La nature et la fonction des graphismes produits lors de la résolution de problèmes en mathématique au niveau intermédiaire

par Jocelyne G. Schael

Thèse
présentée à l'École des études supérieures
et de la recherche de l'Université d'Ottawa
en vue de l'obtention du doctorat en philosophie

ISBN 0-612-00554-2

Dans cet ouvrage, le masculin désigne aussi bien les femmes que les hommes. Il est utilisé dans le seul but d'alléger le texte.

À Hans, Monica et Martin

Pour la liberté de m'attacher à ces pages devenues quelque chose de plus que mon histoire personnelle.

REMERCIEMENTS

La rédaction de cette thèse nécessitait le concours d'une personne ayant des connaissances approfondies sur le sujet à l'étude. Sans aucun doute, seul un directeur de thèse mathématicien, pédagogue et théoricien cognitiviste pouvait m'apporter ce support essentiel. Les remerciements de l'auteure iront donc tout d'abord à Jean-Paul Dionne qui a dirigé la recherche et largement contribué par ses idées, ses critiques et ses propres travaux à la conception de ce travail. Ils iront ensuite aux élèves pour leur coopération au moment de l'expérimentation. Ils iront aussi aux professeurs, aux directeurs d'école, aux enseignants et aux parents pour leur appui et leur encouragement. Ils iront à Jean Compain pour le travail de correction du texte. Ils iront enfin au Conseil de recherches en sciences humaines du Canada, au Ministère des Collèges Universités de l'Ontario et à l'Université d'Ottawa pour leur appui financier.

RÉSUMÉ

La nature et la fonction des graphismes produits lors de la résolution de problèmes en mathématique au niveau intermédiaire

Face à des problèmes à résoudre variés, l'élève fait appel à des graphismes (dessin, tableau, proposition, formule, etc). Ces graphismes seraient une représentation spontanée du texte problème, manifestée dans des productions écrites. Ils refléteraient des éléments du problème ou des relations entre ces éléments. Il semble que ces graphismes peuvent servir d'aide mnémonique et qu'ils facilitent la compréhension, ce qui permet la planification, si critique pour visualiser les problèmes en mathématique. Même s'ils semblent primitifs et imparfaits, ces graphismes sont importants mais à ce jour, ils ont été peu examinés. L'objectif de cette étude est de définir la nature et la fonction des graphismes produits par l'apprenant alors qu'il solutionne un problème en mathématique. Plus particulièrement, cette étude s'attachera aux relations entre les graphismes et le processus de résolution de problèmes, à savoir si ces graphismes inhibent ou facilitent la tâche à accomplir.

Le cadre conceptuel proposé par Holland, Holyoak, Nisbett et Thagard (1986) permet d'identifier les différences individuelles et le dynamisme dans les habiletés cognitives, dans un contexte de résolution de problèmes. Ces auteurs ont utilisés les

modèles mentaux pour expliquer les processus cognitifs qui sous-tendent le rendement dans une tâche. L'approche des modèles mentaux accentue la cohérence dans les différentes recherches en résolution de problèmes en permettant d'interpréter un phénomène inductif de raisonnement, telle la représentation spontanée d'un texte problème.

Une tâche de résolution de problèmes est présentée à 36 élèves de 8e et de 10e année. Les problèmes se rattachent aux trois domaines de la géométrie, de la distance et de l'inclusion. Afin de capter les types d'information cherchés (production de graphismes, processus cognitifs de résolution de problème, fonction des graphismes), la recherche fait appel à une méthodologie qui permet d'étudier les processus cognitifs qui sous-tendent le rendement. L'analyse de rapports verbaux émis lors de la résolution d'un problème permet de dégager les structures et les processus cognitifs utilisés lors de l'accomplissement de la tâche. L'observation directe des élèves en situation de résolution de problèmes est enregistrée sur vidéo. Une tâche de rétrospection assistée du rétrovisionnement du vidéo donne accès à l'intentionalité de l'élève en action. La rétroaction visuelle utilisée dans la présente recherche est un outil didactique puissant parce qu'elle aide à conscientiser des actions qui restent souvent implicites et qu'elle permet de revenir et de réfléchir sur les procédés utilisés.

Les résultats sur la nature du graphisme indiquent que la représentation typique retrouvée pour résoudre les problèmes de distance en fonction du temps est un diagramme dirigé, plus ou moins sophistiqué. Ce qui cause de l'étonnement dans cette catégorie, c'est qu'aucun élève n'utilise le formalisme algébrique. Pour résoudre les problèmes de géométrie, le dessin d'une figure géométrique est spontané, la représentation en 3D est plutôt idiosyncrasique. Pour résoudre les problèmes d'inclusion, le dessin ne se prête pas spontanément à la résolution comme il semble le faire pour les problèmes de géométrie et de distance. L'analyse sur la nature du graphisme produit révèle aussi que de nombreux tableaux et calcul/chiffre sont utilisés dans les solutions. La recherche fréquemment obsessionnelle d'algorithmes remplace la procédure de construction de la représentation de la situation-problème surtout chez les élèves d'habileté faible en mathématique ou lorsque la situation est trop abstraite. Le modèle mental est souvent en contradiction avec l'écrit.

La fonction principale identifiée dans les graphismes correspond aux étapes de la résolution de problème : compréhension, exécution de procédure et mise en évidence de buts à atteindre. En effet, les élèves essaient de comprendre (79% des solutions) en utilisant un graphisme quelle que soit leur habileté en mathématique; cependant les essais ne sont pas toujours efficaces, un lien avec la réalité est nécessaire pour mener à une solution correcte. L'analyse des protocoles correspondants aux solutions réussies montre que la représentation initiale reproduisant des objets du réel sert non seulement à comprendre mais qu'elle sert ensuite de support à l'analyse (surtout dans les solutions des problèmes de géométrie) et enfin qu'elle facilite le choix de stratégies de résolution et de stratégies de récupération. Une différence apparaît entre les garçons et les filles selon le domaine : le graphisme se prête plus facilement à la résolution des problèmes de géométrie pour les garçons et il est utilisé plus fréquemment par les filles dans la résolution des problèmes de distance.

Enfin, les résultats permettent de distinguer les représentations particularisées de l'élève des représentations planifiées de l'enseignant; de par leur nature les unes ne peuvent remplacer les autres. Un niveau de connaissances approprié est nécessaire afin de bénéficier d'une représentation planifiée, proposée à l'élève mais ce niveau de connaissance ne correspond pas nécessairement au niveau d'habileté identifié par les enseignants.

TABLE DES MATIERES

RÉSUMÉ ii

TABLE DES MATIERES vi

LISTE DES TABLEAUX xi

LISTE DES FIGURES xiii

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Problématique générale 1

Le but de l'étude 3

CHAPITRE 2 LA RECENSION DES ÉCRITS

Historique de la résolution de problème 5

La notion de représentation dans la résolution de problème 7

La représentation et le succès 10

La compréhension de problèmes écrits en mathématique 16

La réalité mnémonique 16

La réalité verbale et visuelle 17

La réalité conceptuelle 20

Les recherches sur l'apprentissage de concepts mathématiques 20

Les recherches sur la conceptualisation orientées vers les représentations externes 21

La représentation et le graphisme 23

Le cadre conceptuel 26

Les réseaux 27

Les cadres 28

Les règles de production 28

Les modèles mentaux 29

Les objectifs 31

CHAPITRE 3 LA MÉTHODOLOGIE

L'échantillon 33

Le niveau 34

Les habiletés en mathématique 35

Le genre 36

Les caractéristiques de la méthode utilisée 37

La réflexion parlée 37

L'enregistrement sur vidéo 41

La rétrospection immédiate 43

La situation d'intervention éducative 44

La tâche 45

Les problèmes qui incitent à la construction de graphisme 45

Les problèmes qui nécessitent la construction de graphisme 46

Les problèmes utilisés dans d'autres recherches 47

Les problèmes compréhensibles par les élèves des niveaux choisis 48

Le déroulement de l'expérimentation 50

L'appareillage 50

Le déroulement de la tâche 50

Le corpus de données 53

L'instrument 54

La typologie des graphismes 54

L'activité cognitive extraite des protocoles 55

Les composantes fonctionnelles des graphismes 60

L'analyse des données 64

Les limites de l'étude 66

CHAPITRE 4 LES RÉSULTATS ET LES INTERPRÉTATIONS SUR LA NATURE DU GRAPHISME

La typologie des graphismes selon les paramètres fixés 68

L'exploration de la représentation initiale du problème 77

La nature du graphisme produit dans une graphie uniquement mathématique 82

La nature du graphisme produit dans une Graphie Contextuelle Symbolique 93

La nature du graphisme produit dans une Graphie Contextuelle Diagrammatique 100

La nature du graphisme produit dans une Graphie Contextuelle Symbolique et Diagrammatique 109

Synthèse et conclusions 122

CHAPITRE 5 LES RÉSULTATS ET LES INTERPRÉTATIONS SUR LA FONCTION DU GRAPHISME

La comparaison des répartitions de fréquence des composantes fonctionnelles selon les paramètres fixés 128

La fonction dominante du graphisme 128

Son rôle important dans la compréhension du problème 130

Son rôle important dans l'exécution et le rappel de procédures 131

Son rôle dans la mise en évidence de but et sous-but 132

Les composantes fonctionnelles et le genre 133

Les composantes fonctionnelles et le succès 136

Les composantes fonctionnelles et l'habileté en mathématique 139

La relation entre la nature et la fonction du graphisme 149

La fonction et la typologie des graphismes produits 149

La fonction et les types de représentations initiales 154

Les difficultés apportées par une Graphie Contextuelle Symbolique 156

Les avantages apportés par une Graphie Contextuelle Diagrammatique 160

Synthèse et conclusions 164

CHAPITRE 6 DISCUSSION DES PRINCIPAUX RÉSULTATS ET RECOMMANDATIONS

La nature et la fonction de la graphie produite 167

Les difficultées rencontrées 170

Les difficultées sémantiques 170

Les difficultées visuelles ou spatiales. 172

Les difficultées conceptuelles 174

La méthodologie et la conceptualisation 175

Les retombées pédagogiques 177

La généralisation 179

Les nouvelles pistes de recherche 180

BIBLIOGRAPHIE 182

APPENDICES

A. Les directives sur la procédure à suivre 201

B. La description des types d'interventions pédagogiques 204

C. Les grilles des activités cognitifs et des composantes fonctionnelles 206

D. Un protocole codé et la trace cognitive et graphique identifée 215

E. Tableaux 7a, 16a 238

LISTE DES TABLEAUX

Tableau

1 Énoncé des six situations problèmes 49

2 Typologie des graphismes produits 56

3 Activité cognitive extraite des protocoles 58

4 Composantes fonctionnelles des graphismes telles qu'extraites des protocoles 62

5 Fréquence d'utilisation du graphisme mettant en relation la typologie des graphismes selon la catégorie de problème et le genre 69

6 Fréquence de solutions où le graphisme apparaît mettant en relation la typologie des graphismes selon la catégorie de problème et le genre 73

7 Fréquence d'utilisation du graphisme mettant en relation la typologie des graphismes selon le niveau et les habiletés 74

8 Fréquence de solutions selon la catégorie de problème et la Graphie Contextuelle produite 80

9 Fréquence des Graphies Contextuelles extraites des 72 solutions selon le niveau et l'habileté des élèves 81

10 Solutions où aucune Graphie Contextuelle n'est produite selon le niveau, les habiletés et le genre 91

11 Solutions où la Graphie Contextuelle est symbolique selon le niveau, les habiletés et le genre 99

12 Solutions où la Graphie Contextuelle est diagrammatique selon le niveau, les habiletés et le genre 108

13 Solutions où la Graphie Contextuelle est symbolique et diagrammatique selon le niveau, les habiletés et le genre 121

14 Fréquence de solutions mettant en relation les composantes fonctionnelles selon la catégorie de problème et le genre 129

15 Fréquence d'utilisation du graphisme mettant en relation les composantes fonctionnelles selon la catégorie de problème et le genre 135

16 Fréquence de solutions mettant en relation les composantes fonctionnelles selon le succès ou l'échec dans le domaine 137

17 Fréquence de solutions mettant en relation les composantes fonctionnelles selon la catégorie de problème et l'habileté en mathématique 141

18 Fréquence des séquences Succès-Échec pour les deux problèmes à résoudre 143

19 Fréquences d'utilisation des types de graphisme dominants en relation avec les composantes fonctionnelles 150

20 Fréquence des composantes fonctionnelles en relation avec le type de représentation initiale produite 155

LISTE DES FIGURES

Figure

1 Schéma de la table d'observation. 51

2 Graphismes d'élèves ayant réussi à trouver une solution correcte sans produire de Graphie Contextuelle (AGC). 84

3 Graphismes d'élèves n'ayant pas réussi à trouver une solution correcte sans produire de Graphie Contextuelle (AGC). 85

4 Graphie Contextuelle symbolique tirée du graphisme de 3 sujets répondant à la GCS. 94

5 Graphismes d'élèves utilisant un vecteur comme Graphie Contextuelle diagrammatique. 101

6 Extraits de graphismes d'élèves utilisant une figure géométrique comme Graphie Contextuelle diagrammatique. 102

7 Graphisme d'un élève utilisant une variante d'un diagramme de Venn comme Graphie Contextuelle diagrammatique. 103

8 Extrait du graphisme répondant à la GCS & D produite pour résoudre les problèmes de distance 110

9 Extrait du graphisme répondant à la GCS&D, Graphie Contextuelle produite pour résoudre les problèmes de géométrie. 113

10 Extraits du graphisme répondant à la GCS&D, Graphie Contextuelle produite pour résoudre les problèmes d'inclusion. 116

11 Extrait d'un graphisme répondant à la GCS&D et ne menant pas au succès. . . . 119

12 Graphies Contextuelles d'une élève essayant d'utiliser un diagramme de Venn suite à une présentation par l'expérimentateur. 159

Solving a problem means a way out of a difficulty, a way around an obstacle, attaining an aim that was not immediately understandable. Solving problems is the specific achievement of intelligence, and intelligence is the specific gift of mankind. Solving problems can be regarded as the most characteristically human activity.

Georges Polya, 1965

C'est au moment où un concept change de sens qu'il a le plus de sens, c'est alors qu'il est, en toute vérité, un événement de la conceptualisation.

Gaston Bachelard, 1963

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Problématique générale

Les enseignants se plaignent que la performance de leurs élèves est souvent erratique; les "bons" élèves ne comprennent plus des principes pourtant déjà maîtrisés lorsque ces principes apparaissent de nouveau dans un texte. Pourquoi l'intégration d'un principe mathématique dans un contexte de la vie courante ne supporterait-elle pas des habiletés apparemment maîtrisées? Comment fait-on pour résoudre un problème écrit? Il y a souvent un brouillon : on gribouille, on réfléchit, on dessine, on rature. À quoi sert cette activité dans la construction d'une solution?

Depuis plus d'une vingtaine d'années, les sciences cognitives s'efforcent à identifier les processus cognitifs de l'apprenant placé devant des tâches. Cette perspective montre que les activités cognitives sont généralement consistantes et que les inconsistances apparentes peuvent être expliquées par des principes simples. Cette approche a profondément influencé la présente recherche en la situant à un point de convergence dans les recherches en cours. D'une part, les recherches sur l'évaluation et le développement cognitif indiquent qu'une faible proportion d'apprenants de notre milieu culturel utilisent spontanément un mode formel de résolution de problème (Arlin, 1979; Lefebvre-Pinard, 1980; Messick, 1984, 1985; Sternberg, 1985). L'apprenant utilise aussi des opérations cognitives adaptées à la nature et à la complexité des situations ou des problèmes qu'il rencontre. On sait aussi que certains problèmes requièrent des stratégies davantage intuitives, concrètes, inventives ou figuratives, plutôt que des stratégies déductives formelles. D'autre part, l'apport de résultats expérimentaux, autant que l'approfondissement des considérations théoriques, ont entraîné différents chercheurs à privilégier le rôle de la représentation du problème telle que perçu par l'apprenant. La notion de représentation du problème occupe une place centrale dans les recherches en didactique des sciences et des mathématiques. Pour le chercheur en sciences cognitives, les comportements observés lors de la résolution de problèmes sont déterminés par la représentation que le sujet se fait de la situation et par ses règles générales d'action. Cette représentation tient compte des contraintes de la situation, de la tâche à réaliser et des contraintes inhérentes au fonctionnement de la pensée de l'apprenant. Les études sur les stratégies de résolution de problèmes convergent pour souligner l'importance d'une représentation écrite pour comprendre (Gardner, 1980; Larkin & Simon, 1987; Levine, 1988; Rubinstein, 1986). Y a-t-il un lien entre des stratégies de graphie et la représentation d'une situation-problème? Quelle est la nature des graphismes qui inhibent ou facilitent la compréhension du problème? Et quelle est la fonction de ces graphismes?

De nombreux auteurs ont écrit sur les représentations externes qui accompagnent l'énoncé du problème. Pourtant, ils ne les ont jamais abordées sous l'angle de la trace laissée dans un graphisme produit spontanément au cours de l'exécution d'une tâche. Une étude de la production de ce graphisme par l'apprenant permet de réunir ce qui n'avait été qu'entraperçu de façon intuitive. Il s'agirait donc d'une étude qui porte sur le fonctionnement de la pensée tel qu'il est reflété dans la production d'un graphisme réalisé à l'occasion de la recherche d'une solution à un problème. La présente recherche vise à identifier des pistes prometteuses de recherche et des orientations nouvelles de pédagogie. C'est en pensant à l'enseignant de mathématique et au chercheur que cette recherche exploratoire est entreprise.

