LES ÉLÉMENTS DE JORDAN DE L'ALGÈBRE ASSOCIATIVE LIBRE

par

Alain D'Amour

Thèse présentée
à l'École des Études Supérieures
de l'Université d'Ottawa
pour l'obtention de la maîtrise ès sciences
en mathématiques

Avril 1985

REMERCIEMENTS

J'aimerais exprimer ma gratitude à Monsieur Michel Racine pour m'avoir suggéré ce sujet d'étude; l'enthousiasme et la patience intarissables dont il a fait preuve tout au long de la conception de ce travail furent grandement appréciés.

Je remercie aussi M. Wulf Rossmann pour ses précieux conseils concernant les représentations.

Mes remerciements au Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada pour son soutien financier.

Enfin, merci à Mlle Manon Gauvreau pour la frappe impeccable du manuscrit.

PRÉFACE

Soit $\Phi\,[X_n]$, l'algèbre associative libre sur n générateurs, Φ un corps commutatif de caractéristique 0, et V_n le sous-espace des éléments multilinéaires de degré n. Par l'emploi d'une correspondance biunivoque de V_n avec l'algèbre de groupe $\Phi\,[S_n]$, S_n le groupe symétrique, on détermine dans ce travail le caractère de la représentation de V_n sur la portion de ses éléments, notée JV_n, qui sont de Jordan, pour $1 < n < 6$.

Par le biais de cette correspondance, on donne aussi un générateur de l'idéal à gauche correspondant à JV_n, pour $1 < n < 5$.

Sommairement, au chapitre 1, on effectue une mise en situation en présentant des définitions et résultats préliminaires. Le chapitre 2 concerne les caractères en général, celui de $H\,(Q[S_n],*)$ en particulier; on y calcule aussi la valeur d'un caractère irréductible quelconque sur une classe de conjugaison de S_n qui nous intéresse plus spécialement.

Enfin, au chapitre 3 sont exposés les résultats portant sur la structure de JV_n.

Mentionnons aussi que la plupart des résultats ont été vérifiés à l'aide de l'ordinateur par des programmes (utilisant le langage Fortran 77) qui, entre autres, engendrent les permutations de S_n, les idempotents centraux, divers polynômes, et multiplient ces différents objets. Notamment, le générateur de JV_5 a été calculé de cette matière.

Chapitre 1: Préliminaires

Il convient tout d'abord de décrire ici le contexte de ce travail en présentant les principales définitions et notations, ainsi que certains faits essentiels à la bonne compréhension de ce qui suivra.

Définition 1.1: On dira de A que c'est une algèbre sur le corps Φ (de caractéristique quelconque) si A est un espace vectoriel sur Φ muni d'une loi de composition binaire

$$\begin{array}{l} A \times A \to A \\ (a,b) \to ab \end{array} \quad \text{satisfaisant}$$

1) $a\,(b+c) = ab + ac$

$\quad (a+b)\,c = ac + bc$

2) $(\alpha a)\,b = \alpha\,(ab) = a\,(\alpha b) \qquad \forall a, b, c \in A$, $\alpha \in \Phi$

De plus l'algèbre A est dite associative si

3) $(ab)\,c = a\,(bc)$

et unitale si

4) Il existe $1 \in A$ t.q. $1.a = a = a.1 \quad \forall a, b, c \in A$.

On peut par exemple construire une algèbre associative de la façon suivante: soient G un groupe fini et Φ un corps. Alors, l'algèbre du groupe G sur le corps Φ est l'ensemble

$$\Phi\,[G] = \{f \mid f = \sum_{x \in G} a_x\, x \text{ où } a_x \in \Phi\}$$

où l'opération interne de multiplication est naturellement induite par celle de G: $(\sum_x a_x x)(\sum_y b_y y) = \sum_{x,y} a_x b_y xy$. Les éléments de G forment une base de $\Phi[G]$ et la dimension de $\Phi[G]$ en tant qu'espace vectoriel sur Φ est donc $\dim_\Phi \Phi[G] = |G|$.

L'algèbre libre est un autre exemple d'algèbre associative. En voici la définition:

<u>Définition 1.2</u>: Soit $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble fini de variables; on définit le monoïde $M(X_n)$ comme étant l'ensemble de tous les mots finis (associatifs) en $x_1, x_2, \ldots x_n$, avec un élément unité 1, qui a pour loi de multiplication la juxtaposition. Alors <u>l'algèbre associative libre unitale</u> $\Phi[X_n]$ est l'espace vectoriel sur Φ qui a pour base $M(X_n)$, muni de la multiplication induite:

$$(\sum_i a_i w_i)(\sum_j b_j w_j) = \sum_{i,j} a_i b_j w_i w_j . \qquad \boxplus$$

On donne à $\Phi[X_n]$ une involution (un anti-isomorphisme de période 2) notée $*$, qui fixe les générateurs, ce qui implique par définition:

$$x_i^* = x_i \qquad i = 1, 2, \ldots$$
$$(xy)^* = y^* x^*$$
$$x^{**} = x \qquad \forall x, y \in \Phi[X_n]$$

Dans ce qui suit, on accordera notre attention aux éléments hermitiens

$$H(\Phi[X_n], *) = \{p \in \Phi[X_n] \mid p^* = p\}$$

On introduit maintenant un autre type d'algèbre.

<u>Définition 1.3</u>: <u>Une algèbre de Jordan</u> J sur un corps Φ, car $\Phi \neq 2$, est une

algèbre sur Φ munie d'une loi de composition a.b satisfaisant

$$(1)\ a\cdot b = b\cdot a$$

$$(2)\ (a^{\cdot 2}\cdot b)\cdot a = a^{\cdot 2}\cdot(b\cdot a) \qquad \forall a, b \in J$$

(où $a^{\cdot 2}$ signifie en fait $a\cdot a$) ⊞

Par exemple, si A est une algèbre associative sur Φ, la loi de composition $a.b = \frac{1}{2}(ab+ba)$ induit une structure d'algèbre de Jordan sur A, que l'on note A^+.

<u>Définition 1.4</u>: Une algèbre de Jordan J est dite <u>spéciale</u> si J est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre A^+ (où A est une algèbre associative). ⊞

On considère enfin l'algèbre qui se situera au centre des préoccupations de ce travail.

<u>Définition 1.5</u>: Soit $\Phi[X_n]$ l'algèbre associative libre sur Φ. Alors <u>l'algèbre de Jordan spéciale libre</u>, notée FSJ $[X_n]$ est la sous-algèbre de $\Phi[X_n]^+$ engendrée par 1 et X_n. Ses éléments sont appelés éléments de Jordan de $\Phi[X_n]$. ⊞

On verra facilement que $H(\Phi[X_n],*)$ est une sous-algèbre de $\Phi[X_n]$ puisque

$$\begin{aligned}(x.y)^* &= (\tfrac{1}{2}(xy+yx))^* \\ &= (\tfrac{1}{2}(xy)^* + (yx)^*) \\ &= \tfrac{1}{2}(y^*x^* + x^*y^*) \\ &= \tfrac{1}{2}(xy+yx) = (x.y) \text{ quelques soient } x, y \in H(\Phi[X_n],*).\end{aligned}$$

Aussi, les variables x_i étant hermitiennes, l'algèbre qu'elles engendrent est contenue dans $H(\Phi[X_n],*)$.

Donc $FSJ[X_n] \subset H(\Phi[X_n],*)$. En fait il y a plus; le théorème de Cohn [2] nous apprend que $FSJ[X_n] = H(\Phi[X_n],*)$ si et seulement si $n = 1, 2, 3$.

Le problème général réside dans la description de l'algèbre $FSJ[X_n]$. Plus encore, la question se ramène à l'établissement des conditions qui font d'un élément donné de $\Phi[X_n]$ un élément de Jordan. En caractéristique zéro, il est possible de simplifier le problème. En effet, soit W un sous-espace de $\Phi[X_n]$ qui possède la propriété suivante: si l'on remplace une variable dans un élément quelconque par une combinaison de variables, le résultat se trouve encore dans W. Cette propriété permet donc (d'interchanger des variables entre elles et mieux encore) de linéariser, en restant dans W. Inversement, en réidentifiant les variables, on peut toujours obtenir un multiple d'un élément quelconque à partir d'un élément multilinéaire; la caractéristique étant zéro, il suffit alors de diviser pour éliminer le coefficient.

Donc, un tel sous-espace est déterminé par ses éléments multilinéaires. Or $FSJ[X_n]$ et $H(\Phi[X_n],*)$ possèdent cette propriété. Nous nous bornerons donc à l'étude de leurs éléments multilinéaires, et dans ce qui suit, il sera toujours sous-entendu que la caractéristique est 0.

Notation: (1) On dénotera V_n le sous-ensemble de $\Phi[X_n]$ formé de tous les polynômes multilinéaires de degré "n" en $x_1,\ldots,x_n$.

(2) $JV_n = V_n \cap FSJ[X_n] \subset V_n \cap H\ (\Phi[X_n],*)$

Glennie a calculé, dans un article paru en 1970, la dimension de l'espace JV_n pour $1 \leq n \leq 7$; les valeurs sont respectivement 1, 1, 3, 11, 55, 330 et 2345 [1].

Munissons maintenant V_n d'une structure de S_n-module en posant l'action: $\sigma(x_{i_1}\ldots x_{i_n}) = x_{\sigma(i_1)}\ldots x_{\sigma(i_n)} \quad \forall\, \sigma \in S_n,\ x_{i_1}\ldots x_{i_n} \in V_n$.

Proposition 1.6: Il y a un isomorphisme T de S_n-modules entre V_n et $\Phi[S_n]$, l'algèbre du groupe symétrique S_n sur Φ.

démonstration: Il suffit de considérer

$$T: \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma\ x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(n)} \to \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma\ \sigma \qquad \boxplus$$

On retrouve, par exemple, cette idée de correspondance chez Olsson et Regev [7].

