et

$$\Phi([ab, i + 1]) = \Phi([a, i]) = [\varphi(a), i] = [ab, i] = [\varphi(ab), i + 1].$$

Comme Φ est un morphisme et $[\varphi(ab), i + 1] = [\varphi(a), i + 1][\varphi(b), i + 1]$, on en déduit que

$$\Phi([a, i + 1])\Phi([b, i + 1]) = \Phi([a, i + 1])[\varphi(b), i + 1].$$

En utilisant les propriétés de cancellation à gauche dans E^* , on obtient

$$\Phi([b, i + 1]) = [\varphi(b), i + 1].$$

La conclusion s'ensuit. ■

On désigne par $\Phi|_{E^*}$ la restriction de l'automorphisme Φ sur E^* .

Corollaire 7.5.7. *Le morphisme de Fibonacci*

$$\begin{aligned} \varphi : E^* &\rightarrow \varphi(E^*) \\ [w, 0] &\mapsto [\varphi(w), 0] \end{aligned} \quad \text{est bijectif.}$$

Plus précisément, on a

$$\Phi|_{E^*} = \varphi.$$

7.5.3 Préfixes du mot de Fibonacci dans \overline{E} .

On définit d'abord la suite généralisée des *mots de Fibonacci* $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en posant

$$w_i := \Phi^i(a) \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

Alors $(w_i)_{i \geq -1}$ est la suite usuelle des *mots de Fibonacci* dans E^* . On note que

$$w_{-i} = \Phi^{-i}([a, 0]) = [a, i] = [w_0, i] \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Lemme 7.5.8. *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a*

$$w_{i+1} = w_i w_{i-1}. \tag{7.5.2}$$

En particulier, l'élément w_i est un préfixe de w_{i+1} pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration: Soit $i \in \mathbb{Z}$. Comme $a = [a, 1][a, 2]$ on a

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= \Phi^{i+1}([a, 1][a, 2]) = \Phi^{i+1}([a, 1])\Phi^{i+1}([a, 2]) \\ &= \Phi^{i+1}(\Phi^{-1}(a))\Phi^{i+1}(\Phi^{-2}(a)) \\ &= \Phi^i(a)\Phi^{i-1}(a) \\ &= w_i w_{i-1}. \end{aligned}$$

La conclusion s'ensuit. ■

Par transitivité, on en déduit que w_i est un préfixe de w_j pour toute paire d'entiers $i, j \in \mathbb{Z}$ avec $i \leq j$. Cela justifie d'étendre de la manière suivante la notion de préfixe du mot de Fibonacci w_∞ dans \overline{E} .

Définition 7.5.9. Soit $\overline{w} \in \overline{E}$. On dira que \overline{w} est un préfixe de w_∞ dans \overline{E} s'il existe un entier $i \in \mathbb{Z}$ tel que \overline{w} soit un préfixe de w_i .

Donc, tous les w_i avec $i \in \mathbb{Z}$ sont des préfixes de w_∞ . En particulier, $w_{-1} = b$ est un préfixe de w_∞ dans \overline{E} mais ce n'en est pas un dans E^* . On appellera *préfixe fractionnaire* de w_∞ tout préfixe de w_∞ qui ou bien n'appartient pas à E^* , ou bien appartient à E^* mais n'est pas un préfixe de w_∞ dans E^* . Ainsi, w_i est un préfixe fractionnaire w_∞ pour tout entier $i \leq -1$.

Exemple 7.5.10 (Exemples de préfixes fractionnaires de w_∞). On a

- i) $w_1 w_{-1} = abb$ est un préfixe de w_∞ car $w_2 = w_1 w_0 = w_1 w_{-1} w_{-2}$
- ii) $w_1^2 = abab$ est un préfixe de w_∞ car $w_1^2 = w_2 w_{-1}$ et $w_3 = w_2 w_{-1} w_{-2} w_{-1}$.
- iii) $w_0^2 = aa$ est un préfixe de w_∞ car $w_0^2 = w_1 w_{-2}$ et $w_2 = w_1 w_{-2} w_{-3} w_{-2}$.

La proposition suivante caractérise les préfixes w_∞ .

Proposition 7.5.11. Soit $\overline{w} \in \overline{E}$. L'élément \overline{w} est un préfixe de w_∞ si et seulement si il existe un couple $(k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et un mot $w \in P(w_\ell)$ tels que

$$\overline{w} = [w, k].$$

Démonstration: Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et soit $w' \in E^*$ tel que $w_\ell = ww'$.

Si $\ell \geq k$, on a

$$[w, k][w', k] = [ww', k] = [w_\ell, k] = [\varphi^\ell(w_0), k] = [\varphi^{\ell-k}(w_0), 0] = [w_{\ell-k}, 0] = w_{\ell-k}$$

Si $\ell < k$. Alors $w_\ell \in P(w_k)$, par suite il existe $w'' \in E^*$ tel que $w_k = ww''$.

$$[w, k][w'', k] = [ww'', k] = [w_k, k] = [\varphi^k(w_0), k] = [w_0, 0] = w_0$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 121

Par conséquent, $[w, k]$ est un préfixe de w_∞ .

Soit $\bar{w} = [w, k] \in \bar{E}$ un préfixe de w_∞ . Il existe $i \in \mathbb{N}$ et $[w', k'] \in \bar{E}$

$$w_i = [w, k][w', k'].$$

On pose $m = \max\{k, k'\}$, il découle de la définition du produit que

$$[w_i, 0] = [\varphi^{m-k}(w)\varphi^{m-k'}(w'), m] = [\varphi^{m+k}(w)\varphi^{m+2k-k'}(w'), m + 2k]$$

Il s'ensuit que

$$\varphi^{m+k}(w)\varphi^{m+2k-k'}(w') = \varphi^{m+2k}(w_i) = \varphi^{m+k}(w_{i+k}).$$

D'où $\varphi^{m+k}(w)$ est un préfixe de $\varphi^{m+k}(w_{i+k})$, par conséquent w est un préfixe de w_{i+k} .

La conclusion suit. ■

On conclut avec une caractérisation plus pratique des préfixes de w_∞ .

Théorème 7.5.12. *Soit $\bar{w} \in \bar{E}$. Le mot \bar{w} est un préfixe de w_∞ si et seulement si il existe une suite (k_1, k_2, \dots, k_p) d'entiers avec $k_1 > k_2 > \dots > k_p$ et $k_i \geq k_{i+1} + 2$ pour tout $1 \leq i \leq p - 1$, telle que*

$$\boxed{\bar{w} = w_{k_1} w_{k_2} \cdots w_{k_p}.}$$

Démonstration: Soit (k_1, k_2, \dots, k_p) une suite d'entiers comme dans le théorème.

On choisit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k'_i := k + k_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$. Puis on pose $\ell = k'_1 + 1$.

Alors, on a

$$\ell > k'_1 > k'_2 > \dots > k'_p \geq 0 \quad \text{et} \quad k'_i \geq k'_{i+1} + 2 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, p - 1,$$

et, en vertu de la remarque qui suit le lemme 7.4.3, on obtient

$$w := w_{k'_1} w_{k'_2} \cdots w_{k'_p} \in P(w_\ell).$$

Par suite,

$$[w, k] = [w_{k'_1} w_{k'_2} \cdots w_{k'_p}, k] = w_{k'_1 - k} w_{k'_2 - k} \cdots w_{k'_p - k} = w_{k_1} w_{k_2} \cdots w_{k_p}$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 122

est un préfixe de w_∞ .

Réciproquement, soit \bar{w} un préfixe de w_∞ . Il existe un couple $(k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et un préfixe $w \in P(w_\ell)$ tels que

$$\bar{w} = [w, k].$$

Pour ce préfixe w , le lemme 7.4.3 assure l'existence d'une suite d'entiers positifs $\ell > k'_1 > k'_2 > \dots > k_p \geq 0$ avec $k'_i \geq k'_{i+1} + 2$ pour $i = 1, \dots, p-1$ telle que

$$w = w_{k'_1} w_{k'_2} \cdots w_{k'_p}.$$

Il s'ensuit que

$$\bar{w} = [w, k] = w_{k'_1 - k} w_{k'_2 - k} \cdots w_{k'_p - k} = w_{k_1} w_{k_2} \cdots w_{k_p},$$

où $k_i = k'_i - k$ pour tout $1 \leq i \leq p-1$. Cela démontre le théorème. ■

7.5.4 Extension de la notion de taille

L'objectif de cette sous-section est d'étendre la notion de taille à \bar{E} et de montrer que son image est l'ensemble $\mathbb{Z}[\gamma]_{\geq 0}$ des éléments ≥ 0 de $\mathbb{Z}[\gamma]$.

Proposition 7.5.13. *Il existe un et un seul morphisme de monoïdes*

$$\mathbf{taille} : \bar{E} \rightarrow \mathbb{Z}[\gamma]_{\geq 0}$$

tel que

$$\mathbf{taille}([w, 0]) = \mathbf{taille}(w) \quad (w \in E^*).$$

De plus, pour tout $w \in E^*$ et tout $i \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathbf{taille}([w, i]) = \frac{\mathbf{taille}(w)}{\gamma^i}$$

Démonstration: Soit $i \in \mathbb{N}$. On considère l'application $g_i : E^* \rightarrow \mathbb{Z}[\gamma]_{\geq 0}$ définie par

$$g_i(w) = \frac{\mathbf{taille}(w)}{\gamma^i} \quad (w \in E^*).$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 123

Clairement g_i est un morphisme de monoïdes. De plus, pour tout $w \in E^*$ et tous $i, j \in \mathbb{N}$ avec $i \leq j$, on a

$$g_j \circ f_{i,j}(w) = g_j(\varphi^{j-i}(w)) = \frac{\text{taille}(\varphi^{j-i}(w))}{\gamma^j} = \frac{\gamma^{j-i} \text{taille}(w)}{\gamma^j} = \frac{\text{taille}(w)}{\gamma^i} = g_i(w)$$

Donc, on a $g_j \circ f_{i,j} = g_i$ pour tout $i \leq j$. Ainsi la propriété universelle de la limite inductive nous assure d'un unique morphisme de monoïdes que l'on notera **taille** : $\overline{E} \rightarrow \mathbb{Z}[\gamma]_{\geq 0}$ tel que

$$g_i = \mathbf{taille} \circ f_i \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Par conséquent, pour tout $w \in E^*$ on a

$$\mathbf{taille}([w, i]) = \mathbf{taille} \circ f_i(w) = g_i(w) = \frac{\text{taille}(w)}{\gamma^i}.$$

Donc en prenant $i = 0$, on obtient $\mathbf{taille}([w, 0]) = \text{taille}(w)$ pour tout $w \in E^*$.

Il reste à montrer que la taille ainsi définie est entièrement déterminée par la condition

$$\mathbf{taille}([w, 0]) = \text{taille}(w) \quad (w \in E^*).$$

Comme $\{[w, i]; w \in E^*\}$ est le monoïde engendré par $w_{-i} = [a, i]$ et $w_{-i-1} = [b, i]$, il suffit de prouver que pour tout entier $i \geq 0$, on a

$$\mathbf{taille}(w_{-i}) = \frac{1}{\gamma^i}, \quad (7.5.3)$$

sachant que $\mathbf{taille}(w_0) = \text{taille}(a) = 1$ et $\mathbf{taille}(w_{-1}) = \text{taille}(b) = 1/\gamma$

Si on suppose que les égalités de (7.5.3) sont vérifiées pour un certain entier $i = 0, \dots, j$ avec $j \geq 1$, on a

$$\mathbf{taille}(w_{-j+1}) = \mathbf{taille}(w_{-j}w_{-j-1}) = \mathbf{taille}(w_{-j}) + \mathbf{taille}(w_{-j-1})$$

il s'ensuit que

$$\mathbf{taille}(w_{-j-1}) = \frac{1}{\gamma^{j-1}} - \frac{1}{\gamma^j} = \frac{1}{\gamma^{i+1}}.$$

La conclusion suit. ■

La réunion des propositions précédentes admet la conséquence suivante.

Corollaire 7.5.14. *On a*

$$\mathbf{taille}(\Phi([w, i])) = \gamma \mathbf{taille}([w, i]) \quad (w \in E^*, i \in \mathbb{N}).$$

Démonstration: Soit $w \in E^*$ et soit i un entier avec $i \geq 0$, on a

$$\mathbf{taille}(\Phi([w, i])) = \mathbf{taille}([\varphi(w), i]) = \frac{\mathbf{taille}(\varphi(w))}{\gamma^i} = \frac{\gamma \mathbf{taille}(w)}{\gamma^i} = \gamma \mathbf{taille}([w, i]).$$

■

On conclut avec le résultat suivant qui étend le théorème 7.2.2 et qui constitue le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 7.5.15. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}[\gamma]_{\geq 0}$, il existe un et un seul préfixe $\bar{w} \in \bar{E}$ de w_∞ tel que*

$$\alpha = \mathbf{taille}(\bar{w}).$$

On dira que \bar{w} est le *préfixe* de w_∞ de taille α .

Démonstration: Soit $\alpha \in \mathbb{Z}[\gamma]$ avec $\alpha \geq 0$. Il existe un entier $i \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 \leq \frac{\alpha}{\gamma^i} < 1.$$

Si on pose $\beta = \alpha/\gamma^i$, il s'ensuit que $\beta \in K$. Donc le théorème 7.2.2 nous assure l'existence d'un entier $\ell \geq 1$ et d'un mot $w \in P(w_\ell)$ tels que $\beta = \mathbf{taille}(w)/\gamma^\ell$. Par conséquent, on a

$$\alpha = \frac{\mathbf{taille}(w)}{\gamma^{\ell-i}}$$

Si $\ell - i \leq 0$, on déduit du lemme 7.2.1 que

$$\alpha = \gamma^{i-\ell} \mathbf{taille}(w) = \mathbf{taille}(\varphi^{i-\ell}(w)) = \mathbf{taille}([\varphi^{i-\ell}(w), 0]).$$

Si $\ell - i > 0$, il s'ensuit que

$$\alpha = \frac{\mathbf{taille}(w)}{\gamma^{\ell-i}} = \mathbf{taille}([w, \ell - i]).$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 125

On déduit de la proposition 7.5.11 que $[\varphi^{i-\ell}(w), 0]$ si $i \geq \ell$ et $[w, \ell - i]$ si $i < \ell$ sont des préfixes de w_∞ .

Pour conclure, il reste à montrer l'unicité de \bar{w} .

Pour cela, on suppose qu'il existe $\bar{w}' = [w', k']$ avec $w' \in P(w_\ell)$ tel que

$$\mathbf{taille}(\bar{w}) = \mathbf{taille}(\bar{w}')$$

Quitte k par k' et w par w' , on suppose sans perte de généralité que $k \geq k'$. Il s'ensuit que

$$\mathbf{taille}(w) = \gamma^{k-k'} \mathbf{taille}(w') = \mathbf{taille}(\varphi^{k-k'}(w')).$$

Par ailleurs, comme la taille est injective sur $P(w_h)$ pour tout $h \geq 1$, on a

$$\varphi^{k-k'}(w') = w.$$

Par conséquent, on a

$$\bar{w}' = [w', k'] = [\varphi^{k-k'}(w'), k] = [w, k] = \bar{w},$$

et la conclusion suit. ■

7.6 Morphisme de \bar{E} vers $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A})$

Rappelons que $\mathfrak{A} = \mathbb{Q}[\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(-1)}]$ et que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les matrices \mathcal{W}_k définies à la section 6.3 par

$$\mathcal{W}_k := \mathfrak{x}^{(k)} M_k$$

satisfont la relation de récurrence

$$\mathcal{W}_{k+2} = \mathcal{W}_{k+1} \mathcal{W}_k \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (7.6.1)$$

Soit $i \in \mathbb{N}$. On considère le morphisme de monoïdes

$$g_i : E^* \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A})$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 126

dont la restriction à E est donnée par

$$g_i(a) = \mathcal{W}_{-i} \quad \text{et} \quad g_i(b) = \mathcal{W}_{-i-1}$$

On note tout d'abord que

$$g_i(w_k) = \mathcal{W}_{k-i} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (7.6.2)$$

Cette relation se démontre par récurrence en utilisant la relation $w_{k+1} = w_k w_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ avec $w_{-1} = b$ et $w_0 = a$ jointe à la relation (7.6.1).

Nous allons maintenant montrer que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ avec $i \leq j$, on a

$$g_i = g_j \circ f_{i,j}$$

où $f_{i,j} : E^* \rightarrow E^*$ est donnée dans l'exemple 7.5.1.

En effet : Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ avec $i \leq j$, on note tout d'abord que

$$g_j \circ f_{i,j}(b) = g_j(\varphi^{j-i}(w_{-1})) = g_j(w_{j-i-1}) = \mathcal{W}_{-j+(j-i-1)} = \mathcal{W}_{-i-1} = g_i(b)$$

et

$$g_j \circ f_{i,j}(a) = g_j(\varphi^{j-i}(w_0)) = g_j(w_{j-i}) = \mathcal{W}_{-j+(j-i)} = \mathcal{W}_{-i} = g_i(a)$$

Par ailleurs, comme g_i est un morphisme, il s'ensuit que

$$g_i(w) = g_j \circ f_{i,j}(w) \quad \text{pour tout } w \in E^* \text{ et tout } i \leq j.$$

Donc, pour cette collection $\{\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A}), g_i, \mathbb{N}\}$, la propriété universelle de la limite inductive assure l'existence d'un unique morphisme

$$\Psi : \overline{E} \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A})$$

tel que

$$g_i = \Psi \circ f_i \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Lemme 7.6.1. *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\Psi(w_i) = \mathcal{W}_i.$$

Démonstration: Soient $i \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $i + k \geq 0$. Par définition, on a $w_i = [w_{i+k}, k]$, donc

$$\begin{aligned}\Psi(w_i) &= \Psi([w_{i+k}, k]) = (\Psi \circ f_k)(w_{i+k}) \\ &= g_k(w_{i+k}) = \mathcal{W}_i \quad (\text{grâce à (7.6.2)}).\end{aligned}$$

■

7.6.1 Matrice associée à un préfixe de w_∞

On commence par introduire la notion suivante.

Définition 7.6.2. Soit $U \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A})$. On dira que U est associée à un préfixe de w_∞ s'il existe un préfixe \bar{w} de w_∞ tel que $U = \Psi(\bar{w})$ c'est-à-dire, s'il existe $(k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $w \in P(w_\ell)$ tels que

$$U = g_k(w) = \Psi([w, k]). \quad (7.6.3)$$

Nous illustrons cette définition par quelques exemples.

Exemple 7.6.3.

- La matrice \mathcal{W}_0^2 est associée à un préfixe de w_∞ car

$$g_2(w_3w_0) = g_2(w_3)g_2(w_0) = \mathcal{W}_1\mathcal{W}_{-2} = \mathcal{W}_0^2$$

et $w_3w_0 \in P(w_4)$. On a $\mathcal{W}_0^2 = \Psi([w_3w_0, 2])$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice $\mathcal{W}_{2n}\mathcal{W}_{-2n}$ est associée à un préfixe de w_∞ car

$$\Psi([w_{4n}w_0, 2n]) = g_{2n}(w_{4n})g_{2n}(w_0) = \mathcal{W}_{2n}\mathcal{W}_{-2n},$$

et $w_{4n}w_0 \in P(w_{4n+1})$.

- La matrice $\mathcal{W}_{2n}\mathcal{W}_{2n-2}\mathcal{W}_{-2n}$ est associée à un préfixe de w_∞ car

$$\Psi([w_{4n}w_{4n-2}w_0, 2n]) = g_{2n}(w_{4n})g_{2n}(w_{4n-2})g_{2n}(w_0) = \mathcal{W}_{2n}\mathcal{W}_{2n-2}\mathcal{W}_{-2n}$$

et $w_{4n}w_{4n-2}w_0 \in P(w_{4n+1})$.

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 128

Le prochain résultat caractérise les matrices associées aux préfixes de w_∞ .