Le but de l'étude

Le but essentiel de la présente recherche est d'explorer les relations qu'entretiennent la production de graphismes dans la résolution de problèmes écrits en mathématique et l'ensemble des processus de cette résolution. Dans la résolution de problèmes on considère que le sujet se comporte avec un but à atteindre et on espère associer ses comportements aux représentations qui les engendrent. Ceci permet de postuler que le graphisme serait une représentation externe de l'interprétation du texte problème. On constate qu'une double situation se présente lorsqu'un élève fait appel à une représentation : dans certains cas cette dernière facilite la solution du problème et dans d'autres, elle peut inhiber la solution du problème. En particulier, cette dernière situation semble caractériser l'approche des élèves faibles en mathématiques car ils peuvent difficilement produire un graphisme cohérent avec le problème à résoudre. On en conclut que la représentation joue un rôle différencié : elle semble jouer un rôle facilitateur chez les forts mais semble cristalliser les difficultés chez les faibles.

Les recherches suggèrent la structuration de cette étude en cinq chapitres, de la recension des écrits aux conclusions et recommandations. Le chapitre 2 met l'accent sur la recension des écrits qui portent sur les représentations qu'engendrent la résolution de problèmes mathématiques; plus particulièrement, les représentations externes produites au cours de la résolution par les étudiants. Le cadre conceptuel proposé par Holland, Holyoak, Nisbett et Thagard (1986) permet d'interpréter les graphismes émis lors de la résolution de problèmes en mathématiques. Ces auteurs se sont penchés sur les processus de l'apprentissage et de la découverte. Pour eux, apprendre implique des modifications aux connaissances existantes et l'apprentissage peut se faire par raisonnement inductif aussi bien que par raisonnement déductif. Considérant que les graphismes sont intuitifs, le cadre conceptuel qu'ils présentent permet d'étudier la résolution de problème comme un processus inductif de raisonnement.

Le chapitre 3 présente une description de la méthodologie qui permet de capter l'information nécessaire reliée à la nature et la fonction du graphisme. Disposant d'hypothèses limitées sur la nature et le rôle que joue le graphisme dans la résolution de problèmes écrits en mathématique, la combinaison de plusieurs méthodes conduit à mieux cerner l'intentionnalité du sujet en action. Le développement de grilles d'analyses facilite l'accès rapide à un riche corpus de données. Les chapitres 4 et 5 présentent respectivement, les résultats empiriques sur la nature et la fonction du graphisme. Maintes interprétations locales se retrouvent à la fin de chaque section. Le chapitre 6 est un rappel des principaux résultats et il souligne les particularités du contexte expérimental avant de présenter une tentative d'intégration de ces résultats dans la pratique éducationnelle.

Le but de la recherche consiste à explorer le processus spontané de résolution adopté par les élèves face à trois catégories de problèmes écrits en mathématique.

CHAPITRE 2

LA RECENSION DES ÉCRITS

Historique de la résolution de problème

L'habileté à résoudre des problèmes est une caractéristique fondamentale de l'intelligence (Holyoak, 1990; Polya, 1962/1967; Sternberg, 1985), en plus d'être l'activité dominante dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique. Les situations de résolution de problème ont un long passé dans l'étude de l'apprentissage. Déjà, en 1925, Köhler illustrait dans ses expériences que les "relations" essentielles à la solution d'un problème étaient saisies par intuition; il protestait, en partie, contre la trop grande importance accordée aux différentes sortes d'apprentissage par conditionnement. Deux courants de pensée se développaient à cette époque : le behaviorisme skinnérien et le gestaltisme.

Dès 1951, le jargon de la résolution de problème commençait à être utilisé dans les sciences économiques et administratives : c'était le premier pas vers la simulation de la résolution de problème heuristique. Les chercheurs de l'Université Carnegie-Mellon, spécialistes des théories organisationnelles, voulaient faire le pont entre les études de cas (méthode relativement informelle et non-standardisée à l'époque, "field research") et les théories de comportement organisationnel; ils montraient comment l'analyse des protocoles verbaux pouvait être utilisée comme donnée objective et plus particulièrement lorsque cette méthode était accompagnée de simulations par ordinateurs. Les modèles formalisés de fonctionnement cognitif conçus en intelligence artificielle (avant même que ce terme ne soit inventé) cherchaient à rendre compte des stratégies de résolution de problème, dont la stratégie des fins et des moyens (Newell, Shaw & Simon, 1958).

Depuis, certains chercheurs s'inspirent des modèles de la psychologie cognitive pour orienter la conception de leurs systèmes d'intelligence artificielle. De même, la psychologie cognitive s'intéresse particulièrement aux récents développements de l'intelligence artificielle. Même si les emprunts s'effectuent dans les deux sens, les objectifs des uns et des autres ne sont pas identiques. Il est nécessaire de préciser l'écart entre les objectifs de ces deux disciplines. En intelligence artificielle, l'objectif majeur est de développer des modèles de simulation de l'apprentissage (systèmes de productions). Le chercheur en intelligence artificielle "emprunte" des concepts qu'il estime être représentatifs d'une classe d'activités cognitives propres au système humain (apprentissage, résolution de problème, perception, etc) et cherche à formaliser ces concepts et leurs interrelations. L'objectif des chercheurs en psychologie cognitive est plus épistémique : "... comprendre, expliquer et modéliser le fonctionnement et l'organisation des comportements humains" (Mendelshon, 1988); ils cherchent à construire des modèles et des théories formelles pendant que les chercheurs en intelligence artificielle se considèrent davantage comme des "ingénieurs de la connaissance". Les deux démarches n'accordent pas la même priorité aux différents niveaux d'analyse des faits que l'on cherche à modéliser.

Au terme d'une longue période d'incubation, l'introduction d'une théorie de traitement de l'information, dans "Human Problem Solving" de Newell et Simon (1972), a établi les assises d'une conceptualisation des stratégies de résolution de problème. De nombreuses recherches ont suivi et elles ont contribué de façon importante à l'établissement d'un modèle général des processus cognitifs utilisés dans la résolution de problème (Anderson, 1983; Hayes, 1981; Hayes & Simon, 1974; Rowe, 1985).

Les sciences cognitives regroupent maintenant la psychologie cognitive et l'intelligence artificielle. Un nombre toujours grandissant d'autres disciplines telles les neurosciences, la philosophie, la linguistique viennent puiser dans les interprétations cognitivistes. Une revue exhaustive des sciences cognitives étant prohibitive, l'auteure circonscrit ses recherches aux études qui concernent la résolution des problèmes écrits en mathématique et qui mènent à l'étude plus spécifique de la graphie produite simultanément à la solution. La recension de ces écrits permet de soulever l'importance et la pertinence d'une étude sur la graphie.

La notion de représentation dans la résolution de problème

De manière classique, on décrit la résolution de problème comme l'ensemble de deux volets essentiels : la compréhension du problème et l'élaboration d'une solution (Dunker, 1945). La compréhension du problème se traduit par la construction d'une représentation mentale de la situation, laquelle va déterminer les règles générales d'action pour l'élaboration de la solution (Bonnet et Ghiglione, 1990; Gruppen, Wisdom & Woolliscroft, 1992; Hoc, 1986b; Vergnaud, 1985). De nombreuses théories stipulent que le succès dans la résolution de problème dépend de la qualité de cette représentation (Lesh, 1985; Polya, 1967; Schoenfeld, 1987; Silver, 1985b). Pour ces théoriciens, le solutionneur adopte une représentation initiale qu'il élabore et raffine jusqu'à une représentation finale du problème, adéquate pour la solution. Il peut aussi y avoir abandon de la première représentation et restructuration d'une nouvelle représentation ou encore, abandon du problème.

La notion de représentation est centrale en psychologie cognitive; pourtant elle est loin d'être claire et selon les auteurs renvoie à des concepts assez différents. De plus, la mathématique est par nature représentationnelle et nécessite différents systèmes de notations : chiffres, lettres, signes et, souvent, dessins. Il est alors doublement important d'élucider les différentes interprétations du mot représentation. Harel (1991), divise les représentations en deux catégories : (a) les représentations mentales internes, celles que l'élève se construit; (b) les représentations externes construites pour l'enseignement des mathématiques. Ces dernières semblent refléter les théories et les croyances sur le "comment" enseigner la mathématique (Baxter, Stein & Leinhardt, 1991; Janvier, 1987a; Kaput, 1985, 1987; Lemoyne, 1988; Lesh, 1987; Mason, 1987; Peck & Jencks, 1988); de même qu'elles influencent l'apprentissage des concepts mathématiques (Bednarz & Garnier, 1989; Greeno, 1991b; Schoenfeld, 1985b, 1987). Une autre distinction, apportée par Harel, est que la représentation de concepts mathématiques dans du matériel didactique que l'apprenant peut manipuler ne correspond pas nécessairement à la représentation interne des mêmes concepts. Il est possible de manipuler et de transformer quantitativement des représentations sans pour autant transformer la représentation interne du problème.

Quant aux représentations internes elles sont interprétées par les tenants des sciences cognitives selon leurs structures, leurs processus par lesquels elles sont formées et le moment où elles apparaissent: immédiates, momentanées, existantes et nouvelles.

Cordier, Denhière, George, Crépault, Hoc, et Richard (1990) distinguent les deux sens qu'il convient de donner aux représentations internes. Elles désignent d'une part, "... des structures de connaissance stabilisées en mémoire à long terme (MLT) : le terme est alors utilisé pour signifier que ce sont des **conceptions** de l'apprenant qui ne correspondent pas nécessairement aux connaissances scientifiques". Ces représentations sont aussi appelées connaissances, croyances ou représentations-types. Elles désignent d'autre part, "... des constructions circonstancielles faites dans un contexte particulier et à des fins spécifiques, élaborées dans une situation donnée et pour faire face aux exigences de la tâche en cours." Ces représentations sont élaborées en mémoire de travail ou mémoire à court terme (MCT)[1]. Il suffit qu'un nouvel élément de la situation soit remarqué pour que la représentation soit modifiée. Le terme **représentation particularisée** est utilisé dans la présente analyse pour signifier la représentation momentanée et transitoire d'un problème particulier à résoudre. Tous les psychologues cognitivistes semblent d'accord sur la distinction apportée, même si les termes utilisés pour l'exprimer varient quelque peu. En bref, les représentations externes accompagnent l'apprentissage et l'enseignement; les représentations internes construites par l'apprenant sont de deux sortes : celles stabilisées en MLT et celles particularisées en MCT. Le graphisme étudié serait un reflet de la représentation en MCT.

Il importe de préciser les travaux qui permettent d'étudier la relation entre les représentations et le succès dans les activités de résolution.

---

[1]. Plusieurs auteurs distinguent entre mémoire de travail (MT) et mémoire à court terme (MCT). Dans la présente thèse, l'abréviation (MCT) est la seule employée.

La représentation et le succès

De nombreux chercheurs s'accordent pour dire qu'une représentation adéquate est un facteur essentiel au succès dans la résolution d'un problème, elle permet l'engagement dans le problème. Celui qui apprend doit s'approprier un savoir. Ce n'est pas parce que l'apprenant répond aux questions posées par le maître qu'il est intellectuellement "engagé". Levine (1988) parle de l'"engagement" nécessaire à la résolution d'un problème. Cet engagement se fait lorsque le "solutionneur" essaie de regarder ou de s'imaginer ce qui se passe. Selon Levine, l'engagement fait surtout appel à la vision intérieure que l'individu a d'un problème. Caron (1987) mentionne que l'élève doit être intéressé ou qu'il désire résoudre le problème; sinon ce n'est pas **son** problème. Les analyses des facteurs affectifs qui influencent la résolution de problème en mathématique montrent que l'élève travaille à partir d'une situation-problème appréhendée, saisie, et transformée par lui, et qui est devenue **son** problème (Fennema, 1989; Lester, Garofalo & Kroll, 1989). Greeno (1989) postule que l'apprenant établit des connections entre les objets ou les structures de la situation :

> Rather than characterizing higher order thinking as application of a general skill, it would involve the ability to discern important structural features of a problem situation and become engaged with the situation in terms of those features. (p. 138)

Greeno traduit ici la pensée de Wertheimer (1945/1959) qui décrivait la compréhension structurale d'un problème - "an effort towards structural understanding" - comme l'immersion dans la situation-problème. Lemoyne (1989) recommande à l'orthopédagogue d'éliminer les peurs des élèves en difficulté d'apprentissage de la mathématique en multipliant les situations didactiques dans lesquelles les élèves doivent s'engager. Elle suggère de repérer les compétences chez ces élèves et de les amener à gérer des situations constitutives des savoirs mathématiques.

Dans la même veine de pensée, d'autres investigateurs de la résolution de problème (Chase & Simon, 1973; Hoc, 1986a, 1986b; Larkin, McDermott, Simon & Simon 1980; Simon & Simon, 1979) parlent de la perception par l'étudiant des relations, des transformations et des notions en jeu, avec toutes leurs propriétés, pour résoudre un problème ou atteindre l'objectif demandé dans une tâche scolaire donnée. Sa perception des chemins à suivre est profondément enracinée dans sa représentation du problème, c'est ce qui guide ses activités de résolution.

Enfin, les éducateurs et chercheurs reconnaissent qu'une représentation adéquate permet l'enclenchement du processus de résolution, d'où les recherches sur les caractéristiques individuelles influençant la résolution de problème.

Il serait juste de dire que sans l'engagement, il n'y a pas de représentation initiale. Les variables affectives sont souvent mises en cause pour expliquer ce blocage. L'influence du stress, des émotions, de la motivation sur l'acquisition de connaissances est d'intérêt constant pour les psychologues cognitivistes. La "capacité d'attention" est modifiée lorsque des émotions entrent en ligne de compte comme le montrent les recherches décrites dans **Decision and Stress** de Broadbent (1971), **Attention and Effort** de Kahneman (1973) et **Mind and Body** de Mandler (1984). De même les travaux de Isen (cités dans McLeod et Adams, 1989, p.4) montrent que des attitudes positives influencent le choix des stratégies de résolution de problèmes. Et de façon plus générale, Bower (1982) montrent que l'humeur influence l'accessibilité à l'information cognitive.

Norman (1980) considère les émotions comme un des 12 facteurs majeurs à étudier en sciences cognitives. McLeod et Adams, en 1989, résument fort bien la situation en identifiant des paramètres importants (émotions, attitudes, etc) pour l'étude de l'affect dans la résolution de problème. Leurs travaux vont certainement provoquer des recherches systématiques dans ce domaine.

La représentation initiale d'une situation-problème n'est pas statique, elle exige d'être raffinée ou transformée pour atteindre une représentation finale adéquate pour la solution. Dans le cas où la représentation initiale n'est pas cohérente avec la situation-problème, elle peut être abandonnée et restructurée. Certains auteurs proposent des hypothèses sur l'importance de la plasticité de la représentation. Nguyen-Xuan et Richard (1986) avancent que l'étudiant modifie sa façon de conceptualiser la procédure de résolution selon que ses actions sont le produit, soit d'un "fonctionnement dirigé par les données", soit d'un "fonctionnement dirigé par les concepts".

Schoenfeld (1983) explique que la nécessité, parfois radicale, d'une reconceptualisation dans la résolution se réalise dans l'interaction entre les données et le monde interne du solutionneur. En solutionnant un problème, l'étudiant est toujours à l'affût d'un plan meilleur; il réagit face à la réalisation soudaine d'un fait important tel la symétrie ou la concordance dans un problème. Un tel fonctionnement n'est pas complètement planifié et les plans peuvent être modifiés à la lumière de nouvelles informations ou de nouvelles connaissances. Schoenfeld parle d'une approche dirigée par les événements ("event driven") telle la planification opportuniste proposée par Hayes-Roth (1979, cité dans Thompson, 1985).

Considérant les nombreuses attitudes possibles devant un problème à résoudre, d'autres auteurs examinent les aptitudes particulières de l'élève. Les études de Clement, Lockhead & Monk (1981), Krutetskii (1976) et Silver (1979, 1981) montrent que les aptitudes particulières de l'étudiant à certaines formes de symbolisation viennent influencer sa perception des éléments en jeu. Certains étudiants se disent "géométriques" ou "algébriques"; d'autres semblent montrer des préférences pour des stratégies particulières, par exemple, certains semblent réticents à dessiner; d'autres, enfin, ont des aptitudes visuo-spatiales plus développées que leurs aptitudes analytiques (Lord, 1987). L'influence de ces styles représentationnels particuliers sur la compréhension d'un problème écrit demeure peu explorée.