Note: Le produit de permutations exprimées sous forme cyclique s'effectue de droite à gauche (Par exemple, (123) (134) = (234))

Si σ correspond au monôme $x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$, insistons sur le fait qu'une action à gauche par une permutation τ agira sur les variables (c.-à-d. leurs indices), alors qu'une action à droite agira sur la position des variables. Par exemple: si $\tau = (23)$, $x_2\, x_1\, x_3\, x_4 \leftrightarrow (12) = \sigma$

1) $(23)\,(12) = (132) \leftrightarrow x_3\, x_1\, x_2\, x_4$ et les indices 2 et 3 ont été permutés.
2) $(12)\,(23) = (123) \leftrightarrow x_2\, x_3\, x_1\, x_4$ et la variable qui apparaissait en 2^e place (c.-à-d. x_1) est maintenant en 3^e place et inversement.

De cette façon, l'action à gauche dans $\Phi[S_n]$ est synonyme d'échange de variables dans V_n. Conséquemment, les images par T des espaces V_n, $V_n \cap H\,(\Phi[X_n], *)$ et JV_n constituent des idéaux à gauche dans $\Phi[S_n]$. Dans ce travail, idéal signifiera désormais idéal à gauche, et par abus de notation, on continuera d'écrire V_n ou JV_n pour désigner leurs images dans $\Phi[S_n]$.

Par le biais de la correspondance, appliquer * à un monôme $x \in V_n$ revient à multiplier l'élément correspondant de S_n à droite par "ρ_n" où

$$\rho_n = (1\ n)\ (2\ n\text{-}1)\ldots(\tfrac{n-1}{2}\ \tfrac{n+1}{2}) \text{ si } n \text{ est impair}$$
$$\rho_n = (1\ n)\ (2\ n\text{-}1)\ldots({}^{n}/_{2}\ \tfrac{n+2}{2}) \text{ si } n \text{ est pair}$$

Donc si $x = \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma\, x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$, on a $x^* = \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma\, x_{\sigma\rho_n(1)}\cdots x_{\sigma\rho_n(n)}$

et $x^* = x \leftrightarrow a_\sigma = a_{\sigma\rho_n}\quad \forall \sigma \in S_n$

<u>Proposition 1.7</u>: Il y a une correspondance biunivoque entre $H(\Phi[S_n],*) \cap V_n$ et $\Phi[S_n]$ $(\frac{1}{2}((1) + \rho_n))$ (où (1) désigne la permutation identité)

<u>démonstration</u>: Tenant compte de la proposition 1.6, le travail se fait dans $\Phi[S_n]$.

(1) Soit $f = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma((1) + \rho_n)$ dans $\Phi[S_n]$ $(\frac{1}{2}(1) + \rho_n))$ Alors

$$f^* = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma (\sigma\rho_n + \sigma\rho_n^2)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma (\sigma\rho_n + \sigma) = f$$

(2) Par contre si $f = \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma$ et $f = f^*$

Alors

$$f = \frac{1}{2}(f + f^*)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma + \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma\rho_n} \sigma\rho_n\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma((1) + \rho_n) \text{ car } a_\sigma = a_{\sigma\rho_n}.$$ ∎

Par conséquent, on note que $\dim_\Phi H(\Phi[S_n],*) \cap V_n = \frac{n!}{2}$

<u>Remarques</u>: (1) Il est connu qu'une algèbre de groupe d'un groupe fini G sur un corps algébriquement clos peut être exprimée comme une somme directe d'algèbres de matrices. (Par exemple, pour $\Phi = \mathbb{C}$, voir [8] p. 48). De plus, dans une algèbre de matrices, tout idéal à gauche est principal et

engendré par un idempotent (qui n'est pas nécessairement unique) [6] p: 105.

(2) Etant donné que toute représentation de S_n sur $\mathbb{C}$ peut être réalisée sur le corps des rationnels [3], nous allons désormais fixer à Q le corps de base utilisé.

La structure de JV_n nous est donnée par une formule de récurrence déduite des identités de base de Jordan et de leurs linéarisations. On pourra retracer les éléments de la preuve qui suit dans Glennie [1] ou bien dans Jacobson [2]. D'abord quelques faits et notations qui prennent place dans $Q[X_n]^+$.

On écrira: (1) $a \circ b = ab + ba$

(2) $[a,b] = ab - ba \quad \forall a, b \in FSJ[X_n]$.

Soit l'application $R(x): y \to y \cdot x$. On peut alors définir les opérateurs:

$$A\ (x,y,z) = R(x)\ R(yz) + R(y)\ R(zx) + R(z)\ R(xy)$$

$$B\ (x,y,z) = R(yz)\ R(x) + R(zx)\ R(y) + R(xy)\ R(z)$$

$$C\ (x,y,z) = R(x)\ R(z)\ R(y) + R(y)\ R(z)\ R(x).$$

En utilisant la commutativité, l'axiome (2) d'une algèbre de Jordan peut s'écrire: $(x \cdot y) \cdot y^2 = (x \cdot y^2) \cdot y \quad \forall x,y$.

Linéarisons cette identité; en récrivant $x \cdot [y, y^2] = 0$ et en posant

$y = y + \lambda z, \quad \lambda \in Q$

$$x \cdot [y+\lambda z, (y+\lambda z)^2] = x \cdot ([y,y^2] + 2\lambda [y,yz] + \lambda^2[y,z^2] + \lambda [z,y^2] + 2\lambda^2[z,yz] + \lambda^3[z,z^2])$$

Et en posant le coefficient de λ égal à zéro on a

$$x \cdot (2[y, yz] + [z, y^2]) = 0$$

Remplaçons encore $y = y + \lambda t$, $\lambda \in Q$:

$$x \cdot (2 [y + \lambda t, yz + \lambda tz] + [z, y^2 + 2\lambda yt + \lambda^2 t^2]) = 0$$

Et donc:

$$2x \cdot ([y, tz] + [t, yz] + [z, yt]) = 0$$

En divisant par 2 et en utilisant la commutativité, on obtient

$$x \cdot A(y, z, t) = x \cdot B(y, z, t)$$

ou

$$(1.8) \qquad x \cdot R(yzt) = x \cdot A(y,z,t) - x \cdot C(y,z,t)$$

Cette équation nous fournit une information supplémentaire sur la structure de JV_n, exprimée dans la proposition suivante:

<u>Proposition 1.9</u>: Si g_{n-1} et g_{n-2} sont générateurs de JV_{n-1} et JV_{n-2} respectivement (encore une fois, vus comme idéaux à gauche d'un algèbre de groupe), alors $g_{n-1} \circ x_n$ et $g_{n-2} \circ (x_{n-1} \circ x_n)$ forment un ensemble de générateurs de l'idéal JV_n.

<u>démonstration</u>: Soit $p \in JV_n$. Alors p peut s'écrire comme une somme d'éléments $M(x_i)$ où $1 < i < n$, M est un monôme d'opérateurs R(x) et chaque x est un monôme en $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$.

Et par l'équation 1.8 obtenue plus haut, on peut récrire p de façon à ce que chaque terme apparaissant dans la somme se termine par $R(x_j)$ ou $R(x_k \circ x_\ell)$, $1 < j, k, \ell < n$. Donc, l'ensemble de tous les monômes possédant l'une ou l'autre de ces formes engendre tout l'espace JV_n. Or puisque JV_n est un "idéal", il suffit (via la correspondance avec $Q[S_n]$) de multiplier un tel monôme par une permutation adéquate (donc par un élément inversible de $Q[S_n]$) pour obtenir selon le cas un monôme se terminant par $R(x_n)$ ou par $R(x_{n-1} \circ x_n)$ ⊞

Par conséquent, on peut écrire:

$$JV_n = V_n(g_{n-2} \circ (x_{n-1} \circ x_n)) + V_n(g_{n-1} \circ x_n)$$

la somme n'étant cependant pas directe.

1.2) Représentations de S_n.

Cette section a pour but d'exposer brièvement certains résultats sur les représentations du groupe symétrique, qui s'avéreront utiles ultérieurement. Pour de plus amples détails, on pourra se référer à Serre [8], chapîtres 1 à 3.

• On rappelle qu'une <u>représentation</u> du groupe S_n est un homomorphisme $\pi: S_n \to GL(V)$ de S_n dans le groupe des isomorphismes de l'espace vectoriel V sur le corps Φ et $\dim_\Phi V$ est appelé le <u>degré</u> de la représentation.

π sera dite représentation irréductible si les seuls sous-espaces de V stables sous l'action du groupe S_n sont $\{0\}$ et V lui-même.

• Si $n_1, \ldots, n_k$ sont les degrés des représentations irréductibles de S_n alors $n_1^2 + \ldots + n_k^2 = n!$

Le nombre de représentations irréductibles de S_n est égal au nombre de types de décomposition cyclique des permutations de S_n. C'est donc aussi:

(1) le nombre de classes de conjugaison

(2) le nombre de partitions de l'entier "n"

où l'on entend par partition une suite $a = (a_1, \ldots, a_\ell)$ de nombres naturels t.q. $a_i > a_j$, $i < j$ (à moins qu'il en soit spécifié autrement), et $\sum_{i=1}^{\ell} a_i = |a| = n$. Il sera souvent pratique d'écrire $a = (a_1, \ldots, a_n)$ en comblant avec n-k zéros. Pour $n > 2$, il y a toujours exactement 2 représentations de degré 1, soient la représentation triviale et la représentation signature.

• Le caractère de la représentation π est donné par la fonction

$$\chi_\pi : S_n \to \Phi$$
$$\sigma \to tr\ (\pi(\sigma))$$

Dans le cas du groupe S_n, les caractères de n'importe quelle représentation, irréductible ou non, sont à valeurs entières.