Théorème 7.6.4. *Soit $U \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A})$. La matrice U est associée à un préfixe de w_∞ si et seulement si il existe une suite (k_1, k_2, \dots, k_p) d'entiers avec $k_1 > k_2 > \dots > k_p$ et $k_i \geq k_{i+1} + 2$ pour tout $1 \leq i \leq p - 1$ telle que*

$$U = \Psi(w_{k_1} w_{k_2} \cdots w_{k_p}) = \mathcal{W}_{k_1} \mathcal{W}_{k_2} \cdots \mathcal{W}_{k_p}.$$

Pour une telle matrice, on a $\det(U) = 1$.

Démonstration: Selon le théorème 7.5.12 les préfixes de w_∞ sont les produits $\bar{w} := w_{k_1} w_{k_2} \cdots w_{k_p}$ où (k_1, k_2, \dots, k_p) est comme dans l'énoncé du théorème. Les matrices qui correspondent à ces préfixes sont leurs images sous Ψ . Cela justifie la première affirmation. La seconde s'ensuit car $\det(\mathcal{W}_k) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. ■

7.6.2 Taille des matrices associées à un préfixe de w_∞

Rappelons que pour tout $\alpha = m + n/\gamma \in \mathbb{Z}[\gamma]$, on définit

$$\mathfrak{x}^\alpha = \left(\mathfrak{x}_0^{(0)}\right)^m \left(\mathfrak{x}_0^{(-1)}\right)^n \in \mathfrak{S}^*.$$

On commence par les estimations suivantes.

Théorème 7.6.5. *Soit \bar{w} un préfixe de w_∞ , et soit $\alpha = m + n/\gamma \in \mathbb{Z}[\gamma]_{\geq 0}$ sa taille.*

On a

$$\text{trace}(\Psi(\bar{w})) \sim 3^{m+n} \mathfrak{x}^\alpha \quad \text{et} \quad (\xi, -1)\Psi(\bar{w})J \sim \frac{1}{3^{m+n}} \mathfrak{x}^{-\alpha}(1, \xi).$$

Démonstration: D'après le théorème 7.6.4, il existe une suite décroissante d'entiers $k_1 > \dots > k_\ell$ avec $k_i \geq k_{i+1} + 2$ ($1 \leq i \leq \ell - 1$) telle que

$$\bar{w} = w_{k_1} w_{k_2} \cdots w_{k_\ell}.$$

Alors $\Psi(\bar{w}) = \mathcal{W}_{k_1} \mathcal{W}_{k_2} \cdots \mathcal{W}_{k_\ell}$ et le théorème 6.3.3 livre

$$\Psi(\bar{w}) \sim 3^{\ell-1} \mathfrak{x}_0^{(k_1)} \mathfrak{x}_0^{(k_2)} \cdots \mathfrak{x}_0^{(k_\ell)} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M_{k_\ell}$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 129

$$\text{et } (\xi, -1)\Psi(\bar{w})J \sim \frac{1}{3^\ell} \left(\mathfrak{x}_0^{(k_1)} \mathfrak{x}_0^{(k_2)} \cdots \mathfrak{x}_0^{(k_\ell)} \right)^{-1} (\xi, -1)J.$$

De plus, comme le préfixe \bar{w} s'écrit $w_{k_1} w_{k_2} \cdots w_{k_p}$, sa taille est $m + n/\gamma = \sum_{i=1}^{\ell} \gamma^{k_i}$, donc $m + n = \sum_{i=1}^{\ell} f(k_i + 1)$. Puisque le lemme 6.3.2 donne

$$\mathfrak{x}_0^{(j)} \sim 3^{f(j+1)-1} \left(\mathfrak{x}_0^{(0)} \right)^{f(j)} \left(\mathfrak{x}_0^{(0)} \right)^{f(j-1)} = 3^{f(j+1)-1} \mathfrak{x}^{\gamma^j}$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on en déduit que

$$\mathfrak{x}_0^{(k_1)} \mathfrak{x}_0^{(k_2)} \cdots \mathfrak{x}_0^{(k_\ell)} \sim 3^{m+n-\ell} \mathfrak{x}^\alpha.$$

Enfin, comme

$$\text{trace} \left(\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M \right) = \text{trace} \left(\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} M^T \right) = 3,$$

il s'ensuit que

$$\text{trace}(\Psi(\bar{w})) \sim 3^{\ell-1} 3^{m+n-\ell+1} \mathfrak{x}^\alpha \sim 3^{m+n} \mathfrak{x}^\alpha$$

et

$$(\xi, -1)\Psi(\bar{w})J \sim \frac{1}{3^\ell} 3^{-m-n+\ell} \mathfrak{x}^{-\alpha} (1, \xi) \sim \frac{1}{3^{m+n}} \mathfrak{x}^{-\alpha} (1, \xi).$$

Cela démontre le théorème. ■

Par exemple, en appliquant le théorème avec $\bar{w} = w_i$ pour un entier i quelconque, on obtient l'estimation suivante.

Corollaire 7.6.6. *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a*

$$(\xi, -1)\Psi(w_i)J \sim \frac{1}{3^{f(i+1)}} \mathfrak{x}^{-\gamma^i} (1, \xi). \quad (7.6.4)$$

Par ailleurs, l'estimation de la trace dans le théorème montre que l'application $\bar{w} \mapsto \Psi(\bar{w})$ est injective sur l'ensemble des préfixes de w_∞ dans \bar{E} . Cela permet de définir la taille de la matrice $U = \Psi(\bar{w})$ associée à un préfixe \bar{w} de w_∞ comme étant celle du préfixe en question :

$$\mathbf{taille}(U) = \mathbf{taille}(\bar{w}).$$

7. MATRICES ASSOCIÉES AUX PRÉFIXES DU MOT DE FIBONACCI 130

Exemple 7.6.7. Comme $w_0^2 = w_1w_{-2}$ est un préfixe de w_∞ , on trouve

$$\mathbf{taille}(\mathcal{W}_0^2) = \mathbf{taille}(w_0^2) = 2,$$

$$\mathbf{taille}(\mathcal{W}_2\mathcal{W}_0\mathcal{W}_{-2}) = \mathbf{taille}(w_2w_0w_{-2}) = \gamma^2 + 1 + \gamma^{-2} = 4,$$

$$\mathbf{taille}(\mathcal{W}_4\mathcal{W}_{-4}) = \mathbf{taille}(w_4w_{-4}) = \gamma^4 + \gamma^{-4} = 7.$$

A l'aide de ce concept, le théorème 7.5.15 se reformule en disant que l'application $U \mapsto \mathbf{taille}(U)$ établit une bijection entre les matrices associées aux préfixes de w_∞ et les éléments de $\mathbb{Z}[\gamma]_{\geq 0}$.

Chapitre 8

Preuve de la conjecture 6.6.4 en degré au plus 6

Comme les coefficients des matrices $\mathfrak{X}^{(-2)}$ et $\mathfrak{X}^{(1)}$ sont réalisables en degré au plus 2, les neuf produits $\mathfrak{X}_\ell^{(-2)}\mathfrak{X}_k^{(1)}$ avec $1 \leq k, \ell \leq 2$ sont réalisables en degré au plus 4. Contre toute attente, on montre en fait qu'ils sont réalisables en degré au plus 2. Cela fournit la clé pour les estimations de degré dont nous aurons besoin par la suite. Pour la preuve de la conjecture 6.6.4 pour $d \leq 6$, on construit explicitement, pour chaque $\alpha = m + n/\gamma$ de $\mathbb{Z}[\gamma]$ avec $|m| + |n| \leq d$, des éléments non nuls de $\mathfrak{A}_{\leq d} + \xi\mathfrak{A}_{\leq d}$ dont le terme initial du développement asymptotique est un multiple rationnel non nul de $\xi^j \mathfrak{X}^\alpha$ avec $j = 0, 1, \dots, r_d^{(1)}(\alpha)$ où $r_d^{(1)}(\alpha)$ est comme dans l'annexe B. On peut donner une construction uniforme pour tous les α sauf pour $\alpha = -6/\gamma$ et $\alpha = -2 - 2/\gamma$ lorsque $d = 6$. Dans ces deux cas, la construction est passablement plus compliquée et requiert des identités additionnelles.

8.1 Estimation du degré des éléments de \mathfrak{A}

Soit $\mathfrak{A} = \mathbb{Q}[\mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}]$. Rappelons qu'un élément \mathfrak{U} de \mathfrak{A} est *réalisable* en degré au plus d (notation $\deg \mathfrak{U} \leq d$) s'il s'écrit sous la forme $\mathfrak{U} = P(\mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)})$ pour un polynôme $P \in \mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*]$ de degré total au plus d . Ces éléments forment un sous- \mathbb{Q} -espace vectoriel de \mathfrak{A} noté $\mathfrak{A}_{\leq d}$. Plus généralement, un élément \mathfrak{V} de $\mathfrak{A} + \xi\mathfrak{A}$ est

réalisable en degré au plus d (notation $\deg \mathfrak{X} \leq d$) s'il s'écrit sous la forme $\mathfrak{U} + \xi \mathfrak{U}'$ avec $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}' \in \mathfrak{A}_{\leq d}$.

8.1.1 Résultat clé et quelques conséquences

Le résultat suivant est la clé pour estimer le degré de nombreux éléments de \mathfrak{A} .

Théorème 8.1.1. *Soient k et ℓ des entiers avec $0 \leq k, \ell \leq 2$, on a*

$$\mathfrak{x}_\ell^{(-2)} \mathfrak{x}_k^{(1)} \in \mathfrak{A}_{\leq 2}. \quad (8.1.1)$$

Plus précisément, on a

$$\mathfrak{x}_\ell^{(-2)} \mathfrak{x}_k^{(1)} = \mathfrak{x}_\ell^{(0)} \mathfrak{x}_k^{(0)} \text{ modulo } \mathbb{Q}[\mathfrak{x}^{(-1)}]_{\leq 2}$$

Démonstration: Rappelons que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathfrak{x}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_0^{(i)} & \mathfrak{x}_1^{(i)} \\ \mathfrak{x}_1^{(i)} & \mathfrak{x}_2^{(i)} \end{pmatrix} \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

Soient m et n des entiers avec $0 \leq m, n \leq 1$. Des relations $\mathfrak{x}^{(1)} = \mathfrak{x}^{(0)} M \mathfrak{x}^{(-1)}$ et $\mathfrak{x}^{(0)} = \mathfrak{x}^{(-2)} M \mathfrak{x}^{(-1)}$, on déduit que

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{m+n}^{(1)} &= \left(\mathfrak{x}_m^{(0)}, \mathfrak{x}_{m+1}^{(0)} \right) M \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_n^{(-1)} \\ \mathfrak{x}_{n+1}^{(-1)} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{x}_{m+n}^{(0)} &= \left(\mathfrak{x}_m^{(-2)}, \mathfrak{x}_{m+1}^{(-2)} \right) M \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_n^{(-1)} \\ \mathfrak{x}_{n+1}^{(-1)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

En multipliant la première relation de (8.1.2) par $\mathfrak{x}_j^{(-2)}$ avec $(0 \leq j \leq 2)$, on obtient

$$\mathfrak{x}_j^{(-2)} \mathfrak{x}_{m+n}^{(1)} = \left(\mathfrak{x}_j^{(-2)} \mathfrak{x}_m^{(0)}, \mathfrak{x}_j^{(-2)} \mathfrak{x}_{m+1}^{(0)} \right) M \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_n^{(-1)} \\ \mathfrak{x}_{n+1}^{(-1)} \end{pmatrix}. \quad (8.1.3)$$

On déduit de la relation $\mathfrak{x}^{(0)} J \mathfrak{x}^{(-2)} = \mathfrak{x}^{(-1)} M_1 J$ que

$$\mathfrak{x}_j^{(-2)} \mathfrak{x}_m^{(0)} \equiv \mathfrak{x}_j^{(0)} \mathfrak{x}_m^{(-2)} \text{ mod } (\mathbb{Q}[\mathfrak{x}^{(-1)}]_{\leq 1}).$$

Cette dernière relation jointe à la deuxième égalité de (8.1.3) entraîne que

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_j^{(-2)} \mathfrak{X}_{m+n}^{(1)} &\equiv \mathfrak{X}_j^{(0)} \left(\mathfrak{X}_m^{(-2)}, \mathfrak{X}_{m+1}^{(-2)} \right) M \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_n^{(-1)} \\ \mathfrak{X}_{n+1}^{(-1)} \end{pmatrix} \text{mod}(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}^{(-1)}]_{\leq 2}) \\ &\equiv \mathfrak{X}_j^{(0)} \mathfrak{X}_{m+n}^{(0)} \text{mod}(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}^{(-1)}]_{\leq 2}), \end{aligned}$$

d'où le théorème. ■

Le théorème précédant admet la conséquence suivante.

Proposition 8.1.2. *Soient k et ℓ des entiers avec $0 \leq k, \ell \leq 2$, on a*

$$\mathfrak{X}_\ell^{(-2)} \mathfrak{X}_k^{(2)} \in \mathfrak{A}_{\leq 3} \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}_\ell^{(-3)} \mathfrak{X}_k^{(1)} \in \mathfrak{A}_{\leq 3}. \quad (8.1.4)$$

Démonstration: On note tout d'abord que

$$\mathfrak{X}^{(2)} = \mathfrak{X}^{(0)} M \mathfrak{X}^{(1)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}^{(-3)} = -\mathfrak{X}^{(-1)} J \mathfrak{X}^{(-2)} M J. \quad (8.1.5)$$

En multipliant la première égalité de (8.1.5) par $\mathfrak{X}_\ell^{(-2)}$ avec ($0 \leq \ell \leq 2$) et la deuxième égalité de (8.1.5) par $\mathfrak{X}_k^{(1)}$ avec ($0 \leq k \leq 2$), on obtient

$$\mathfrak{X}_\ell^{(-2)} \mathfrak{X}^{(2)} = \mathfrak{X}^{(0)} M \mathfrak{X}^{(1)} \mathfrak{X}_\ell^{(-2)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}^{(-3)} \mathfrak{X}_k^{(1)} = -\mathfrak{X}^{(-1)} J \mathfrak{X}^{(-2)} M J \mathfrak{X}_k^{(1)}.$$

Comme $\mathfrak{X}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_0^{(i)} & \mathfrak{X}_1^{(i)} \\ \mathfrak{X}_1^{(i)} & \mathfrak{X}_2^{(i)} \end{pmatrix}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on conclut grâce à (8.1.1) que

$$\mathfrak{X}_\ell^{(-2)} \mathfrak{X}_k^{(2)} \in \mathfrak{A}_{\leq 3} \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}_\ell^{(-3)} \mathfrak{X}_k^{(1)} \in \mathfrak{A}_{\leq 3} \quad (0 \leq k, \ell \leq 2). \quad \blacksquare$$

Corollaire 8.1.3. *Pour tous entiers h et ℓ positifs et tout entier $j_i \in \{0, 1, 2\}$ avec $1 \leq i \leq h$, on a*

$$(\mathfrak{X}^{(1)} M_1)^h (\mathfrak{X}^{(-1)} M_1)^\ell \prod_{i=1}^h \mathfrak{X}_{j_i}^{(-3)} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A}_{\leq 3h+\ell}),$$

$$(\mathfrak{X}^{(2)}M)^h (\mathfrak{X}^{(0)}M)^\ell \prod_{i=1}^h \mathfrak{X}_j^{(-2)} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A}_{\leq 3h+\ell}).$$

8.1.2 Estimation du degré d'un produit

Rappelons que $\mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*]$ désigne l'anneau des polynômes en les 6 variables

$$\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{X}^* = (X_0^*, X_1^*, X_2^*).$$

Définition 8.1.4. *On dit qu'un polynôme de $\mathbb{Q}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^*]$ est bi-homogène de bidegré (d, d^*) s'il est séparément homogène de degré d en \mathbf{X} et de degré d^* en \mathbf{X}^* .*

La technique pour estimer le degré d'un produit $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}_{j_1}^{(i_1)} \cdots \mathfrak{X}_{j_s}^{(i_s)}$ dans \mathfrak{A} consiste à écrire chaque facteur $\mathfrak{X}_j^{(i)}$ avec $i \geq 0$ comme un polynôme bihomogène en $\mathfrak{X}^{(1)}$, $\mathfrak{X}^{(0)}$, et chaque facteur $\mathfrak{X}_j^{(i)}$ avec $i < 0$ comme un polynôme bihomogène en $\mathfrak{X}^{(-1)}$ et $\mathfrak{X}^{(-2)}$, puis à appliquer le théorème 8.1.1. Pour ce faire on introduit de nouveaux triplets de variables

$$\mathbf{X}^{(1)} = (X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}) \quad \text{et} \quad \mathbf{X}^{(-2)} = (X_0^{(-2)}, X_1^{(-2)}, X_2^{(-2)}).$$

On commence par le cas $i \geq 0$.

Lemme 8.1.5. *Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, et chaque $j = 0, 1, 2$, il existe un polynôme $P_{i,j}$ dans $\mathbb{Q}[\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}]$, bi-homogène de bidegré $(f(i-1), f(i-2))$ tel que*

$$\boxed{\mathfrak{X}_j^{(i)} = P_{i,j}(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(0)})}.$$

Démonstration: On procède par récurrence sur i . Les cas $i = 0$ et $i = 1$ sont triviaux. Supposons l'énoncé vrai pour les classes $\mathfrak{X}_j^{(i-1)}$ et $\mathfrak{X}_j^{(i)}$ pour $j = 0, 1, 2$ et un entier $i \geq 1$. Alors la relation

$$\mathfrak{X}^{(i+1)} = \mathfrak{X}^{(i)} M_i \mathfrak{X}^{(i-1)}$$

montre que chaque $\mathfrak{X}_j^{(i+1)}$ s'écrit $P_{i+1,j}(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(0)})$ pour un polynôme bi-homogène $P_{i+1,j} \in \mathbb{Q}[\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}]$ avec

$$\begin{aligned} \deg_{\mathbf{X}^{(1)}} P_{i+1,j} &= f(i-1) + f(i-2) = f(i) \\ \deg_{\mathbf{X}} P_{i+1,j} &= f(i-3) + f(i-2) = f(i-1), \end{aligned}$$

comme requis. ■

Le cas des $\mathfrak{X}_j^{(i)}$ avec $i < 0$ est semblable.

Lemme 8.1.6. *Pour chaque entier $i > 0$ et chaque $j = 0, 1, 2$, il existe un polynôme $P_{-i,j}$ dans $\mathbb{Q}[\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^{(-2)}]$ qui est bi-homogène de bidegré $(f(i-3), f(i-2))$ tel que*

$$\boxed{\mathfrak{X}_j^{(-i)} = P_{-i,j}(\mathfrak{X}^{(-1)}, \mathfrak{X}^{(-2)}) \quad (j = 0, 1, 2).}$$

Démonstration: Les cas $i = 1$ et $i = 2$ sont triviaux. Pour la récurrence, on utilise la relation

$$\mathfrak{X}^{(-i-1)} = -JM_{i+1}\mathfrak{X}^{(-i)}J\mathfrak{X}^{(-i+1)}.$$

En supposant le résultat pour les coefficients de $\mathfrak{X}^{(-i)}$ et de $\mathfrak{X}^{(-i+1)}$ pour un entier $i \geq 2$, on trouve que chaque $\mathfrak{X}_j^{(-i-1)}$ s'écrit $P_{-i-1,j}(\mathfrak{X}^{(-1)}, \mathfrak{X}^{(-2)})$ pour un polynôme bi-homogène $P_{-i-1,j} \in \mathbb{Q}[\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^{(-2)}]$ avec

$$\begin{aligned} \deg_{\mathbf{X}^*} P_{-i-1,j} &= f(i-3) + f(i-4) = f(i-2), \\ \deg_{\mathbf{X}^{(-2)}} P_{-i-1,j} &= f(i-2) + f(i-3) = f(i-1). \end{aligned}$$

Cela conclut le pas de récurrence. ■

En combinant le théorème 8.1.1 avec les lemmes 8.1.5 et 8.1.6, on obtient le résultat suivant.