Kilpatrick (1968, 1985) et Nesher (1986) suggèrent que les difficultés rencontrées dans la résolution de problème mathématique prennent leur source non seulement dans le problème même mais aussi dans les dispositions du solutionneur. Pour eux, un bon solutionneur fait usage d'un ensemble de procédures pour représenter et transformer le problème et aussi d'un système de contrôle qui guide la sélection des connaissances et des procédures. Les cadres théoriques proposés par Silver (1985a) et Schoenfeld (1983, 1985a) tentent d'établir un lien entre les caractéristiques particulières de l'apprenant et les processus cognitifs pour la résolution de problèmes mathématiques. Silver (1985b) mentionne que l'engagement de l'élève dans la résolution du problème est influencé par la perception de contrôle qu'a l'élève sur la situation. De manière semblable, Schoenfeld (1985a) identifie quatre catégories d'activités cognitives qui contribuent à la résolution d'un problème : les ressources, les heuristiques, les contrôles et les croyances ("belief systems"). Lorsqu'il parle de ressources, il parle des connaissances antérieures et de la façon dont ces connaissances sont structurées. Bien des étudiants s'appuient sur des connaissances mal structurées ou même complètement fausses. Lorsqu'il parle des contrôles, il parle de l'allocation efficace des ressources dont dispose l'étudiant, de la sélection d'une approche pertinente à la résolution du problème, de même que du processus de récupération après la sélection d'une mauvaise approche à la résolution du problème. Des recherches empiriques montrent qu'une déficience de ces contrôles plutôt qu'un manque de mise en oeuvre des ressources vient souvent entraver la résolution du problème. Schoenfeld prétend que le système de contrôle est souvent déficient parce que sous-utilisé. Ce même principe se retrouve chez Dewey, Piaget, Montessori lorqu'ils disent, "children learn by doing and by thinking about what they do"; de même que chez les chercheurs de stratégies de résolution de problème, entre autres Polya (1967) et Simon (1979-1989).

Contrôler les processus cognitifs dans la résolution d'un problème en mathématique constitue une capacité cognitive qui a mené à des analyses en profondeur sur le sujet - la capacité métacognitive. Il règne une certaine confusion dans les descriptions des chercheurs sur les processus métacognitifs. On ne distingue pas toujours clairement les différents aspects de la métacognition et aussi parfois on ne fait pas bien la distinction entre le processus mental qu'est la métacognition et l'activité cognitive sur laquelle elle porte. Noël (1991) avance que parmi les conceptions adoptées par les différents chercheurs il faut distinguer les recherches portant sur l'étude de "...la connaissance qu'a le sujet des facteurs qui favorisent l'apprentissage" et les recherches portant sur l'étude de "la connaissance qu'a le sujet de ses propres processus mentaux".

Afin de mieux circonscrire l'objet et le sens accordé à la métacognition dans la présente étude, la perspective de Noël a été adoptée :

> La métacognition est un processus mental dont l'objet est soit une activité cognitive, soit un ensemble d'activités cognitives que le sujet vient d'effectuer, soit un produit mental de ces activités cognitives. La métacognition peut aboutir à un jugement (habituellement non exprimé) sur la qualité des activités mentales en question ou de leur produit et éventuellement à une décision de modifier l'activité cognitive, son produit ou même la situation qui l'a suscitée. (p. 17)

Silver et Metzger (1989) établissent un lien entre les composantes métacognitives et les caractéristiques individuelles par le biais de l'esthétique. À la suite d'une étude pilote basée sur les études de Poincaré, Hadamard et Krutetskii, ils considèrent que des facteurs esthétiques influencent souvent la résolution de problème en mathématique. L'esthétique (simplicité, clarté, parcimonie) semble jouer deux rôles dans le succès en mathématique: celui d'une base pour une évaluation post hoc de la solution du problème et celui de guide pour l'analyse, l'exploration et la planification d'une solution. Dans le même ordre d'idée, Bundy (1975) identifie deux stratégies de résolution de l'expert en mathématiques: regrouper les termes semblables afin de simplifier l'expression; et remplacer les termes "abominable" (inesthétique) par des termes plus harmonieux. La valeur heuristique de ces stratégies incite à pousser la recherche de faits expérimentaux pour étendre la portée des hypothèses.

À la suite de ces études on peut conclure que la génération d'une représentation cohérente de la situation-problème semble être liée à des facteurs individuels tels l'affect, les aptitudes et les dispositions du solutionneur. La représentation se ferait par la perception des éléments, des liens entre ces éléments, des transformations et des choix de stratégie de résolution. Il y a donc lieu de cerner les recherches existantes sur la nature de l'information à capter dans un problème écrit en mathématique.

La compréhension de problèmes écrits en mathématique

Devant un problème écrit, l'élève essaie de reconnaître un concept mathématique décrit dans un texte: il y a une réalité conceptuelle, mnémonique, verbale et visuelle à capter. Selon l'objet d'étude choisi, on retrouve des courants de recherche distincts. Le but ici, n'est pas d'apporter des définitions catégoriques sur la réalité à capter, l'objectif est plutôt de relever dans les recherches les réalités sur lesquelles la représentation se forme.

La réalité mnémonique

Un premier courant a mis l'accent sur les processus mnémoniques tels l'organisation, la récupération, l'accessibilité, etc (Ashcraft, 1982; Baroody, 1983; Brown & Burton, 1978; Campbell & Graham, 1985; Gardiner & Rowley, 1984; Geary, Widaman & Little, 1986; Hamann & Ashcraft, 1986; Winkelman & Schmidt, 1974). Ceci s'explique non seulement comme suite logique au courant behavioriste puisant dans les modèles de traitement de l'information, mais aussi du fait que l'enseignement de la mathématique se fait principalement par l'enseignement de règles, de faits, de procédures à apprendre ou à mémoriser (Kulm, 1987; UNESCO, 1987). Ces recherches établissent l'insuffisance de la seule prise en compte des structures de connaissances et elles mènent aux études sur l'acquisition et l'application de ces connaissances.

La réalité verbale et visuelle

Un deuxième courant de recherche sur la représentation qu'engendre la réalité verbale ou visuelle d'un problème à résoudre a donné naissance à maints débats. De nombreuses études ont mis l'accent sur la présentation verbale et la compréhension du vocabulaire mathématique (Ashlock, 1987; Kilpatrick, 1968; Kintsch & Greeno, 1985; Rothman & Cohen, 1989). Certaines de ces analyses souvent basées sur l'analyse de la tâche, mènent à des conclusions sur l'organisation interne des connaissances : déclarative ou procédurale (Anderson, 1982). D'autres ont porté sur les interactions entre les caractéristiques du texte, les opérations cognitives du lecteur et les exigences de la tâche.

D'une part, des recherches montrent que dans le cas d'un texte en vue de la résolution d'un problème, les apprenants privilégient une représentation pragmatique de la situation évoquée par le texte plutôt qu'une représentation épistémique comme dans le cas de la compréhension de récits ou de consignes (Kintsch, 1986; Mannes & Kintsch, 1987). Larkin, McDermott, Simon, et Simon (1980) ont étudié la résolution de problème chez les experts et novices dans le domaine de la physique; ils ont noté que les experts forment souvent une résolution qualitative de la situation-problème avant de passer à une résolution quantitative. Dans la même veine de pensée, les recherches de White et Frederiksen (1986) sur la résolution de problèmes en électricité viennent renforcer ce point de vue.

D'autre part, une série de recherches sur la compréhension de problèmes écrits en arithmétique (Thompson, 1988), en résolution d'équations algébriques (Foss, 1987; basé sur les stratégies de résolution de Bundy, 1975) et en démonstration de théorèmes (Anderson, Boyle & Yoste, 1985) ont mené à la construction de modèles formalisés de résolution de problèmes. La contribution la plus importante de ces programmes est de procurer à l'apprenant une représentation explicite d'information habituellement implicite. Cette trace cognitive lui permet de revenir et réfléchir sur les procédés qu'il a utilisés. La construction de ces représentations lui est fournie par l'ordinateur et prend sa source dans les modèles issus d'analyses de compréhension de problèmes écrits. Il faut bien reconnaître que les résultats basés en grande partie sur l'identification des contraintes syntaxiques et sémantiques qu'apporte l'information verbale complexe ne répondent qu'en partie aux questions sur la compréhension de problèmes écrits en mathématique. Les recherches apparaissent plus pertinentes lorsqu'elles prennent en compte non seulement les contraintes linguistiques mais aussi les contraintes situationnelles.

Les études qui ont suivi démontrent qu'il faut chercher non plus prioritairement dans le texte mais dans le monde représenté par le texte (Kosslyn, 1990; Presmeg, 1986). Les résultats ont ouvert un autre débat sur la nature de la représentation mentale : imagée ou propositionnelle (Johnson-Laird, 1980; Rollins, 1989). De solides arguments ont été avancés depuis une quinzaine d'années en faveur de l'existence de représentation de nature imagée, notamment par Kosslyn (1990), Paivio (1978) et Shepard et Cooper (1992). Leurs résultats montrent qu'il existe une spécificité des codes imagés : ceux-ci conservent des propriétés spatiales difficilement explicables par un codage propositionnel.

Un autre volet théorique adopté par les chercheurs (Anderson, 1983; Pylyshyn, 1973) expose formellement que, malgré leur diversité d'origine, toutes les informations sont stockées en MLT sous un format unique, de nature propositionnelle (codage sémantique, abstrait et amodal). On dispose d'ailleurs d'arguments expérimentaux montrant que les images complexes sont mémorisées de façon analogue aux phrases (Mandler & Richtey, 1977).

Larkin et Simon (1987) ont fait progresser ce domaine de la recherche grâce à un article éminemment riche : "Why a diagram is (Sometimes) worth 10 000 words". L'idée principale de cette recherche soutient que : (a) dans un processus de transformation de propositions en images, plusieurs choses auparavant implicites et cachées deviennent explicites, et que (b) l'inférence d'opérateurs (appris) facilite la production d'inférences additionnelles à partir des images. Simon (1991) renforce ce point de vue dans son autobiographie lorsqu'il raconte la formation cognitive (en images et non en arguments verbaux) d'un modèle exploratoire qu'il a développé pour expliquer aux économistes que : "Small effects, persisting over a long period of time, may accumulate into large effects". De même, Hadamard et Einstein, discutant du processus de la découverte, avancent eux aussi penser en images. De quoi sont faites ces images et comment elles sont représentées dans une structure biologique telle le cerveau, reste encore une énigme.

Ce qui caractérise les recherches sur la réalité verbale ou visuelle à capter dans un texte problème en mathématique, c'est la recherche d'invariants cognitifs soit dans le texte soit dans le monde représenté par le texte. Les recherches sur les interprétations de concepts mathématiques se regroupent dans le troisième courant.

La réalité conceptuelle

Le développement de modèles cognitifs de résolution de problèmes basés sur le traitement de l'information, a marqué sans doute plus que tout autre l'intérêt dans la recherche de la réalité conceptuelle à capter en solutionnant des problèmes écrits en mathématique. Les recherches sur la conceptualisation ont débuté dans les domaines de la physique et de la biologie, domaines conceptuellement riches et pour lesquels les pré-concepts interfèrent souvent avec l'apprentissage (Larkin et coll., 1980). Les recherches sur la conceptualisation ont pris deux grandes orientations dans le domaine des mathématiques. La première consiste à préciser les concepts préalables des élèves par rapport à un concept particulier, la deuxième prend en compte les concepts des apprenants dans le comment enseigner la mathématique.

Les recherches sur l'apprentissage de concepts mathématiques

De nombreux travaux sur le développement de concepts spécifiques, nombres rationnels (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983), nombres entiers et numération (Bednarz, Dufour-Janvier, 1986; Steffe & von Glasersfeld, 1983; Thompson, 1988) et des notions de géométrie élémentaire (Hoffer, 1983) montrent que la représentation externe influence grandement la conceptualisation (Bednarz & Dufour-Janvier, 1984; Coquin-Viennot, 1989; diSessa, 1987; Greeno, 1986; Schoenfeld, 1986, 1987). Ces travaux ont des implications importantes dans la résolution de problèmes; ils mènent aux études sur l'évolution de concepts et l'existence possible d'obstacles aux apprentissages (Bednarz & Garnier, 1989; Brown & Burton, 1978; Giordan & de Vecchi, 1987; Lemoyne, 1989; Resnick, 1991; Sophian, 1987). Une approche réalisée dans ce sens avec un groupe d'enfants à propos de la numération (Bednarz & Dufour-Janvier, 1984) nous laisse entrevoir comment la représentation peut contribuer à la conceptualisation. Cette approche s'articule sur les représentations développées par les enfants et sur leur évolution progressive vers un symbolisme significatif et efficace. Des représentations incohérentes peuvent mener à confusion et engendrer des fausses conceptions chez les étudiants (Bednarz & Dufour-Janvier, 1984; Coquin-Viennot, 1989; diSessa, 1987; Gentner & Gentner, 1983; Greeno, 1986; Schoenfeld, 1986, 1987). C'est probablement ce qui fait dire à Schoenfeld qu'un modèle permettant une reconceptualisation parfois radicale est nécessaire dans la résolution de problèmes en mathématique. De même, en cherchant ce qui peut entraver le développement d'une représentation cohérente du concept présenté, les chercheurs ont étudié les erreurs et les fausses conceptions. De très nombreuses recherches dans ce domaine visent à développer des programmes formalisés d'apprentissage. Rissland (1985) en fait une analyse à laquelle on peut se référer.

Les recherches sur la conceptualisation orientées vers les représentations externes

Dans la deuxième orientation, on cherche à prendre en compte les représentations internes des apprenants dans l'enseignement de la mathématique (Kaput & West, 1991; Lemoyne, 1989). De nombreuses discussions et débats sont consacrés à la correspondance entre une représentation interne et sa contrepartie externe.

Plusieurs expérimentations montrent que les enfants interprètent rarement les représentations externes utilisées pour enseigner un concept mathématique dans le sens attendu par l'adulte (Bednarz & Garnier, 1989). L'auteure insiste sur l'étude du rôle qui est accordé aux représentations externes en relation avec le développement de la représentation interne ou concept. D'une part, Dufour-Janvier, Bednarz et Bélanger (1987) constatent qu'une représentation externe construite pour élucider un concept peut nuire à l'étudiant lorsqu'il essaie de comprendre les caractéristiques et la complexité de cette représentation. D'autre part, Nesher (1986, cité dans Baxter et coll., 1991) et

Ohlson (1987, cité dans Baxter et coll. 1991) avancent qu'une représentation familière (tarte, thermomètre, etc,), nécessitant peu d'effort de compréhension, n'est pas nécessairement la meilleure représentation d'un concept. De même, les analyses des reproductions de représentations graphiques par des étudiants face à un problème à résoudre (Kindfield, 1991; Mason, 1987) ne semblent servir qu'à copier ce que l'enseignant aurait présenté, elles sont rarement une tentative de construction mentale afin de donner un sens aux actions qui vont suivre.

Les travaux de Kaput (1987) et de Lesh, Behr et Post (1987) mettent en évidence les difficultés qu'éprouvent les étudiants face au phénomène de translation, c'est-à-dire, le transfert d'un système représentationnel à un autre. Est-ce qu'il y a une translation qui s'opère entre la symbolisation présentée et celle qui existe déjà? En tentant de répondre à la question, une autre série de recherches sur le système de symbolisation utilisé dans la présentation du problème montrent qu'un étudiant peut avoir de la difficulté à traduire la représentation symbolique du problème en une symbolisation qui mène à une solution. Shavelson, Webb, Shemesh et Yang (1988) ont étudié les relations entre les représentations symboliques du problème présenté, la représentation que l'étudiant utilise pour résoudre le problème et l'exactitude des solutions. Les recherches de Lesh, Landau, Hamilton (1983) ont permis de conclure que les étudiants résolvent les problèmes dans plusieurs différents systèmes symboliques. Ces difficultés sont amplifiées par l'utilisation de la technologie (Kaput et West, 1991; Madgidson, 1991) et la nécessité de comprendre le fonctionnement et l'interaction de ses représentations. Cox (1989) analyse la représentation graphique en deux dimensions d'objets qui existent en trois dimensions; il conclut que les enfants dessinent ce qu'ils savent et non ce qu'ils voient. Il demeure cependant que plusieurs de ces résultats de recherches sont basés sur le fait que la représentation interne est implicite dans la représentation externe.

Lorsque les objectifs dans les études orientées vers l'enseignement d'un concept mathématique sont d'étudier l'efficacité ou la pertinence de schémas, diagrammes, matériel, etc, les représentations ainsi étudiées sont planifiées et révisées; elles ont toutes une histoire. Autant ces représentations d'accompagnement fournies à l'étudiant lors de l'enseignement de la mathématique sont axées sur le curriculum, autant les recherches sur les représentations internes reflètent les dimensions individuelles.

À la suite de la recension des écrits sur la réalité à capter dans un problème écrit, on peut conclure que les études sont fortement orientées soit vers les représentations stabilisées en mémoire à long terme, soit vers les représentations externes. Il y a lieu de s'interroger sur la portée des représentations particularisées de l'élève mais surtout sur le rôle qui leurs est dévolu en relation avec la résolution de problèmes.

La représentation et le graphisme

Les représentations internes ne sont guère accessibles à l'observateur extérieur et le pédagogue est parfois incapable d'interpréter ce que l'élève a cru comprendre ou faire. Des études récentes tentent d'expliquer comment la représentation mentale d'une situation-problème serait produite. Les processus cognitifs identifiés sont : (a) la re-description du problème (Caverni, Bastien, Mendelshon & Tiberghien, 1988; Richard, 1990; Smith, 1991), (b) la recherche en mémoire d'un prototype ou d'un problème analogue (Richard, 1990), (c) l'inférence et (d) la découverte (Caverni et coll., 1988; Holland et coll., 1986; Mathieu, 1986; Schoenfeld, 1987; Simon, 1991).

Certaines représentations sont objectivables (Vergnaud, 1985), en ce sens qu'on peut en observer des témoignages importants dans les productions du sujet (paroles prononcées, dessins, gestes analogiques, opérations faites par le sujet, etc.). Les recherches de Giordan et deVecchi (1987), et de Hoc (1986b) entreprises sur les conceptions des apprenants, montrent qu'une représentation mentale est une structure non seulement qui représente les éléments du problème mais une structure qui se manifesterait souvent dans des procédés figuratifs de représentations comme le dessin, le schéma, etc.