• Considérons maintenant l'algèbre de S_n sur Φ. On peut penser à $\Phi[S_n]$ comme à un ensemble de fonctions:

$$\Phi[S_n] = \{f : S_n \to \Phi \mid f = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma)\ \sigma\}$$

et f désigne à la fois la fonction et la combinaison linéaire d'éléments de S_n. Alors toute représentation V, π de S_n s'étend de façon unique à une représentation de $\Phi[S_n]$ par la règle

$$\pi(f) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma)\ \pi(\sigma)$$

On peut de la même façon restreindre une représentation de $\Phi[S_n]$ à une représentation de S_n.

• A l'aide des caractères, on définit les éléments particulièrement importants de $\Phi[S_n]$, les idempotents centraux:

$$e_i = \frac{d_i}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi_i(\sigma)\ \sigma$$

où $\sum_{i=1}^{k} e_i = (1)$

χ_i = caractère de la i^e représentation irréductible

d_i = degré de la i^e représentation irréductible

Alors $\Phi[S_n] = \Phi[S_n]\, e_1 \oplus \ldots \oplus \Phi[S_n]\, e_k$

• Soit H un sous-groupe de S_n, pour lequel on a une représentation W,θ

Ecrivons $W^{S_n} = \{ f : S_n \to W \}$ et définissons

$$V = \{ f \in W^{S_n} \mid f(\sigma\rho) = \theta(\rho)\ f(\sigma) \quad \forall \sigma \in S_n, \quad \forall \rho \in H \}$$

Puisque S_n peut s'exprimer comme l'union disjointe des classes à gauche aH, où a est un élément de l'ensemble des représentants de la partition ainsi créée, on définit l'action π de S_n sur V par:

$$[\pi(\sigma_1)(f)](\sigma_2) = f(\sigma_1^{-1} \sigma_2)$$

On dit alors que la représentation V, π de S_n est <u>induite</u> par la représentation W, θ de H et l'on écrit

$$V, \pi = \mathrm{Ind}_H^{S_n} W, \theta.$$

On peut aussi décrire le concept de représentation induite ainsi. Soit une représentation V, π de S_n, et W un sous-espace de V stable sous l'action par π du sous-groupe H de S_n. Notons θ la restriction de π à H. Alors le sous-espace $\pi(a)\,W$ dépend seulement de la classe aH puisque $\pi(a)\pi(b)W = \pi(a)W$, $a \in S_n$, $b \in H$, $(\pi(b)W = W)$.

Si $R = \{r_1,\ldots,r_t\}$ est un système de représentants pour l'ensemble S_n/H des classes à gauche, alors les sous-espaces $\pi(r_i)W$, $1 \leq i \leq t$, sont permutés entre eux par les $\pi(a)$, $a \in S_n$, et donc $\sum_{r \in R} \pi(r)W$ est une sous-représentation de V. On dira que $V, \pi = \mathrm{Ind}_H^{S_n} W, \theta$ si on a la somme directe $V = \sum_{r \in R}^{\oplus} \pi(r)W$

- <u>Notation</u>: ${}_n\chi$ = caractère de $H(Q[S_n], *)$

  χ_n = caractère de JV_n

<u>Remarque</u>: On ordonnera les partitions (et donc les représentations et les idempotents qui leurs correspondent) dans l'ordre anti-lexicographique, tel que listé dans l'appendice.

Chapitre 2: Caractères de $H(Q[S_n], *)$

2.1) Décomposition de $\overset{\varphi}{H}(Q[S_n], *)$.

On rappelle qu'il est possible d'exprimer l'anneau de groupe $Q[S_n]$ comme une somme directe:

$$Q[S_n] = Q[S_n]e_1 \oplus \ldots. \oplus Q[S_n]e_k$$

où $e_i = i^e$ idempotent central, k = nombre de caractères irréductibles de S_n.

Cette décomposition nous permet d'écrire

$$H(Q[S_n],*) = Q[S_n]\,(\tfrac{1}{2}((1) + \rho_n)) = Q[S_n]f_1 \oplus \ldots \oplus Q[S_n]f_k$$

où chaque $f_i = e_i \cdot (\tfrac{1}{2}((1) + \rho_n))$ est un idempotent parce que $\tfrac{1}{2}\,((1) + \rho_n))$ en est un, et e_i est un idempotent central.

A cette étape-ci, il est légitime de vouloir établir quelle sera la contribution de chacun des idéaux $Q[S_n]f_i$ à la dimension de $H(Q[S_n],*)$ sur Q. Pour ce faire, il convient d'examiner les représentations de S_n (et donc de $Q[S_n]$) car chacun des facteurs $Q[S_n]e_i$ est étroitement associé à un caractère irréductible de S_n.

Par exemple, le générateur e_k (appelé polynôme standard) du dernier facteur $Q[S_n]e_k$ engendre une sous-algèbre de dimension 1 et donc, $\dim_Q Q[S_n]f_k = 1$ ou 0 selon que l'on a ou non l'égalité

$$\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\ \sigma = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma\rho_n)\ \sigma\rho_n$$

Or cette égalité est vérifiée lorsque ρ_n est paire, c.-à-d. $\operatorname{sgn}(\rho_n) = 1$ et il appert que

$$\operatorname{sgn}(\rho_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0,\ 1 \bmod (4) \\ -1 \text{ si } n = 2,\ 3 \bmod (4) \end{cases}$$

Plus généralement, écrivons $I_{\rho_n} = Q[S_n]\,(\frac{1}{2}\,((1) + \rho_n))$. ($I_{\rho_n}$ est avant tout un espace vectoriel sur Q, sur lequel le groupe S_n agit par translation à gauche).

Premièrement, on peut vérifier que $f(\sigma\rho_n) = f(\sigma)\ \ \forall\sigma \in S_n \leftrightarrow f \in I_{\rho_n}$.

En effet:

$$\begin{aligned} f &= \tfrac{1}{2}(f+f\rho_n) = \tfrac{1}{2}\sum_\sigma f(\sigma)\ \sigma + \tfrac{1}{2}\sum_\sigma f(\sigma)\ \sigma\rho_n \\ &= \tfrac{1}{2}\,[\,\sum_\sigma f(\sigma)\ \sigma + \sum_\sigma f(\sigma\rho_n)\ \sigma] \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_\sigma (f(\sigma) + f(\sigma\rho_n))\sigma \end{aligned}$$

Inversement $f\,(\sigma\rho_n) = f(\sigma)\quad \forall\,\sigma \in S_n$ implique

$$f = \sum_{\sigma\in S_n} f(\sigma)\sigma = \sum_{\sigma\in S_n} f(\sigma\rho_n)\ \sigma$$

c.-à-d.

$$\begin{aligned} f &= \tfrac{1}{2}\,(\sum_{\sigma\in S_n} f(\sigma)\ \sigma + \sum_{\sigma\in S_n} f(\sigma\rho_n)\ \sigma) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\sum_{\sigma\in S_n} f(\sigma)\ \sigma + \sum_{\sigma\in S_n} f(\sigma)\ \sigma\rho_n) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(f + f\rho_n) \end{aligned}$$

Soit $H = \{(1),\ \rho_n\}$, un sous-groupe de S_n, 1 la représentation identité de S_n et définissons l'espace

$$V = \{f\colon S_n \to Q \mid f(\sigma\rho) = 1(\rho)\ f(\sigma) = f(\sigma),\ \ \forall\,\sigma \in S_n,\ \rho \in H\}$$

sur lequel S_n agira par le biais de l'action

$$(\pi(\tau)\ f)\ (\sigma) = f(\tau^{-1}\sigma),\quad \tau,\ \sigma \in S_n$$

Alors $V,\ \pi = \mathrm{Ind}_H^{S_n}\ Q,\ 1$

C'est la représentation régulière à gauche; calculons son caractère. On se souviendra qu'il peut s'écrire comme une combinaison linéaire, à coefficients entiers, des caractères irréductibles.

<u>Proposition 2.1.1</u>: $\chi_{I_{\rho_n}} = \sum_{\chi \text{ irred.}} \frac{1}{2} (\chi((1)) + \chi(\rho_n))\ \chi$

(On notera que pour avoir des coefficients entiers, $\chi((1))$ et $\chi(\rho_n)$ se doivent d'avoir même parité, pour tout caractère irréductible χ)

<u>démonstration</u>:

• Si G est un groupe, ϕ, ψ, 2 fonctions de classe sur G (au sens où $\phi(\sigma) = \phi(\tau\sigma\tau^{-1})$, $\forall \sigma, t \in G$)

alors

$$<\phi, \psi>_G = 1/|G| \sum_{\sigma \in G} \phi(\sigma^{-1})\ \psi(\sigma)$$

• Si χ' dénote le caractère d'une représentation quelconque sur G, alors

$$\chi' = \sum_{\chi \text{ irred.}} <\chi', \chi>\ \chi$$

• Si K est un sous-groupe de G et χ', χ sont des caractères de G et K respectivement alors

$$< \text{Ind } \chi, \chi' >_G = < \chi, \text{Res } \chi' >_K . \qquad \text{(Frobenius)}$$

où Res χ' = restriction de χ' au sous-groupe K.

• Dans le cas qui nous occupe:

$$\begin{aligned}\chi_{I_{\rho_n}} &= \sum_{\chi \text{ irred.}} \langle \chi_{I_{\rho_n}}, \chi \rangle_{S_n} \chi \\ &= \sum_{\chi \text{ irred.}} \langle 1, \operatorname{Res} \chi \rangle_H \chi \\ &= \sum_{\chi \text{ irred.}} \tfrac{1}{2} (\chi((1)) + \chi(\rho_n)) \chi\end{aligned}$$

2.2) Extension de la formule du degré.