Théorème 8.1.7. *Tout produit $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}_{j_1}^{(i_1)} \cdots \mathfrak{X}_{j_s}^{(i_s)}$ s'écrit comme un polynôme multi-homogène en $(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}, \mathfrak{X}^{(-2)})$. Si $(e_1, e_0, e_{-1}, e_{-2})$ désigne le multi-degré d'un tel polynôme, alors \mathfrak{M} est réalisable en degré au plus*

$$\boxed{2 \max \{e_1, e_{-2}\} + e_0 + e_{-1}.}$$

Démonstration: Soit $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}_{j_1}^{(i_1)} \cdots \mathfrak{X}_{j_s}^{(i_s)}$ un tel produit. On écrit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ où \mathfrak{M}' et \mathfrak{M}'' sont les produits donnés par

$$\mathfrak{M}' = \prod_{\substack{k=1 \\ i_k \geq 0}}^s \mathfrak{X}_{j_k}^{(i_k)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}'' = \prod_{\substack{k=1 \\ i_k < 0}}^s \mathfrak{X}_{j_k}^{(i_k)}.$$

Le lemme 8.1.5 assure l'existence d'un polynôme bi-homogène $P' \in \mathbb{Q}[\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}]$ tel que $\mathfrak{M}' = P'(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(0)})$ tandis que le lemme 8.1.6 fournit un polynôme bi-homogène $P'' \in \mathbb{Q}[\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^{(-2)}]$ tel que $\mathfrak{M}'' = P''(\mathfrak{X}^{(-1)}, \mathfrak{X}^{(-2)})$. Donc

$$\mathfrak{M} = P'(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(0)}) P''(\mathfrak{X}^{(-1)}, \mathfrak{X}^{(-2)})$$

est représenté par un polynôme multihomogène P .

Maintenant, supposons que $(e_1, e_0, e_{-1}, e_{-2})$ soit le multi-degré d'un tel polynôme P . Comme $\mathfrak{X}_\ell^{(-2)}$, $\mathfrak{X}_k^{(1)}$ et $\mathfrak{X}_\ell^{(-2)}\mathfrak{X}_k^{(1)}$ sont réalisables en degré au plus 2 pour tout choix d'entiers $0 \leq k, \ell \leq 2$, on obtient

$$\deg(\mathfrak{M}) \leq 2 \max \{e_1, e_{-2}\} + e_0 + e_{-1}. \quad \blacksquare$$

8.2 Quelques identités dans $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathfrak{A})$

Dans cette section, nous établissons quelques formules qui nous seront utiles pour traiter le cas des exposants $-6/\gamma$ et $-2 - 2/\gamma$ en degré 6. On note d'abord l'égalité matricielle suivante.

Lemme 8.2.1. *Soit k un entier avec $0 \leq k \leq 2$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a*

$$M_\ell \mathfrak{X}^{(i)} = J \mathfrak{X}^{(i)} M_{\ell+1} J + 3\mathfrak{X}_0^{(i)} I.$$

Démonstration: Notons tout d'abord que pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on a

$$\det(M_\ell \mathfrak{X}^{(i)}) = 1 \quad \text{et} \quad \text{trace}(M_\ell \mathfrak{X}^{(i)}) = 3\mathfrak{X}_0^{(i)}.$$

Il découle du théorème de Cayley Hamilton que

$$M_\ell \mathfrak{X}^{(i)} = \text{trace}(M_\ell \mathfrak{X}^{(i)}) I - [\det(M_\ell \mathfrak{X}^{(i)})] (M_\ell \mathfrak{X}^{(i)})^{-1}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} M_\ell \mathfrak{X}^{(i)} &= 3\mathfrak{X}_0^{(i)} I - (M_\ell \mathfrak{X}^{(i)})^{-1} \\ &= 3\mathfrak{X}_0^{(i)} I + J \mathfrak{X}^{(i)} M_{\ell+1} J \quad \text{car} \quad (M_\ell \mathfrak{X}^{(i)})^{-1} = -J \mathfrak{X}^{(i)} M_{\ell+1} J \end{aligned}$$

La conclusion suit. ■

Remarque 8.2.2. En fait le lemme 8.2.1 est vrai pour toute matrice symétrique A au lieu de $\mathfrak{X}^{(i)}$. On peut en donner une preuve semblable ou le vérifier directement.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on définit la matrice $Y^{(i)}$ par

$$Y^{(i)} := G_i^T \mathfrak{X}^{(i)} G_i \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

où $G_i = \begin{pmatrix} (-1)^{i+1} & 3 \\ 0 & (-1)^{i+1} \end{pmatrix}$. Les matrices $Y^{(i)}$ avec $(i \in \mathbb{Z})$ sont toutes symétriques par construction. Donc, si on écrit

$$Y^{(i)} = \begin{pmatrix} Y_0^{(i)} & Y_1^{(i)} \\ Y_1^{(i)} & Y_2^{(i)} \end{pmatrix},$$

alors un calcul simple montre que

$$Y_k^{(i)} = \begin{cases} \mathfrak{X}_0^{(i)} & \text{si } k = 0, \\ \mathfrak{X}_1^{(i)} + 3(-1)^{i+1} \mathfrak{X}_0^{(i)} & \text{si } k = 1, \\ \mathfrak{X}_2^{(i)} + 6(-1)^{i+1} \mathfrak{X}_1^{(i)} + 9\mathfrak{X}_0^{(i)} & \text{si } k = 2. \end{cases}$$

Par conséquent, on a

$$Y_k^{(i)} \sim (\xi + 3(-1)^{i+1})^k \mathfrak{X}_0^{(i)} \quad (0 \leq k \leq 2). \quad (8.2.1)$$

Le prochain résultat lie les coefficients des matrices $Y^{(i-3)}$, $\mathfrak{X}^{(i-2)}$, $\mathfrak{X}^{(i-1)}$ et $\mathfrak{X}^{(i)}$.

Proposition 8.2.3. *Pour tout choix d'entiers i , k et ℓ avec $0 \leq k \leq 2$, on a*

$$\boxed{(M_\ell \mathfrak{X}^{(i-1)}) \mathfrak{X}_k^{(i-2)} - \mathfrak{X}_k^{(i)} I = (J \mathfrak{X}^{(i-1)} M_{\ell+1} J) \mathfrak{X}_k^{(i-2)} + Y_k^{(i-3)} I.}$$

La preuve de la proposition utilise le lemme suivant.

Lemme 8.2.4. *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout entier k avec $0 \leq k \leq 2$, on a*

$$\boxed{3\mathfrak{X}_k^{(i-2)} \mathfrak{X}_0^{(i-1)} - \mathfrak{X}_k^{(i)} = Y_k^{(i-3)}.}$$

Démonstration: La relation $\mathfrak{X}^{(i)} = 3\mathfrak{X}_0^{(i-2)} \mathfrak{X}^{(i-1)} - \mathfrak{X}^{(i-3)}$ signifie que

$$\mathfrak{X}_k^{(i)} = 3\mathfrak{X}_0^{(i-2)} \mathfrak{X}_k^{(i-1)} - \mathfrak{X}_k^{(i-3)} \quad (0 \leq k \leq 2).$$

Par conséquent, on a

$$3\mathfrak{X}_k^{(i-2)} \mathfrak{X}_0^{(i-1)} - \mathfrak{X}_k^{(i)} = \mathfrak{X}_k^{(i-3)} + 3\mathfrak{X}_k^{(i-2)} \mathfrak{X}_0^{(i-1)} - 3\mathfrak{X}_0^{(i-2)} \mathfrak{X}_k^{(i-1)} \quad (0 \leq k \leq 2). \quad (8.2.2)$$

En substituant $k = 0$ dans l'égalité (8.2.2), on obtient

$$3\mathfrak{X}_0^{(i-2)} \mathfrak{X}_0^{(i-1)} - \mathfrak{X}_0^{(i)} = \mathfrak{X}_0^{(i-3)} = Y_0^{(i-3)}.$$

Par ailleurs, il découle de la relation $\mathfrak{X}^{(i-1)} J \mathfrak{X}^{(i-2)} = \mathfrak{X}^{(i-3)} M_{i+1} J$ que

$$(-1)^i \mathfrak{X}_0^{(i-3)} = \mathfrak{X}_0^{(i-1)} \mathfrak{X}_1^{(i-2)} - \mathfrak{X}_1^{(i-1)} \mathfrak{X}_0^{(i-2)} \quad (8.2.3)$$

$$3\mathfrak{X}_0^{(i-3)} + 2(-1)^i \mathfrak{X}_1^{(i-3)} = \mathfrak{X}_0^{(i-1)} \mathfrak{X}_2^{(i-2)} - \mathfrak{X}_2^{(i-1)} \mathfrak{X}_0^{(i-2)}. \quad (8.2.4)$$

Le cas $k = 1$ découle directement de la relation (8.2.2) appliquée $k = 1$ jointe à la relation (8.2.3) tandis que le cas $k = 2$ suit des relations (8.2.2) et (8.2.4). ■

Démonstration: (Proposition 8.2.3)

On déduit du lemme 8.2.1 que

$$\begin{aligned} (M_\ell \mathfrak{X}^{(i-1)}) \mathfrak{X}_k^{(i-2)} - \mathfrak{X}_k^{(i)} I &= (J \mathfrak{X}^{(i-1)} M_{\ell+1} J) \mathfrak{X}_k^{(i-2)} + 3 \mathfrak{X}_k^{(i-2)} \mathfrak{X}_0^{(i-1)} I - \mathfrak{X}_k^{(i)} I \\ &= (J \mathfrak{X}^{(i-1)} M_{\ell+1} J) \mathfrak{X}_k^{(i-2)} + Y_k^{(i-3)} I \quad (\text{lemme 8.2.4}). \end{aligned}$$

■

Proposition 8.2.5. *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout entier k avec $0 \leq k \leq 2$, on a*

$$\boxed{(\mathfrak{X}^{(i+1)}) \mathfrak{X}_k^{(i+1)} - (\mathcal{W}_{i+1} \mathfrak{X}^{(i-1)}) \mathfrak{X}_k^{(i)} = 2(-1)^i (\mathcal{W}_i J) \mathfrak{X}_k^{(i)} - (\mathfrak{X}^{(i)}) Y_k^{(i-3)} + (\mathfrak{X}^{(i-2)}) \mathfrak{X}_k^{(i-2)}}.$$

Pour la preuve, on utilise le lemme suivant

Lemme 8.2.6. *Soit k un entier avec $0 \leq k \leq 2$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\boxed{\mathfrak{X}^{(i)} \mathfrak{X}_k^{(i+1)} - \mathfrak{X}^{(i+1)} \mathfrak{X}_k^{(i)} = \mathfrak{X}^{(i-2)} \mathfrak{X}_k^{(i)} - \mathfrak{X}^{(i)} \mathfrak{X}_k^{(i-2)}}. \quad (8.2.5)$$

$$\boxed{\mathcal{W}_{i-1} \left(\mathfrak{X}^{(i)} \mathfrak{X}_k^{(i+1)} - \mathfrak{X}^{(i+1)} \mathfrak{X}_k^{(i)} \right) = \mathfrak{X}^{(i-2)} \mathfrak{X}_k^{(i-2)} - \mathfrak{X}^{(i)} Y_k^{(i-3)}}. \quad (8.2.6)$$

Démonstration: On déduit de la relation $\mathfrak{X}_k^{(i+1)} = 3\mathfrak{X}_0^{(i-1)} \mathfrak{X}_k^{(i)} - \mathfrak{X}_k^{(i-2)}$ que

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^{(i)} \mathfrak{X}_k^{(i+1)} &= \mathfrak{X}^{(i)} \left(3\mathfrak{X}_0^{(i-1)} \mathfrak{X}_k^{(i)} - \mathfrak{X}_k^{(i-2)} \right) = \left(3\mathfrak{X}_0^{(i-1)} \mathfrak{X}^{(i)} \right) \mathfrak{X}_k^{(i)} - \mathfrak{X}^{(i)} \mathfrak{X}_k^{(i-2)} \\ &= \left(\mathfrak{X}^{(i+1)} + \mathfrak{X}^{(i-2)} \right) \mathfrak{X}_k^{(i)} - \mathfrak{X}^{(i)} \mathfrak{X}_k^{(i-2)} \\ &= \mathfrak{X}^{(i+1)} \mathfrak{X}_k^{(i)} + \mathfrak{X}^{(i-2)} \mathfrak{X}_k^{(i)} - \mathfrak{X}^{(i)} \mathfrak{X}_k^{(i-2)}. \end{aligned}$$

Cela démontre la première égalité du lemme.

Il résulte de l'égalité 8.2.5 que

$$\mathcal{W}_{i-1} \left(\mathfrak{X}^{(i)} \mathfrak{X}_k^{(i+1)} - \mathfrak{X}^{(i+1)} \mathfrak{X}_k^{(i)} \right) = \mathfrak{X}^{(i-1)} M_{i-1} \left(\mathfrak{X}^{(i-2)} \mathfrak{X}_k^{(i)} - \mathfrak{X}^{(i)} \mathfrak{X}_k^{(i-2)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{W}_{i-1} \left(\mathfrak{X}^{(i-2)} \mathfrak{X}_k^{(i)} - \mathfrak{X}^{(i-2)} M_{i-2} \mathfrak{X}^{(i-1)} \mathfrak{X}_k^{(i-2)} \right) \\
&= -\mathcal{W}_{i-1} \mathfrak{X}^{(i-2)} \left[(M_{i-2} \mathfrak{X}^{(i-1)}) \mathfrak{X}_k^{(i-2)} - \mathfrak{X}_k^{(i)} I \right] \\
&= -\mathfrak{X}^{(i)} \left[(M_{i-2} \mathfrak{X}^{(i-1)}) \mathfrak{X}_k^{(i-2)} - \mathfrak{X}_k^{(i)} I \right]
\end{aligned}$$

En posant $\ell = i - 2$ dans la proposition 8.2.3, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{i-1} \left(\mathfrak{X}^{(i)} \mathfrak{X}_k^{(i+1)} - \mathfrak{X}^{(i+1)} \mathfrak{X}_k^{(i)} \right) &= -\mathfrak{X}^{(i)} \left[(J \mathfrak{X}^{(i-1)} M_{i-1} J) \mathfrak{X}_k^{(i-2)} + Y_k^{(i-3)} I \right] \\
&= \mathfrak{X}^{(i-2)} \mathfrak{X}_k^{(i-2)} - \mathfrak{X}^{(i)} Y_k^{(i-3)}
\end{aligned}$$

car on a $\mathfrak{X}^{(i)} J \mathcal{W}_{i-1} J = -\mathfrak{X}^{(i-2)}$. Cela démontre la deuxième égalité. ■

Démonstration: (Proposition 8.2.5)

De la relation $M_{i+1} = M_i + 2(-1)^{i+1} J$, on trouve que

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{X}^{(i+1)}) \mathfrak{X}_k^{(i+1)} - (\mathcal{W}_{i+1} \mathfrak{X}^{(i-1)}) \mathfrak{X}_k^{(i)} &= (\mathfrak{X}^{(i+1)}) \mathfrak{X}_k^{(i+1)} - (\mathfrak{X}^{(i+1)} M_{i+1} \mathfrak{X}^{(i-1)}) \mathfrak{X}_k^{(i)} \\
&= (\mathfrak{X}^{(i+1)}) \mathfrak{X}_k^{(i+1)} - (\mathfrak{X}^{(i+1)} (M_i + 2(-1)^{i+1} J) \mathfrak{X}^{(i-1)}) \mathfrak{X}_k^{(i)} \\
&= (\mathfrak{X}^{(i+1)}) \mathfrak{X}_k^{(i+1)} - (\mathfrak{X}^{(i+1)} M_i \mathfrak{X}^{(i-1)}) \mathfrak{X}_k^{(i)} \\
&\quad - 2(-1)^{i+1} (\mathfrak{X}^{(i+1)} J \mathfrak{X}^{(i-1)}) \mathfrak{X}_k^{(i)} \\
&= \mathcal{W}_{i-1} \left(\mathfrak{X}^{(i)} \mathfrak{X}_k^{(i+1)} - \mathfrak{X}^{(i+1)} \mathfrak{X}_k^{(i)} \right) + 2(-1)^i (\mathcal{W}_i J) \mathfrak{X}_k^{(i)} \\
(\text{grâce à égalité 8.2.6}) &= (\mathfrak{X}^{(i-2)}) \mathfrak{X}_k^{(i-2)} - (\mathfrak{X}^{(i)}) Y_k^{(i-3)} + 2(-1)^i (\mathcal{W}_i J) \mathfrak{X}_k^{(i)}
\end{aligned}$$

■

8.3 Construction d'éléments de $\mathfrak{A} + \xi \mathfrak{A}$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ et soit j un entier avec $0 \leq j \leq a + b + c$. La notation $\left(\left(\mathfrak{X}_*^{(0)} \right)^a \left(\mathfrak{X}_*^{(-1)} \right)^b \left(\mathfrak{X}_*^{(-2)} \right)^c \right)_{2j}$ représente le produit

$$\mathfrak{X}_{h_1}^{(0)} \dots \mathfrak{X}_{h_a}^{(0)} \mathfrak{X}_{i_1}^{(-1)} \dots \mathfrak{X}_{i_b}^{(-1)} \mathfrak{X}_{k_1}^{(-2)} \dots \mathfrak{X}_{k_c}^{(-2)},$$

où $0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_a \leq i_1 \leq \dots \leq i_b \leq k_1 \leq \dots \leq k_c \leq 2$ sont des entiers pairs en ordre croissant égaux à 0 ou 2 de somme

$$h_1 + \dots + h_a + i_1 + \dots + i_b + k_1 + \dots + k_c = 2j.$$

Cette écriture étant unique, on a

$$\left((\mathfrak{x}_\star^{(0)})^a (\mathfrak{x}_\star^{(-1)})^b (\mathfrak{x}_\star^{(-2)})^c \right)_{2j} \sim \xi^{2j} \left(\mathfrak{x}_0^{(0)} \right)^a \left(\mathfrak{x}_0^{(-1)} \right)^b \left(\mathfrak{x}_0^{(-2)} \right)^c$$

La construction suivante permettra de traiter presque tous les cas de la conjecture 6.6.4 en degré au plus 6.