Dans un contexte général de résolution de problèmes, Levine (1988) explique qu'une représentation interne doit souvent se transformer en une représentation externe afin de remédier aux capacités limitées de la mémoire à court terme (Miller, 1956). En extériorisant (notes écrites) la représentation mentale du problème, il est possible d'étendre les capacités de la mémoire à court terme en permettant de réorienter l'attention à d'autres éléments du problème (Broadbent, 1971; Kahneman, 1973). De plus, lorsque le matériel est numérique et plus technique, le lecteur veut parfois "externaliser" en utilisant un papier et un crayon afin de comprendre le texte. Les recherches dans la compréhension de texte ont bien montré l'importance de visualiser ce qui est décrit et d'établir les relations nécessaires entre les faits présentés (Bransford & Johnson, 1973). Lorsque de la prose inclut des chiffres, "voir" veut dire comprendre le texte, et en plus, le lecteur doit comprendre les connexions entre les chiffres, ce qui le pousse à utiliser un papier et un crayon.

Dans un contexte spécifique à la mathématique, d'autres auteurs attribuent des fonctions particulières à l'extériorisation de la représentation mentale d'un problème. Vergnaud (1985b, 1987) parle du rôle des mots, des symboles et des signes dans la représentation : ils faciliteraient l'émergence d'inférences, de règles et de prédictions; ils mettraient en évidence les invariants (objets, relations, propriétés). Koman, Kurina et Tichà (1987) pensent que le dessin est une technique qui peut aider à résoudre des problèmes qui ne sont pas évidents à première vue. En utilisant des dessins ou des diagrammes, des élèves ne possédant pas encore les méthodes considérées nécessaires à la résolution d'un problème (l'équation à une inconnue par exemple) peuvent réussir à trouver une solution.

Déjà en 1974, Wickelgren recommandait aux apprenants de faire amplement usage de leur crayon et de leur papier en essayant de résoudre des problèmes mathématiques. Cependant il admet ne pas savoir pourquoi et il spécule sur les raisons qui mènent à produire un graphisme en solutionnant un problème. Il propose que la production d'un graphisme force à distinguer les concepts importants du problème, force l'attention, donne un support à la mémoire, ou encore crée une image qui serait difficilement perceptible par des processus mentaux.

Extérioriser semble une activité spontanée chez plusieurs individus (Gardner, 1980; Silver, 1985b; van Sommers, 1984). Cependant c'est un procédé que certaines personnes ont négligé de développer. Silver (1985b), à la suite d'observations d'enfants de 5e et de 6e année solutionnant des problèmes de mathématique, remarque que de nombreux élèves utilisent spontanément des graphismes, de même que d'autres élèves ne démontrent aucune tendance à l'utilisation de ce que Silver appelle une heuristique "au naturel", c'est-à-dire, sans directives spécifiques. Lorsque de telles heuristiques sont utilisées, Silver les caractérise de primitives et d'imparfaites.

En somme, face à un problème à résoudre en mathématique, la représentation mentale se manifeste souvent dans une "externalisation" écrite lors de la compréhension du problème. Les observations de cette activité spontanée (dessins, diagrammes, tableaux ou autres graphismes) en cours de résolution de problèmes en mathématique sont abondantes, cependant, une recherche systématique, basée sur des faits expérimentaux, s'impose. Il nous faut alors définir un cadre conceptuel qui permette d'interpréter les différences individuelles et le dynamisme dans les habiletés cognitives, dans un contexte représentatif de l'individu face à un problème à résoudre. Une recension des théories courantes permet de préciser une approche des modèles mentaux pour l'étude entreprise.

Le cadre conceptuel

L'idée de se pencher sur un produit de la représentation en tant que processus (production d'un graphisme) correspond au traitement de l'information que contient la représentation. Les tenants de l'approche du traitement de l'information symbolique relient l'activité cognitive à un ensemble de connaissances conservées en mémoire, connaissances qui déterminent la manière selon laquelle se déroulera la sélection, l'interprétation et l'intégration de la réalité. Cette perspective permet d'analyser comment les connaissances se structurent et se re-structurent dans l'apprentissage et comment ces structures sont utilisées dans l'accomplissement de tâches particulières. En d'autres termes, il est possible d'étudier les structures et les processus cognitifs et non seulement les résultats d'opérations mentales. Cette approche a donné naissance à des théories sur l'organisation et l'acquisition des connaissances, basées sur différentes unités d'analyse telles les réseaux, les cadres, les règles de production et les modèles mentaux.

Les réseaux

La notion de réseau (Collins & Quillian, 1969) a mené au principe d'activation par irradiation (Anderson, 1976; Collins & Loftus, 1975; Rumelhart & Ortony, 1977). L'hypothèse des "forces de liaisons" entre les concepts ("noeuds") a été alors émise, permettant d'estimer le degré d'activité. Selon ces auteurs, les significations d'un concept peuvent être organisées en un réseau structuré et hiérarchisé. Les éléments de base sont les concepts interconnectés par des "relations". Les réseaux sémantiques fournissent un modèle théorique du fonctionnement de la pensée, cependant ce modèle ne fournit pas une explication suffisante. Les modèles en réseau ne tiennent pas compte du moment de la représentation où le sujet ne peut se référer à toutes les possibilités, mais uniquement à certains éléments plus ou moins représentatifs d'une catégorie donnée. Des systèmes plus complets ont suivi en introduisant la notion d'activation par irradiation (Anderson, 1976; Collins et Loftus, 1975). Lorsqu'un concept est sollicité, il génère une quantité d'"activation" qui se propageant le long des liaisons le rattachent à d'autres concepts. L'hypothèse des "forces de liaison" différentes entre les concepts est alors émise, déterminant ainsi leur degré d'activation. Les recherches actuelles mettant l'accent sur les relations entre les concepts ont tendance à être abandonnées, au profit des modèles où les concepts sont envisagés en tant qu'unités (Caverni et coll., 1988). En conséquence, des notions telles que la prototypie, les scripts, les schémas et les cadres ont été développées.

Les cadres

D'autres modèles ont mis l'accent sur les concepts en tant qu'unités plutôt que sur les relations entre les concepts et la notion de cadre fut alors proposée par Minsky (1975). La notion de cadre a pour but de représenter des agrégats permanents d'information, tout en conservant les propriétés des réseaux. La notion de cadre a été élargie aux notions de typicalité et de prototypie dans l'organisation des concepts (Schank & Abelson, 1977). Des représentations tirées de l'expérience serviraient à une séquence de comportements suivant des patterns relativement fixes, comme s'ils étaient écrits dans un script qui guiderait le comportement. Une visite chez le médecin, un repas au restaurant suivent ainsi un déroulement plus ou moins stéréotypé. Ces scripts faciliteraient l'interprétation, le stockage et le rappel d'événements. Les scripts peuvent être des guides sommaires pour des activités humaines, mais ils s'avèrent rigides et trop simples pour appréhender à eux seuls la complexité des structures cognitives.

Les règles de production

Une règle de production a la forme générale: "Si CONDITION, alors ACTION". Une règle de production peut être considérée comme une proposition conditionnelle : si la condition est satisfaite, alors l'ACTION est susceptible d'être mise à exécution. La formalisation d'un ensemble de règles de production mène à l'élaboration de systèmes-experts. Ces théories ont mené à l'élaboration de simulations par ordinateurs. Les approches reconnues présentement en sciences cognitives sont ACT* (Anderson, 1987), Parallel Distributed Processing (PDP) (Rumelhart & McClelland, 1986) et SOAR (Newell, 1987).

Les modèles mentaux

Une autre approche, celle des modèles mentaux (Gentner & Stevens, 1983; Holland et coll., 1986; Johnson-Laird, 1980) est plus flexible et a été appliquée dans plusieurs domaines (l'acquisition du langage, l'apprentissage, la découverte, l'inférence, etc). La flexibilité du cadre théorique s'explique par la centration sur l'apprentissage par induction ce qui donne une nouvelle perspective aux recherches en éducation. Pour Holland et coll. (1986), apprendre implique des modifications aux connaissances existantes et peut se faire par raisonnement inductif aussi bien que par raisonnement déductif. Le cadre conceptuel qu'ils présentent apporte de la cohérence aux différentes recherches et conclusions sur la nature d'un processus inférentiel de raisonnement. Étudier la représentation comme un processus inductif de raisonnement permet d'observer comment la pensée peut découvrir de nouvelles lois, s'adapter à des situations nouvelles, raffiner des structures conceptuelles existantes, transférer des connaissances d'un domaine à l'autre (analogie, métaphore), agir par intuition et inférer. Ces auteurs ont utilisé les modèles mentaux pour expliquer comment un processus inductif de pensée dépend du contexte et des connaissances antérieures "activées" en voulant atteindre un but. En tenant compte des connaissances acquises et des nombreuses contraintes survenant dans l'apprentissage, il semble important d'adopter un cadre d'interprétation ouvert, dans la mesure où il laisse aux sujets le choix et l'agencement des systèmes ou symboles significatifs pour eux.

Dans leur ouvrage **Induction**, Holland et coll. (1986) présentent l'approche globale la plus complète de l'induction existant à l'heure actuelle. Ils définissent l'induction comme les processus inférentiels qui servent à développer la connaissance face à l'incertitude. Les deux hypothèses fondamentales de cette approche pragmatique sont que l'induction :

- est dirigée par une activité de résolution de problème, dans le sens de Newell et Simon (1972), tout en y ajoutant la capacité de résoudre des problèmes mal définis;
- est fondée sur le succès ou l'échec des prédictions avancées.

L'approche des modèles mentaux est utilisée pour interpréter la fonction du graphisme produit simultanément à la résolution de problème en mathématique. Un modèle mental est vu comme une construction conceptuelle qui vise à rendre compte de la suite des opérations mentales qu'effectue l'individu pour produire ses comportements. Face à un problème à résoudre, l'apprenant se construit un modèle mental en sélectionnant certains éléments du problème et certaines relations entre ces éléments. La sélection est fonction des connaissances générales et particulières de l'apprenant, de même que de sa motivation, ses aptitudes et les caractéristiques du problème présenté. Ce modèle n'est pas statique, le temps et les comportements du sujet cherchant à solutionner le problème viennent changer la situation-problème et du même coup le modèle mental. Ce modèle permet de tenir compte de la dynamique de la résolution d'un problème, de la séquence des actions et l'expérience du solutionneur, de l'information "activée" et des transformations que subit cette information. L'approche des modèles mentaux accentue la cohérence dans les différentes recherches en résolution de problème en permettant d'interpréter des phénomènes divers tels la détection de covariation, la physique naïve, le test d'hypothèse, l'acquisition de concepts, la connaissance sociale, le conditionnement et l'analogie. De plus, les éducateurs s'accordent à dire que l'apprentissage est une élaboration individuelle des savoirs, par intégration dans des structures déjà existantes et par une restructuration de ces connaissances (Dupont, 1989). Cette approche est pragmatique car elle tient compte des connaissances du "raisonneur", du contexte de résolution de problème et des attentes ou hypothèses possibles. En construisant un graphisme, l'apprenant sélectionne certains éléments du problème, les met en relation par différents types de raisonnements (induction, déduction, analogie, estimation, etc) pour en arriver à une nouvelle forme de connaissance (ici la solution).

Les objectifs

La revue de la littérature a conduit à postuler que le graphisme produit lors de la solution d'un problème serait un reflet de la représentation spontanée de la situation-problème. Il semble aussi que la représentation du problème influence grandement le processus de résolution du problème et que de nombreuses difficultés rencontrées pour trouver une solution semblent être directement liées aux habitudes de perception. La fonction de la représentation graphique ne supporte pas encore d'hypothèse bien définie; il n'y a pas encore de modèles qui présenteraient des hypothèses fortes sur les représentations que l'élève va mettre en oeuvre. Alors on ne peut que proposer des objectifs généraux de la tâche ainsi que les paramètres de la situation.

L'objectif général de la présente recherche est l'étude de la nature et de la fonction du graphisme produit par l'apprenant en solutionnant un problème en mathématique. Plus particulièrement, l'étude des relations entre le graphisme et le processus de résolution, à savoir si le graphisme est utile ou non et dans quel sens, en rapport avec l'élaboration de la solution du problème.

Pour atteindre cet objectif, il nous faut, nécessairement :

- développer une typologie des graphismes basée sur les éléments qui vont servir à leurs constructions;
- identifier les stratégies de résolution de problèmes à partir des données, appuyées sur les techniques générales de résolution de problèmes (Schoenfeld, 1985a) et les composantes cognitives/métacognitives développées par Swanson (1990) et Noël (1991);
- étudier la fonction du graphisme.

Cette dernière étape se réalisera par l'analyse des relations entre le graphisme et les stratégies de résolution. L'identification des différents processus utilisés, permettra de faire ressortir les différents rôles des graphismes dans la résolution des problèmes.

Des précisions sont apportées dans le chapitre 3 sur les paramètres sélectionnés dans l'échantillon et la tâche, de même que sur les caractéristiques de la méthode et sur l'instrument d'analyse permettant d'atteindre les objectifs fixés.

CHAPITRE 3

LA MÉTHODOLOGIE

L'observation d'élèves en situation de résolution de problèmes permet de capter les types d'information reliés à la nature et à la fonction des graphismes. Ce chapitre a pour but de décrire la méthodologie utilisée pour la cueillette et la préparation des données à analyser. La sélection des sujets et de la tâche est guidée par les facteurs qui influencent la production des graphismes. Plusieurs méthodes d'observations sont combinées pour étudier non seulement les produits mais prendre en compte le comportement cognitif lors de la production des graphismes. L'analyse consiste à dégager le processus de résolution d'un problème et permet ainsi de comparer les groupes répartis selon les variables indépendantes: le genre, le niveau, l'habileté en mathématique et la catégorie de problème. Cette présentation descriptive vise à donner au lecteur un cadre de référence pour la lecture et l'interprétation des résultats.

L'échantillon

L'intérêt porte essentiellement sur des élèves qui ont vécu des expériences mathématiques dans un système scolaire publique. Trente-six élèves ont participé volontairement à l'expérimentation, un nombre de sujets imposant pour une analyse aussi détaillée. Afin d'atténuer les biais introduits par un groupe culturel homogène, les élèves proviennent de quatre écoles du Conseil scolaire de langue française d'Ottawa-Carleton.

Ces écoles - et les classes concernées - accueillent des élèves de tous les niveaux et de tous les milieux socio-culturels y compris des enfants de familles qui ont récemment immigré au Canada. La diversification des facteurs sociaux tels l'école, les maîtres et la famille accroît la portée des résultats en assurant une plus grande représentativité de la population cible. Trois variables influencent le choix des sujets qui composent l'échantillon : le niveau, le genre et l'habileté en mathématique.

Le niveau

Une restructuration majeure des programmes de mathématique (Kelly, 1992; Ministère de l'éducation et de la formation de l'Ontario, 1993; Paquette, 1987; Resnick, 1991) a orienté la recherche non seulement sur l'acquisition de concepts et d'habiletés mathématiques, mais aussi sur l'introduction de l'algèbre et de la géométrie à partir des notions d'arithmétique. D'ordinaire, dans la plupart des systèmes scolaires, un enseignement plus formalisé de la géométrie et de l'algèbre débute à l'intermédiaire (SIMS 1980/1982; UNESCO, 1987). De plus, il existe peu de recherches à ce niveau sur les techniques de résolution de problème. Les graphismes produits dans la résolution de problèmes écrits en mathématique peuvent apporter de nouvelles informations sur le passage des représentations concrètes/individuelles à des notions abstraites.

C'est pourquoi l'intérêt porté à ces niveaux de 8e et 10e années semble approprié pour le type d'observations visé puisqu'il donne accès à la période de transition. Le niveau de 8e année offre un échantillon d'élèves avant qu'ils ne soient soumis à un enseignement trop formalisé et, par conséquent, à un moment où les algorithmes jugés nécessaires à la résolution des problèmes sont moins automatisés (Jan de Lange Jzn, 1987;

Travers, 1985). En 10e année, à cause d'une plus grande maîtrise des concepts mathématiques, les élèves devraient démontrer une plus grande familiarité pour résoudre les mêmes problèmes que ceux solutionnés par les élèves de 8e année. Une différence de perspective sur la résolution de problèmes entraîne-t-elle un changement dans la fonction des graphismes?

Les habiletés en mathématique

La sélection d'un seul niveau d'habileté peut être une source de biais dans les résultats d'une étude exploratoire. Un élève qui ne réussit pas ne donne pas les mêmes indices révélateurs de stratégies qu'un élève qui réussit. Certaines catégories d'activités cognitives sont mises en évidence chez ceux qui comprennent ou ne comprennent pas le problème. Il est important de connaître le modèle mental qui inhibe ou facilite la compréhension du problème (Blanchet, 1981).

Afin d'obtenir un échantillon hétérogène au niveau des habiletés, les enseignants de mathématique ont sélectionné des élèves forts (F), moyens (M) et faibles (f) en mathématique. Leur critère de sélection a été principalement le niveau de rendement dans le domaine. L'expérimentatrice n'avait pas accès à la catégorisation des sujets selon les différents niveaux d'habiletés, avant ou pendant la collecte des données; elle ne prit connaissance de ces niveaux qu'après la collecte des données. Cette mesure limite aussi le biais qui pourrait être lié aux attentes de l'expérimentatrice et influencer le questionnement.