C'est un fait connu qu'à chaque caractère irréductible de S_n correspond une partition faiblement décroissante p: $p_1 \geq p_2 \ldots \geq p_n \geq 0$, $|p| = \sum_{i=1}^{n} p_i = n$, de l'entier n (et donc à une classe de conjugaison de S_n aussi bien qu'à un type de décomposition cyclique d'éléments de S_n).

Frobenius a donné une formule explicite qui donne le degré de la représentation irréductible considérée en termes des p_i de la partition p qui lui est associée. Or l'intérêt suscité à la section précédente par la valeur que prend χ pour l'élément ρ_n soulève la question à savoir s'il est possible d'établir une formule similaire (ou à tout le moins de calculer) pour obtenir cette fois non pas le degré (c.-à-d. $\chi((1))$) mais précisément la valeur $\chi(\rho_n)$

Le fil conducteur des notions introduites et des calculs effectués ici pourra être retracé dans Ledermann [4], p. 108 et suivantes.

<u>Notation</u>: 1) Soit une permutation σ s'écrivant comme le produit (disjoint) de α_1 1-cycles, α_2 2-cycles,..., α_n n-cycles; on exprime ce fait par α: $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n$ et σ est un élément de la classe de conjugaison C_α de S_n dont la cardinalité nous est donnée par la formule de Cauchy [4]

$$h_\alpha = \frac{n!}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\, 2^{\alpha_2}\alpha_2! \ldots n^{\alpha_n}\alpha_n!}$$

2) Si α: $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n$ et la partition $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ dénotent la même classe de conjugaison C_α, alors les symboles $\chi_\alpha^\lambda = \chi^\lambda(\mu)$ désigneront tous 2 la valeur du caractère irréductible associé à la partition λ, sur C_α. Et donc en particulier, on s'intéresse à $\chi^\lambda(\rho_n)$ $\forall\lambda$ où ρ_n désignera le type cyclique (2, 2, ..., 2, 0, ..., 0) si n est pair, ou (2, ..., 2, 1, 0, ..., 0) si n est impair. (ρ_n continuera aussi de désigner, selon le contexte, la permutation (1 n) (2 n-1)...)

• On peut dès à présent réduire le cas général au cas où n est pair. Littlewood donne diverses techniques de calcul des caractères. L'une d'entre elles affirme que si l'on connaît $\chi^\lambda(\rho_n)$, quelque soit λ, on obtient $\chi^\mu(\rho_{n+1})$ par récurrence (où λ et μ sont des partitions de n et n+1 respectivement)

De fait, si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$, $\mu_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = n+1$ alors

$\chi^\mu(\rho_{n+1}) = \sum_\lambda \chi^\lambda(\rho_n)$ où λ parcourt les partitions $(\mu_1 - 1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$

$(\mu_1, \mu_2-1, \ldots, \mu_k), \ldots, (\mu_1, \ldots, \mu_k-1)$ en négligeant les λ pour lesquels l'ordre des μ_i n'est pas décroissant [5] pp: 140-141.

Par exemple, si $n = 4$, $\chi^{(3,1,1)}((2,2,1)) = \chi^{(2,1,1)}((2,2)) + \chi^{(3,1)}((2,2)) = -1-1 = -2$

(voir les tables en appendice)

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un ensemble de n variables et $p = (p_1,\ldots,p_n)$ un n-tuple d'entiers non-négatifs quelconques on pose $(x/p) = x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$. Notons que si $\sigma \in S_n$ et $\sigma p = (p_{\sigma(1)}, \ldots, p_{\sigma(n)})$ et $\sigma x = (x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ alors $(\sigma x/\sigma p) = (x/p)$.

Avec cette façon d'écrire, on peut toujours exprimer un polynôme $P(x) = \sum_p a_p\,(x/p)$, la somme étant finie. Aussi, $P(x)$ est dit polynôme <u>symétrique</u> si $P(\sigma x) = P(x)$ $\forall \sigma \in S_n$ et <u>anti-symétrique</u> si $P(\sigma x) = (-1)^{\sigma} P(x)$

Si $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ et $\ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_n > 0$, alors

$$V_\ell = \begin{vmatrix} x_1^{\ell_1} & \ldots\ldots\ldots & x_n^{\ell_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{\ell_n} & \ldots\ldots\ldots & x_n^{\ell_n} \end{vmatrix} = \sum_\sigma (-1)^\sigma (x/\sigma\ell)$$

On a en particulier le déterminant de Vandermonde $\Delta = \prod_{0<i<j<n-1} (x_i - x_j)$ $= V_\omega$ où $\omega = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$ et $|\omega| = \frac{n(n-1)}{2}$

<u>Définition 2.2.1</u>: Formons $s_r = x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r$, $r = 1, 2\ldots$ Soit la classe C_α, α: $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n$, à laquelle on associe le produit $s_\alpha = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \ldots s_n^{\alpha_n}$. On appelle s_α une <u>fonction génératrice</u>. ∎

On trouve dans Ledermann [6] p: 102-108 la preuve du résultat de Frobenius qui fournit une relation entre les fonctions génératrices et les caractères irréductibles: si $N \in \frac{n(n+1)}{2}$ et ℓ: $\ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_n > 0$ avec $|\ell| = N$, alors

$$s_\alpha \Delta = \sum_{|\ell|=N} \chi^\ell{}_\alpha \, V_\ell \tag{2.2}$$

Nous examinons maintenant l'allure que prend la formule pour le cas spécifique $\chi^\lambda(\rho_n)$. En tenant compte du fait que les partitions strictement décroissantes ℓ: $\ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_n > 0$ de N sont en correspondance biunivoque avec les partitions non-croissantes p: $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$ de n, par la relation $\ell_i = p_i + n - i$, $i = 1, 2\ldots$, il sera sous-entendu que $\chi_\alpha{}^{(p)}$ et $\chi_\alpha{}^\ell$ désignent la même valeur.

• Soit $n \equiv 0 \pmod 2$ et $\rho_n = (2, 2, \ldots, 2)$, n/2 fois, c.-à-d. $\alpha_2 = n/2$ et $\alpha_1 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$

Alors la formule 2·2 se réduit à:

$$s_2{}^{\alpha_2} \Delta = s_2{}^{n/2} \Delta = \sum_{|\ell|=N} \chi^\ell(\rho_n) \, V_\ell$$

où

$$s_2{}^{n/2} = \sum_{|r|=\frac{n}{2}} \frac{(n/2)!}{r_1!\ldots r_n!} x_1{}^{2r_1} \ldots x_n{}^{2r_n}$$

et r parcourt toutes les partitions non-négatives et pas nécessairement non-croissantes de n/2.

Récrivons

$$s_2{}^{n/2} = \sum_{|r|=\frac{n}{2}} \frac{(n/2)!}{r_1!\ldots r_n!} (x/2r), \quad r = (r_1, \ldots, r_n), \ |r| = n/2$$

$$\Delta = V_\omega = \sum_\sigma (-1)^\sigma (x/\sigma\omega), \quad \omega = (n-1, \ldots, 1, 0), \quad |\omega| = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\therefore \quad s_2^{n/2} \Delta = \sum_r \sum_\sigma (n/2)! \left\{ \prod_{i=1}^n r_i! \right\}^{-1} (-1)^\sigma (x/\sigma\omega + 2r)$$

Pour obtenir le coefficient de V_ℓ, on doit imposer la condition $\sigma\omega + 2r = \tau\ell$ pour une permutation $\tau \in S_n$.

Alors $r = \frac{\tau\ell - \sigma\omega}{2}$

Or ce procédé introduit inévitablement des composantes négatives, ou non-entières si le numérateur est impair. Pour éliminer ces cas indésirables, il convient d'adopter la convention suivante:

$$\begin{cases} (-m)! = 0 & m > 0,\ m \in \mathbb{Z} \\ (\pm a/b)! = 0 & \text{si } a/b \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\therefore \quad s_2^{n/2} \Delta = \sum_\ell \sum_{\sigma,\tau} (n/2)! \left\{ \prod_{i=1}^n \left(\frac{\ell_{\tau(i)} - \omega_{\sigma(i)}}{2}\right)! \right\}^{-1} (-1)^\sigma (x/\tau\ell)$$

En multipliant chaque facteur du produit par τ^{-1} et en posant $\pi = \sigma\tau^{-1}$ (en notant que $(-1)^\sigma = (-1)^\pi (-1)^\tau$):

$$s_2^{n/2} \Delta = \sum_\ell \sum_{\pi,\tau} (-1)^\pi (n/2)! \left\{ \prod_{i=1}^n \left(\frac{\ell_i - \omega_{\pi(i)}}{2}\right)! \right\}^{-1} (-1)^\tau (x/\tau\ell)$$

Et en sommant sur τ:

$$s_2^{n/2} \Delta = \sum_\ell \sum_\pi (-1)^\pi (n/2)! \left\{ \prod_{i=1}^n \left(\frac{\ell_i - \omega_{\pi(i)}}{2}\right)! \right\}^{-1} V_\ell$$

Donc:

$$\chi^\ell(\rho_n) = \sum_\pi (-1)^\pi (n/2)! \left\{ \prod_{i=1}^n \left(\frac{\ell_i - \omega_{\pi(i)}}{2}\right)! \right\}^{-1}$$

Exemple: $n = 6,\ p = (3, 1, 1, 1, 0, 0) \to \ell = (8, 5, 4, 3, 1, 0)$

$\omega = (5, 4, 3, 2, 1, 0)$

On veut avoir $(\ell_i - \omega_{\pi(i)}) \equiv 0 \pmod 2$

$(\ell_i - \omega_{\pi(i)}) > 0$

On remarque qu'une ou l'autre des conditions n'est pas satisfaite si

1) 1, 2, 3, ou 4 est fixé par π.