Proposition 8.3.1. *Fixons $(e_2, e_1, e_0, e_{-1}, e_{-2}) \in \mathbb{N}^5$ et $(f_0, f_{-1}, f_{-2}) \in \mathbb{N}^3$. Pour tout entier $j \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq j \leq f_0 + f_{-1} + f_{-2}$, les éléments P_{2j} et P_{2j+1} de $\mathfrak{A} + \xi\mathfrak{A}$ définis par l'égalité matricielle*

$$\boxed{(P_{2j}, P_{2j+1}) = (\xi, -1)\Psi(w_2^{e_2}w_1^{e_1}w_0^{e_0}w_{-1}^{e_{-1}}w_{-2}^{e_{-2}})J\left(\left(\mathfrak{x}_\star^{(0)}\right)^{f_0}\left(\mathfrak{x}_\star^{(-1)}\right)^{f_{-1}}\left(\mathfrak{x}_\star^{(-2)}\right)^{f_{-2}}\right)_{2j}}$$

sont réalisables en degré au plus

$$\boxed{2 \max\{e_2 + e_1, e_{-2} + f_{-2}\} + e_2 + e_0 + e_{-1} + f_0 + f_{-1}.}$$

De plus, si $w_2^{e_2}w_1^{e_1}w_0^{e_0}w_{-1}^{e_{-1}}w_{-2}^{e_{-2}}$ est un préfixe de w_∞ , alors pour tout $i = 0, 1$, on a

$$P_{\alpha, 2j+i} \sim \frac{\xi^{2j+i}}{3^{u+v+f_{-2}}} \left(\mathfrak{x}_0^{(0)} \right)^{f_0+f_{-2}-u} \left(\mathfrak{x}_0^{(-1)} \right)^{f_{-1}-f_{-2}-v}$$

où u et v sont les entiers donnés par

$$u = 2e_2 + e_1 + e_0 + e_{-2} \quad \text{et} \quad v = e_2 + e_1 + e_{-1} - e_{-2}.$$

Démonstration: Soit $j \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq j \leq f_0 + f_{-1} + f_{-2}$. On a $(P_{2j}, P_{2j+1}) = (\xi, -1)G_{2j}$ où G_{2j} désigne la matrice

$$G_{2j} = \mathcal{W}_2^{e_2}\mathcal{W}_1^{e_1}\mathcal{W}_0^{e_0}\mathcal{W}_{-1}^{e_{-1}}\mathcal{W}_{-2}^{e_{-2}}J\left(\left(\mathfrak{x}_\star^{(0)}\right)^{f_0}\left(\mathfrak{x}_\star^{(-1)}\right)^{f_{-1}}\left(\mathfrak{x}_\star^{(-2)}\right)^{f_{-2}}\right)_{2j}.$$

En vertu du lemme 8.1.5, les coefficients de la matrice

$$\mathcal{W}_2^{e_2} \mathcal{W}_1^{e_1} \mathcal{W}_0^{e_0} = (\mathfrak{X}^{(2)} M)^{e_2} (\mathfrak{X}^{(1)} M_1)^{e_1} (\mathfrak{X}^{(0)} M)^{e_0}$$

sont des polynômes bi-homogènes en $\mathfrak{X}^{(1)}$ et $\mathfrak{X}^{(0)}$ de degré t_1 en $\mathfrak{X}^{(1)}$ et t'_0 en $\mathfrak{X}^{(0)}$ avec

$$t_1 = e_2 + e_1 \quad \text{et} \quad t'_0 = e_2 + e_0.$$

D'autre part, chaque coefficient de la matrice

$$\mathcal{W}_{-1}^{e_{-1}} \mathcal{W}_{-2}^{e_{-2}} = (\mathfrak{X}^{(-1)} M_1)^{e_{-1}} (\mathfrak{X}^{(-2)} M)^{e_{-2}}$$

est un polynôme bi-homogène en $\mathfrak{X}^{(-1)}$ et $\mathfrak{X}^{(-2)}$ de bidegré (e_{-1}, e_{-2}) . Il s'ensuit que les coefficients de G_{2j} sont des polynômes multihomogènes en $\mathfrak{X}^{(1)}$, $\mathfrak{X}^{(0)}$, $\mathfrak{X}^{(-1)}$ et $\mathfrak{X}^{(-2)}$ de multi-degré $(t_1, t_0, t_{-1}, t_{-2})$ avec

$$t_1 = e_2 + e_1, \quad t_0 = t'_0 + f_0 = e_2 + e_0 + f_0, \quad t_{-1} = e_{-1} + f_{-1} \quad \text{et} \quad t_{-2} = e_{-2} + f_{-2}.$$

Alors, selon le théorème 8.1.7, les coefficients de G_{2j} sont réalisables en degré au plus

$$2 \max\{t_1, t_{-2}\} + t_0 + t_{-1} = 2 \max\{e_2 + e_1, e_{-2} + f_{-2}\} + e_2 + e_0 + f_0 + e_{-1} + f_{-1}.$$

Comme $(P_{2j}, P_{2j+1}) = (\xi, -1)G_{2j}$, la première affirmation suit.

Maintenant, on suppose que $w_2^{e_2} w_1^{e_1} w_0^{e_0} w_{-1}^{e_{-1}} w_{-2}^{e_{-2}}$ est un préfixe de w_∞ . Comme sa **taille** est $u + v/\gamma$, on déduit du théorème 7.6.5 que

$$(\xi, -1) \mathcal{W}_2^{e_2} \mathcal{W}_1^{e_1} \mathcal{W}_0^{e_0} \mathcal{W}_{-1}^{e_{-1}} \mathcal{W}_{-2}^{e_{-2}} J \sim \frac{1}{3^{u+v}} \left(\mathfrak{X}_0^{(0)} \right)^{-u} \left(\mathfrak{X}_0^{(-1)} \right)^{-v} (1, \xi),$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} (P_{2j}, P_{2j+1}) &\sim \frac{1}{3^{u+v}} \left(\mathfrak{X}_0^{(0)} \right)^{-u} \left(\mathfrak{X}_0^{(-1)} \right)^{-v} \left(\left(\mathfrak{X}_\star^{(0)} \right)^{f_0} \left(\mathfrak{X}_\star^{(-1)} \right)^{f_{-1}} \left(\mathfrak{X}_\star^{(-2)} \right)^{f_{-2}} \right)_{2j} (1, \xi) \\ &\sim \frac{1}{3^{u+v}} \left(\mathfrak{X}_0^{(0)} \right)^{-u} \left(\mathfrak{X}_0^{(-1)} \right)^{-v} \left(\xi^{2j} \left(\mathfrak{X}_0^{(0)} \right)^{f_0} \left(\mathfrak{X}_0^{(-1)} \right)^{f_{-1}} \left(\mathfrak{X}_0^{(-2)} \right)^{f_{-2}} \right) (1, \xi) \\ &\sim \frac{1}{3^{u+v}} \left(\mathfrak{X}_0^{(0)} \right)^{-u+f_0} \left(\mathfrak{X}_0^{(-1)} \right)^{-v+f_{-1}} \left(\mathfrak{X}_0^{(-2)} \right)^{f_{-2}} (1, \xi) \xi^{2j} \end{aligned}$$

$$\sim \frac{1}{3^{u+v+f-2}} \left(\mathfrak{X}_0^{(0)} \right)^{-u+f_0+f-2} \left(\mathfrak{X}_0^{(-1)} \right)^{-v+f-1-f-2} (\xi^{2j}, \xi^{2j+1}).$$

La dernière estimation découle du fait que $\mathfrak{X}_0^{(-2)} \sim \frac{1}{3} \mathfrak{X}_0^{(0)} \left(\mathfrak{X}_0^{(-1)} \right)^{-1}$. ■

8.4 Preuve de la conjecture pour $d \leq 6$

Soit d un entier avec $1 \leq d \leq 6$. Les tables de l'annexe B indiquent les valeurs de $r_d^{(1)}(\alpha)$ calculées par l'ordinateur pour chaque $\alpha = m + n/\gamma$ de $\mathbb{Z}[\gamma]$ pour lequel ce nombre n'est pas nul. Ces points α forment le losange

$$E_d = \{ \alpha = m + n/\gamma \in \mathbb{Z}[\gamma]; |m| + |n| \leq d \}.$$

Pour chaque α dans E_d , on va construire explicitement, pour un entier $r_d(\alpha)$, une famille d'éléments $P_{\alpha,j}$ de $\mathfrak{A}_{\leq d} + \xi \mathfrak{A}_{\leq d}$ avec $0 \leq j < r_d(\alpha)$ dont le terme initial du développement asymptotique soit un multiple rationnel non nul de $\xi^j \mathfrak{X}^\alpha$. En conséquence, on aura $r_d^{(1)}(\alpha) \geq r_d(\alpha)$ pour tout $\alpha \in E_d$. Pour conclure à l'égalité, il suffit de montrer que la somme des $r_d(\alpha)$ avec $\alpha \in E_d$ est égale à celle des $r_d^{(1)}(\alpha)$, c'est-à-dire égale à $2(4d^3 + 6d^2 + 8d + 3)/3$ en vertu de (6.6.2). Par commodité, on s'appuiera plutôt sur les valeurs numériques de $r_d^{(1)}(\alpha)$ fournies dans l'annexe B. On vérifie directement qu'on a l'égalité $r_d^{(1)}(\alpha) = r_d(\alpha)$ pour chaque $\alpha \in E_d$. Comme la somme des valeurs de $r_d^{(1)}(\alpha)$ données par la table est la bonne, cela fournira en fait une démonstration de la conjecture 6.6.4 qui est indépendante des calculs. Cela fournira aussi une base explicite

$$\{ P_{\alpha,j}; \alpha \in E_d \text{ et } 0 \leq j < r_d^{(1)}(\alpha) \}$$

de $\mathfrak{A}_{\leq d} + \xi \mathfrak{A}_{\leq d}$ avec les termes initiaux de leurs développements asymptotiques qui sont linéairement indépendants.

Fixons $\alpha = m + n/\gamma \in E_d$. On définit

$$a_{m,n} = \left\lfloor \frac{d - |m| - |n|}{2} \right\rfloor.$$

Clairement, on a

$$0 \leq a_{m,n} \leq 3 \quad \text{et} \quad |m| + |n| + 2a_{m,n} \leq d.$$

On note aussi $a_{m,n}^{(0)}$ (respectivement par $a_{m,n}^{(1)}$) le reste de $a_{m,n}$ (respectivement de $(|n| + a_{m,n})$) modulo 2 déterminé par

$$a_{m,n} = 2 \left\lfloor \frac{a_{m,n}}{2} \right\rfloor + a_{m,n}^{(0)} \quad \text{et} \quad |n| + a_{m,n} = 2 \left\lfloor \frac{|n| + a_{m,n}}{2} \right\rfloor + a_{m,n}^{(1)}. \quad (8.4.1)$$

8.4.1 1^{er} Cas : $m \geq 0$ et $n \neq -6$.

Dans ce cas, on pose

$$e_2 = e_{-2} = e_0 = 0, \quad f_0 = m, \quad e_1 = f_{-2} = \begin{cases} \lfloor a_{m,n}/2 \rfloor & \text{si } n \geq 0 \\ \lfloor (|n| + a_{m,n})/2 \rfloor & \text{si } n < 0 \end{cases},$$

$$e_{-1} = \begin{cases} a_{m,n}^{(0)} & \text{si } n \geq 0 \\ a_{m,n}^{(1)} & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_{-1} = \begin{cases} n + a_{m,n} & \text{si } n \geq 0 \\ a_{m,n} & \text{si } n < 0 \end{cases}.$$

Fixons $j \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq j \leq f_0 + f_{-1} + f_{-2}$. Pour notre choix de paramètres, on définit les éléments $P_{\alpha,2j}$ et $P_{\alpha,2j+1}$ de $\mathfrak{A} + \xi\mathfrak{A}$ par l'égalité matricielle

$$(P_{\alpha,2j}, P_{\alpha,2j+1}) = (\xi, -1)\Psi(w_1^{e_1}w_{-1}^{e_{-1}})J\left(\left(\mathfrak{X}_*^{(0)}\right)^{f_0} \left(\mathfrak{X}_*^{(-1)}\right)^{f_{-1}} \left(\mathfrak{X}_*^{(-2)}\right)^{e_1}\right)_{2j}$$

1°. Nous allons tout d'abord montrer que $w_1^{e_1}w_{-1}^{e_{-1}}$ est un préfixe de w_∞ .

Pour cela, on note que l'inégalité $|m| + |n| + 2a_{m,n} \leq d$ entraîne $|n| + a_{m,n} \leq 5$ sauf peut-être si $d = 6$, $m = 0$ et $a_{m,n} = 0$ et $n = \pm 6$. Comme $n \neq -6$, on en déduit que

$$\lfloor (|n| + a_{m,n})/2 \rfloor \in \{0, 1, 2\} \quad \text{si } n < 0.$$

De plus, comme $a_{m,n} \leq d/2 \leq 3$, les entiers $\lfloor a_{m,n}/2 \rfloor$, $a_{m,n}^{(0)}$ et $a_{m,n}^{(1)}$ sont tous égaux à 0 ou 1. On déduit de ces observations que

$$w_1^{e_1}w_{-1}^{e_{-1}} \in \{\varepsilon, w_{-1}, w_1, w_1w_{-1}, w_1^2, w_1^2w_{-1}\}.$$

Donc $w_1^{e_1}w_{-1}^{e_{-1}}$ est un préfixe de $w_1^2w_{-1}$. Comme

$$w_1^2w_{-1} = w_1w_0w_{-1}^2 = w_2w_{-1}w_{-2}w_{-3} = w_2w_0w_{-1}$$

est un préfixe de w_∞ (en vertu du théorème 7.5.12), il s'ensuit que $w_1^{e_1}w_{-1}^{e_{-1}}$ est aussi un préfixe de w_∞ .

2°. Nous montrons que pour tout $i = 0, 1$, on a

$$P_{\alpha,2j+i} \in \mathfrak{A}_{\leq d} + \xi\mathfrak{A}_{\leq d} \quad \text{et} \quad P_{\alpha,2j+i} \sim \frac{\xi^{2j+i}}{3^{3e_1+e_{-1}}} \mathfrak{X}^\alpha.$$

Comme $e_2 = e_{-2} = e_0 = 0$ et $e_1 = f_{-2}$, la proposition 8.3.1 donne

$$\deg(P_{\alpha,2j+i}) \leq 2e_1 + e_{-1} + f_0 + f_{-1} \quad (i = 0, 1).$$

On trouve que

$$\begin{aligned} 2e_1 + e_{-1} &= \begin{cases} a_{m,n} & \text{si } n \geq 0, \\ |n| + a_{m,n} & \text{si } n < 0, \end{cases} \\ f_0 + f_{-1} &= \begin{cases} m + n + a_{m,n} & \text{si } n \geq 0, \\ m + a_{m,n} & \text{si } n < 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{8.4.2}$$

donc dans tous les cas

$$2e_1 + e_{-1} + f_0 + f_{-1} = m + |n| + 2a_{m,n} \leq d.$$

Ainsi $P_{\alpha,2j+i}$ est réalisable en degré au plus d pour $i = 0, 1$.

Comme $w_1^{e_1}w_{-1}^{e_{-1}}$ est un préfixe de w_∞ et que $e_1 = f_{-2}$ et $e_2 = e_{-2} = e_0 = 0$, la proposition 8.3.1 donne aussi

$$P_{\alpha,2j+i} \sim \frac{\xi^{2j+i}}{3^{3e_1+e_{-1}}} \left(\mathfrak{X}_0^{(0)} \right)^{f_0} \left(\mathfrak{X}_0^{(-1)} \right)^{f_{-1}-2e_1-e_{-1}}$$

Comme $f_0 = m$, les calculs de (8.4.2) livrent

$$f_{-1} - 2e_1 - e_{-1} = (f_0 + f_{-1}) - (2e_1 + e_{-1}) - m = n,$$

donc

$$P_{\alpha,2j+i} \sim \frac{\xi^{2j+i}}{3^{3e_1+e_{-1}}} \left(\mathfrak{x}_0^{(0)}\right)^m \left(\mathfrak{x}_0^{(-1)}\right)^n = \frac{\xi^{2j+i}}{3^{3e_1+e_{-1}}} \mathfrak{x}^\alpha,$$

comme annoncé.

3°. En vertu de ce qui précède, les $P_{\alpha,2j+i}$ avec $0 \leq j \leq f_0 + f_{-1} + f_{-2}$ et $0 \leq i \leq 1$ ont pour termes initiaux des multiples rationnels non nuls de $\xi^{2j+i} \mathfrak{x}^\alpha$ et sont réalisables en degré au plus d . Cela implique que

$$r_d^{(1)}(\alpha) \geq 2(f_0 + f_{-1} + f_{-2}) + 2 = \begin{cases} 2(m+n) + 2a_{m,n} + 2 \lfloor a_{m,n}/2 \rfloor + 2 & \text{si } n \geq 0, \\ 2m + 2a_{m,n} + 2 \lfloor (|n| + a_{m,n})/2 \rfloor + 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour chaque $\alpha \in E_d$, on a l'égalité car le membre de droite coïncide avec la valeur de $r_d^{(1)}(\alpha)$ donnée par la table de l'annexe B pour le degré d . Voici quelques exemples :

- a) Soit $\alpha = 1 + \gamma^{-1}$. On a $m = n = 1$ et la table en degré $d = 2$ donne $r_2^{(1)}(\alpha) = 6$.
Comme $a_{m,n} = \lfloor (2 - 1 - 1)/2 \rfloor = 0$, on a bien

$$\begin{aligned} 2(f_0 + f_{-1} + f_{-2}) + 2 &= 2(m+n) + 2a_{m,n} + 2 \lfloor a_{m,n}/2 \rfloor + 2 \\ &= 2(1+1) + 2(0) + 2(0) + 2 = 6. \end{aligned}$$

La table en degré $d = 5$ donne $r_5^{(1)}(\alpha) = 8$. Comme $a_{m,n} = \lfloor (5 - 1 - 1)/2 \rfloor = 1$, on a bien

$$\begin{aligned} 2(f_0 + f_{-1} + f_{-2}) + 2 &= 2(m+n) + 2a_{m,n} + 2 \lfloor a_{m,n}/2 \rfloor + 2 \\ &= 2(1+1) + 2(1) + 2(0) + 2 = 8. \end{aligned}$$

- b) Soit $\alpha = 1 - \gamma^{-1}$. Cette fois, on a $m = 1$ et $n = -1$ et la table en degré $d = 3$ donne $r_3^{(1)}(\alpha) = 4$. Comme $a_{m,n} = \lfloor (3 - 1 - 1)/2 \rfloor = 0$, on a bien

$$\begin{aligned} 2(f_0 + f_{-1} + f_{-2}) + 2 &= 2m + 2a_{m,n} + 2 \lfloor (|n| + a_{m,n})/2 \rfloor + 2 \\ &= 2(1) + 2(0) + 2(0) + 2 = 4. \end{aligned}$$

La table en degré $d = 6$ donne $r_6^{(1)}(\alpha) = 10$. On a $a_{m,n} = \lfloor (6 - 1 - 1)/2 \rfloor = 2$ et

$$\begin{aligned} 2(f_0 + f_{-1} + f_{-2}) + 2 &= 2m + 2a_{m,n} + 2 \lfloor (|n| + a_{m,n})/2 \rfloor + 2 \\ &= 2(1) + 2(2) + 2(1) + 2 = 10. \end{aligned}$$

8.4.2 2^e Cas : $m < 0$ avec $(m, n) \notin \{(-1, -5), (-2, -2)\}$ si $d = 6$.

On définit des entiers u et v par

$$u = \begin{cases} |m| - a_{m,n}^{(0)} & \text{si } n \geq 0, \\ |m| - a_{m,n}^{(1)} & \text{si } n < 0, \end{cases} \quad v = \begin{cases} \lfloor a_{m,n}/2 \rfloor + a_{m,n}^{(0)} & \text{si } n \geq 0, \\ \lfloor (|n| + a_{m,n})/2 \rfloor + a_{m,n}^{(1)} & \text{si } n < 0, \end{cases}$$

et on pose

$$\begin{aligned} r &= \min\{u, v\}, & e_2 &= \lfloor (u + 2r)/3 \rfloor, & e_1 &= v - r, \\ e_0 &= (u - r) \pmod{3}, & e_{-1} &= 0, & e_{-2} &= \lfloor (u - r)/3 \rfloor, \\ f_0 &= 0, & f_{-1} &= \begin{cases} n + a_{m,n} & \text{si } n \geq 0, \\ a_{m,n} & \text{si } n < 0, \end{cases} & f_{-2} &= u + v - |m|, \end{aligned}$$

où $(u - r) \pmod{3}$ désigne le plus petit entier ≥ 0 congru à $u - r$ modulo 3.

Les inégalités $m < 0$ et $0 \leq a_{m,n}^{(i)} \leq 1$ avec $i = 0, 1$ entraînent que

$$|m| - a_{m,n}^{(i)} \geq 1 - a_{m,n}^{(i)} \geq 0 \quad (i = 0, 1).$$

Donc, on a $u \geq 0$. On en déduit que les entiers $r, e_2, e_1, e_0, e_{-1}, e_{-2}, f_0$ et f_{-1} sont tous ≥ 0 . On a aussi $f_{-2} \geq 0$ car $u + v \geq |m|$.