Le genre

La variable genre est insérée dans la présente étude pour deux raisons prédominantes. Premièrement, suite aux résultats de recherches antérieures, les différenciations entre garçons et filles pourraient apparaître plus marquées au niveau de la 10e année. Les différences entre garçons et filles qui apparaissent à un niveau plus avancé du secondaire sont reliées à la situation ou au contexte psycho-social (Bailey, 1983; Harnisch, Steinkamp, Shiow-Ling Tsai, & Walberg (1986); Leder, 1991; Linn & Hyde, 1989). Par contre, dans des études trans-nationales, les recherches sur la relation entre le genre et les habiletés en mathématique ne montrent aucune différence entre garçons et filles au niveau de la 8e (Harnisch et coll., 1986; Hyde, Fennema & Lamon, 1990; Tartre & Fennema, 1991). Deuxièmement, puisque la présente recherche se veut une première exploration des processus cognitifs mis en marche lors de la production de graphisme mathématique, il est alors prudent de considérer la possibilité de l'existence de différences entre garçons et filles. Même s'il n'existe pas de différences quant aux produits des solutions des problèmes, il peut y en avoir quant aux processus de résolution.

En tenant compte des variables niveau et genre, l'échantillon qui en résulte est donc composé de 9 garçons et 9 filles du niveau de 10 année, et de 10 garçons et 8 filles du niveau de 8e année, pour un total de 36 élèves. Une erreur d'échantillonnage n'a pas permis d'équilibrer les deux groupes de 8e année comme prévu; l'erreur n'a été détectée que trop tard au cours de l'analyse des données. Les élèves se répartissent de façon équilibrée selon leur habileté en mathématique : 12 forts, 12 moyens et 12 faibles. Comme l'expérimentatrice n'avait pas accès à la catégorisation des sujets selon le niveau d'habileté en mathématique, les quatre sous-groupes n'ont pu être équilibrés statistiquement.

Les caractéristiques de la méthode utilisée

Avant de traiter directement de la situation externe du problème, il est essentiel de réviser les caractéristiques de la méthode utilisée. Pour étudier la fonction du graphisme dans les solutions de problèmes mathématiques, il semble important d'adopter une procédure ouverte, dans la mesure où elle laisse aux sujets la pleine liberté de choix des représentations ou symboles qui leurs sont signifiants. Il faut s'assurer que les types d'information nécessaires à l'analyse sont collectés, à savoir, le graphisme, le comportement cognitif et la justification des activités cognitives. Dans le cadre de la présente recherche, il convient d'avoir recours à plusieurs méthodes de prise d'observations et de trianguler les résultats. Les prises d'observations sont : la réflexion parlée concomitante à la résolution du problème, l'enregistrement de la graphie sur vidéo, la rétrospection immédiate guidée par le rétrovisionnement de la performance et une situation d'intervention éducative.

La réflexion parlée

L'analyse des protocoles verbaux individuels est devenue la démarche privilégiée dans l'étude de la résolution de problèmes, suite notamment aux travaux d'Ericsson et Simon (1984, 1993). Une des conditions générales de crédibilité et pertinence des verbalisations est le moment de la verbalisation par rapport à l'exécution (Deffner &

Rhenius, 1985; Dionne, en préparation; Ericsson & Simon, 1980, 1984, 1993; Fidler, 1983; Hoc, 1986a; Hoc et Leplat, 1983; Simon et Hayes, 1976; Wilson, 1975). On demande au sujet de penser à haute voix en solutionnant un problème. La consigne vise non seulement à inciter le répondant à verbaliser ses pensées et à décrire ce qu'il fait, mais aussi, elle vise explicitement à éviter les interruptions du flot réflexif : "Pense tout haut. Je ne suis pas intéressé à la solution finale, encore moins à la vitesse d'exécution. Ce qui m'intéresse c'est ce à quoi tu penses, tout ce qui te passe dans la tête." (Directives complètes de la procédure dans l'Appendice A). En principe, l'expérimentateur doit intervenir le moins possible afin d'éviter de perturber le déroulement de la pensée du sujet. Dans un contexte précis, l'expérimentateur se construit un répertoire d'actions possibles. Pour rappeler au sujet de réfléchir à haute voix, les interventions se font au moment où le sujet marque un arrêt dans son discours oral.

Ericsson et Simon (1980, 1984, 1993) ont étudié de façon compréhensive cette technique d'analyse basée sur un modèle du traitement de l'information (information processing). Trois principes généraux sont tirés de leur modèle : les informations verbalisables sont celles sur lesquelles l'attention est focalisée, et donc mettent en cause la mémoire à court terme; les relations entre informations renvoient à la structure intégrative de ces informations, et donc mettent en cause la mémoire à long terme; les pauses, les hésitations, sont de bons prédicteurs de changements dans la gestion des relations entre informations.

Cependant, trois objections principales et récurrentes sont présentées à l'encontre de la validité de la verbalisation : (a) la verbalisation modifie l'exécution de la tâche et de la performance; (b) les processus mentaux ne sont pas accessibles par la verbalisation; (c) il est impossible de rendre un compte verbal complet de toutes les composantes du processus mental.

La première objection ressort de la comparaison de la performance de sujets, sur une même tâche, qui sont appelés à produire ou non une réflexion parlée. Par exemple, Fidler (1983) compare, sur une même tâche de décision, la validité respective des réflexions parlées concomitantes, consécutives et justificatives. Les résultats montrent qu'il n'y a pas de différences dans l'homogénéité des décisions selon que les choix sont faits avec ou sans réflexion concomitante. De même, une étude de Norris (1992) montre que la performance, dans une situation de testing, est la même avec ou sans verbalisation. D'autres auteurs observent que la verbalisation améliore la performance (Bower & King, 1967; Fidler, 1983; Gagné & Smith, 1962).

Certains auteurs ne trouvent aucune différence quant au temps d'exécution des sujets qui devaient verbaliser (verbalisations concomitantes, consécutives ou préalables à l'exécution) et de ceux qui ne le devaient pas (Brehmer, 1974; Karpf, 1973; Karpf & Levine, 1971); cependant, dans l'étude de Fidler (1983), l'exécution prenait plus de temps. Au terme de l'examen de ces études, il est proposé que l'encodage des connaissances joue un rôle prépondérant dans la verbalisation de procédures. En effet, les travaux d'Anderson (1983), de Mandler (1985), de Simon (1979), de Smith (1979) et, de Thomson et Tulving (1970) ont amélioré l'efficacité d'un encodage donné (verbal ou non verbal) sur la récupération de l'information. Selon Flaherty (1974) et Ahlum-Heath et Di Vesta (1986), d'une part, si l'apprentissage de l'exécution d'une procédure est géré par le code verbal, il y aurait amélioration de la procédure; d'autre part, une détérioration de la procédure serait observable lorsque son exécution serait gérée par un code visuel.

La deuxième objection selon laquelle les processus mentaux ne sont pas accessibles par verbalisation, réside principalement dans l'impossibilité constatée par plusieurs auteurs d'élaborer des modèles du fonctionnement cognitif à partir de verbalisations. Pour Ericsson et Simon (1984, 1993; Ericsson et Crutcher, 1991), le problème de la validité des protocoles verbaux doit être posé en référence à la tâche proposée et à la consigne donnée au sujet. Les protocoles verbaux sont informatifs à condition que les postulats du modèle ne soient pas entravés. Deux types de processus gèrent l'association d'information : des "processus automatiques" et des "processus contrôlés" (Shiffrin & Schneider, 1977) selon le degré d'expérience ou d'expertise que le sujet a de la tâche concernée (Gilmartin, Newell, & Simon, 1976; Lesgold, 1984). Selon Shiffrin et Schneider, les processus automatiques ne feraient pas appel à la mémoire de travail, ne nécessiteraient pratiquement pas d'effort ou de participation consciente, et enfin, ils surviendraient en parallèle. Les processus contrôlés ont des caractéristiques opposées. La consigne peut poser des contraintes très strictes sur l'énonciation de la procédure (Hoc, 1986a; Hoc & Leplat, 1983; Horton, 1964; Simon & Hayes, 1976; Wilson, 1975). Plus les exigences introduites par la consigne sont fortes, plus les verbalisations risquent d'être étrangères aux événements qui se produisent en cours d'exécution de la tâche. Le plus faible niveau d'exigence est obtenu par une consigne de type "penser tout haut" sans obliger le sujet à énoncer des contenus particuliers (verbaliser la procédure utilisée ou justifier ses comportements).

La dernière objection est facilement réfutable. Les psychologues cognitivistes ne prétendent pas dévoiler tous les processus cognitifs par l'analyse de protocoles verbaux concourants. La réflexion parlée donne plutôt une trace discontinue d'un processus particulier à un moment précis et face à une tâche particulière (Caverni, 1988; Dobrin, 1986; Ericsson & Simon, 1984, 1993; Steinberg, 1986). D'ailleurs la combinaison de différentes méthodologies vise à remédier à ce problème de gestion partielle des protocoles verbaux concourants. Haastrup (1987), Taylor (1992) montrent comment la réflexion parlée va de pair avec la rétrospection mais toujours en gardant le protocole concourant à la tâche comme source principale d'information.

La plupart des travaux incitent à considérer la réflexion parlée avec précaution, même quand la consigne est peu contraignante et que la méthodologie respecte les règles du modèle concomitant. Il convient d'éviter une attitude trop rigide qui viserait, soit à penser que la verbalisation n'est jamais en rapport avec ce qui est fait (Nisbett & Wilson, 1977), soit avancer que la verbalisation est le reflet systématique des étapes de la pensée.

L'enregistrement sur vidéo

Trois fonctions du vidéo militent en faveur de son utilisation.

A) L'enregistrement vidéo offre la possibilité d'observer autant de fois que souhaité le déroulement complet du comportement du sujet, les conduites demeurent en contexte. Toutefois, des analyses préalables permettent d'échapper à l'illusion qu'une description complète et définitive pourrait être atteinte (Artzt & Armour-Thomas, 1992; Blanchet, 1981). En effet, un même comportement peut revêtir de multiples significations. Afin de réduire les descriptions revêtant de nombreuses significations, une solution consiste à ne relever que les comportements directement liés au but de la recherche. Le vidéo permet aussi de séparer les étapes de la production et de passer en revue la succession des figures qui composent la représentation finale.

B) Le film sert aussi à observer le rythme de l'action qui se déroule. Lors d'hésitations ou de pauses, plusieurs comportements peuvent se produire : déplacement du regard sur le matériel, vers l'expérimentatrice ou dans le vide. Ce que l'on observe ajoute des indices à ce que l'on rapporte verbalement. Dans le contexte de la présente recherche, le vidéo a été utilisé pour observer à quel moment et de quelle manière le sujet se sert du matériel à sa disposition.

C) Le film sert finalement dans la plupart des cas à vérifier la fidélité d'un instrument (les grilles de catégories). En effet, non seulement le rétrovisionnement permet de vérifier ce qui pourrait être une inférence sans la trace originale, mais il permet aux juges de revoir la performance en contexte lors du test de fidélité de l'instrument. En recourant à la vérification de comportements observables, le processus d'interprétation du fonctionnement de la pensée devient plus résistant à des interprétations inadéquates. Il n'est pas nécessaire à l'expérimentateur de faire un choix de l'information; des esquisses de gestes, des mimiques faciales facilitent souvent ce qui serait une interprétation sans le vidéo. À cause de la trace permanente du vidéo, les expérimentateurs sont moins susceptibles au glissement des interprétations entre le début et la fin de l'expérimentation.

La rétrospection immédiate

Lorsqu'un élève est convaincu que son approche ou sa stratégie "fonctionne" une extension importante en mathématiques est de savoir pourquoi "cela marche". Cette tâche de justification est facilitée si l'entrevue de rétrospection est immédiate. Ericsson et Simon (1980, 1993) suggèrent d'interviewer aussitôt que possible, suite à l'événement.

La rétrospection vise ici un double objectif : permettre à l'élève de revenir sur ses raisonnements pour les justifier ou de prendre conscience de ses processus métacognitifs et de la validité de ceux-ci (Dionne, en préparation; Noël, 1991; von Glasersfeld, 1987). À l'issue de l'exécution de la tâche, le sujet "se rappelle ce qu'il pensait" en revoyant l'enregistrement vidéo de son comportement de résolution : on obtient alors une verbalisation consécutive assistée. Les contenus de ces verbalisations sont très similaires à ceux produits dans une verbalisation concourante de type "réflexion parlée".

Une autre caractéristique apportée par le rétrovisionnement est de donner la chance à ceux qui ont maîtrisé une habileté (les experts) de "voir" ce qu'il font (Von Glasersfeld, 1987). Ce feed-back visuel est un outil puissant car il aide à conscientiser des actions qui ont été automatisées. De plus, une différenciation des processus cognitifs et métacognitifs permet une triangulation des données laquelle amplifie la validité des observations.

Dans l'entrevue de rétrospection, les questions visent à faire décrire par le sujet ce qu'il fait : comment as-tu trouvé ça? comment as-tu fait? qu'est-ce que tu faisais? Qu'est-ce que tu voulais dire? Lorsque la verbalisation est faible en information, l'expérimentatrice a recours à des questions de type causal : pourquoi? En somme, une représentation continue de la progression suivie par le solutionneur peut lui fournir une représentation de son processus d'apprentissage et de découverte et lui donner le temps d'observer soigneusement les détails significatifs du développement de la solution. L'expérimentateur ne fait qu'encourager le sujet à rapporter rétrospectivement les pensées qu'il a eues durant l'expérimentation.

La situation d'intervention éducative

Lorsqu'un élève ne peut trouver d'approche ou de stratégie qui fonctionne, une responsabilité de l'enseignant est d'amener l'élève à comprendre et à solutionner le problème. À partir des travaux effectués sur des situations d'intervention pédagogique (Houdé & Winnykammen, 1992), l'expérimentateur utilise les procédures de guidage suivantes: l'enrôlement du sujet dans la tâche (éveiller l'intérêt); la réduction des difficultés; le maintien de l'orientation par rapport à l'objectif principal (par exemple par le rappel du but); la signalisation des caractéristiques déterminantes (par exemple en fournissant l'information utile à la progression); le contrôle de la frustration; la démonstration. Le niveau d'intervention varie selon la gravité de l'impasse pour une description plus complète des interventions, voir l'Appendice B.

On constate donc que la réflexion parlée, l'enregistrement sur vidéo, le rétrovisionnement et la situation d'intervention pédagogique focalisent sur les interactivités suivantes : paroles, gestes et productions sur papier. L'observation directe des sujets qui réfléchissent à haute voix en solutionnant des problèmes, couplée avec des entretiens cliniques basés sur le rétrovisionnement augmente la crédibilité et l'objectivité de la méthode utilisée.

La tâche

L'importance des interactions entre les représentations internes de l'individu et le problème à résoudre dans l'identification des caractéristiques du fonctionnement cognitif a engendré la mise au point de la tâche. Une revue des problèmes utilisés dans les manuels scolaires et dans les recherches en mathématique a permis d'identifier différents types de problèmes qui se prêtent à une expression graphique.

Les critères qui ont servi de guide pour la sélection de ces problèmes sont les suivants: (a) problèmes qui incitent à la construction de graphismes, (b) problèmes qui nécessitent la mise en action d'habiletés de résolution de problèmes, (c) problèmes utilisés dans d'autres recherches en résolution de problèmes, (d) problèmes compréhensibles par les élèves des niveaux choisis.

Les problèmes qui incitent à la construction de graphisme

Les problèmes sont choisis parce qu'ils incitent à utiliser des graphismes tels des problèmes plus faciles à comprendre avec un diagramme, une figure, un dessin ou une symbolisation mathématique. Les problèmes de géométrie nécessitent souvent la construction de figures. Les problèmes d'algèbre, par exemple, sur la distance et le temps, présentent une notion habituellement plus malléalable lorsque la compréhension du problème s'accompagne de vecteurs dirigés. Hall, Kibler, Wenger et Truxaw (1989), présentent un graphique contextuel, cartésien, qui serait basé sur un raisonnement situationnel (model-based reasoning) de l'élève et non sur le formalisme algébrique souvent enseigné. Différentes adaptations de ce modèle sont fréquemment utilisées par les pédagogues. Rubinstein (1986) parle de "digraph-directed graph" qui aide à représenter l'information sous une autre forme que la forme verbale.

Finalement, il est souvent avantageux de représenter graphiquement les problèmes d'inclusion dans un diagramme. Ceci permet de faire ressortir visuellement les relations qui existent dans le chevauchement des données. Bien qu'on puisse imaginer différentes formes de représentations graphiques des ensembles, le "diagramme de Venn" est sûrement la forme la plus utilisée. Le diagramme de Venn illustre à l'aide de figures géométriques l'ensemble universel U et les sous-ensembles de celui-ci évoqués dans une situation donnée. La convention veut que U soit représenté par un rectangle et les sous-ensembles de U par des cercles à l'intérieur du rectangle. Cette représentation est souvent utilisée au primaire comme outil organisationnel ou de classification. Il est intéressant de voir comment ces différentes formes de représentation (figure géométrique, vecteur, diagramme de Venn) sont utilisées et d'étudier les relations possibles entre les trois.