2) $\pi(1) = 3$ ou 5 $\qquad$ $\pi(4) = 1, 2,$ ou 6

$\pi(2) = 4$ ou 6 $\qquad$ $\pi(5) = 1, 2, 3, 4,$ ou 6

$\pi(3) = 1$ ou 5 $\qquad$ $\pi(6) = 1, 2, 3, 4,$ ou 5

Les possibilités seront: $\pi(1) = 2$ ou 4 $\qquad$ $\pi(4) = 3$

$\pi(2) = 1$ ou 3 $\qquad$ $\pi(5) = 5$

$\pi(3) = 2$ ou 4 $\qquad$ $\pi(6) = 6$

Les seules valeurs acceptables pour π sont (1432) et (12)(34).

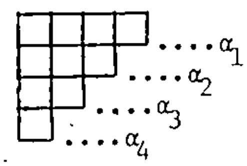
Et donc $\chi^{((3,1,1,1))}(\rho_6) = (-1)\cdot(6)\cdot\left\{\frac{1}{3!}\right\} + (6)\cdot\left\{\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{1!}\right\}$

$= -1 + 3 = 2$

Chapitre 3: Structure de JV_n.

Dans ce chapitre, on présente le résultat obtenu concernant la structure de l'idéal JV_n. Mais d'abord quelques faits généraux.

Définition 3.1: Un diagramme de Young est une représentation graphique d'une partition $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = n$, de n.



où $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$

On écrit $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. ∎

A partir de maintenant, $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ désignera aussi le caractère irréductible associé à la partition α. Si plusieurs composantes d'une même partition sont identiques, on conviendra d'abréger l'écriture par l'exponentiation.

ex: $[2,2,1,1,1] = [2^2, 1^3]$

Définition 3.2: Un tableau de Young est un arrangement des symboles $\{1,\ldots,n\}$ dans un ordre défini par le diagramme de Young d'une partition α de n. ∎

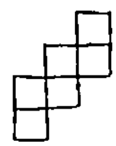
ex:

1	3	5	8
2	4		
6	7		

On généralise les notions de diagramme et de tableau comme suit.

<u>Définition 3.3</u>: Soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ avec $m \leq n$, des partitions de n et m t.q. $\beta_i \leq \alpha_i$, $1 \leq i \leq m$. Alors $[\alpha/\beta]$ désigne le diagramme obtenu en éliminant de la i^e ligne de $[\alpha]$ les β_i premières cases, $1 \leq i \leq m$. ⊞

ex: $[3^2, 2, 1 \,/\, 2, 1]$



<u>Définition 3.4</u>: Soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, 2 partitions de n. Le <u>tableau de forme α et de contenu β</u> est obtenu en plaçant dans $[\alpha]$ β_i fois l'entier i, $1 \leq i \leq n$. ⊞

ex:

1	1	2	3	est un tableau de forme $[4,2]$ et de contenu
2	4			$(2^2, 1^2)$.

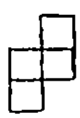
On dira d'un tableau de ce type qu'il est <u>semi-standard</u> si dans chaque ligne, les nombres sont dans un ordre non-décroissant, et dans chaque colonne, ils sont dans un ordre strictement croissant. Le tableau ci-haut est un exemple de tableau semi-standard.

• On rappelle la remarque du chapitre 1 (prop 1.9) à l'effet qu'on peut exprimer JV_n par récurrence en utilisant les éléments de JV_{n-1} et JV_{n-2}. Pour obtenir des informations sur la façon de procéder en vue d'obtenir les caractères de JV_n, il sera utile d'examiner la décomposition des caractères induits par les caractères irréductibles de S_{n-1} et S_{n-2}.

Un résultat en ce sens, plus général qu'il n'est nécessaire ici, la règle de Littlewood Richardson, affirme la chose suivante [3]:

Soient $[\alpha]$, $[\beta]$ et $[\gamma]$, des caractères irréductibles de S_m, S_n et S_{m+n} respectivement et écrivons $[\alpha][\beta]$ pour désigner la représentation induite par le produit tensoriel (extérieur) de ces deux caractères. Alors la multiplicité de $[\gamma]$ dans $[\alpha][\beta]$ est égale au nombre de tableaux semi-standards de forme $[\gamma/\alpha]$ et de contenu $[\beta_1, \ldots, \beta_n]$ qui présentent la caractéristique suivante: si l'on aligne toutes les entrées du tableau en lisant de droite à gauche et de haut en bas, on obtient une suite de nombres, telle que pour chaque j, on retrouve le nombre i, au sein des j premières positions, plus souvent ou aussi souvent que le nombre i+1, et ce $\forall i \in \mathbb{N}$.

<u>Exemple:</u> Si $m = 3$, $n = 4$, $[\alpha] = [2,1]$, $[\beta] = [2,1^2]$ et $[\gamma] = [2^3,1]$ alors

$[\gamma/\alpha] =$  et les tableaux possibles sont:

$$\begin{array}{cc} & 1\\ 1 & 2\\ 3 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} & 1\\ 1 & 3\\ 2 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} & 1\\ 2 & 1\\ 3 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} & 1\\ 3 & 1\\ 2 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} & 1\\ 2 & 3\\ 1 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} & 1\\ 3 & 2\\ 1 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} & 2\\ 1 & 1\\ 3 & \end{array},$$

$$\begin{array}{cc} & 3\\ 1 & 1\\ 2 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} & 2\\ 1 & 3\\ 1 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} & 3\\ 1 & 2\\ 1 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} & 2\\ 3 & 1\\ 1 & \end{array}, \quad \begin{array}{cc} & 3\\ 2 & 1\\ 1 & \end{array}$$

Les seuls tableaux semi-standards sont: $\begin{array}{cc} & 1\\ 1 & 2\\ 3 & \end{array}$ et $\begin{array}{cc} & 1\\ 1 & 3\\ 2 & \end{array}$

Le premier fournit la suite 1 2 1 3 qui est acceptable et le second donne la suite 1 3 1 2 qui elle ne l'est pas. Donc, $[2^3,1]$ sera de multiplicité 1 dans la décomposition de $[2,1][2,1^2]$. ∎

L'usage que l'on se propose de faire de cette règle se limite à la situation n = 2 ou n = 1. Dans ce dernier cas, la règle est connue sous le nom de théorème de branchement [3] et peut être énoncée comme suit: si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ est une partition de n-1, la représentation induite

$$\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} [\alpha] = \sum_{\substack{i \\ \alpha_i < \alpha_{i-1}}} [\alpha^{i^+}] \quad \text{où} \quad \alpha^{i^+} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_i+1,\alpha_{i+1},\ldots\alpha_{n-1})$$

Exemple: $\mathrm{Ind}_{S_4}^{S_5} [2,1^2] = [3,1^2] + [2^2,1] + [2,1^3]$

Les lemmes qui suivent justifient l'application de la règle de Littlewood- Richardson, dans le cas qui nous occupe.

Note: En vue de simplifier, à l'avenir on ne distinguera pas entre les espaces de polynômes en x_i et les sous-espaces de $Q[S_n]$ en posant l'égalité là où en fait, il devrait y avoir isomorphisme ($\cong$)

Lemme 3.5: Soit M un sous-module irréductible du S_{n-2}-module V_{n-2} (resp. du S_{n-1} - module V_{n-1}). Alors le sous-module M_1 du S_n-module V_n engendré par $\{p(x_{n-1} \circ x_n) \mid p \in M\}$ (resp. $\{px_n \mid p \in M\}$ est isomorphe au sous-module M_2 de V_n engendré par $\{p \circ (x_{n-1} \circ x_n) \mid p \in M\}$ (resp. $\{p \circ x_n \mid p \in M\}$).

<u>Démonstration</u>: Soit $p \in M$, $\sigma \in S_n$.

$$\begin{array}{rccc} \psi : & M_1 & \to & M_2 \\ & p\, x_{n-1}x_n + p\, x_nx_{n-1} & \to & p\, x_{n-1}x_n + p\, x_nx_{n-1} + x_{n-1}x_np + x_nx_{n-1}p \end{array}$$

- ψ est bien définie: si $m_1 = px_{n-1}x_n + px_nx_{n-1}$ et $m_1 = m_2$

$$m_2 = qx_{n-1}x_n + qx_nx_{n-1}$$

alors $p = q$ et $\psi(m_1) = \psi(m_2)$

- $\psi(\sigma m_1) = p_\sigma x_{\sigma(n-1)}x_{\sigma(n)} + p_\sigma x_{\sigma(n)}x_{\sigma(n-1)} + x_{\sigma(n-1)}x_{\sigma(n)}p_\sigma + x_{\sigma(n)}x_{\sigma(n-1)}p_\sigma$

$= \sigma\psi(m_1)$ où $p_\sigma = \sigma p$

- Si $\psi(m_1) = 0 \therefore p = 0 \therefore m_1 = 0 \therefore \ker \psi = 0$

On traite de la même manière le cas de S_{n-1}. ⊞

Si $M \subset V_{n-2}$ est un S_{n-2} - module irréductible et $y = (x_{n-1} \circ x_n)$ considérons

$$\begin{array}{rcl} \psi: V_{n-2} & \to & V_n \\ M & \to & My = \{px_{n-1}x_n + px_nx_{n-1} \mid p \in M\} \end{array}$$

Ecrivons $W_{n-1n} = My$. Alors $W_{n-1n} \cong M \otimes Qy$ et l'on peut voir W_{n-1n} comme une représentation du groupe $S_{n-2} \times S_2$, où $S_2 = \{(1), (n-1\ n)\}$, et S_{n-2} agit sur $\{x_1, \ldots, x_{n-2}\}$ tandis que S_2 agit "trivialement" sur $\{x_{n-1}, x_n\}$.