Fixons $j \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq j \leq f_{-1} + f_{-2}$. Avec notre nouveau choix de paramètres, on définit les éléments $P_{\alpha, 2j}$ et $P_{\alpha, 2j+1}$ de $\mathfrak{A} + \xi\mathfrak{A}$ par l'égalité matricielle

$$(P_{\alpha, 2j}, P_{\alpha, 2j+1}) = (\xi, -1)\Psi(w_2^{e_2}w_1^{e_1}w_0^{e_0}w_{-2}^{e_{-2}})J\left(\left(\mathfrak{X}_\star^{(-1)}\right)^{f_{-1}}\left(\mathfrak{X}_\star^{(-2)}\right)^{f_{-2}}\right)_{2j}$$

1°. Montrons que $\bar{w} = w_2^{e_2}w_1^{e_1}w_0^{e_0}w_{-2}^{e_{-2}}$ est un préfixe de w_∞ .

On note d'abord que si $e_1 > 0$, alors $r < v$ donc $r = u$ et par suite $e_0 = e_{-2} = 0$, donc

$$e_1 > 0 \implies e_0 = e_{-2} = 0. \quad (8.4.3)$$

On note aussi que

$$u + 2v = \begin{cases} |m| + a_{m,n} & \text{si } n \geq 0, \\ |m| + |n| + a_{m,n} & \text{si } n < 0. \end{cases} \quad (8.4.4)$$

On en déduit

$$3e_2 \leq u + 2r \leq u + 2v \leq d - a_{m,n} \leq 6, \quad (8.4.5)$$

donc

$$0 \leq e_{-2} \leq e_2 \leq 2 \quad (8.4.6)$$

(i) Supposons que $e_2 = 2$.

Alors on a l'égalité dans chacune des inégalités (8.4.5). Donc $r = v$ et $u + 2r = 6$, et par suite $e_1 = r - v = 0$ et $e_0 \equiv u - r \equiv u + 2r \equiv 0 \pmod{3}$, donc $e_0 = 0$ et on conclut grâce à (8.4.6) que \bar{w} est un préfixe de

$$w_2^2 w_{-2}^2 = w_3 w_0 w_{-1} w_{-4} = w_3 w_1 w_{-4}$$

qui est lui même un préfixe de w_∞ . Ce cas est réglé.

(ii) Supposons que $e_2 = 1$.

Dans ce cas on a $3 \leq u + 2r \leq 5$, donc

$$3 + 2e_1 \leq (u + 2r) + 2e_1 = u + 2v \leq 6$$

et par suite $e_1 \leq 1$. Si $e_1 = 1$, alors $e_0 = e_{-2} = 0$ et $\bar{w} = w_2 w_1 = w_3$ est un préfixe de w_∞ . Supposons maintenant que $e_1 = 0$. On a $0 \leq e_0 \leq 2$ et $0 \leq e_{-2} \leq e_2 = 1$ (grâce à (8.4.6)) et alors

$$\bar{w} \in \{w_2, w_2 w_0, w_2 w_0^2, w_2 w_{-2}, w_2 w_0 w_{-2}, w_2 w_0^2 w_{-2}\}$$

Donc, \bar{w} est un préfixe de

$$w_2 w_0^2 w_{-2} = w_2 w_1 w_{-2}^2 = w_3 w_{-1} w_{-4}$$

qui est lui même un préfixe de w_∞ en vertu du théorème 7.5.12.

(iii) Supposons finalement que $e_2 = 0$.

Alors on a $e_{-2} = 0$ en vertu de (8.4.6), donc $\bar{w} = w_1^{e_1} w_0^{e_0}$. Si $e_1 = 0$, on obtient simplement $\bar{w} = w_0^{e_0}$ et comme $0 \leq e_0 \leq 2$, on conclut que \bar{w} est un préfixe de w_∞ . Supposons que $e_1 > 0$. Alors on a $e_0 = 0$ en vertu de (8.4.3) et par suite $\bar{w} = w_1^{e_1}$. Par ailleurs,

$$2e_1 + 3r = 2v + r \leq u + 2v \leq d - a_{m,n} \leq 6 \quad (8.4.7)$$

en utilisant (8.4.5). On en déduit que $e_1 \leq 3$. Si $e_1 \leq 2$, alors \bar{w} est un préfixe de w_1^2 , qui est lui même un préfixe de w_∞ et on a terminé.

Supposons maintenant que $e_1 = 3$. Alors les inégalités (8.4.7) sont toutes des égalités, donc $r = u = a_{m,n} = 0$ et $d = 6$ et par suite $v = e_1 = 3$. Si $n \geq 0$, c'est impossible car alors $v = \lfloor a_{m,n}/2 \rfloor + a_{m,n}^{(0)} = 0$. Si $n < 0$, on a $v = \lfloor |n|/2 \rfloor + a_{m,n}^{(1)}$ avec $a_{m,n}^{(1)} = |n| \pmod{2}$. Comme $|n| \leq d - |m| \leq 5$, cela implique $n = -5$ et $m = -1$, ce qui est exclus en vertu des hypothèses. Donc on a en fait $e_1 \leq 2$, ce qui conclut cette étape.

2°. Nous montrons que pour tout $i = 0, 1$, on a

$$P_{\alpha, 2j+i} \in \mathfrak{A}_{\leq d} + \xi \mathfrak{A}_{\leq d} \quad \text{et} \quad P_{\alpha, 2j+i} \sim \frac{\xi^{2j+i}}{3^c} \mathfrak{X}^\alpha,$$

avec $c = 3e_2 + 2e_1 + e_0 + f_{-2}$.

On note tout d'abord que

$$e_2 + e_1 \geq e_{-2} + f_{-2}. \quad (8.4.8)$$

En effet, comme $e_2 = e_{-2} + r$, $e_1 = v - r$ et $f_{-2} = u + v - |m|$, on a

$$e_2 + e_1 - (e_{-2} + f_{-2}) = (e_{-2} + r) + (v - r) - e_{-2} - (u + v - |m|) = |m| - u \geq 0.$$

La proposition 8.3.1 jointe à l'inégalité (8.4.8) et au fait que $e_{-1} = f_0 = 0$ entraîne que,

$$\deg(P_{\alpha, 2j+i}) \leq 2(e_2 + e_1) + e_2 + e_0 + f_{-1} = 3e_2 + e_0 + 2e_1 + f_{-1}.$$

Comme $u - r \equiv u + 2r \pmod{3}$, on trouve $3e_2 + e_0 = u + 2r$. Comme on a aussi $e_1 = v - r$, on obtient

$$3e_2 + e_0 + 2e_1 = u + 2r + 2(v - r) = u + 2v = \begin{cases} |m| + a_{m,n} & \text{si } n \geq 0, \\ |m| + |n| + a_{m,n} & \text{si } n < 0, \end{cases}$$

en vertu de l'égalité (8.4.4). De plus, comme $f_{-1} = \begin{cases} n + a_{m,n} & \text{si } n \geq 0 \\ a_{m,n} & \text{si } n < 0 \end{cases}$, il s'ensuit que

$$3e_2 + e_0 + 2e_1 + f_{-1} = |m| + |n| + 2a_{m,n} \leq d.$$

D'où $P_{\alpha,2j+i} \in \mathfrak{A}_{\leq d} + \xi \mathfrak{A}_{\leq d}$ pour tout $i = 0, 1$.

Comme $w_2^{e_2} w_1^{e_1} w_0^{e_0} w_{-2}^{e_{-2}}$ est un préfixe de w_∞ et que $e_{-1} = f_0 = 0$ et $e_2 = r + e_{-2}$, la proposition 8.3.1 donne aussi

$$P_{\alpha,2j+i} \sim \frac{\xi^{2j+i}}{3^c} \left(\mathfrak{X}_0^{(0)} \right)^{f_{-2}-3e_{-2}-e_1-e_0-2r} \left(\mathfrak{X}_0^{(-1)} \right)^{f_{-1}-f_{-2}-e_1-r} \quad (i = 0, 1),$$

où $c = 3e_2 + 2e_1 + e_0 + f_{-2}$. Comme $e_1 = v - r$, $3e_{-2} + e_0 = u - r$ et $f_{-2} = u + v - |m|$, on a d'une part que

$$f_{-2} - 3e_{-2} - e_0 - e_1 - 2r = (u + v - |m|) - (u - r) - (v - r) - 2r = -|m| = m$$

mais aussi que

$$f_{-1} - f_{-2} - e_1 - r = f_{-1} - (u + v - |m|) - (v - r) - r = f_{-1} - u - 2v + |m| = n$$

Par suite, on a

$$P_{\alpha,2j+i} \sim \frac{\xi^{2j+i}}{3^c} \left(\mathfrak{X}_0^{(0)} \right)^m \left(\mathfrak{X}_0^{(-1)} \right)^n = \frac{\xi^{2j+i}}{3^c} \mathfrak{X}^\alpha \quad (i = 0, 1).$$

comme annoncé.

3°. En vertu de ce qui précède, les $P_{\alpha,2j+i}$ avec $0 \leq j \leq f_{-1} + f_{-2}$ et $0 \leq i \leq 1$ ont pour termes initiaux des multiples rationnels non nuls de $\xi^{2j+i} \mathfrak{X}^\alpha$ et sont réalisables

en degré au plus d . Cela implique que

$$r_d^{(1)}(\alpha) \geq 2(f_{-1} + f_{-2}) + 2 = \begin{cases} 2n + 2a_{m,n} + 2 \lfloor a_{m,n}/2 \rfloor + 2 & \text{si } n \geq 0, \\ 2a_{m,n} + 2 \lfloor (|n| + a_{m,n})/2 \rfloor + 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour chaque $\alpha \in E_d$, on a l'égalité car le membre de droite coïncide avec la valeur de $r_d^{(1)}(\alpha)$ donnée par la table de l'annexe B pour le degré d . Voici quelques exemples :

- a) Soit $\alpha = -1$. On a $m = -1$, $n = 0$ et la table en degré $d = 1$ donne $r_1^{(1)}(\alpha) = 2$. Comme $a_{m,n} = \lfloor (1 - 1 - 0)/2 \rfloor = 0$, on a bien

$$\begin{aligned} 2(f_{-1} + f_{-2}) + 2 &= 2n + 2a_{m,n} + 2 \lfloor a_{m,n}/2 \rfloor + 2 \\ &= 2(0) + 2(0) + 2(0) + 2 = 2. \end{aligned}$$

La table en degré $d = 6$ donne $r_6^{(1)}(\alpha) = 8$. Comme $a_{m,n} = \lfloor (6 - 1 - 0)/2 \rfloor = 2$, on a bien

$$\begin{aligned} 2(f_{-1} + f_{-2}) + 2 &= 2n + 2a_{m,n} + 2 \lfloor a_{m,n}/2 \rfloor + 2 \\ &= 2(0) + 2(2) + 2(1) + 2 = 8. \end{aligned}$$

- b) Soit $\alpha = 1 - \gamma^{-1}$. Cette fois, on a $m = 1$ et $n = -1$ et la table en degré $d = 2$ donne $r_2^{(1)}(\alpha) = 2$. Comme $a_{m,n} = \lfloor (2 - 1 - 1)/2 \rfloor = 0$, on a bien

$$\begin{aligned} 2(f_{-1} + f_{-2}) + 2 &= 2a_{m,n} + 2 \lfloor (|n| + a_{m,n})/2 \rfloor + 2 \\ &= 2(0) + 2(0) + 2 = 2. \end{aligned}$$

La table en degré $d = 4$ donne $r_4^{(1)}(\alpha) = 6$. On a $a_{m,n} = \lfloor (4 - 1 - 1)/2 \rfloor = 1$ et

$$\begin{aligned} 2(f_{-1} + f_{-2}) + 2 &= 2a_{m,n} + 2 \lfloor (|n| + a_{m,n})/2 \rfloor + 2 \\ &= 2(1) + 2(1) + 2 = 6. \end{aligned}$$

8.4.3 3^e Cas : $\alpha = -1 - 5/\gamma$ (donc $d = 6$).

Fixons $j \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq j \leq 2$. On définit des éléments $P_{\alpha,2j}$ et $P_{\alpha,2j+1}$ de $\mathfrak{A} + \xi\mathfrak{A}$ par l'égalité matricielle

$$(P_{\alpha,2j}, P_{\alpha,2j+1}) = (\xi, -1)\Psi(w_2w_1w_{-1})J\left(\left(\mathfrak{X}_*^{(-2)}\right)^2\right)_{2j}$$

qui correspond au choix de paramètres

$$e_2 = e_1 = e_{-1} = 1, \quad e_0 = e_{-2} = f_0 = f_{-1} = 0 \quad \text{et} \quad f_{-2} = 2.$$

1°. Ici $e_2 + e_1 = e_{-2} + f_{-2} = 2$ et $e_0 = f_0 = f_{-1} = 0$. Alors, la proposition 8.3.1 donne

$$\deg(P_{\alpha,2j+i}) \leq 2(e_2 + e_1) + e_2 + e_{-1} = 2(2) + 1 + 1 = 6 \quad (i = 0, 1).$$

Ainsi $P_{\alpha,2j+i}$ est réalisable en degré au plus 6 pour $i = 0, 1$.

2°. Comme $w_2w_1w_{-1} = w_3w_{-1}$ est un préfixe de w_∞ , on trouve

$$P_{\alpha,2j+i} \sim \frac{\xi^{2j+i}}{3^c} \mathfrak{X}^{-\gamma^2 - \gamma - \gamma^{-1} + 2\gamma^{-2}} = \frac{\xi^{2j+i}}{3^c} \mathfrak{X}^{-1-5/\gamma},$$

pour un entier c .

3°. Ainsi les $P_{\alpha,2j+i}$ construits avec $0 \leq j \leq f_{-2}$ et $0 \leq i \leq 1$ ont pour termes initiaux des multiples rationnels non nuls de $\xi^{2j+i} \mathfrak{X}^\alpha$ et sont réalisables en degré au plus $d = 6$.

Cela implique que

$$r_6^{(1)}(\alpha) \geq 2f_{-2} + 2 = 2(2) + 2 = 6$$

On a l'égalité car la valeur de $r_6^{(1)}(\alpha)$ donnée par la table de l'annexe B est 6. Cela complète le cas $\alpha = -1 - 5/\gamma$.

8.4.4 4^e Cas : $d = 6$ et $\alpha = -2 - 2/\gamma$

Pour traiter ce cas et le cas suivant, on utilise une méthode qui diffère de celle utilisée ci-dessus.

On note d'abord que

$$\alpha = -2 - 2/\gamma = [\gamma^{-2} + (\gamma^{-1} - \gamma^{-2})] - [2\gamma + \gamma^{-1}].$$

En changeant le signe $-$ par un $+$ dans le premier bloc entre crochets, on trouve

$$[\gamma^{-1} + \gamma^{-2} + \gamma^{-2}] - [2\gamma + \gamma^{-1}] = -4/\gamma. \quad (8.4.9)$$

On va construire deux familles de 8 éléments de degré au plus 6 et d'ordre $-4/\gamma$, la première sur la base de cette décomposition et la seconde utilisant la décomposition

$$[1 + \gamma^{-2} + \gamma^{-2}] - [\gamma^2 + \gamma] = -4/\gamma. \quad (8.4.10)$$

Les éléments d'ordre α seront obtenus par soustraction.

Soit j un entier avec $0 \leq j \leq 3$, et soient h, k et ℓ les entiers pairs avec $0 \leq h \leq k \leq \ell \leq 2$ tels que $h + k + \ell = 2j$.

La décomposition (8.4.9) suggère de définir Q_{2j} et Q_{2j+1} par l'égalité matricielle

$$(Q_{2j}, Q_{2j+1}) = (\xi, -1)\mathcal{W}_1^2\mathcal{W}_{-1}J\left(\mathfrak{x}_h^{(-1)}\mathfrak{x}_k^{(-2)}\mathfrak{x}_\ell^{(-2)}\right)$$

La proposition 8.3.1 montre que ceux-ci sont réalisables en degré au plus 6. Comme $w_1^2w_{-1}$ est un préfixe de w_∞ de taille $2\gamma + \gamma^{-1}$, la formule (8.4.9) montre que leur ordre est $-4/\gamma$.

De même (8.4.10) suggère de définir Q'_{2j} et Q'_{2j+1} par

$$(Q'_{2j}, Q'_{2j+1}) = (\xi, -1)\mathcal{W}_2\mathcal{W}_1J\left(\mathfrak{x}_h^{(0)}\mathfrak{x}_k^{(-2)}\mathfrak{x}_\ell^{(-2)}\right)$$

La proposition 8.3.1 montre qu'ils sont réalisables en degré au plus 6. Comme w_2w_1 est un préfixe de w_∞ de taille $\gamma^2 + \gamma$, la formule (8.4.10) montre que leur ordre est aussi $-4/\gamma$.

On définit maintenant $P_{\alpha,2j}$ et $P_{\alpha,2j+1}$ par

$$(P_{\alpha,2j}, P_{\alpha,2j+1}) = (Q'_{2j}, Q'_{2j+1})MJ - (Q_{2j}, Q_{2j+1})MJ$$

$$\begin{aligned}
&= (\xi, -1)\mathcal{W}_3J \left[\mathfrak{x}_h^{(0)}I - (M\mathfrak{x}^{(-2)}) \mathfrak{x}_h^{(-1)} \right] MJ\mathfrak{x}_k^{(-2)}\mathfrak{x}_\ell^{(-2)} \\
&= (\xi, -1)\mathcal{W}_3\mathcal{W}_0J \left[(M_1\mathfrak{x}^{(0)}) \mathfrak{x}_h^{(0)} - (M_1\mathfrak{x}^{(0)}M\mathfrak{x}^{(-2)}) \mathfrak{x}_h^{(-1)} \right] MJ\mathfrak{x}_k^{(-2)}\mathfrak{x}_\ell^{(-2)}
\end{aligned}$$

Proposition 8.4.1. *Pour tout $i = 0, 1$, on a*

$$P_{\alpha, 2j+i} \in \mathfrak{A}_{\leq 6} + \xi\mathfrak{A}_{\leq 6} \quad \text{et} \quad P_{\alpha, 2j+i} \sim \left[\frac{2}{3^9} \xi^{2j+i} \left(\mathfrak{x}_0^{(0)} \right)^{-2} \left(\mathfrak{x}_0^{(-1)} \right)^{-2} \right].$$

Démonstration: La première affirmation est évidente puisque les éléments Q_{2j+i} et Q'_{2j+i} avec $i = 0, 1$ sont tous réalisables en degré au plus 6. Pour la preuve de la deuxième affirmation, on note tout d'abord que pour tout entier h avec $0 \leq h \leq 2$, on a

$$\boxed{(\mathfrak{x}^{(0)}) \mathfrak{x}_h^{(0)} - (\mathcal{W}_0\mathfrak{x}^{(-2)}) \mathfrak{x}_h^{(-1)} = -2(\mathcal{W}_{-1}J) \mathfrak{x}_h^{(-1)} - (\mathfrak{x}^{(-1)}) Y_h^{(-4)} + (\mathfrak{x}^{(-3)}) \mathfrak{x}_h^{(-3)}}.$$

Cette relation découle directement de la proposition 8.2.5 appliquée à $i = -1$.