Les problèmes qui nécessitent la construction de graphisme

Pour qu'il existe un problème, il faut que la réponse ne puisse être atteinte directement. Ainsi, les problèmes choisis nécessitent l'exécution de plusieurs transformations avant d'atteindre la solution. Les problèmes sont construits autour d'un concept abstrait présenté dans un contexte nouveau, c'est-à-dire non tiré des manuels scolaires en usage. La nouveauté est un facteur important afin de placer l'élève dans une situation faisant appel à ses aptitudes de résolution de problèmes (Sternberg, 1985). En effet, les problèmes choisis peuvent se résoudre en utilisant une variété de stratégies et ils exigent plus que l'application immédiate de procédures, de connaissances ou d'habiletés apprises. On a cherché à identifier des domaines réalistes qui offrent des possibilités de représentations graphiques.

Les problèmes utilisés dans d'autres recherches

Il est important de pouvoir lier les résultats de la présente recherche à ceux d'autres recherches dans le domaine, surtout du fait que c'est une première exploration des graphismes spontanés construits par l'élève. Dans les problèmes de géométrie, Lesh (1983) et Schoenfeld (1985b) discutent de principes géométriques (surface, périmètre, carré et rectangle) semblables à ceux présentés dans la présente recherche. Dans les problèmes de distance, Lemoyne (1987) analyse les conceptions des erreurs en utilisant un problème identique à celui utilisé dans la présente recherche; Hall et coll. (1989) utilisent un deuxième problème (utilisé ici aussi) pour l'analyse de la structure quantitative et de la structure situationnelle de problèmes d'algèbre; Rubinstein (1986) propose le "digraph" comme outil pour penser et résoudre des problèmes écrits nécessitant la compréhension des notions de distance et vitesse. Dans les problèmes d'inclusion, Lewis et Greene (1983) utilisent un problème d'inclusion comme exemple de problème complexe qui peut être solutionné par "creative carving", un terme de Miller (1980) décrivant bien ce que l'on entend par la décomposition d'un problème en ses éléments. En effet ces auteurs soulignent l'importance de l'organisation des données dans un problème complexe afin de résoudre un problème plus efficacement.

Les problèmes compréhensibles par les élèves des niveaux choisis

Certains des problèmes choisis sont typiques des problèmes présentés dans les textes scolaires. Ils ne font cependant pas partie du cours de mathématique présentement à l'étude pour les participants. Une étude pilote a permis d'évaluer le potentiel de résolution de tous ces problèmes.

En effet, un ensemble de 76 problèmes répondant aux objectifs poursuivis, a constitué une banque de problèmes pour l'expérimentateur. Cette réserve a été mise à l'épreuve avec un échantillon restreint d'élèves de 13 à 16 ans. Les problèmes retenus ont été évalués par différents experts (professeurs universitaires, directeurs et enseignants de l'intermédiaire, membres de comités d'éthique et de recherche) avant la sélection finale.

Un éventail de 6 problèmes ont été sélectionnés et ils se répartissent ainsi : 2 problèmes dans chacune des 3 différentes catégories (périmètre et surface, distance et temps, inclusion) faisant appel à trois types de représentations potentielles (figures géométriques; flèches, vecteurs ou système cartésien; diagramme de Venn). Les problèmes sont présentés au Tableau 1. L'identification abrégée est utilisée pour référence rapide dans le texte - par exemple : G2 réfère au deuxième problème de géométrie. Chaque catégorie de problèmes est présentée à 12 élèves (3 garçons et 3 filles de 8e et de 10e année, respectivement). L'ordre de présentation des deux problèmes alterne d'un sujet à l'autre de façon à minimiser l'influence systématique de la résolution d'un premier problème sur un deuxième.

Tableau 1

Énoncé des six situations problèmes

Code	Énoncé du problème
	Distance
D1	1) Mon père conduit à une vitesse moyenne de 125 km à l'heure. S'il doit couvrir une distance de 750 km, quel serait le temps économisé si, au lieu de conduire à cette vitesse, il conduisait deux fois plus vite ?
D2	2) Deux trains partent de la même gare à la même heure. Ils voyagent en directions opposées. Un train voyage à 60 km à l'heure et l'autre train voyage à 100 km à l'heure. Dans combien d'heures seront-ils séparés par 880 km ?
	Géométrie
G1	3) Si l'aire d'un rectangle R, de 4m de haut, est la même que l'aire d'un carré C, de 24 m de périmètre, quel est le périmètre du rectangle R ?
G2	4) Une chambre a une longueur de 4 m, une largeur de 3 m et une hauteur de 2,5 m. Comme ouverture, elle a deux portes dont chacune mesure 80 cm de largeur par 2 m de hauteur et une fenêtre de 2 m par 1 m. On veut peindre les murs et le plafond de cette chambre et remplacer les bordures du plancher. Quelle sera l'aire de la surface à peindre ? Quelle sera la longueur des bordures à acheter ?
	Inclusion
I1	5) Le département des incendies veut distribuer une brochure sur la prévention des incendies à tous les professeurs et tous les propriétaires de la ville. Combien de brochures doivent être envoyées étant données les statistiques suivantes : Propriétaires............................50 000 Professeurs.............................. 4 000 Professeurs et propriétaires............. 3 000
I2	6) Un enseignant avec 1 000 élèves doit commander les livres pour chacun de ses cours. Il enseigne les langues et les sciences. 400 élèves ont choisi l'espagnol et 300 ont choisi l'anglais, parmi les élèves en langues, 150 ont choisi les deux langues. Combien de livres de sciences doit-il commander pour tous ses élèves qui ne sont pas en langues ?

Le déroulement de l'expérimentation

L'appareillage

La conceptualisation de l'appareillage, inspirée de recherches finlandaises en didactique, a été développée par Dionne (1989). L'élève est assis à une table de travail dont le dessus est transparent (plexiglass). Une caméra capte l'expression faciale de l'élève et les graphismes qu'il produit par l'intermédiaire d'un miroir placé au sol. La réflexion parlée, la gestuelle et les graphismes sont enregistrés simultanément. Une schématisation du montage, présentée à la Figure 1, aide à mieux comprendre l'environnement physique du sujet. Pour réaliser la tâche qui lui était présentée, l'élève avait accès à une calculatrice, des crayons feutres et les formules de calcul du périmètre et de la surface.

Le déroulement de la tâche

La tâche de l'élève se déroule en cinq étapes: (a) la confrontation à deux problèmes à titre d'exercice, (b) la résolution d'un problème, (c) la justification de la démarche dans la résolution du problème, (d) la résolution d'un deuxième problème dans le même domaine, (e) la justification de la démarche dans la résolution de ce dernier problème. Le temps total moyen requis par chaque sujet a été de 65 minutes.

<u>La confrontation à deux problèmes à titre d'exercice</u>

Dans cette première étape, l'élève est confronté à un ou deux problèmes à titre d'exercice et il doit réfléchir à haute voix en exécutant la tâche. Cette répétition est très

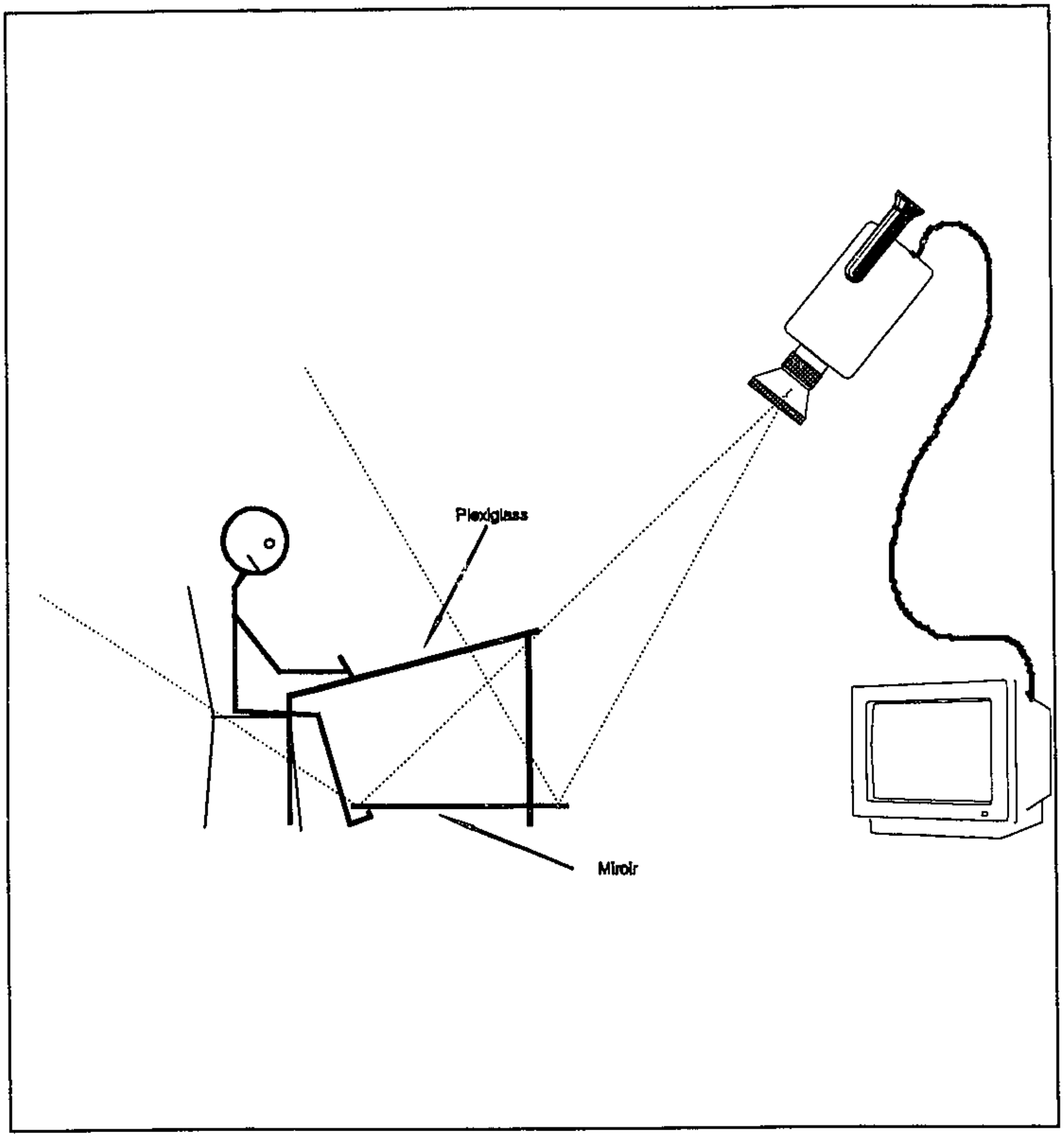


Figure 1. Schéma de la table d'observation. Droit d'auteur 1991 par J.-P. Dionne. Reproduit avec autorisation.

importante dans la collecte des protocoles verbaux concourants pour trois raisons : (a) l'élève se rend compte que la réflexion parlée "ça fonctionne", (b) il comprend la tâche qu'il aura à accomplir, et (c) il prend le temps de se familiariser avec l'équipement.

Lorsqu'un individu tente de réfléchir à haute voix, une étape à titre d'exercice concrétise l'existence du dialogue interne qui prend place naturellement, surtout en faisant de la mathématique. Un premier but à atteindre est donc d'exprimer à haute voix ce qui vient habituellement à l'esprit et de ne pas laisser la verbalisation interférer avec l'accomplissement de la tâche. Dans la plupart des cas, il suffit de quelques minutes à l'élève pour réaliser qu'il peut penser à haute voix. En outre, l'exercice permet aux sujets de mieux comprendre la tâche à exécuter. De plus, l'expérimentatrice a recours à des directives écrites pour minimiser la variabilité d'interprétation d'un sujet à l'autre (voir Appendice A pour les directives adaptées de Ericsson et Simon, 1993). Enfin, cette répétition permet à l'élève d'oublier l'aspect spectaculaire de l'appareillage de même que la présence de l'intervieweur.

La résolution d'un problème

De façon autonome, l'élève résout un problème représentant une des catégories. Les comportements sont enregistrés sur vidéo (image et son) et l'expérimentatrice ne fait que répondre aux questions directes ou elle n'intervient que s'il y a manifestation d'abandon de la part du solutionneur. À ce moment, il peut y avoir une intervention pédagogique du niveau approprié (voir Appendice B) afin d'éviter le découragement de ceux ou celles qui n'ont pas réussi.

La justification de la démarche dans la résolution du problème

Dans cette étape de rétrospection immédiate à l'aide du rétrovisionnement du vidéo, l'élève revoit sa démarche de résolution du problème et la justifie. Pour terminer l'entretien, l'interviewer lui présente une "représentation potentielle" du problème. La rationalisation de cette étape de la procédure est fortement liée au niveau de complexité du problème : le niveau de familiarité et la complexité des règles ou formules à appliquer peuvent empêcher la formation d'une représentation adéquate (Kotovsky, Hayes & Simon, 1985; Simon & Hayes, 1976) et pour encourager les élèves à continuer dans l'expérimentation, un moyen possible de solution leur est fourni. Cette présentation permet aussi de voir certaines retombées pédagogiques immédiates lorsque le deuxième problème est solutionné.

La résolution d'un deuxième problème dans le même domaine

Le participant résout un deuxième problème appartenant au même domaine que celle de l'étape b.

La justification de la démarche dans la résolution du problème

L'élève justifie sa démarche de résolution du deuxième problème comme décrit dans l'étape c.

Le corpus de données

Un corpus de données important sur les comportements des élèves en mathématique a été ainsi recueilli. **Les bandes sonores** sont transcrites verbatim, en temps réel. **Les graphismes** collectionnés sur papier transparent sont reproduits en séquence, c'est-à-dire, présentés en parallèle à la transcription de la réflexion parlée. Pour fin de présentation dans la thèse, le graphisme est réduit à 36% de sa grandeur réelle. **Le vidéo** est visionné autant de fois que nécessaire pour capter le moment exact des comportements de production écrite. Les observations de gestes et d'expressions sont insérées dans la transcription au moment de leur apparition. Ces trois sources d'information ont ainsi servi à former les protocoles individuels. Ceci suppose tout un travail de structuration du corpus en tant qu'application téléonomique.

L'instrument

Le développement d'un instrument de codification qui s'applique à tous les protocoles offre la possibilité de comparer les résultats. Il a été nécessaire de définir des catégories de classification qui reflètent le contenu des protocoles à analyser. Le développement de cet instrument de codification a été effectué à partir de l'éventail de 12 solutions (2 solutions prises au hasard pour chaque problème). Trois grilles de codification ont été ainsi obtenues, lesquelles ont servi ensuite à coder les 72 solutions. Les grilles servent à développer une typologie des graphismes, extraire les activités cognitives et identifier les composantes fonctionnelles des graphismes dans la résolution de problèmes.

La typologie des graphismes

La typologie des graphismes est basée sur les éléments qui ont servi à leur construction (mots, chiffres, signes, lettres, dessins), la combinaison de ces éléments entre eux (formules, figures, dessins, diagrammes, tableaux) et les transformations effectuées sur ces éléments. Le lexique mathématique de Mathieu (1989), la revue de notions mathématiques de Barrat (1987), de même que les travaux de Kaput (1991) ont servi de guide à la formulation des définitions. La grille est présentée au Tableau 2 avec les codes qui formalisent l'identification des graphismes.

L'activité cognitive extraite des protocoles

Les transcriptions verbales sont d'abord découpées en épisodes ou en unités de significations (Anzaï & Simon, 1979). Des appuis théoriques (Schoenfeld, 1985a, 1987; Swanson, 1990; Noël, 1991) contribuent de façon importante à mieux reconnaître ces unités. En effet, Schoenfeld (1985) a développé un modèle d'activités cognitives en résolution de problèmes mathématiques. Ce modèle général d'analyse des protocoles verbaux propose le découpage des protocoles en épisodes (lire, analyser, explorer, planifier/implanter, vérifier). Il insiste cependant sur le besoin d'un formalisme plus rigoureux pour caractériser ces épisodes et la nécessité d'étudier les jonctions entre ces épisodes. Plus récemment, Swanson (1990) et Artzt et Armour-Thomas (1992) décrivent de façon détaillée les composantes cognitives utilisées en résolution de problèmes. De telles études mettent en relief les processus métacognitifs qui interviennent dans la résolution de problèmes. Dans cette même foulée, Noël (1991) s'est penchée sur l'élaboration des processus métacognitifs de vérification, d'évaluation et de prise de décision.