Soit $W = Q[S_n]W_{n-1n}$

Lemme 3.6: On a $W = \mathrm{Ind}_{S_{n-2}\times S_2}^{S_n} W_{n-1n}$

démonstration: Posons $H = S_{n-2} \times S_2$ et considérons l'ensemble de représentants des classes à gauche de S_n/H:

$\{(i\ n-1)(j\ n) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ avec la convention que $(a\ a) = (1)$, $1 \leq a \leq n$.

• On a le nombre requis $[S_n:H] = n(n-1)/2$ de représentants.
Si $(i\ n-1)(j\ n)H = (k\ n-1)(\ell\ n)H$, alors $\xi = (\ell\ n)(k\ n-1)(i\ n-1)(j\ n) \in H$.
On rappelle que $n-1$ et n sont soit fixés, soit envoyés l'un sur l'autre par un élément de H.

Si $i \neq k$, disons $i < k$,
$$\xi = \begin{cases} (j\ \ell\ n\ n-1\ i) & \text{si } j = k \\ (i\ k\ n-1) & \text{si } j = \ell \\ (j\ \ell\ n)(i\ k\ n-1) & \text{autrement} \end{cases} \quad \therefore\ \xi \notin H$$

Si $j \neq \ell$, disons $j < \ell$,
$$\xi = \begin{cases} (k\ \ell\ n\ n-1\ i) & \text{si } k = j \\ (j\ \ell\ n) & \text{si } k = i \\ (j\ \ell\ n)(i\ k\ n-1) & \text{autrement} \end{cases} \quad \therefore\ \xi \notin H$$

$\therefore$ $i = k$, $j = \ell$ et l'on a un système de représentants.

• Alors $W = \sum_{1\leq i<j\leq n}^{\oplus} W_{ij}$

où $W_{ij} = (i\ n-1)(j\ n)H \cdot W_{n-1n}$. En effet,

1) Puisque $W_{ij} = \{p(x_1, \ldots, \underset{i^e}{x_{n-1}}, \ldots, \underset{j^e}{x_n}, \ldots, x_{n-2})(x_i x_j + x_j x_i) \mid p \in M\}$

on voit qu'en fixant une paire (i,j), on doit avoir $W_{ij} \cap \sum_{\substack{1\leq k<\ell\leq n \\ (k,\ell)\neq(i,j)}} W_{k\ell} = 0$

2) Soit $x \in W$; $x = \sum c_\sigma \, \sigma\,(px_{n-1}x_n + px_nx_{n-1})$

On peut clairement récrire x en réunissant pour chaque paire (i,j) les deux monômes qui se terminent respectivement par x_ix_j et x_jx_i; cette somme (de 2 monômes) se trouve dans W_{ij}. Donc x s'écrit comme une somme d'éléments des W_{ij}.

$\therefore$ la somme est directe. ⊞

<u>Note</u>: Dans le cas de S_{n-1}, on refait le cheminement avec cette fois le système de représentants $\{(1), (1\ n), (2\ n), \ldots, (n-1\ n)\}$

Sommairement, si M est une composante irréductible de JV_{n-2}, chercher le caractère de la représentation de S_n dont le module est engendré par $\{p \circ (X_{n-1} \circ x_n) \mid p \in M\}$ revient à chercher le caractère de $\mathrm{Ind}_{S_{n-2} \times S_2}^{S_n} M \otimes Q(x_{n-1} \circ x_n)$, dont la valeur nous est donnée par la règle de Littlewood-Richardson.

Dans les faits, un caractère irréductible $[\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}]$ de JV_{n-2} induira un caractère irréductible donné $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ de JV_n si $\beta_i \leq \alpha_i$, $1 \leq i \leq n-2$, et si après avoir éliminé β_i cases de la i^e ligne du diagramme $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, $1 \leq i \leq n-2$, les 2 cases restantes ne sont pas situées dans la même colonne.

Et le caractère $[\beta] = [\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}]$ de JV_{n-1} induira le caractère $[\alpha] = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ de JV_n si le diagramme $[\alpha]$ peut être obtenu de $[\beta]$ en ajoutant une case à ce dernier.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter le résultat sur JV_n. Noter que pour désigner l'idempotent central associé à la représentation irréductible de caractère $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = [\alpha]$, on écrira $e^{(\alpha)}$; et de même $f^{(\alpha)}$ dénotera l'idempotent $e^{(\alpha)}(\frac{1}{2}((1) + \rho_n))$

Théorème 3.7: Le caractère χ_n de JV_n pour $1 \leq n \leq 6$ est donné par:

1) $\chi_1 = [1]$
2) $\chi_2 = [2]$
3) $\chi_3 = [3] + [2,1]$
4) $\chi_4 = [4] + [3,1] + 2[2^2] + [2,1^2]$
5) $\chi_5 = [5] + 2[4,1] + 3[3,2] + 2[3,1^2] + 3[2^2,1] + [2,1^3]$
6) $\chi_6 = [6] + 2[5,1] + 6[4,2] + 4[4,1^2] + [3^2] + 8[3,2,1] + 4[3,1^3] + 4[2^3] + 3[2^2,1^2] + [2,1^4]$

De plus, pour $1 \leq n \leq 5$, un idempotent générateur de JV_n nous est donné par:

1) (1)
2) $\frac{1}{2}((1) + (2))$
3) $\frac{1}{2}((1) + (13))$
4) $11/24\ ((1) + (14)(23)) - 1/24 \sum_{\sigma \in S_4 - H_4} (-1)^{\sigma}\sigma$ où $H_4 = \{(1),(14)(23)\}$

5) 1/120 $[55\{(1) + (15)(24)\} + \{-(35) + (45) - (34) + (15)(34)$
$+ (25)(34) + (14)(35) + (24)(35) + (135) - (145) - (235) - (254)$
$- (134) + (234) - (125)(34) - (135)(24) - (234)(15) + (235)(14)$
$+ (134)(25) + (345)(12) - (142)(35) + (354)(12) + (1235) + (1425)$
$- (2345) + (2435) - (1354) + (1534) + (1342) + (12345) - (12435)$
$- (13452) - (14352) - (12534) - (15342) - (12354) + (13542)\}$
$+ 3\{-(12)(35) - (12)(34) + (345) + (354) + (152)(34) + (124)(35)$
$- (1345) - (1435) + (1352) - (2534) - (2354) + (1234) + (13425)$
$+ (14235) - (15234) - (13524)\} + 5\{(15) + (25) + (14) + (24)$
$- (14)(25) - (12)(45) - (125) - (245) - (154) - (142) + (1245)$
$+ (1452) + (1254) + (1542)\} + 7\{-(13)(45) + (132) + (13)(254)$
$+ (1453) - (1532) - (1324) - (14253) + (15324)\} + 9\{-(23) + (12)$
$+ (15)(23) + (14)(23) - (152) - (124) - (143) + (243) - (15)(243)$
$+ (143)(25) - (154)(23) + (123)(45) + (1524) + (1543) + (1423)$
$- (1432) - (14523) - (15423) - (12543) + (15432)\} + 11\{(13)$
$- (13)(25) - (13)(24) - (153) + (253) + (13)(245) + (153)(24)$
$- (253)(14) - (132)(45) - (1325) + (1253) - (2453) + (13245)$
$- (12453) + (14532) + (13254)\} + 13\{(23)(45) - (123) - (145)(23)$
$+ (1523) - (2543) + (1243) + (14325) - (15243)\}]$ ∎

Notons que le fait que le générateur d'un idéal I soit un idempotent présente l'avantage évident de rendre aisée la vérification à savoir si un élément donné appartient à cet idéal: si $I = Me$, alors
$a = be \rightarrow ae = be^2 = be = a, \quad b \in M.$

<u>démonstration</u>: L'argument de base provient du fait que $JV_n \subset H(Q[S_n], *)$ ce qui implique que les multiplicités des caractères irréductibles dans la décomposition de JV_n seront inférieures ou égales à celles qui apparaissent dans la décomposition de $H(Q[S_n], *)$. Il sera aussi nécessaire de garder en tête les dimensions de JV_n, $1 < n < 6$, données au Chap. 1.

<u>n = 1</u>: On a $X_1 = \{x_1\}$ et $Q[S_1] \simeq Q$. Il est clair que tous les éléments de V_1 sont hermitiens et puisque $\dim_Q JV_1 = 1$
$V_1 = H(Q[S_1], *) = JV_1$. Evidemment, (1) est le générateur de JV_1.

<u>n = 2</u>: Ici, $\dim_Q H(Q[S_2], *) = \dim_Q JV_2 = 1$

$$\therefore \quad JV_2 = H(Q[S_2], *)$$

Aussi $2 \equiv 2 \pmod 4$ et le caractère $[1^2]$ ne contribue donc pas à la décomposition du caractère de $H(Q[S_2], *)$. $\therefore \chi_2 = [2]$. Enfin, $\frac{1}{2}((1) + (12))$ étant le générateur de $H(Q[S_2], *)$, c'est celui de JV_2.

<u>n = 3</u>: Encore une fois, $\dim_Q H(Q[S_3], *) = \dim_Q JV_3 = 3$
$\therefore JV_3 = H(Q[S_3], *)$ et les deux espaces ont le même générateur $\frac{1}{2}((1) + (13))$ ainsi que le même caractère $\chi_3 = [3] + [2,1]$ (obtenu de la formule du chapitre 2).

<u>n = 4</u>: On a $\dim_Q H(Q[S_4], *) = 12$ et $\dim_Q JV_4 = 11$. Conséquemment, un caractère irréductible de degré 1 est à la fois présent dans $H(Q[S_4], *)$ et absent de JV_4. Du chapitre 2, on tire le caractère du premier espace

$${}_4\chi = [4] + [3,1] + 2[2^2] + [2,1^2] + [1^4]$$

Or selon Smith [9], le polynôme standard $\sum_\sigma (-1)^\sigma \sigma$ n'est jamais un élément de Jordan, quelque soit n; cet élément engendre un sous-espace de $H(Q[S_n], *)$ de dimension 1 correspondant au caractère $[1^n]$.