Cette égalité jointe au fait que $AJA^tJ = -I$ pour toute matrice $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ entraîne que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_3\mathcal{W}_0J \left[(M_1\mathfrak{x}^{(0)}) \mathfrak{x}_h^{(0)} - (M_1\mathcal{W}_0\mathfrak{x}^{(-2)}) \mathfrak{x}_h^{(-1)} \right] \\
&= \left[-2\mathcal{W}_3\mathcal{W}_0JM_1\mathcal{W}_{-1}J\mathfrak{x}_h^{(-1)} - \mathcal{W}_3\mathcal{W}_0JM_1\mathfrak{x}^{(-1)} Y_h^{(-4)} + \mathcal{W}_3\mathcal{W}_0JM_1\mathfrak{x}^{(-3)}\mathfrak{x}_h^{(-3)} \right] \\
&= 2[\mathcal{W}_3\mathcal{W}_{-2}J] \mathfrak{x}_h^{(-1)} - [\mathcal{W}_3\mathcal{W}_{-2}JMJ] Y_h^{(-4)} + [\mathcal{W}_3\mathcal{W}_{-2}\mathcal{W}_{-2}JMJ] \mathfrak{x}_h^{(-3)}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_3\mathcal{W}_0J \left[(M_1\mathfrak{x}^{(0)}) \mathfrak{x}_h^{(0)} - (M_1\mathcal{W}_0\mathfrak{x}^{(-2)}) \mathfrak{x}_h^{(-1)} \right] MJ\mathfrak{x}_k^{(-2)}\mathfrak{x}_\ell^{(-2)} \\
&= 2[\mathcal{W}_3\mathcal{W}_{-2}J] \mathfrak{x}_h^{(-1)}\mathfrak{x}_k^{(-2)}\mathfrak{x}_\ell^{(-2)} - [\mathcal{W}_3\mathcal{W}_{-2}JMJ] Y_h^{(-4)}\mathfrak{x}_k^{(-2)}\mathfrak{x}_\ell^{(-2)} \\
&\quad + [\mathcal{W}_3\mathcal{W}_{-2}\mathcal{W}_{-2}JMJ] \mathfrak{x}_h^{(-3)}\mathfrak{x}_k^{(-2)}\mathfrak{x}_\ell^{(-2)}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme w_3w_{-2} et $w_3w_{-2}^2$ sont des préfixes de w_∞ , on a

$$\text{ordre} \left([(\xi, -1)\mathcal{W}_3\mathcal{W}_{-2}] \mathfrak{x}_h^{(-1)}\mathfrak{x}_k^{(-2)}\mathfrak{x}_\ell^{(-2)} \right) = \gamma^{-1} + 2\gamma^{-2} - \gamma^3 - \gamma^{-2} = -2 - 2\gamma^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{ordre} \left([(\xi, -1)\mathcal{W}_3\mathcal{W}_{-2}] Y_h^{(-4)} \mathfrak{X}_k^{(-2)} \mathfrak{X}_\ell^{(-2)} \right) &= \gamma^{-4} + 2\gamma^{-2} - \gamma^3 - \gamma^{-2} = -6\gamma^{-1} \\ \text{ordre} \left([(\xi, -1)\mathcal{W}_3\mathcal{W}_{-2}\mathcal{W}_{-2}] \mathfrak{X}_h^{(-3)} \mathfrak{X}_k^{(-2)} \mathfrak{X}_\ell^{(-2)} \right) &= 2\gamma^{-2} + \gamma^{-3} - \gamma^3 - 2\gamma^{-2} = -4. \end{aligned}$$

Comme $(-2 - 2\gamma^{-1}) > -6\gamma^{-1} > -4$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (P_{\alpha, 2j}, P_{\alpha, 2j+1}) &\sim 2 [(\xi, -1)\mathcal{W}_2\mathcal{W}_1\mathcal{W}_{-2}J] \mathfrak{X}_h^{(-1)} \mathfrak{X}_k^{(-2)} \mathfrak{X}_\ell^{(-2)} \\ &\sim \left[\frac{2}{3^9} \xi^{2j} \left(\mathfrak{X}_0^{(0)} \right)^{-2} \left(\mathfrak{X}_0^{(-1)} \right)^{-2} \right] (1, \xi) \end{aligned}$$

où la seconde estimation utilise la proposition 8.3.1 et le fait que $h + k + \ell = 2j$. ■

Ainsi les $P_{\alpha, 2j+i}$ construits avec $0 \leq j \leq 3$ et $0 \leq i \leq 1$ ont pour termes initiaux des multiples rationnels non nuls de $\xi^{2j+i} \mathfrak{X}^\alpha$ et sont réalisables en degré au plus $d = 6$. Cela implique que

$$r_6^{(1)}(\alpha) \geq 2(3) + 2 = 8$$

On a l'égalité car la valeur de $r_6^{(1)}(\alpha)$ donnée par la table de l'annexe B est 8. Ce qui règle le cas $\alpha = -2 - 2/\gamma$.

8.4.5 5^e Cas : $\alpha = -6/\gamma$ (donc $d = 6$)

On note d'abord que

$$\alpha = -6/\gamma = [\gamma^{-2} - \gamma^{-3}] - [2\gamma + \gamma^{-1}].$$

En changeant le signe $-$ par un $+$ dans le premier bloc entre crochets, on trouve

$$[\gamma^{-2} + \gamma^{-3}] - [2\gamma + \gamma^{-1}] = -2 - 2/\gamma. \quad (8.4.11)$$

On va construire deux familles de 6 éléments de degré au plus 6 et d'ordre $-2 - 2/\gamma$, la première sur la base de cette décomposition et la seconde utilisant la décomposition

$$[\gamma^{-1} + \gamma^{-2}] - [\gamma^2 + \gamma] = -2 - 2/\gamma. \quad (8.4.12)$$

Les éléments d'ordre α seront obtenus par soustraction.

Soit j un entier avec $0 \leq j \leq 2$, et soient h, k et les entiers pairs avec $0 \leq h \leq k \leq 2$ tels que $h + k = 2j$.

La décomposition (8.4.11) suggère de définir Q_{2j} et Q_{2j+1} par l'égalité matricielle

$$(Q_{2j}, Q_{2j+1}) = (\xi, -1) \mathcal{W}_1^2 \mathcal{W}_{-1} J \left(\mathfrak{X}_h^{(-3)} \mathfrak{X}_k^{(-2)} \right)$$

La proposition 8.1.3 montre que ceux-ci sont réalisables en degré au plus 6. Comme $w_1^2 w_{-1}$ est un préfixe de w_∞ de taille $2\gamma + \gamma^{-1}$, la formule (8.4.11) montre que leur ordre est $-2 - 2/\gamma$.

De même (8.4.12) suggère de définir Q'_{2j} et Q'_{2j+1} par

$$(Q'_{2j}, Q'_{2j+1}) = (\xi, -1) \mathcal{W}_2 \mathcal{W}_1 J \left(\mathfrak{X}_h^{(-1)} \mathfrak{X}_k^{(-2)} \right)$$

La proposition 8.3.1 montre qu'ils sont réalisables en degré au plus 6. Comme $w_2 w_1$ est un préfixe de w_∞ de taille $\gamma^2 + \gamma$, la formule (8.4.12) montre que leur ordre est aussi $-2 - 2/\gamma$.

On définit maintenant $P_{\alpha, 2j}$ et $P_{\alpha, 2j+1}$ de $\mathfrak{A}_{\leq 6} + \xi \mathfrak{A}_{\leq 6}$ par

$$\begin{aligned} (P_{\alpha, 2j}, P_{\alpha, 2j+1}) &= (Q_{2j}, Q_{2j+1}) - (Q'_{2j}, Q'_{2j+1}) \\ &= (\xi, -1) \mathcal{W}_3 J \left[\mathfrak{X}_h^{(-3)} (M \mathfrak{X}^{(-2)}) - \mathfrak{X}_h^{(-1)} I \right] \mathfrak{X}_k^{(-2)}. \end{aligned}$$

Proposition 8.4.2. *Pour $i = 0, 1$, on a*

$$P_{\alpha, 2j+i} \sim \frac{(\xi - 3)^h \xi^{k+i}}{3^8} \mathfrak{X}^\alpha = p_{2j+i}(\xi) \mathfrak{X}^\alpha$$

où $p_{2j+i}(\xi) \in \mathbb{Q}[\xi]$ est de degré exactement $2j + i$.

Démonstration: On note que pour tout entier h avec $0 \leq h \leq 2$, on a

$$\boxed{\mathfrak{X}_h^{(-3)} (M \mathfrak{X}^{(-2)}) - \mathfrak{X}_h^{(-1)} I = Y_h^{(-4)} I + (J \mathfrak{X}^{(-2)} M_1 J) \mathfrak{X}_h^{(-3)}}.$$

Cette relation découle de la proposition 8.2.3 appliquée à $i = -2$ et $\ell = 0$.

Cette égalité jointe au fait que $JJ = -I$ entraîne que

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_3 J \left[\mathfrak{X}_h^{(-3)} (M\mathfrak{X}^{(-2)}) - \mathfrak{X}_h^{(-1)} I \right] \mathfrak{X}_k^{(-2)} &= \left[\mathcal{W}_3 J Y_h^{(-4)} + \mathcal{W}_3 J J \mathfrak{X}^{(-2)} M_1 J \mathfrak{X}_h^{(-3)} \right] \mathfrak{X}_k^{(-2)} \\ &= [\mathcal{W}_3 J] Y_h^{(-4)} \mathfrak{X}_k^{(-2)} - [\mathcal{W}_3 \mathfrak{X}^{(-2)} M_1 J] \mathfrak{X}_h^{(-3)} \mathfrak{X}_k^{(-2)} \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme w_3 et $w_3 w_{-2}$ sont des préfixes de w_∞ , on a

$$\begin{aligned} \text{ordre} \left([(\xi, -1) \mathcal{W}_3 J] Y_h^{(-4)} \mathfrak{X}_k^{(-2)} \right) &= -\gamma^3 + \gamma^{-4} + \gamma^{-2} = -6\gamma^{-1} \\ \text{ordre} \left([(\xi, -1) \mathcal{W}_3 \mathfrak{X}^{(-2)} M_1 J] \mathfrak{X}_h^{(-3)} \mathfrak{X}_k^{(-2)} \right) &= -\gamma^3 - \gamma^{-2} + \gamma^{-3} + \gamma^{-2} = -4, \end{aligned}$$

et comme $-6\gamma^{-1} > -4$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (P_{\alpha, 2j}, P_{\alpha, 2j+1}) &\sim [(\xi, -1) \mathcal{W}_3 J] Y_h^{(-4)} \mathfrak{X}_k^{(-2)} \\ (\text{ corollaire 7.6.6 appliqué à } i = 3) &\sim \left[\frac{1}{3^5} \mathfrak{X}^{-\gamma^3}(1, \xi) \right] Y_h^{(-4)} \mathfrak{X}_k^{(-2)} \\ &\sim \left[\frac{1}{3^5} (\xi - 3)^{h \xi^k} \right] \mathfrak{X}^{-\gamma^3} \mathfrak{X}_0^{(-4)} \mathfrak{X}_0^{(-2)}(1, \xi) \end{aligned}$$

Cette dernière estimation découle la relation (8.2.1) jointe au fait que $\mathfrak{X}_\ell^{(i)} \sim \xi^\ell \mathfrak{X}_0^{(i)}$ avec $\ell = 0, 1, 2$. D'autre part, on a

$$\mathfrak{X}_0^{(-4)} \mathfrak{X}_0^{(-2)} \sim \frac{1}{3^2} \mathfrak{X}^{\gamma^{-4}} \times \frac{1}{3} \mathfrak{X}^{\gamma^{-2}} = \frac{1}{3^3} \mathfrak{X}^{\gamma^{-4} + \gamma^{-2}}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} (P_{\alpha, 2j}, P_{\alpha, 2j+1}) &\sim \left[\frac{1}{3^5} (\xi - 3)^{h \xi^k} \mathfrak{X}^{-\gamma^3} \times \frac{1}{3^3} \mathfrak{X}^{\gamma^{-4} + \gamma^{-2}} \right] (1, \xi) \\ &\sim \left[\frac{1}{3^8} (\xi - 3)^{h \xi^k} \right] \mathfrak{X}^{-6/\gamma}(1, \xi) = \frac{1}{3^8} (\xi - 3)^{h \xi^k} \mathfrak{X}^\alpha(1, \xi). \end{aligned}$$

La conclusion suit car $(\xi - 3)^{h \xi^k}$ est un polynôme en ξ de $\mathbb{Q}[\xi]$ de degré $h + k = 2j$. ■

En vertu de ce qui précède, on a $r_6^{(1)}(-6/\gamma) \geq 6$. Comme 6 est la valeur de $r_6^{(1)}(-6/\gamma)$ donnée par la table de l'annexe B en degré 6, cela complète le cas $\alpha = -6/\gamma$, et donc termine la preuve de la conjecture pour les degrés 1 à 6.

Chapitre 9

Étude de quelques familles de $\mathfrak{A} + \xi\mathfrak{A}$

Dans ce chapitre, on commence par établir quelques propriétés reliées à la trace de γ^{2k} pour $k \in \mathbb{N}$ qu'on utilisera par la suite pour donner la forme explicite de certains préfixes de w_∞ dont la taille est un multiple rationnel de la trace de γ^{2k} . Ensuite, on calcule le degré de quatre familles particulières associées à ces préfixes de w_∞ .

9.1 Résultats préliminaires

Nous étudions la trace de γ^{2k} pour $k \in \mathbb{N}$ et nous en donnons quelques propriétés. On rappelle que le nombre d'or γ est une solution de l'équation polynomiale

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Par conséquent, on a $\gamma^2 = \gamma + 1$; ainsi γ^2 satisfait à

$$0 = (x - 1)^2 - (x - 1) - 1 = x^2 - 3x + 1.$$

Par suite, on a

$$\gamma^4 = 3\gamma^2 - 1. \tag{9.1.1}$$

Soit k un entier avec $k \geq 0$. En multipliant l'égalité (9.1.1) par γ^{2k} , on obtient

$$\gamma^{2k+4} = 3\gamma^{2k+2} - \gamma^{2k}. \tag{9.1.2}$$

Comme la trace de $\mathbb{Q}(\gamma)$ dans \mathbb{Q} est \mathbb{Q} -linéaire, il s'ensuit que

$$\text{trace}(\gamma^{2k+4}) = 3 \text{trace}(\gamma^{2k+2}) - \text{trace}(\gamma^{2k}).$$

Par ailleurs, la définition de la trace jointe à l'égalité (9.1.1) impliquent que

$$\text{trace}(\gamma^0) = 2 \quad \text{et} \quad \text{trace}(\gamma^2) = 3.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$q_k := \text{trace}(\gamma^{2k}).$$

Alors, on a

$$q_0 = 2, \quad q_1 = 3 \quad \text{et} \quad q_k = 3q_{k-1} - q_{k-2} \quad (k \geq 2).$$

Le lemme suivant caractérise la parité des entiers q_k .

Lemme 9.1.1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$q_{3k} \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{et} \quad q_{3k+1} \equiv q_{3k+2} \equiv 1 \pmod{2}$$

Démonstration: La suite $(q_k)_{k \geq 0}$ est une suite récurrente linéaire satisfaisant

$$q_k \equiv q_{k-1} + q_{k-2} \pmod{2} \quad (k \geq 2),$$

et ses premiers termes sont

$$q_0 = 2 \equiv 0 \pmod{2}, \quad q_1 = 3 \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{et} \quad q_2 = 7 \equiv 1 \pmod{2}.$$

■

Le prochain résultat donne une expression de q_n en termes des valeurs de f .

Lemme 9.1.2. *Soit n un entier avec $n \geq 0$, on a*

$$q_n = 2f(2n - 1) + f(2n - 4).$$

Démonstration: De la relation $2f(i) = f(i + 1) + f(i - 2)$, on déduit que

$$2f(2n - 1) + f(2n - 4) = f(2n) + f(2n - 2)$$

$$\begin{aligned} &= (f(2n) + f(2n-1)/\gamma) + (f(2n-2) - f(2n-1)/\gamma) \\ &= \gamma^{2n} + \gamma^{-2n}. \end{aligned}$$

La dernière égalité découle du fait que $\gamma^{-i} = (-1)^i(f(i-2) - f(i-1)/\gamma)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. La conclusion suit. \blacksquare

Dans toute la suite, on notera n_0 (respectivement n_1) le reste de n (respectivement $2n$) modulo 3 déterminé par

$$n = 3\lfloor n/3 \rfloor + n_0 \quad \text{et} \quad 2n = 3\lfloor 2n/3 \rfloor + n_1.$$

Clairement, on a $n_1 = 2n_0$ si $n_0 < 2$ et $n_1 = 2n_0 - 3$ si $n_0 = 2$. De plus, on a

$$q_n \equiv f(n_1 - 1) \pmod{2}.$$

Cela découle du fait que $f(n_1 - 1) = 0$ si $n \equiv 0 \pmod{3}$ et $f(n_1 - 1) = 1$ sinon.

Lemme 9.1.3. *Pour tout entier n avec $n \geq 1$. On a*

$$\frac{q_n - f(n_1 - 1)}{2} = f(2n - 1) + \sum_{k=2}^{m_1} f(2n - 3k),$$

où $m_1 = \lfloor 2n/3 \rfloor = (2n - n_1)/3$.

Démonstration: Il résulte du lemme 9.1.2 que

$$\frac{q_n - f(n_1 - 1)}{2} = f(2n - 1) + \frac{f(2n - 4) - f(n_1 - 1)}{2}$$

Donc démontrer le lemme 9.1.3 revient à montrer que

$$f(2n - 4) - f(n_1 - 1) = 2 \sum_{k=2}^{m_1} f(2n - 3k).$$

En substituant $i = 2n - 3k$ dans l'égalité $2f(i) = f(i+2) - f(i-1)$, on trouve que

$$2f(2n - 3k) = f(2n - 3k + 2) - f(2n - 3k - 1).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=2}^{m_1} f(2n-3k) &= \sum_{k=2}^{m_1} f(2n-3k+2) - \sum_{k=2}^{m_1} f(2n-3k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{m_1-1} f(2n-3k-1) - \sum_{k=2}^{m_1} f(2n-3k-1) \\ &= f(2n-4) - f(n_1-1). \end{aligned}$$

La conclusion suit. ■

Le prochain résultat donne une décomposition de $\frac{q_n - f(n_1-1)}{2}\gamma + f(n_1-1)\gamma^{-1}$.

Proposition 9.1.4. *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En posant $m_0 = \lfloor n/3 \rfloor = (n - n_0)/3$, on a*

$$\begin{aligned} \frac{q_n - f(n_1-1)}{2}\gamma + f(n_1-1)\gamma^{-1} &= \gamma^{2n-1} + 2 \sum_{k=1}^{m_0} \gamma^{2n-6k+1} + 2 \sum_{k=1}^{m_0-1} \gamma^{-2n+6k+1} + \gamma^{-2n+3} \\ &\quad + \begin{cases} 0 & \text{si } n_0 = 0, \\ \gamma^{-3} & \text{si } n_0 = 1, \\ \gamma^{-1} + 2\gamma^{-3} & \text{si } n_0 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

La preuve de la proposition 9.1.4 utilise le lemme suivant.