Des précisions sur les principes qui ont guidé la formulation des définitions des activités cognitives apportent un éclairage nécessaire à la compréhension du rapport des résultats. Les protocoles sont la source d'une première esquisse de la trace des

Tableau 2

Typologie des graphismes produits

Code	Type	Définition
	Figure géométrique (F)	
F–1	Carré	Un quadrilatère plan qui a quatre côtés congrus et quatre angles droits.
F–2	Rectangle	Un quadrilatère dont les 4 angles sont droits.
F–3–a	Polyèdre en perspective	Un solide représenté dans l'espace.
F–3–b	Polyèdre en développement	Un solide représenté en plan.
	Tableau (T)	
T–1	Mot\proposition	Disposition des graphismes d'une façon méthodique.
T–2	Quantité\chiffre	
	Calcul (C)	
C–1	Continu	Simples et naturels, où le calcul est une extension naturelle de la conceptualisation. Le sujet travaille directement sur les structures produites dans la conceptualisation initiale.
C–2	Ponctuel	Où le passage de la conceptualisation au calcul est brusque. Le sujet travaille sur le système symbolique formel et il utilise des lois syntaxiques ou autres au lieu de la conceptualisation initiale de la situation.
C–3	Gestuel	Le sujet fait des calculs en mimant l'écriture des chiffres sans les enregistrer par écrit.
	Vecteur (V)	
V	À flèche ou sans flèche	Ligne représentant les variations d'une grandeur (orientée ou non).
V–G	Gestuel	Un graphique doublé d'actions ou de mimes.
	Diagramme (D)	
D–1	Disjoints	Représentations d'ensembles n'ayant aucun élément commun.
D–2	Non–disjoints	Représentations d'ensembles indiquant que certains éléments appartiennent aux deux.
O	**Objet (O)**	Représentations d'objets mentionnés dans le problème, sous forme réelle ou schématisée.
Fo	**Formule (Fo)**	Égalités ou inégalités mathématiques.
R	**Rature (R)**	Annulation faite par quelques traits passés sur ce qu'il y a d'écrit.
P	**Proposition\mot (P)**	Idée ou rapport exprimé par des mots ou abréviations de mots.
C	**Chiffre\Quantité (C)**	Caractère pour représenter les nombres.
S	**Symbole (S)**	Souligné, encadrement, caractère gras ou autre symbole mathématique ou sténographique pour clarifier, simplifier ou mettre en évidence une réponse.

comportements cognitifs. Des liens effectués avec les recherches sur les stratégies de résolution et les composantes cognitives et métacognitives permettent ensuite un raffinement des définitions telles que présentées dans le Tableau 3; le même tableau, accompagné d'exemples tirés des protocoles se retrouve à l'Appendice C. Les catégories ne sont pas complètement indépendantes et les définitions se focalisent sur l'explicitation des comportements.

L'activité de lecture sélective (L-2) est inspirée des composantes cognitives de Swanson (1990) où l'élève enregistre, sélectionne ou reformule l'information, des questions ou des critères. Cette catégorie correspond également à la catégorie "understanding the problem" de Artzt et Armour-Thomas (1992). Les comportements d'exploration accompagnent souvent les premières phases de la résolution du problème, au moment où le solutionneur se construit une représentation du problème. Ces comportements d'exploration apparaissent rapidement et souvent de façon implicite : il devient alors difficile de les isoler. La planification se retrouve à différents niveaux (métacognitifs et cognitifs) de façon explicite et implicite en conjonction avec les autres activités cognitives; la présente grille de codification se limite à la planification explicite (P-1, P-2). Les trois catégories : vérifie (V), évalue (É) et décide (D-1, D-2, D-3, D-4) rejoignent le sens que donne Noël (1991) à la métacognition régulatrice. La vérification est un processus d'évaluation des activités cognitives produites, tandis que l'évaluation est un jugement porté sur ces mêmes activités. Le processus décisionnel se divise en quatre options lorsque le sujet rencontre une incohérence : (a) il décide alors de corriger ou (b) de modifier parce qu'il est certain d'avoir compris, d'avoir une bonne

Tableau 3

Activité cognitive extraite des protocoles

Code	Activité	Définition
L–1	Lit	Parcourt des yeux en verbalisant littéralement ce qui est écrit sur la carte où est imprimé le problème. Le débit verbal est coulant, sans interruptions.
L–2	Lit sélectivement	Lit en sélectionnant des éléments du problème, souvent en les écrivant. Cette lecture comprend de l'analyse et de la planification plus ou moins implicite.
	ANALYSE (compréhension)	**Essaie de comprendre pleinement le problème. Lie, concilie, confronte deux idées afin de poursuivre la résolution. Étudie les éléments constitutifs du problème.**
A–1	Opérationnalise	Concilie un but/sous–but atteint avec le graphisme, concilie de l'information sélectionnée ou nouvellement trouvée avec le graphisme, etc. Reformule dans d'autres mots ou sous forme de question réthorique plus ou moins dirigée vers l'expérimentateur.
A–2	Clarifie en étudiant ou en s'attardant sur un terme ou un énoncé en particulier parce qu'il y a incohérence.	Suite à une incertitude ou une incompréhension, cherche, essaie de comprendre le texte, la situation, les principes derrière les énoncés.
	PLANIFIE EXPLICITEMENT	**Essaie de réduire l'écart entre le but à atteindre et les données. Essaie de prévoir les conséquences d'une solution, se fait souvent en décomposant le problème en parties.**
P–1	Planifie globalement	Choisit explicitement une approche globale
P–2	Planifie localement ou justifie	Choisit explicitement une méthode spécifique de résolution à l'approche choisie: définit un sous–but à atteindre.
		Choisit une formule.
		Choisit un algorithme.
		Choisit une perspective géométrique possible ou un graphisme qui aiderait à la compréhension.
I	IMPLANTE	Essaie de résoudre le problème. Calcule ou retire une nouvelle information en suivant des règles établies. Applique des procédures. Contient de la planification implicite.

Tableau 3 (suite)

Activité cognitive extraite des protocoles

Code	Activité	Définition
V	VÉRIFIE (peut être accompagné d'une justification)	Examine l'exactitude des calculs, la correspondance des calculs avec les données, la correspondance entre les graphismes, la correspondance entre la formule et le graphisme, etc. Est conscient des activités cognitives effectuées ou de leurs produits, c.-à-d., travaille sur le produit de ses activités cognitives.
É	ÉVALUE LA SITUATION	Estime, prend en considération ce qui est fait ou ce qui reste à faire, porte un jugement. Une évaluation soit de l'approche, des calculs ou de la solution. Résume ce qui est fait.
DÉCIDE		**Prend une décision suite au jugement porté dans l'évaluation de la situation.**
D–1		Corrige: signale, rectifie ou reprend une erreur; décide d'agir suite à un jugement porté (modifie sa représentation).
D–2		Modifie: fait subir un changement de sens, modifie ce qui a été sélectionné pour rendre compatible avec la situation ou la réponse précédente (modifie la situation).
D–3		Confirme l'atteinte d'un but: confirme ou réitère l'atteinte d'un but ou sous–but, la réponse, etc.
D–4		Doute de l'atteinte d'un but/sous–but mais n'en fait rien.
E–E	E–ENCOURAGE	L'expérimentateur approuve pour montrer qu'il est là et que le sujet doit ou peut continuer seul. L'expérimentateur répond à une question posée.
E–C	E–CLARIFIE	L'expérimentateur doit rappeler en utilisant des consignes de réfléchir à haute voix "parle plus fort", de répéter ce qui a été murmuré ou de préciser une nouvelle information "dit moi ça encore".
E–P	E–QUESTION DE CONFIANCE	L'expérimentateur questionne le sujet sur le degré de confiance qu'a ce dernier dans la solution.
B	DÉRANGEMENT	Interruption venant de l'extérieur, quelqu'un à la porte, annonce, difficulté technique, crayon–feutre à sec, etc.

représentation du problème ou, peut-être, n'est pas motivé. (c) Il peut aussi confirmer l'atteinte du but fixéou (d) douter de la réponse trouvée. Aucune catégorie n'est purement cognitive ou métacognitive. En théorie il est possible de distinguer conceptuellement la double nature des processus cognitifs, mais opérationnellement cette distinction est brouillée. Par exemple, la cognition est implicite dans toutes activités métacognitives et la métacognition peut faire partie d'une activité cognitive.

Les composantes fonctionnelles des graphismes

L'analyse des relations entre les séquences graphiques, le graphisme global et la trace verbale de la réflexion mène au développement de la grille des composantes fonctionnelles. Étudier la production des graphismes parallèlement aux activités cognitives accompagnées de l'utilisation de ces graphismes fait ressortir la fonction du graphisme. L'identification des patrons et des régularités dans l'échantillon de 12 protocoles permet de détecter quatre grands épisodes. Le découpage de ces épisodes est rattaché aux deux composantes essentielles d'une activité de résolution de problème : la compréhension de la tâche (construction d'une représentation) et l'élaboration de la solution (stratégie de résolution). Le moment de production du graphisme signale plus spécifiquement le découpage de ces épisodes. Le premier type d'épisode est généralement produit lors de la lecture sélective du problème, moment où le sujet analyse la situation présentée dans le texte et se construit une représentation du problème, d'où la terminologie : Graphie Contextuelle (GC). Le deuxième type d'épisode est généralement produit lors de l'application de procédures spécifiques à la mathématique : Graphie Mathématique (GM). Le troisième type d'épisode arrive au moment où une décision est prise quant au but à atteindre : Graphie de Solution (GS). Finalement, le quatrième type d'épisode est produit lorsqu'il y a révision du parcours cognitif : Graphie de Révision (GR).

L'observation de la production ou de l'utilisation du graphisme en parallèle avec l'activité cognitive permet d'élaborer le rôle de ce graphisme. Les composantes fonctionnelles identifiées sont présentées au Tableau 4. Ce même tableau avec des exemples tirés des protocoles se retrouve à l'Appendice C.

Des études systématiques ont été effectuées afin de vérifier la fidélité de la codification des protocoles verbaux (Ericsson & Simon, 1984; Gravois, 1991; Schael & Dionne, 1991). Les résultats de ces analyses indiquent un haut niveau de fidélité, notamment avec les problèmes bien définis. À partir de ces résultats, il a été possible de dégager les lignes directrices suivantes quant au choix des juges, du type de pratique, de la discussion selon le niveau d'inférence nécessaire entre les données observées et leur codification subséquente.

La fidélité inter-juges des grilles a donc été vérifiée par un panel de 3 juges, incluant l'expérimentatrice. Deux des juges ont été sélectionnées sur la base de leur expérience dans l'enseignement de la mathématique au secondaire et leur implication dans la recherche en éducation. Dans un premier entretien, les juges sont familiarisés avec les objectifs de la recherche et la conceptualisation de la grille sur la typologie des graphismes ainsi que celle sur les processus cognitifs identifiés dans les protocoles. Ensuite, les trois juges observent et codifient un protocole concourant; une période de discussion permet de comparer les codifications de chacun des juges et d'ajuster la

Tableau 4

Composantes fonctionnelles des graphismes telles qu'extraites des protocoles

Épisode	Code	Composante fonctionnelle
Graphie contextuelle	C–Com	**Aide à la compréhension** première du problème afin de visualiser, de traduire un système de symbolisation en un autre plus maniable ou de faire le tri dans l'information présentée. Sert à une organisation d'ensemble permettant la compréhension de la situation. Facilite le rappel des données.
	C–Ana	**Sert d'évidence** après avoir trouvé une réponse. Sert de support à l'analyse. Sert à vérifier la correspondance entre le graphisme et le modèle mathématique ou entre le graphisme et la solution. Se fait souvent en regardant ou en indiquant de la main ce qui est sur le graphisme.
	C–Rés	**Sert de stratégie de résolution** avant d'avoir trouvé une réponse, lorsque le sujet croit qu'il est dans la bonne voie. Facilite l'émergence de règles, de procédures, d'inférences, de prédictions en utilisant le graphisme.
	C–Réc	**Sert de stratégie de récupération** lorsque le sujet croit qu'il est dans la mauvaise voie.
	C–Aff	**Sert à se rassurer,** re–confirmer ou satisfaire un principe esthétique; se fait souvent en retraçant.
Graphie mathématique	M–Fac	**Facilite l'exécution ou le rappel** de procédures, de formules ou d'information.
	M–Évi	**Met en évidence** des relations en utilisant de la symétrie, l'esthétique, la concordance, la parcimonie, la simplicité. Sert à résumer ce qui est fait, corrigé ou compris. Se fait souvent en ajoutant un mot ou une mesure, ou encore en corrigeant une faute d'orthographe.
	M–Vér	**Sert à vérifier** ou corriger ce qui a été fait, parfois mentalement ou sur la calculatrice. Vérification locale.
Graphie de solution	S–But	**Met en évidence** un but/sous–but à atteindre
Graphie de révision	R–Cor	**Sert à vérifier la correspondance** entre – les graphismes, – les graphismes et les données, – les graphismes et la solution lorsque le problème a été résolu. Vérification globale.

définition, s'il y a désaccord. Enfin, les juges exécutent indépendamment (sur une période de trois jours) la codification de trois protocoles représentant les trois catégories de problèmes, ceci à l'aide de l'observation du vidéo. Cette première tâche de codification accomplie, les résultats sont recueillis et une discussion permet à chacun de comparer ses codes avec ceux de l'expérimentatrice.

Dans un deuxième entretien, la grille des composantes fonctionnelles est présentée et expliquée. Les composantes fonctionnelles découlent du processus cognitif et du type de graphisme à un moment donné du protocole. Le nombre de points d'ancrage nécessaires pour porter un jugement avec cette grille est important, par conséquent, la familiarisation aux deux premières grilles se devait d'être complétée avant d'aborder cette étape. Un protocole est codé pour ensuite servir de base à une discussion sur les composantes identifiées. Chaque juge procède indépendamment à la codification de trois protocoles tel que décrit à la première session. Une période de discussion permet ensuite de comparer les codes de chacun et de rajuster les définitions si nécessaire. Les résultats du niveau d'accord sont calculés en pourcentages qui indiquent le nombre de codes pour lesquels les 3 juges sont d'accord.

La typologie des graphismes : Le niveau d'accord entre les juges a été de 100% sur les catégories de typologie des graphismes (Tableau 2). Comme les catégories sont descriptives et que le juge note le graphisme produit sans avoir à l'interpréter, la typologie des graphismes est une grille peu complexe et fait appel à un minimum d'inférences.

Les processus cognitifs : Le niveau d'accord entre les juges, avant discussion, sur la grille des processus cognitifs (Tableau 3) s'échelonne de 0,76 à 0,97.

Les composantes fonctionnelles : Les premiers résultats montrent un niveau d'accord entre les juges de 0,62 à 0,83 pour la grille des composantes fonctionnelles (Tableau 4). Après discussion, les raisons des désaccords sont le plus souvent dues à des interprétations différentes des définitions. Parfois, un juge adopte une perspective plus macroscopique de la situation, laquelle est reflétée par une différence dans le découpage du protocole.

Suite à la vérification de la fidélité de la codification, les catégories attribuées à l'échantillon des 12 premiers protocoles sont revues et corrigées. De plus, la fidélité intra-expérimentatrice de la codification des 60 autres protocoles est vérifiée par la recodification des premiers protocoles codés. Cette recension aide à corriger le glissement dans la codification de l'expérimentatrice qui apparaît suite à l'incertitude première créée dans l'établissement de certaines catégories. Lorsqu'un glissement a été détecté, des mesures ont été prises pour l'éliminer. Le rétrovisionnement des comportements de résolution de problème à la suite de chaque protocole codifié vient aussi renforcer la validité des catégories. L'analyse des entretiens de rétrovisionnement aide à la vérification de la fidélité des mesures inter-sujets (triangulation des données) lorsque le sujet mentionne à plusieurs reprises la même idée ainsi qu'à la vérification de la stabilité des réponses verbales dans des interviews, à des moments plus ou moins éloignés dans le temps.

L'analyse des données

Le but de l'analyse est d'identifier la nature et la fonction du graphisme produit en solutionnant un problème de mathématique. Au chapitre suivant (chapitre 4), la typologie des graphismes sert à classifier le graphisme de chaque élève. La fréquence d'utilisation du type de graphisme produit est ensuite mis en relation avec la catégorie de problème, le genre, le niveau de scolarisation, les habiletés mathématiques du sujet et la réussite ou l'échec. Un deuxième regard sur les données regroupées selon la fréquence de solutions vient mettre à l'épreuve les premières interprétations. Dans un dernier temps, l'observation globale des 72 graphismes mène à l'extraction de quatre caractéristiques générales liées à la représentation initiale du problème.

Considérant que l'instrument principal développé par l'analyse des protocoles verbaux concourants favorise l'expression des processus de production plutôt que le produit de cette production, on ne pouvait s'arrêter à une classification. Il a fallu regarder les produits (les graphismes) comme un reflet des processus cognitifs afin de déterminer leur fonction. Cette partie de l'analyse, rapportée dans un chapitre subséquent (chapitre 5), inclut des comparaisons entre les répartitions de fréquences des composantes fonctionnelles en relation avec les paramètres fixés. Cette analyse aide à prioriser les différents rôles du graphisme. Le rapprochement des résultats sur la nature et le rôle du graphisme produit fait émerger les graphismes utiles et efficients pour le succès dans la résolution des problèmes.

La méthodologie adoptée permet d'identifier certains paramètres de la nature et de la fonction des graphismes dans un contexte de résolution de problème. L'analyse des protocoles verbaux et visuels permet de décrire les liens existants entre les habitudes et les habiletés graphiques et le succès dans la résolution de problèmes. Les protocoles de rétrospection (validés par le rétrovisionnement du comportement) et d'intervention éducative viennent supporter ou complémenter l'information recueillie dans les protocoles concourants.

Les limites de l'étude

La quantité de temps requis pour établir la banque de données (collecte et transcription), 20 heures au minimum par élève, a exigé de limiter le nombre de sujets dans chaque catégorie de problèmes. Cette limitation est acceptable dans les recherches de ce type. Il faut cependant lier les conclusions au choix des problèmes, sans essayer de généraliser aux domaines de la géométrie, de la distance ou de l'inclusion; ni même à d'autres types de problèmes que les problèmes écrits. Même si on devait spéculer que les résultats sont analogues à la résolution d'autres problèmes, ils ne seraient pas identiques.

L'ampleur du sujet traité et le volume de données collectées ne permet pas le rapport détaillé de toutes les observations. Il a fallu limiter les analyses aux observations directement liées aux graphismes produits. L'étude de l'acquisition et le développement des concepts et des structures mathématiques impliqués devra faire l'objet d'une étude complémentaire.