Ici on aura $\chi_4 = [4] + [3,1] + 2[2^2] + [2,1^2]$

Et puisque $JV_4 = Q[S_4]\, e^{(4)} \oplus Q[S_4]f^{(3,1)} \oplus Q[S_4]e^{(2^2)} \oplus Q[S_4]f^{(2,1^2)}$ un générateur est donné par la somme $e^{(4)} + f^{(3,1)} + e^{(2^2)} + f^{(2,1^2)}$ et l'on peut vérifier aisément que le résultat obtenu est $11/24\ ((1) + (14)(23)) - \sum_{\sigma \in S_4 - H_4} (-1)^\sigma \sigma$

Cet élément est un idempotent, étant la somme de quatre idempotents orthogonaux.

Maintenant, soient $x, y, z, t \in JV_n$, et soit l'identité de Jordan linéarisée (voir Chap. 1 et l'équation 1.8)

$$\begin{aligned} (3.7):\quad & (x \circ y) \circ (z \circ t) + (x \circ z) \circ (y \circ t) + (x \circ t) \circ (y \circ z) \\ &= ((z \circ t) \circ x) \circ y + ((t \circ y) \circ x) \circ z + ((y \circ z) \circ x) \circ t \\ &= ((x \circ t) \circ z) \circ y + ((t \circ y) \circ z) \circ x + ((y \circ x) \circ z) \circ t \end{aligned}$$

Pour avoir une base de JV_4, il s'agit de trouver 11 polynômes parmi les 12 polynômes de la forme $((a \circ b) \circ c) \circ d$ et les 3 de la forme $(a \circ b) \circ (c \circ d)$, $a, b, c, d \in X_4$, qui engendrent tout l'espace. En utilisant (3.7), on vérifie que l'ensemble suivant forme une base.

$\{((x \circ y) \circ z) \circ t,\ ((x \circ y) \circ t) \circ z,\ ((x \circ z) \circ y) \circ t,\ ((x \circ z) \circ t) \circ y,$
$((x \circ t) \circ z) \circ y,\ ((x \circ t) \circ y) \circ z,\ ((y \circ z) \circ x) \circ t,\ ((y \circ t) \circ x) \circ z,$
$((z \circ t) \circ x) \circ y,\ (x \circ y) \circ (z \circ t),\ (x \circ z) \circ (y \circ t)\}$ }

<u>n = 5</u>: Ici, $\dim_Q H\,(Q[S_5], *) = 60$ et $\dim_Q JV_5 = 55$. On accuse une perte de dimension égale à 5 et l'on sait déjà que $[1^5]$ fait partie du premier espace et est absent du second. Aussi le caractère de $H\,(Q[S_5], *)$ est

$$_5\chi = [5] + 2[4,1] + 3[3,2] + 2[3,1^2] + 3[2^2,1] + 2[2,1^3] + [1^5]$$

et les dimensions respectives de ces caractères irréductibles étant 1, 4, 5, 6, 5, 4 (et 1) les seuls caractères encore susceptibles de disparaître de $H\,(Q[S_5], *)$ pour avoir JV_5 sont $[4,1]$ et $[2,1^3]$. Pour pouvoir déduire plus avant, considérons les 55 polynômes suivants: parmi les $\binom{5}{2}.3.2 = 60$ polynômes de la forme $(((x \circ y) \circ z) \circ t) \circ \mu$ et les $\binom{5}{2}.\tfrac{1}{2}.5 = 25$ polynômes de la forme $((x \circ y) \circ (z \circ t)) \circ \mu$, choisissons ceux qui sont obtenus en fixant la lettre μ (5 choix pour le faire) et en formant avec x, y, z, et t les 11 polynômes de la base donnée plus haut, au cas n = 4. Ces 55 polynômes engendrent tout JV_5, x, y, z, t et $\mu \in X_5$.

En effet, l'on doit s'assurer qu'il est possible d'en obtenir tous les polnômes des 3 formes 1) $(((x \circ y) \circ z) \circ t) \circ \mu$

2) $((x \circ y) \circ (z \circ t)) \circ \mu$

3) $((x \circ y) \circ z) \circ (t \circ \mu)$

$x, y, z, t, \mu \in X_5$

De l'identité (3.7), on obtient facilement les 2 premières formes alors que pour la troisième, il suffit de penser à $(t \circ \mu)$ comme à une variable et encore une fois par (3.7) on obtient:

$$\begin{aligned}((x \circ y) \circ z) \circ (t \circ \mu) = {} & ((z \circ x) \circ (t \circ \mu)) \circ y + ((x \circ y) \circ (t \circ \mu)) \circ z \\ & + ((y \circ z) \circ (t \circ \mu)) \circ x - (((t \circ \mu) \circ x) \circ z) \circ y \\ & - (((t \circ \mu) \circ y) \circ z) \circ x\end{aligned}$$

Puisque $\dim_Q JV_5 = 55$, cet ensemble constitue une base de JV_5; celle-ci est d'autant plus intéressante qu'elle nous assure qu'il suffit d'une induction du niveau $n = 4$ au niveau $n = 5$ pour avoir tout JV_5. Revenant au caractère de JV_5, on remarque alors que le seul caractère irréductible de JV_4 qui une fois induit fait apparaître $[2,1^3]$ dans sa décomposition est le caractère $[2,1^2]$, (voir figure 3.8, plus loin). Et la multiplicité de $[2,1^2]$ dans JV_4 est 1 $\therefore$ celle de $[2,1^3]$ dans JV_5 pourra être au plus égale à 1 et donc

$$\chi_5 = [5] + 2[4,1] + 3[3,2] + 2[3,1^2] + 3[2^2,1] + [2,1^3]$$

Pour trouver un générateur de JV_5, on commence par remarquer que JV_5 s'écrit:

$$JV_5 = Q[S_5]e^{(5)} \oplus Q[S_5]f^{(4,1)} \oplus Q[S_5]f^{(3,2)} \oplus Q[S_5]f^{(3,1^2)} \oplus Q[S_5]f^{(2^2,1)} \oplus Q[S_5]b$$

où b est un générateur du $Q[S_5]$ - module qui correspond à la représentation irréductible $[2,1^3]$. Idéalement, on choisira b pour qu'il soit un idempotent.

Tout d'abord, pour trouver un b quelconque, il suffit de prendre $j \in JV_5$, et alors $e^{(2,1^3)} \cdot j = b$ nous donnera la composante de j dans le module de $[2,1^3]$.

Soit donc l'élément de Jordan $j = (((1 \circ 2) \circ 3) \circ 4) \circ 5$ où l'on dénote la variable x_i par son indice i. En effectuant le produit $e^{(2,1^3)} \cdot j = b$, on trouve

$$\begin{aligned} b = 2\ (1 \circ 2)\ S_3(V_3, V_4, V_5) &- (1 \circ 3)\ S_3(V_2, V_4, V_5) \\ - (1 \circ 4)\ S_3(V_2, V_3, V_5) &- (1 \circ 5)\ S_3(V_2, V_3, V_4) \\ - (2 \circ 3)\ S_3(V_1, V_4, V_5) &- (2 \circ 4)\ S_3(V_1, V_3, V_5) \\ - (2 \circ 5)\ S_3(V_1, V_3, V_4) & \end{aligned}$$

où $S_3(V_r, V_s, V_t) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\sigma}\, V_{\sigma(r)}\, V_{\sigma(s)}\, V_{\sigma(t)}$ et $\mu V_s = \mu \circ s$, $\mu, s \in JV_n$.

Puis en convertissant en termes de permutations, on constate en calculant que $b^2 = 30b$, et donc que $1/30\ b$ est l'idempotent désiré.

Finalement, en prenant la somme $e^{(5)} + f^{(4,1)} + f^{(3,2)} + f^{(3,1^2)} + f^{(2^2,1)} + b$, on obtient un générateur de JV_5 qui, une fois de plus, est un idempotent parce qu'il est la somme de 6 idempotents orthogonaux. (voir énoncé du théorème).

<u>n = 6</u>: $\dim_Q H\ (Q[S_6], *) = 360$ et $\dim_Q JV_6 = 330$. Donc de $H\ (Q[S_6],*)$ à JV_6, il y a une perte de dimension égale à 30. Le caractère de $H\ (Q[S_6], *)$ est donné par

$$_6\chi = [6] + 2[5,1] + 6[4,2] + 4[4,1^2] + [3^2] + 8[3,2,1] + 6[3, 1^3] + 4[2^3] + 3[2^2,1^2] + 3[2,1^4]$$