Lemme 9.1.5. *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors en posant $m_0 = \lfloor n/3 \rfloor = (n - n_0)/3$, on a*

$$f(2n-3) + \sum_{k=2}^{2m_0} f(2(n-1)-3k) = q_{n-2} + 2 \sum_{k=1}^{m_0-1} q_{n-3k-1} + f(2n_0). \quad (9.1.3)$$

Démonstration: Du lemme 9.1.2, on déduit la formule $2q_i = f(2i+2) + f(2i-4)$ qui donne

$$2q_{n-3k-1} = f(2n-6k) + f(2n-6k-6) \quad (1 \leq k \leq m_0-1)$$

Donc,

$$q_{n-2} + 2 \sum_{k=1}^{m_0-1} q_{n-3k-1} + f(2n_0) = f(2n-4) + \sum_{k=1}^{m_0} f(2n-6k) + \sum_{k=0}^{m_0-1} f(2n-6k-6)$$

$$= f(2n - 4) + 2 \sum_{k=1}^{m_0} f(2n - 6k)$$

Par ailleurs, comme $2f(i) = f(i + 1) + f(i - 2) =$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on trouve que

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^{m_0} f(2n - 6k) &= \sum_{k=1}^{m_0} f(2n - 6k + 1) + \sum_{k=1}^{m_0} f(2n - 6k - 2) \\ &= \sum_{k=0}^{m_0-1} f(2n - 6k - 5) + \sum_{k=1}^{m_0} f(2(n - 1) - 6k) \\ &= f(2n - 5) + \sum_{k=1}^{m_0-1} f(2(n - 1) - 6k - 3) + \sum_{k=1}^{m_0} f(2(n - 1) - 6k) \\ &= f(2n - 5) + \sum_{k=2}^{2m_0} f(2(n - 1) - 3k). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} q_{n-2} + 2 \sum_{k=1}^{m_0-1} q_{n-3k-1} + f(2n_0) &= f(2n - 4) + f(2n - 5) + \sum_{k=2}^{2m_0} f(2(n - 1) - 3k) \\ &= f(2n - 3) + \sum_{k=2}^{2m_0} f(2(n - 1) - 3k), \end{aligned}$$

d'où le lemme 9.1.5. ■

Démonstration: (Proposition 9.1.4)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \frac{q_n - f(n_1 - 1)}{2} \quad \text{et} \quad b_n = a_n \gamma + f(n_1 - 1) \gamma^{-1}.$$

Comme dans les lemmes 9.1.3 et 9.1.5, on pose

$$m_0 = (n - n_0)/3 \quad \text{et} \quad m_1 = (n - n_1)/3.$$

Grâce au lemme 9.1.3, on a

$$a_n = \frac{q_n - f(n_1 - 1)}{2} = f(2n - 1) + \sum_{k=2}^{m_1} f(2n - 3k).$$

En multipliant cette égalité par $\gamma = 1 + \gamma^{-1}$, un calcul simple montre que

$$a_n \gamma = \gamma^{2n-1} + \sum_{k=2}^{m_1} \gamma^{2n-3k} + \left[f(2n-3) + \sum_{k=2}^{m_1} f(2(n-1)-3k) \right] \gamma^{-1}. \quad (9.1.4)$$

• Si $n_0 \in \{0, 1\}$, alors on a $n_1 = 2n_0$. L'égalité (9.1.4) jointe au lemme 9.1.5 entraîne que

$$a_n \gamma = \gamma^{2n-1} + \sum_{k=2}^{2m_0} \gamma^{2n-3k} + f(n_1) \gamma^{-1} + q_{n-2} \gamma^{-1} + 2 \sum_{k=1}^{m_0-1} q_{n-3k-1} \gamma^{-1}.$$

Comme $q_m = \gamma^{2m} + \gamma^{-2m}$ avec $m \geq 0$, il s'ensuit que

$$q_m \gamma^{-1} = \gamma^{2m-1} + \gamma^{-2m-1} \quad (9.1.5)$$

En substituant $m = n - 2$ respectivement $m = n - 3k - 1$ dans (9.1.5), on obtient

$$q_{n-2} \gamma^{-1} = \gamma^{2n-5} + \gamma^{-2n+3} \quad \text{et} \quad q_{n-3k-1} \gamma^{-1} = \gamma^{2n-6k-3} + \gamma^{-2n+6k+1}.$$

On déduit de ces observations que

$$\begin{aligned} b_n &= \gamma^{2n-1} + \sum_{k=2}^{2m_0} \gamma^{2n-3k} + f(n_1+1) \gamma^{-1} + (\gamma^{2n-5} + \gamma^{-2n+3}) \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{m_0-1} (\gamma^{2n-6k-3} + \gamma^{-2n+6k+1}) \\ &= \gamma^{2n-1} + \gamma^{2n-5} + \sum_{k=2}^{2m_0} \gamma^{2n-3k} + \sum_{k=1}^{m_0-1} 2\gamma^{2n-6k-3} + f(n_1+1) \gamma^{-1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m_0-1} 2\gamma^{-2n+6k+1} + \gamma^{-2n+3} \\ &= \gamma^{2n-1} + \gamma^{2n-5} + \sum_{k=1}^{m_0} \gamma^{2n-6k} + 3 \sum_{k=1}^{m_0-1} \gamma^{2n-6k-3} + f(n_1+1) \gamma^{-1} \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{m_0-1} \gamma^{-2n+6k+1} + \gamma^{-2n+3} \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $3\gamma^i = \gamma^{i+2} + \gamma^{i-2}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, il s'ensuit que

$$\gamma^{2n-5} + \sum_{k=1}^{m_0} \gamma^{2n-6k} + 3 \sum_{k=1}^{m_0-1} \gamma^{2n-6k-3} = \sum_{k=1}^{m_0} \gamma^{2n-6k+1} + \sum_{k=0}^{m_0-1} \gamma^{2n-6k-5} - \gamma^{2n_0-1}.$$

D'autre part, un calcul simple montre que si $n_0 \in \{0, 1\}$, on a

$$a_{n_0} := f(n_1 + 1)\gamma^{-1} - \gamma^{2n_0-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n_0 = 0, \\ \gamma^{-3} & \text{si } n_0 = 1. \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} b_n &= \gamma^{2n-1} + \sum_{k=1}^{m_0} \gamma^{2n-6k+1} + \sum_{k=0}^{m_0-1} \gamma^{2n-6k-5} + a_{n_0} + 2 \sum_{k=1}^{m_0} \gamma^{-2n+6k+1} + \gamma^{-2n+3} \\ &= \gamma^{2n-1} + \sum_{k=1}^{m_0} \gamma^{2n-6k+1} + \sum_{k=0}^{m_0-1} \gamma^{2m-6k-5} + a_{n_0} + 2 \sum_{k=1}^{m_0-1} \gamma^{-2n+6k+1} + \gamma^{-2n+3} \\ &= \gamma^{2n-1} + \sum_{k=1}^{m_0} \gamma^{2n-6k+1} + \sum_{k=1}^{m_0} \gamma^{2n-6k+1} + a_{n_0} + 2 \sum_{k=1}^{m_0-1} \gamma^{-2n+6k+1} + \gamma^{-2n+3} \\ &= \gamma^{2n-1} + 2 \sum_{k=1}^{m_0} \gamma^{2n-6k+1} + a_{n_0} + 2 \sum_{k=1}^{m_0-1} \gamma^{-2n+6k+1} + \gamma^{-2n+3} \end{aligned}$$

D'où les cas $n_0 = 0$ et $n_0 = 1$.

- Le cas $n_0 = 2$ s'obtient par le même procédé en remarquant que

$$f(2n-3) + \sum_{k=2}^{m_1} f(2(n-1)-3k) = q_{n-2} + 2 \sum_{k=1}^{m_0} q_{n-3k-1} - 1.$$

■

9.2 Forme explicite de certains préfixes de w_∞

Ici, nous donnons une écriture particulière des préfixes de w_∞ de taille q_n , $q_n\gamma^{-1}$, $q_n\gamma$ et $((q_n - f(n_1 - 1))/2)\gamma + f(n_1 - 1)\gamma^{-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 9.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Le préfixe de w_∞ de taille q_n est donné par*

$$\boxed{w_{2n}w_{-2n}}, \tag{9.2.1}$$

celui de taille $q_n\gamma^{-1}$ par

$$\boxed{w_{2n-1}w_{-2n-1}}, \quad (9.2.2)$$

et celui de taille $q_n\gamma$ par

$$\boxed{w_{2n+1}w_{-2n+1}}. \quad (9.2.3)$$

Démonstration: Clairement, on a

$$w_{2n}w_{-2n} \in P(w_{2n}w_0), \quad w_{2n-1}w_{-2n-1} \in P(w_{2n-1}w_0) \quad \text{et} \quad w_{2n+1}w_{-2n+1} \in P(w_{2n+1}w_0).$$

Par ailleurs, on a aussi

$$\begin{aligned} \text{taille}(w_{2n}w_{-2n}) &= \gamma^{2n} + \gamma^{-2n} = q_n, \\ \text{taille}(w_{2n-1}w_{-2n-1}) &= \gamma^{2n-1} + \gamma^{2n-1} = (\gamma^{2n} + \gamma^{-2n})\gamma^{-1} = q_n\gamma^{-1} \text{ et} \\ \text{taille}(w_{2n+1}w_{-2n+1}) &= \gamma^{2n+1} + \gamma^{2n+1} = (\gamma^{2n} + \gamma^{-2n})\gamma = q_n\gamma. \end{aligned}$$

■

Les deux prochains résultats donnent une écriture du préfixe de w_∞ de taille de $((q_n - f(n_1 - 1))/2)\gamma + f(n_1 - 1)\gamma^{-1}$ d'abord pour $n \equiv 0 \pmod{3}$ et ensuite pour $n \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Lemme 9.2.2. *Soit n un entier avec $n > 0$. Supposons que $n \equiv 0 \pmod{3}$, alors le préfixe de w_{2n} de taille $(q_n/2)\gamma$ est donné par*

$$\boxed{w_{2n-1}(w_{2n-5})^2 \cdots (w_1)^2(w_{-5})^2 \cdots (w_{-2n+7})^2 w_{-2n+3}} \quad (9.2.4)$$

où les indices $2n-5, \dots, 1, -5, \dots, -2n+7$ des carrés forment une progression arithmétique de raison 6.

Démonstration: On pose

$$P_n = w_{2n-1}(w_{2n-5})^2 \cdots (w_1)^2(w_{-5})^2 \cdots (w_{-2n+7})^2 w_{-2n+3}$$

Comme la taille est un morphisme de monoïdes de \overline{E} dans $\mathbb{Z}[\gamma]_{\geq 0}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \text{taille}(P_n) &= \gamma^{2n-1} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{3}} \gamma^{2n-6k+1} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{3}-1} \gamma^{-2n+6k+1} + \gamma^{-2n+3} \\ &= \frac{q_n}{2} \gamma \quad (\text{proposition 9.1.4 avec } n_0 = 0). \end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à montrer que $P_n \in P(w_{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \equiv 0 \pmod{3}$. On procède par récurrence sur $n > 0$. Pour $n = 3$, on a

$$P_3 = w_5(w_1)^2 w_{-3} = w_5 w_2 w_{-1} w_{-3} \in P(w_6).$$

Le cas $n = 3$ suit.

On suppose maintenant que pour un certain entier $n \geq 3$ avec $n \equiv 0 \pmod{3}$, on ait

$$P_n \in P(w_{2n}).$$

Nous allons montrer que P_{n+3} est un *préfixe* de w_{2n+6} où le mot P_{n+3} est donné par

$$P_{n+3} = w_{2n+5}(w_{2n+1})^2(w_{2n-5})^2 \cdots (w_1)^2(w_{-5})^2 \cdots (w_{-2n+7})^2(w_{-2n+1})^2 w_{-2n-3}.$$

La relation $(w_i)^2 = w_{i+1}w_{i-2}$ avec $i \in \mathbb{Z}$ donne

$$P_{n+3} = w_{2n+5}w_{2n+3}w_{2n-1}(w_{2n-5})^2 \cdots (w_1)^2(w_{-5})^2 \cdots (w_{-2n+7})^2(w_{-2n+1})^2 w_{-2n-3}.$$

Comme $w_{2n+6} = w_{2n+5}w_{2n+3}w_{2n}w_{2n-1}w_{2n}$, il reste à montrer que

$$w_{2n-1}(w_{2n-5})^2 \cdots (w_1)^2(w_{-5})^2 \cdots (w_{-2n+7})^2(w_{-2n+1})^2 w_{-2n-3} \in P(w_{2n}).$$

Pour cela, on note simplement que

$$(w_{-2n+1})^2 w_{-2n-3} = w_{-2n+2}w_{-2n-1}w_{-2n-3} \in P(w_{-2n+3}).$$

Il s'ensuit que

$$w_{2n-1}(w_{2n-5})^2 \cdots (w_1)^2(w_{-5})^2 \cdots (w_{-2n+7})^2(w_{-2n+1})^2 w_{-2n-3} \in P(P_n) \subset P(w_{2n}).$$

Donc P_{n+3} est un préfixe de w_{2n+6} . ■

Lemme 9.2.3. *Soit n un entier avec $n \geq 2$. Supposons que $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, le préfixe de w_{2n} de longueur $((q_n - 1)/2)\gamma + \gamma^{-1}$ est donné par*

$$\boxed{w_{2n-1}(w_{2n-5})^2 \cdots (w_3)^2 w_{-3}(w_{-7})^2 \cdots (w_{-2n+7})^2 w_{-2n+3} \quad \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}} \quad (9.2.5)$$

et

$$\boxed{w_{2n-1}(w_{2n-5})^2 \cdots (w_5)^2 w_{-1}(w_{-3})^2 \cdots (w_{-2n+7})^2 w_{-2n+3} \quad \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}} \quad (9.2.6)$$

où les indices des carrés forment une progression arithmétique de raison 6.

Démonstration: Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ avec $n \not\equiv 0 \pmod{3}$. La proposition 9.1.4 nous donne

$$\begin{aligned} & \frac{q_n - 1}{2} \gamma + \gamma^{-1} \\ &= \begin{cases} \gamma^{2n-1} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{3}} \gamma^{2n-6k+1} + \gamma^{-3} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-4}{3}} \gamma^{-2n+6k+1} + \gamma^{-2n+3} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \gamma^{2n-1} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{3}} \gamma^{2n-6k+1} + \gamma^{-1} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{3}} \gamma^{-2n+6k+1} + \gamma^{-2n+3} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

On s'appuie sur cette décomposition pour considérer les mots (9.2.5) et (9.2.6). Le reste suit facilement grâce au principe de récurrence joint à la relation de récurrence $w_{i+1} = w_i w_{i-1}$ pour $i \in \mathbb{Z}$ et au fait que $(w_i)^2 = w_{i+1} w_{i-2}$ pour $i \in \mathbb{Z}$. ■

9.3 Calculs de degré

Fixons un préfixe \bar{w} de w_∞ dans \bar{E} , et des entiers $i_1, \dots, i_s \in \mathbb{Z}$. Le comportement asymptotique des paires d'éléments P, Q de $\mathfrak{A} + \xi\mathfrak{A}$ données par

$$(P, Q) = (\xi, -1) \Psi(\bar{w}) J \mathfrak{X}_{j_1}^{(i_1)} \cdots \mathfrak{X}_{j_s}^{(i_s)} \quad (9.3.1)$$

avec $j_1, \dots, j_s \in \{0, 1, 2\}$ se calcule comme suit. Si $\alpha = m + n\gamma^{-1}$ désigne la taille de \bar{w} et si on pose $j = j_1 + \cdots + j_s$ et $\beta = \gamma^{i_1} + \cdots + \gamma^{i_s} = k + \ell\gamma^{-1}$, alors le lemme 6.3.2

et le théorème 7.6.5 livrent respectivement

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{j_1}^{(i_1)} \dots \mathfrak{X}_{j_s}^{(i_s)} &\sim 3^{k+\ell-1} \xi^j \mathfrak{X}^\beta \\ (\xi, -1)\Psi(\bar{w})J &\sim 3^{-m-n} \mathfrak{X}^{-\alpha}(1, \xi). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(P, Q) \sim 3^{k+\ell-m-n-1} \xi^j \mathfrak{X}^{\beta-\alpha}(1, \xi).$$

En particulier $Q \sim \xi P$ sont d'ordre $\beta - \alpha$. Comme j peut prendre toute valeur entière entre 0 et $2s$ (pour un choix approprié de $j_1, \dots, j_s \in \{0, 1, 2\}$, cela fournit au moins $2s + 2$ éléments P_0, \dots, P_{2s+1} de $\mathfrak{A} + \xi\mathfrak{A}$ (de la forme aP ou aQ avec $a \in \mathbb{Q}^*$) tels que

$$P_i \sim \xi^i \mathfrak{X}^{\beta-\alpha} \quad (0 \leq i \leq 2s + 1).$$

Si d est un entier tel que, pour tout choix de $j_1, \dots, j_s \in \{0, 1, 2\}$, les éléments P, Q donnés par (9.3.1) soient réalisables en degré au plus d , alors on obtient

$$r_d^{(1)}(\beta - \alpha) \geq 2s + 2.$$

On va appliquer cette stratégie aux quatre familles de préfixes de w_∞ de la section 9.2.

Proposition 9.3.1. *Soit n un entier avec $n \geq 2$ et soit \bar{w} le préfixe de w_∞ de taille $q_n\gamma$. Les composantes des produits*

$$(\xi, -1)\Psi(\bar{w})J\mathfrak{X}_{j_1}^{(-2)} \dots \mathfrak{X}_{j_s}^{(-2)} \tag{9.3.2}$$

avec $s = q_n$ et $j_1, \dots, j_s \in \{0, 1, 2\}$ sont d'ordre $-2q_n\gamma^{-1}$ et sont réalisables en degré au plus $4f(2n)$.

En utilisant les bases de Gröbner, un calcul à l'ordinateur montre que la borne $4f(2n)$ pour le degré est optimale pour $2 \leq n \leq 10$.

Démonstration: Les composantes de (9.3.2) sont d'ordre

$$q_n\gamma^{-2} - q_n\gamma = -2q_n\gamma^{-1}.$$

Il résulte du lemme 9.2.1 que le préfixe \bar{w} de w_∞ de taille $q_n\gamma$ est égal à

$$\bar{w} = w_{2n+1}w_{-2n+1}.$$

Donc

$$\Psi(\bar{w}) = \mathcal{W}_{2n+1}\mathcal{W}_{-2n+1}$$

Grâce au lemme 8.1.5, on a que les coefficients de la matrice \mathcal{W}_{2n+1} sont des polynômes bi-homogènes en $\mathfrak{X}^{(1)}$ et en $\mathfrak{X}^{(0)}$ de bidegré

$$(e_1, e_0) = (f(2n), f(2n - 1)).$$

De même, le lemme 8.1.6 implique que les coefficients de la matrice \mathcal{W}_{-2n+1} sont des polynômes bi-homogènes en $\mathfrak{X}^{(-1)}$ et en $\mathfrak{X}^{(-2)}$ de bidegré

$$(e_{-1}, e'_{-2}) = (f(2n - 4), f(2n - 3)).$$

Il s'ensuit que les coefficients des produits (9.3.2) sont des polynômes multihomogènes en $(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}, \mathfrak{X}^{(-2)})$ de multi-degrés $(e_1, e_0, e_{-1}, e_{-2})$ avec

$$e_{-2} = e'_{-2} + q_n = f(2n - 3) + f(2n) + f(2n - 2) = f(2n) + f(2n - 1)$$

Comme $n \geq 2$, on a $e_{-2} > e_1$. On déduit du théorème 8.1.7 que les coefficients des produits (9.3.2) sont tous réalisables en degré au plus

$$\begin{aligned} 2e_{-2} + e_0 + e_{-1} &= 2f(2n) + 2f(2n - 1) + f(2n - 1) + f(2n - 4) \\ &= 2f(2n) + 2f(2n - 1) + 2f(2n - 2) \\ &= 4f(2n). \end{aligned}$$

■

Proposition 9.3.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit \bar{w} le préfixe de w_∞ de taille q_n . Les composantes de la matrice*

$$(\xi, -1)\Psi(\bar{w})J \tag{9.3.3}$$

sont d'ordre $-q_n$. Elles sont réalisables en degré au plus d avec $d = 2$ si $n = 0$ et $d = 3f(2n - 1)$ si $n > 0$.

L'ordinateur permet de vérifier que cette la borne est optimale si $0 \leq n \leq 10$.

En appliquant successivement la proposition avec $n = 0, 1, 2$, on obtient

$$r_2^{(1)}(-2) \geq 2, \quad r_3^{(1)}(-3) \geq 2 \quad \text{et} \quad r_9^{(1)}(-7) \geq 2,$$

tandis que les tables de l'annexe B donnent $r_2^{(1)}(-2) = 2$, $r_3^{(1)}(-3) = 2$ et $r_9^{(1)}(-7) = 4$.

Démonstration: Les composantes de (9.3.3) sont d'ordre $-q_n$ grâce au théorème 7.6.5. Si $n = 0$, on a $\bar{w} = w_0^2$ (car $q_0 = 2$), donc

$$(-\xi, 1)\Psi(\bar{w})J = (-\xi, 1)\mathcal{W}_0^2J$$

a toutes ses composantes de degré au plus 2.