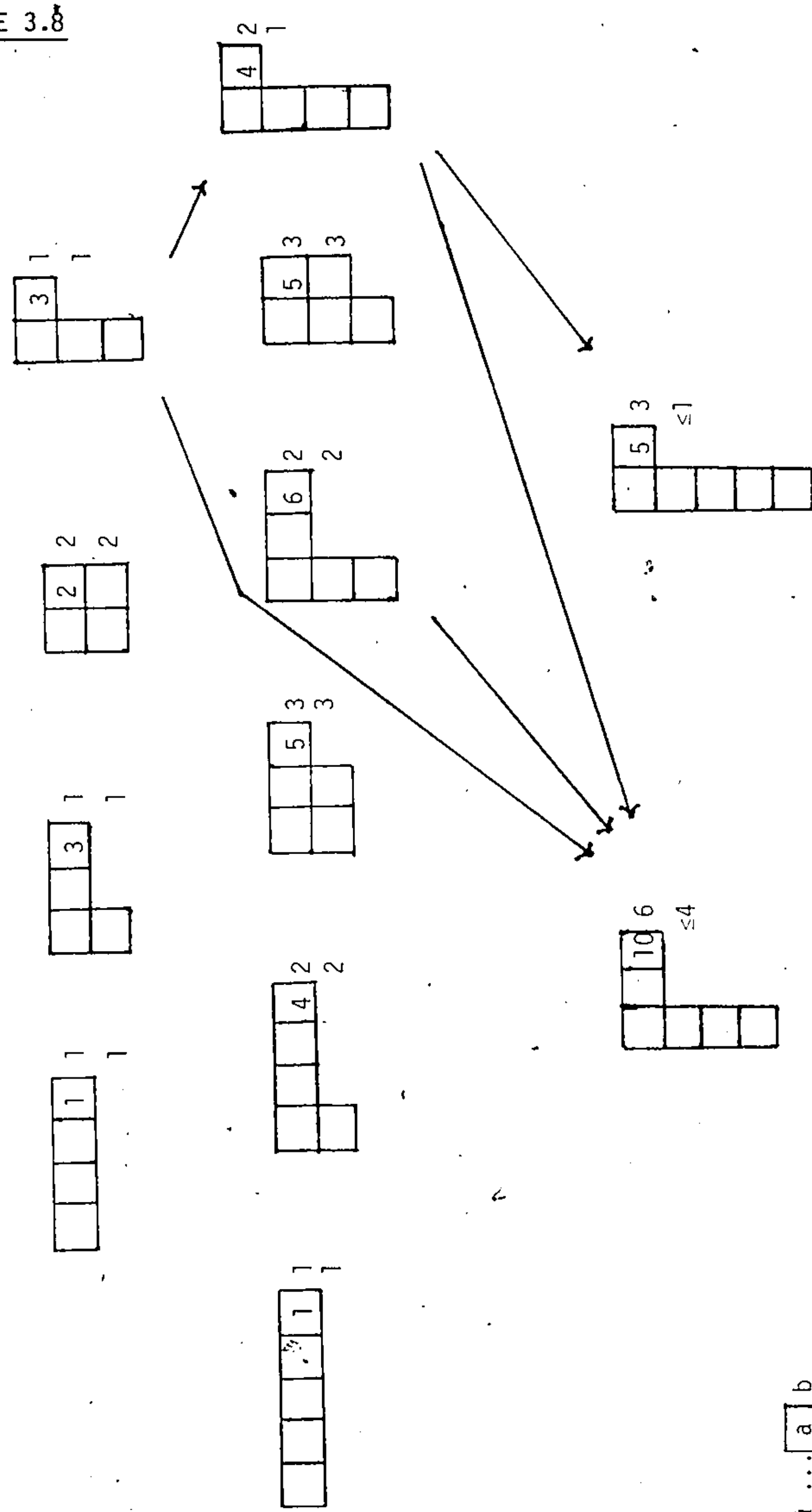
On note que l'unique apparition possible du caractère $[2,1^4]$ s'obtient par l'induction de $[2,1^3]$ (voir fig. 3.8). En outre, $\langle \chi_5, [2,1^3] \rangle = 1$ et donc, on a $\langle \chi_6, [2,1^4] \rangle < 1$; puisque le degré de $[2,1^4]$ est 5, nous perdons une contribution de dimension 10 par rapport a H $(Q[S_6], *)$. Et de même, $[3,1^3]$ n'apparaîtra que grâce à $2[3,1^2]$ et $[2, 1^3]$ au niveau $n = 5$ et $[2,1^2]$ au niveau $n = 4$ (Littlewood-Richardson) $\therefore \langle \chi_6, [3,1^3] \rangle < 4$. Puisque le degré de $[3,1^3]$ est 10, nous perdons cette fois une contribution de dimension 20 par rapport à H $(Q[S_6], *)$. (voir fig. 3.8).

La dimension totale obtenue par la somme des degrés des irréductibles restants étant égale à 330, on en déduit que ce doit être le caractère de JV_6, c'est-à-dire:

$$\chi_6 = [6] + 2[5,1] + 6[4,2] + 4[4,1^2] + [3^2] + 8[3,2,1] + 4[3, 1^3] + 4[2^3] + 3[2^2,1^2] + [2,1^4] \qquad ■$$

Remarque: Pour trouver un idempotent générateur de JV_6, la méthode jusqu'ici utilisée nous fait défaut. Pour la plupart des modules, il suffirait de prendre l'idempotent f comme générateur tandis que pour $[2,1^4]$, on pourrait procéder comme pour l'idempotent b dans JV_5. Mais le cas de $4[3,1^3]$ s'avère plus ardu car il faudrait délimiter la contribution de niveau $n = 4$ (1 copie, c.-à-d. dim 10) et celle du niveau $n = 5$ (3 copies, c.-à-d. dim 30).

FIGURE 3.8



où $\boxed{a}\,{}^{b}_{c}$

a = degré du caractère

b = sa multiplicité dans H $(Q[S_n], *)$

c = sa multiplicité dans $\mathcal{J}V_n$

Conclusion

La méthode mise de l'avant ici nous a permis d'établir le caractère de JV_n, pour $1 < n < 6$. Mais déjà, pour le cas $n = 7$, les arguments déployés présentent des lacunes empêchant de vider complètement la question. De fait, pour pousser plus loin l'investigation dans la même voie et parvenir à un résultat pour n'importe quelle valeur de n, il faudrait certainement faire la lumière sur deux aspects du problème, à savoir

1) Préciser les parties de JV_n qui sont dues à la contribution de JV_{n-1}, et celles qui sont dues à JV_{n-2}; bref identifier leur intersection.

2) Si 2 caractères irréductibles induisent 2 copies isomorphes d'un module, chercher les conditions qui permettent de prédire quand ces 2 copies ne seront pas qu'isomorphes, mais désigneront exactement le même module.

Appendice: "Tables des caractères de S_n, $2 < n < 6$, extraites du livre de James et Kerber [3]"

Note: X_i = caractère associé à la i^e partition
C_i = classe de conjugaison associée à la décomposition cyclique définie par la $(n+1-i)^e$ partition

S_2

NO	Partition	NO
X_1	$[2]$	C_2
X_2	$[1^2]$	C_1

	C_1	C_2
X_1	1	1
X_2	1	-1

S_3

NO	Partition	NO
X_1	$[3]$	C_3
X_2	$[2,1]$	C_2
X_3	$[1^3]$	C_1

	C_1	C_2	C_3
X_1	1	1	1
X_2	2	0	-1
X_3	1	-1	1

S_4

NO	Partition	NO
X_1	$[4]$	C_5
X_2	$[3,1]$	C_4
X_3	$[2^2]$	C_3
X_4	$[2,1^2]$	C_2
X_5	$[1^4]$	C_1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
X_1	1	1	1	1	1
X_2	3	1	-1	0	-1
X_3	2	0	2	-1	0
X_4	3	-1	-1	0	1
X_5	1	-1	1	1	-1

S_5

NO	Partition	NO
X_1	$[5]$	C_7
X_2	$[4,1]$	C_6
X_3	$[3,2]$	C_5
X_4	$[3,1^2]$	C_4
X_5	$[2^2,1]$	C_3
X_6	$[2,1^3]$	C_2
X_7	$[1^5]$	C_1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
X_1	1	1	1	1	1	1	1
X_2	4	2	0	1	-1	0	-1
X_3	5	1	1	-1	1	-1	0
X_4	6	0	-2	0	0	0	1
X_5	5	-1	1	-1	-1	1	0
X_6	4	-2	0	1	1	0	-1
X_7	1	-1	1	1	-1	-1	1

Appendice: (Suite)

S_6	NO	Partition	NO
	X_1	[6]	C_{11}
	X_2	[5,1]	C_{10}
	X_3	[4,2]	C_9
	X_4	$[4,1^2]$	C_8
	X_5	$[3^2]$	C_7
	X_6	[3,2,1]	C_6
	X_7	$[3,1^3]$	C_5
	X_8	$[2^3]$	C_4
	X_9	$[2^2,1^2]$	C_3
	X_{10}	$[2,1^4]$	C_2
	X_{11}	$[1^6]$	C_1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
X_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X_2	5	3	1	-1	2	0	-1	1	-1	0	-1
X_3	9	3	1	3	0	0	0	-1	1	-1	0
X_4	10	2	-2	-2	1	-1	1	0	0	0	1
X_5	5	1	1	-3	-1	1	2	-1	-1	0	0
X_6	16	0	0	0	-2	0	-2	0	0	1	0
X_7	10	-2	-2	2	1	1	1	0	0	0	-1
X_8	5	-1	1	3	-1	-1	2	1	-1	0	0
X_9	9	-3	1	-3	0	0	0	1	1	-1	0
X_{10}	5	-3	1	1	2	0	-1	-1	-1	0	1
X_{11}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1

BIBLIOGRAPHIE

[1] Glennie C.M.: "Identities in Jordan algebras", Computational Problems in Abstract Algebra, Permagon (1970), pp: 307-313.

[2] Jacobson N.: "Structure and Representations of Jordan Algebras" Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 39, Providence, (1968), 453 p.

[3] James G. et Kerber A.: "The Representation Theory of the Symmetric Group", Cambridge Univ. Press, N.Y., (1981), 510 p.

[4] Ledermann W.: "Introduction to Group Characters", Cambridge Univ. Press, Londres, (1977), 174 p.

[5] Littlewood D.E.: "The Theory of Groups Characters and Matrix Representations of Groups", Oxford, (1940).

[6] Naimark M. et Stern A.: "Théorie des représentations des groupes", MIR, Moscou, (1979), 608 p.

[7] Olsson J.B. et Regev A.: "An application of representation theory to PI-algebras" Amer. Math. Soc., Vol. 55 (2), (1976), pp: 253-257.

[8] Serre J-P.: "Linear Representations of Finite Groups", GTM Springer-Verlag, N.Y., (1982), 170 p.

[9] Smith B.D.: "A standard Jordan polynomial", Com. in Alg. 5 (2), (1977), pp: 207-218.