Supposons maintenant que $n > 0$. Le lemme 9.2.1 livre que

$$\bar{w} = w_{2n}w_{-2n},$$

par suite, on a

$$\Psi(\bar{w}) = \mathcal{W}_{2n}\mathcal{W}_{-2n},$$

En joignant les lemmes 8.1.5 et 8.1.6, on obtient que les coefficients de la matrice (9.3.3) sont des polynômes multihomogènes en $(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}, \mathfrak{X}^{(-2)})$ de multi-degrés $(e_1, e_0, e_{-1}, e_{-2})$ avec

$$e_1 = f(2n - 1), \quad e_0 = f(2n - 2), \quad e_{-1} = f(2n - 3) \quad \text{et} \quad e_{-2} = f(2n - 2).$$

Comme $n > 0$, on a $e_1 \geq e_{-2}$. Grâce au théorème 8.1.7, les coefficients du produit matriciel $\mathcal{W}_{2n}\mathcal{W}_{-2n}$ sont tous réalisables en degré au plus

$$2e_1 + e_0 + e_{-1} = 2f(2n - 1) + f(2n - 2) + f(2n - 3) = 3f(2n - 1).$$

■

Les deux prochains résultats fournissent des éléments de $\mathfrak{A} + \xi\mathfrak{A}$ d'ordre $-q_n\gamma^{-1}$.

Proposition 9.3.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \equiv 0 \pmod{3}$ et soit \bar{w} le préfixe de w_∞ de taille $(q_n/2)\gamma$. Les composantes des produits*

$$(\xi, -1)\Psi(\bar{w})J\mathfrak{X}_{j_1}^{(-2)} \cdots \mathfrak{X}_{j_s}^{(-2)} \quad (9.3.4)$$

avec $s = q_n/2$ et $j_1, \dots, j_s \in \{0, 1, 2\}$ sont d'ordre $-q_n\gamma^{-1}$ et sont réalisables en degré au plus d avec $d = 2$ si $n = 0$ et $d = 2f(2n) - 2$ sinon.

La borne $2f(2n) - 2$ est optimale pour $n \in \{3, 6, 9\}$.

Pour $n = 0$, la proposition implique $r_2^{(1)}(-2\gamma^{-1}) \geq 4$ et la table de l'annexe B en degré $d = 2$ donne l'égalité.

Démonstration: Les composantes de (9.3.4) sont d'ordre

$$\frac{q_n}{2}\gamma^{-2} - \frac{q_n}{2}\gamma = -q_n\gamma^{-1}.$$

Si $n = 0$, on a $\bar{w} = w_1$ (car $q_0 = 2$), donc

$$\begin{aligned} (-\xi, 1)\Psi(\bar{w})J &= (-\xi, 1)\mathcal{W}_1J\mathfrak{X}_j^{(-2)} \\ &= (-\xi, 1)\mathfrak{X}^{(1)}M_1J\mathfrak{X}_j^{(-2)} \end{aligned}$$

à toutes ses composantes de degré au plus 2 grâce au théorème 8.1.1.

Supposons maintenant que $n > 0$. Le lemme 9.2.2 donne

$$\bar{w} = w_{2n-1}(w_{2n-5})^2 \cdots (w_1)^2(w_{-5})^2 \cdots (w_{-2n+7})^2 w_{-2n+3}, \quad (9.3.5)$$

donc,

$$\Psi(\bar{w}) = \mathcal{W}_{2n-1}(\mathcal{W}_{2n-5})^2 \cdots (\mathcal{W}_1)^2(\mathcal{W}_{-5})^2 \cdots (\mathcal{W}_{-2n+7})^2 \mathcal{W}_{-2n+3}.$$

Grâce au lemme 8.1.5, les coefficients du produit

$$\mathcal{W}_{2n-1}(\mathcal{W}_{2n-5})^2 \cdots (\mathcal{W}_1)^2$$

sont des polynômes bi-homogènes en $\mathfrak{X}^{(1)}$ et $\mathfrak{X}^{(0)}$ de degré e_1 en $\mathfrak{X}^{(1)}$ et de degré e_0 en $\mathfrak{X}^{(0)}$ avec

$$e_1 = f(2n - 2) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{3}} f(2n - 6k) = f(2n - 2) + \frac{f(2n - 3) + 1}{2}, \quad (9.3.6)$$

$$e_0 = f(2n-3) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{3}} f(2n-6k-1) = f(2n-3) + \frac{f(2n-4)}{2} - 1. \quad (9.3.7)$$

De même le lemme 8.1.6 implique que les coefficients de la matrice

$$(\mathcal{W}_{-5})^2 \cdots (\mathcal{W}_{-2n+7})^2 \mathcal{W}_{-2n+3}$$

sont des polynômes bi-homogènes en $\mathfrak{X}^{(-1)}$ et $\mathfrak{X}^{(-2)}$ de bidegré (e_{-1}, e'_{-2})

$$e_{-1} = 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{3}-1} f(2n-6k-4) + f(2n-6) = \frac{f(2n-4)}{2}, \quad (9.3.8)$$

$$e'_{-2} = 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{3}-1} f(2n-6k-3) + f(2n-5) = \frac{f(2n-3) - 1}{2}. \quad (9.3.9)$$

Par suite les composantes des produits (9.3.4) sont des polynômes multihomogènes en $(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}, \mathfrak{X}^{(-2)})$ de multi-degrés $(e_1, e_0, e_{-1}, e_{-2})$ avec

$$e_{-2} = \frac{q_n}{2} + e'_{-2} = f(2n-1) + \frac{f(2n-4)}{2} + \frac{f(2n-3) - 1}{2} = f(2n-1) + \frac{f(2n-2) - 1}{2}.$$

Comme $n \geq 3$ et $n \equiv 0 \pmod{3}$, on a $e_{-2} > e_1$. Donc ces composantes sont réalisables en degré au plus

$$\begin{aligned} 2e_{-2} + e_0 + e_{-1} &= q_n + 2f(2n-3) + f(2n-4) - 2 \\ &= q_n + f(2n-1) - 2 \quad \text{car } f(2n-1) = 2f(2n-3) + f(2n-4) \\ &= 2f(2n) - 2. \end{aligned}$$

■

Proposition 9.3.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ et soit \bar{w} le préfixe de w_∞ de taille $((q_n - 1)/2)\gamma + \gamma^{-1}$. Les composantes des produits*

$$(\xi, -1)\Psi(\bar{w})J\mathfrak{X}_{j_1}^{(-2)} \cdots \mathfrak{X}_{j_s}^{(-2)} \quad (9.3.10)$$

avec $s = (q_n - 1)/2$ et $j_1, \dots, j_s \in \{0, 1, 2\}$ sont d'ordre $-q_n\gamma^{-1}$ et sont réalisables en degré au plus $2f(2n) - 1$.

La borne $2f(2n) - 1$ est optimale pour $n \in \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$.

Pour $n = 1, 2$, la proposition entraîne

$$r_3^{(1)}(-3\gamma^{-1}) \geq 4 \quad \text{et} \quad r_9^{(1)}(-7\gamma^{-1}) \geq 8,$$

tandis que les tables de l'annexe B donnent $r_3^{(1)}(-3\gamma^{-1}) = 4$ et $r_9^{(1)}(-7\gamma^{-1}) = 10$.

Démonstration: Les composantes de (9.3.10) sont d'ordre

$$\frac{q_n - 1}{2}\gamma^{-2} - \frac{q_n - 1}{2}\gamma - \gamma^{-1} = -q_n\gamma^{-1}.$$

Il découle du lemme 9.2.3 que le préfixe \bar{w} de w_∞ de taille $((q_n - 1)/2)\gamma + \gamma^{-1}$ est donné par

$$\bar{w} = \begin{cases} w_{2n-1}(w_{2n-5})^2 \cdots (w_3)^2 w_{-3}(w_{-7})^2 \cdots (w_{-2n+7})^2 w_{-2n+3} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ w_{2n-1}(w_{2n-5})^2 \cdots (w_5)^2 w_{-1}(w_{-3})^2 \cdots (w_{-2n+7})^2 w_{-2n+3} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\Psi(\bar{w}) = \begin{cases} \mathcal{W}_{2n-1}(\mathcal{W}_{2n-5})^2 \cdots (\mathcal{W}_3)^2 \mathcal{W}_{-3}(\mathcal{W}_{-7})^2 \cdots (\mathcal{W}_{-2n+7})^2 \mathcal{W}_{-2n+3} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \mathcal{W}_{2n-1}(\mathcal{W}_{2n-5})^2 \cdots (\mathcal{W}_5)^2 \mathcal{W}_{-1}(\mathcal{W}_{-3})^2 \cdots (\mathcal{W}_{-2n+7})^2 \mathcal{W}_{-2n+3} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Un procédé similaire à celui de la preuve de la proposition 9.3.3 permet d'obtenir que les composantes de (9.3.10) sont des polynômes multihomogènes en $(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(0)}, \mathfrak{X}^{(-1)}, \mathfrak{X}^{(-2)})$ de multi-degrés $(e_1, e_0, e_{-1}, e_{-2})$ où les entiers e_1, e_0, e_{-1} et e_{-2} sont donnés par

$$\begin{aligned} e_1 &= f(2n - 2) + 2 \sum_{k=1}^{m_0} f(2n - 6k), \\ e_0 &= f(2n - 3) + 2 \sum_{k=1}^{m_0} f(2n - 6k - 1) = f(2n - 3) + \frac{f(2n - 4) - 1}{2} \\ e_{-1} &= 1 + f(2n - 6) + 2 \sum_{k=1}^{m_0} f(2n - 6k - 4) = 1 + \frac{f(2n - 4) - 1}{2} \\ e_{-2} &= \frac{q_n - 1}{2} + f(1 - n_0) + f(2n - 5) + 2 \sum_{k=1}^{m_0} f(2n - 6k - 3). \end{aligned}$$

où n_0 est le reste de n modulo 3 et $m_0 = (n - n_0)/3$. De plus, on a

$$\max\{e_1, e_{-2}\} = e_{-2}.$$

Par suite, les composantes des produits (9.3.10) sont tous réalisables en degré au plus

$$2e_{-2} + e_0 + e_{-1}.$$

Par ailleurs, comme

$$2f(1 - n_0) - 1 + f(2n - 5) + 2 \sum_{k=1}^{m_0} f(2n - 6k - 3) = 2 \sum_{k=1}^{m_0} f(2n - 6k),$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 2e_{-2} &= q_n + f(2n - 5) + 2 \sum_{k=2}^{m_1} f(2n - 3k) \\ &= q_n + f(2n - 5) + f(2n - 4) - 1 \quad (\text{grâce au lemme 9.1.3}) \\ &= f(2n) + f(2n - 2) + f(2n - 3) - 1 \\ &= f(2n + 1) - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$2e_{-2} + e_0 + e_{-1} = f(2n + 1) - 1 + f(2n - 3) + f(2n - 4) = 2f(2n) - 1.$$

En conclusion, les composantes des produits (9.3.10) sont toutes réalisables en degré au plus $2f(2n) - 1$. ■

Annexe A

Tables des valeurs de $r_d^{(0)}(\alpha)$ pour $d \leq 11$

Degré $d = 1$:

(n)
 3
 0 1 3 (m)
 0

$r_1^{(0)}(\alpha)$	nombres de α
1	1
3	2

Degré $d = 2$:

(n)
 5
 0 3 5
 0 0 1 3 5 (m)
 0 0 3
 0

$r_2^{(0)}(\alpha)$	nombres de α
1	1
3	3
5	3

Degré $d = 3$:

(n)

7

3 5 7

0 0 3 5 7

0 0 0 1 5 5 7 (m)

0 0 0 3 5

0 0 0

0

$r_3^{(0)}(\alpha)$	nombre de α
1	1
3	3
5	5
7	4

Degré $d = 4$:

(n)

0 9 0

5 7 9

0 3 5 7 9

0 0 0 3 7 7 9

0 0 0 0 1 5 7 7 9 (m)

0 0 0 0 3 5 7

0 0 0 0 5

0 0 0

0

$r_4^{(0)}(\alpha)$	nombre de α
1	1
3	3
5	5
7	7
9	5

Degré $d = 10$:

(n)

21

17 19 21

13 15 17 19 21

9 11 13 15 19 19 21

0 7 9 11 15 17 19 19 21

0 0 3 7 11 13 15 17 19 19 21

0 0 0 0 5 9 11 13 17 17 19 19 21

0 0 0 0 0 0 7 9 13 15 17 17 19 19 21

0 0 0 0 0 0 0 3 9 11 13 15 17 17 19 19 21

0 0 0 0 0 0 0 0 5 9 11 15 15 17 17 19 19 21

0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 7 11 13 15 15 17 17 19 19 21 (m)

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 9 11 13 15 15 17 17 19

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 7 9 13 13 15 15 17

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 7 11 13 13 15

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 9 11 13

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 7 11

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5

0 0 0 0 0 0 0

0 0 0

0

$r_{10}^{(0)}(\alpha)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
nombres de α	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	11

Degré $d = 11$:

(n)

23

19 21 23

15 17 19 21 23

11 13 15 17 21 21 23

5 9 11 13 17 19 21 21 23

0 0 7 9 13 15 17 19 21 21 23

0 0 0 3 9 11 13 15 19 19 21 21 23

0 0 0 0 0 5 9 11 15 17 19 19 21 21 23

0 0 0 0 0 0 0 7 11 13 15 17 19 19 21 21 23

0 0 0 0 0 0 0 0 3 9 11 13 17 17 19 19 21 21 23

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 7 9 13 15 17 17 19 19 21 21 23

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 7 11 13 15 17 17 19 19 21 21 23 (m)

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 9 11 15 15 17 17 19 19 21

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 7 11 13 15 15 17 17 19

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 7 11 13 15 15 17

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 9 13 13 15

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 7 11 13

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5 9

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0

0 0 0

0

$r_{11}^{(0)}(\alpha)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
nombres de α	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	12

Annexe B

Tables des valeurs de $r_d^{(1)}(\alpha)$ pour $d \leq 11$

Degré $d = 1$:

(n)
 4
 2 2 4 (m)
 2

$r_1^{(1)}(\alpha)$	nombres de α
2	3
4	2

Degré $d = 2$:

(n)
 6
 4 4 6
 2 2 4 4 6 (m)
 2 2 4
 4

$r_2^{(1)}(\alpha)$	nombres de α
2	4
4	6
6	3

Degré $d = 3$:

(n)
8
6 6 8
4 4 6 6 8
2 2 4 4 6 6 8 (m)
2 2 6 4 6
4 4 6
4

$r_3^{(1)}(\alpha)$	nombre de α
2	4
4	8
6	9
8	4

Degré $d = 4$:

(n)
10
8 8 10
6 6 8 8 10
4 4 6 6 8 8 10
2 2 4 4 8 6 8 8 10 (m)
2 2 6 6 8 6 8
4 4 6 6 8
4 4 6
6

$r_4^{(1)}(\alpha)$	nombre de α
2	4
4	8
6	12
8	12
10	5

Bibliographie

- [1] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, Mesures de transcendance et aspects quantitatifs de la méthode de Thue-Siegel-Roth-Schmidt, *Proc. London Math. Soc.* , **101** (2010), 1–31.
- [2] W. Banaszczyk, New bounds in some transference theorems in the geometry of numbers, *Mathematische Annalen*, **296** (1913), 625–635.
- [3] Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics Vol. **160**. Cambridge University Press (2007).
- [4] J. W. S. Cassels, *An Introduction to the Geometry of Numbers*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [5] H. Davenport and W. M. Schmidt, Approximation to real numbers by quadratic irrationals, *Acta Arith.*, **13** (1967), 393–416.
- [6] H. Davenport and W. M. Schmidt, Approximation to real numbers by algebraic integers, *Acta Arith.*, **15** (1968/1969), 393–416.
- [7] J. Esmonde, R. Murty, *Problems in algebraic number theory*. Graduate Texts in Mathematics. **190**. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [8] R. Fricke, Über die Theorie der automorphen Modulgruppen, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1896), 91–101.
- [9] A. Keita, On a conjecture of Schmidt for the parametric geometry of numbers, *Mosc. J. Comb. Number Theory*, **6** (2016), 282–292.
- [10] A. Keita, Continued fractions and parametric geometry of numbers, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **29** (2017), 129–135.
- [11] J. F. Koksma, Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen, *Monatsh. Math. Phys.* , **48** (1939), 176–189.
- [12] P. M. Gruber, C. G. Lekkerkerker, *Geometry of numbers, 2nd ed.*, North-Holland Mathematical Library Vol. **37**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1987).
- [13] M. Laurent, Simultaneous rational approximation to the successive power of a real numbers, *Indag. Math.* , **11** (2003), 45–53.

- [14] K. Mahler, Zur Approximation der Exponentialfunktionen und des Logarithmus. I, II, *MJ. reine angew. Math.* , **166** (1932), 118–150.
- [15] A. Markoff, Sur les formes quadratiques binaires indéfinies, *Math. Ann.* , **15** (1879), 381–409.
- [16] N. G. Moshchevitin, Proof of W. M. Schmidt’s conjecture concerning successive minima of a lattice , *J. London Math. Soc.* (2) **86** (2012), 129–151.
- [17] M. O’Searcoid, *Elements of Abstract Analysis*. Springer-Verlag, London, 2002.
- [18] L. Ribes and P. Zalesskii *Profinite Groups*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics **40**. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [19] D. Roy, Approximation simultanée d’un nombre et de son carré, *C.R. Acad. Sci. Paris, ser. I*, **336** (2003), 1–6.
- [20] D. Roy, Approximation to real numbers by cubic algebraic integers II, *Ann. of Math.*, **158** (2003), 1081–1087.
- [21] D. Roy, Approximation to real numbers by cubic algebraic integers I, *Proc. London Math. Soc.*, **88** (2004), 42–62.
- [22] D. Roy, Diophantine approximation in small degree, in *Number Theory* , CRM Proc. Lecture Note, **36**, pp. 269–285. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [23] D. Roy and E. Villani, On the ring of approximation triples attached to a class of extremal real numbers, *Indag. Math. (N. S.)* , **19** (2008), 299–324.
- [24] D. Roy, On the continued fraction expansion of a class of numbers, *Diophantine approximation* , Dev. Math. **16** SpringerWienNewYork, Vienna (2008), 347–361.
- [25] D. Roy, Markoff–Lagrange spectrum and extremal numbers, *Acta Math.*, **206** (2011), 325–362.
- [26] D. Roy and D. Zelo, Measures of algebraic approximation to Markoff extremal numbers, *J. London Math. Soc.* **83** (2011), 407–430.
- [27] D. Roy, On Schmidt and Summerer parametric geometry of numbers, *Ann. of Math.*, **182** (2015), 739–786.
- [28] D. Roy, Spectrum of the exponents of best rational approximation, *Math. Z.* **283** (2016), 143–155.
- [29] W. M. Schmidt, *Open problems in Diophantine approximation*, Approximations Diophantiennes et nombres transcendants, Luminy, 1982, Progress in Mathematics (Birkhäuser, Basel, 1983) 271–289.
- [30] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*. Lecture Notes in Math. **785**. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [31] W. M. Schmidt and L. Summerer, Parametric geometry of numbers and applications, *Acta Arith.* **140** (2009), 67–91.

-
- [32] W. M. Schmidt and L. Summerer, Diophantine approximation and parametric geometry of numbers, *Monatsh. Math.* **169** (2013), 51–104.
- [33] V. G. Sprindžuk, Mahler’s problem in metric number theory. Izdat. Nauka i Tehnika, Minsk, 1967 (in Russian). English translation by B. Volkmann, *Translations of Mathematical Monographs*, **Vol. 25**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [34] E. Wirsing, Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades,, *J. reine angew. Math.* **206** (1961), 67–77.