Les difficultés qu'engendre la verbalisation pour certains élèves ne sont pas complètement résolues, malgré le recours à des méthodes d'observation qui combinent l'analyse de l'activité concourante, la rétrospection immédiate de la démarche cognitive et l'enregistrement des actions non verbales. On constatera que certains protocoles sont relativement pauvres en information.

CHAPITRE 4

LES RÉSULTATS ET LES INTERPRÉTATIONS SUR LA NATURE DU GRAPHISME

L'adoption d'une conception large de la résolution de problèmes, non restreinte à un seul type de problème, non restreinte à un seul niveau ou habileté, rend possible l'extraction de caractéristiques générales sur la nature et la fonction des graphismes qui accompagnent cette résolution de problèmes. L'étude des relations entre le graphisme produit et le processus de résolution a permis de développer un instrument de codification essentiel à l'analyse. Cet instrument se distingue par trois composantes : le type de graphisme produit, les processus cognitifs mis en marche pendant la production et le rôle du graphisme dans la résolution du problème. La typologie des graphismes sert à classer, en temps réel, les graphismes produits. La grille des processus cognitifs sert à coder les protocoles verbaux concourants à la tâche de résolution. La grille des composantes fonctionnelles, parallèlement aux relations entre le processus cognitif, le temps de la production et le type de graphisme, sert à identifier les fonctions. Les protocoles et les graphismes codés forment un corpus de données considérable.

À partir de ce corpus de données, la trace des activités cognitives et graphiques pour chaque élève, en temps réel, est construite. Cette trace facilite la reconnaissance rapide des données codées pour un sujet particulier. Un exemple complet d'un protocole codé accompagné de sa trace cognitive et graphique est présenté à l'Appendice D. De cette partie fondamentale de l'analyse, il n'apparaît que fort peu d'éléments. Le rapport présenté dépasse les processus particuliers et les graphismes propres à chaque sujet, pour donner une vision des caractéristiques communes aux groupes sélectionnés. Les résultats du présent chapitre sont essentiellement issus de l'analyse sur la nature du graphisme. Deux étapes d'analyse sont effectuées : une classification des graphismes selon les paramètres fixés et une exploration des caractéristiques générales du graphisme. Une fois ces résultats présentés, il sera alors possible de rendre compte de la fonction de ce graphisme au chapitre 5.

La typologie des graphismes selon les paramètres fixés

Une première étape d'analyse consiste à construire des répartitions de fréquences des types de graphismes. Le Tableau 5 présente les fréquences d'utilisation du graphisme selon la catégorie de problème et le genre. La réussite des sujets est indiquée à la ligne Succès (une note entre parenthèses indique les réussites au deuxième essai).

Ce qui ressort particulièrement bien est l'étroite correspondance entre la figure géométrique et la résolution des problèmes de géométrie, de même que la correspondance entre le diagramme de Venn et les problèmes d'inclusion. Conformes aux prévisions didactiques, ces types de graphisme correspondent aux types de problème. Quant au vecteur dirigé, non-dirigé ou gestuel, il se retrouve de façon plus marquée dans les problèmes de distance (34 fois) et aussi dans les solutions des problèmes de géométrie (7 fois).

Il ressort également de ce tableau que le type de graphisme le plus souvent utilisé est la graphie de calculs (138 et 57 fois) et de chiffres (110 fois) pour un total de 305

Tableau 5

Fréquence d'utilisation du graphisme mettant en relation la typologie des graphismes selon la catégorie de problème et le genre

Typologie	Distance		Géométrie		Inclusion		TOTAL
	Garçon (n=14)	Fille (n=10)	Garçon (n=12)	Fille (n=12)	Garçon (n=12)	Fille (n=12)	
Carré	–	–	27	12	–	–	**39**
Rectangle	–	–	45	38	–	–	**83**
Polyèdre en perspective	–	–	34	16	–	–	**50**
Polyèdre en développement	–	–	3	–	–	–	**3**
Tableau Verbal	–	26	10	17	7	18	**78**
Tableau Quantitatif	11	3	15	27	9	–	**65**
Calcul Continu	11	29	31	23	13	31	**138**
Calcul Ponctuel	17	5	10	4	18	3	**57**
Vecteur	8	25	5	2	–	–	**40**
Vecteur Gestuel	–	1	–	–	–	–	**1**
Diagramme Non-disjoint	–	–	–	–	2	5	**7**
Diagramme Disjoint	–	–	–	–	2	4	**6**
Objet	4	6	–	–	–	–	**10**
Formule	–	–	–	1	–	–	**1**
Rature	1	6	7	–	1	1	**16**
Proposition	2	7	20	4	3	10	**46**
Chiffre	30	12	50	6	3	9	**110**
Symbole	3	11	9	3	4	6	**36**
TOTAL	**86**	**131**	**266**	**153**	**62**	**87**	
SUCCÈS	**4(3)**	**7(3)**	**9(5)**	**2(1)**	**6(2)**	**6(4)**	

Note. n = nombre de solutions. Nombre de sujets ayant réussi le deuxième problème, entre parenthèses.

fois. Ce qui n'est pas étonnant, attendu que la résolution de problèmes de mathématique entraîne l'application de procédures mathématiques. Il sera possible de voir au deuxième niveau de l'analyse comment ce processus peut, dans certains cas inhiber la première étape de la résolution, celle de la compréhension du problème.

Les figures géométriques (175 fois au total) et les tableaux (143 fois) prennent la deuxième place en importance d'utilisation. Ces observations rejoignent ce qui fait souvent partie du répertoire didactique de l'enseignant : construire une figure géométrique en solutionnant des problèmes de géométrie ou écrire les données de façon méthodique en solutionnant un problème écrit en mathématique. Le déroulement de l'analyse a fait voir à quoi sert une graphie d'information sous ces formes particulières (tableau, figure géométrique) et si ce type de graphisme mène à une solution correcte. De même l'analyse permettra de s'interroger sur la rareté du diagramme de Venn (7 diagrammes non-disjoints et 6 diagrammes disjoints).

En examinant la relation entre le type de graphisme et le genre qui apparaît au Tableau 5, les filles semblent utiliser plus le graphisme dans les solutions des problèmes de distance (131 occurrences pour 86 occurrences chez les garçons), compte tenu du plus grand nombre de garçons. De plus, le succès dans cette catégorie est plus évident chez les filles (7 filles et 4 garçons). Les garçons utilisent plus le graphisme dans les problèmes de géométrie (266 occurrences pour 153 occurrences chez les filles). Il y a clairement plus de succès chez les garçons dans la résolution des problèmes de géométrie (9 garçons et 2 filles).

En ce qui concerne l'ordre d'essai de résolution des problèmes (ligne Succès), 18 des 34 solutions correctes étaient la résolution d'un deuxième problème dans le même domaine pour ces élèves. Huit de ces 18 élèves avaient échoué au premier problème, ce qui est un indice révélateur de l'effet produit par le graphique présenté par l'expérimentatrice. Dans ces situations, l'élève ayant échoué le premier problème, fait face, à peu près au même type d'intervention pédagogique. En regardant de plus près les graphismes de ces huit élèves, le problème solutionné est dans tous ces cas le problème considéré moins complexe dans le domaine (moins d'opérations nécessaires). Il est plus facile d'élucider ces situations lorsqu'elles sont mises en relation avec le domaine : quatre situations en inclusion, trois en distance et une en géométrie. Quatre de ces réussites sont des solutions de problèmes d'inclusion où le diagramme de Venn est utilisé dans la première étape de la résolution du problème, celle où l'élève lit sélectivement le problème. Des extraits des protocoles verbaux et visuels (rapportés dans la deuxième section des résultats) laissent entendre que c'est vraiment la présentation du diagramme par l'expérimentatrice qui a permis de solutionner un deuxième problème d'inclusion, ici, le Problème I1. Trois autres de ces huit réussites sont des solutions d'un problème de distance (D1); cependant le système cartésien présenté dans l'intervention pédagogique ne se retrouve dans aucun des graphismes; seul un vecteur primitif est retrouvé comme représentation initiale dans une de ces trois solutions. Le dernier cas de réussite au deuxième essai est une solution d'un problème de géométrie (G1). L'expérience rencontrée au premier essai pour cet élève (surface et périmètre d'une chambre) lui cause de nombreuses difficultés : formules géométriques, mètres de longueur, mètres carrés, mètres cubes, périmètre, surface, volume, etc. Les interventions pédagogiques et le rétrovisionnement lui redonnent des balises pour attaquer le deuxième problème. Les effets qu'apporte l'encouragement à produire une figure géométrique ne peuvent être isolés dans ce protocole.

Une deuxième perspective est adoptée pour l'observation des données, la présence ou l'absence du graphisme dans la solution. Un regard sur les fréquences de solutions où le graphisme apparaît selon les catégories de problème et le genre (Tableau 6) montre que les résultats vont dans le même sens qu'au Tableau 5. Cependant, il est possible en plus d'identifier le nombre d'élèves qui ont utilisé le graphisme produit. Six garçons sur six dessinent la figure géométrique correspondante au problème à résoudre (6 solutions avec un carré, 6 solutions avec un rectangle). Les filles sont moins capables de créer les formes représentant les propriétés fondamentales des figures (3 solutions avec un carré, 7 solutions avec un rectangle) ce qui inhibe leur résolution des problèmes de géométrie. Pour les problèmes de distance, 8 des 10 solutions produites par des filles incluent l'utilisation de vecteurs. Chez les garçons, il y a seulement 4 solutions sur 14 où le vecteur apparaît. Il ressort aussi beaucoup plus clairement que le diagramme de Venn, est peu utilisé : 7 solutions dans l'ensemble des 24 solutions analysées. Un autre détail apparaît : les ratures ne sont utilisées que dans 15% des solutions ce qui est surprenant si on considère que ce sont des brouillons.

Un troisième regroupement des fréquences d'utilisation du graphisme met en rapport la typologie des graphismes selon les niveaux et l'habileté des élèves en tenant compte du succès à trouver une solution. Ces résultats (Tableau 7) présentent une distinction visible entre le groupe faible de 8e année (36 fois) et les autres groupes (plus

Tableau 6

Fréquence de solutions où le graphisme apparaît mettant en relation la typologie des graphismes selon la catégorie de problème et le genre

Typologie	Distance		Géométrie		Inclusion		TOTAL %
	Garçon (n=14)	Fille (n=10)	Garçon (n=12)	Fille (n=12)	Garçon (n=12)	Fille (n=12)	
Carré	–	–	6	3	–	–	**13**
Rectangle	–	–	6	7	–	–	**18**
Polyèdre en perspective	–	–	4	1	–	–	**7**
Polyèdre en développement	–	–	2	–	–	–	**3**
Tableau Verbal	–	5	2	5	4	9	**35**
Tableau Quantitatif	7	1	3	2	5	–	**25**
Calcul Continu	4	6	8	5	7	10	**56**
Calcul Ponctuel	4	1	2	1	5	1	**19**
Vecteur	4	7	3	1	–	–	**21**
Vecteur Gestuel	–	1	–	–	–	–	**1**
Diagramme Non-disjoint	–	–	–	–	2	2	**6**
Diagramme Disjoint	–	–	–	–	1	2	**4**
Objet	2	2	–	–	–	–	**6**
Formule	–	–	–	1	–	–	**1**
Rature	1	5	3	–	1	1	**15**
Proposition	2	3	5	3	3	6	**31**
Chiffre	11	6	10	4	3	6	**56**
Symbole	3	5	3	2	2	4	**26**
TOTAL	**38**	**42**	**57**	**35**	**33**	**41**	
SUCCÈS	**4(3)**	**7(3)**	**9(5)**	**2(1)**	**6(2)**	**6(4)**	

Note. n = nombre de solutions. Nombre de sujets ayant réussi le deuxième problème, entre parenthèses.

Tableau 7

Fréquence d'utilisation du graphisme mettant en relation la typologie des graphismes selon le niveau et les habiletés

Typologie	8e année			10e année		
	Faible	Moyen	Fort	Faible	Moyen	Fort
Carré	–	8	7	13	8	3
Rectangle	–	26	12	9	29	7
Polyèdre en Perspective	–	15	7	11	1	16
Polyèdre en Développement	–	2	–	1	–	–
Tableau Verbal	2	–	22	11	18	25
Tableau Quantitatif	3	13	7	12	3	27
Calcul Continu	6	15	44	16	27	30
Calcul Ponctuel	3	14	11	7	12	10
Vecteur	5	6	8	3	4	14
Vecteur Gestuel	–	–	–	–	1	–
Diagramme Non-disjoint	1	–	–	4	–	2
Diagramme Disjoint	1	1	–	–	3	1
Objet	3	–	–	–	3	4
Formule	–	–	–	–	–	1
Rature	–	2	2	2	5	5
Proposition/Mot	1	3	11	11	6	14
Chiffre	8	27	15	30	20	10
Symbole	3	1	14	4	5	9
TOTAL	**36**	**133**	**160**	**134**	**145**	**178**
SUCCÈS	**1**	**5**	**8**	**5**	**5**	**10**

de 133 fois) sur l'utilisation de graphismes. L'échec constaté par l'ensemble de ce groupe, une seule solution correcte sur 12, explique, du moins partiellement, le peu d'utilisation du graphisme. Ces élèves ne parviennent pas à explorer des actions graphiques susceptibles de leur aider à dépasser les blocages rencontrés. L'enchaînement des résultats ultérieurs, avec extraits des protocoles à l'appui, apporte plus d'éclairage sur ce point.

Il faut aussi noter dans le Tableau 7 l'utilisation plus intense par les élèves de 10e année des tableaux verbal et quantitatif (96 fois par rapport à 47 fois en 8e année), de même qu'une plus grande utilisation de mots ou de propositions (31 fois comparativement à 15 en 8e année), et finalement une plus grande production de diagrammes (10 fois en 10e année et 3 fois en 8e année). Ces résultats en relation avec le succès suggèrent que ces types de graphismes (tableau, mot, diagramme) seraient le point de départ vers un but à atteindre (20 solutions correctes, 14 solutions en 8e année); l'utilisation du graphisme est efficace, c'est pourquoi ce graphisme évolue en importance pour la résolution. Les élèves de 10e année seraient plus tentés d'utiliser le diagramme de Venn sans pour autant mieux réussir à trouver une solution cohérente (6 succès en 8e année et 6 succès en 10e année pour les problèmes d'inclusion). Un aperçu des fréquences de solutions où le graphisme apparaît est mis en relation avec le niveau et l'habileté. Ces résultats ne révèlent aucune tendance nouvelle (Appendice E, Tableau 7a).

Ce premier coup d'oeil sur les graphismes produits montrent que ces derniers se caractérisent non seulement par les nombreux calculs et tableaux, mais aussi par la production de graphismes particuliers à chaque domaine. En effet, pour solutionner les problèmes de géométrie, la figure géométrique est beaucoup utilisée; dans les solutions des problèmes de distance l'emploi de vecteurs est commun sans pour autant être sophistiqué; le diagramme de Venn est unique aux solutions des problèmes d'inclusion mais peu utilisé. En regardant l'effet de la présentation d'un graphique par l'expérimentatrice, le diagramme de Venn facilite la résolution d'un deuxième problème à condition que ce dernier problème soit plus facile dans le domaine de l'inclusion. Cependant l'introduction d'un système cartésien pour représenter la distance en fonction du temps n'a été d'aucune utilité dans la résolution d'un deuxième problème de même type. Une distinction apparaît pour le genre car les garçons se distinguent par leur succès en géométrie et la construction de figures géométriques, tandis que les filles se distinguent par leur succès en distance et la construction de tableaux et vecteurs, même primitifs. Quant aux effets qu'apporte le niveau d'étude, compte tenu que les problèmes présentés ne sont pas faciles pour la majorité des sujets, la tâche a cependant dépassé le niveau de préparation pour cinq des six élèves faibles de 8e année. De cette disparité entre les habiletés apparaissent des différences entre les niveaux de scolarisation. Dans une deuxième analyse, l'application de la typologie des graphismes mène à l'étude de ce qui caractérise l'organisation des éléments identifiés en rapport avec les différentes étapes de la résolution des problèmes.

L'exploration de la représentation initiale du problème

L'analyse rapportée ici est essentiellement en relation avec la nature des 72 graphismes recueillis. L'observation des graphismes est guidée par quatre grands épisodes identifiés dans le développement de l'instrument de codification. Ces épisodes coïncident avec les activités de résolution de problème : construction d'une représentation, stratégie de résolution, atteinte du but final et révision. La centration sur la représentation initiale (Graphie Contextuelle) s'explique suite à une première séance d'observation où la nature des autres graphies (Graphie Mathématique - GM, Graphie de Solution - GS et Graphie de Révision - GR) avait présenté peu de variations quant à leur nature respective. Selon les attentes, la GM aurait dû présenter des différences au niveau de la scolarisation (équation algébrique, algorithme sophistiqué, etc, pour la 10e année) et de la variable genre (plus de succès chez les garçons de 10e année). Ce n'est pas le cas, la nature de la GM ne contient que des calculs et des chiffres pour tous les sujets. Toutefois, son aspect fonctionnel sera traité au chapitre suivant. Il est peu rapporté sur la nature de la Graphie de Solution puisqu'elle consiste à souligner, encercler ou retracer un élément des graphies précédentes. Ce 3e épisode, est directement liée à l'atteinte d'un but. C'est l'utilisation et la fonction de cette méthode graphique qui doit attirer l'intérêt de l'enseignant. La Graphie de Révision, quant à elle, est pratiquement inexistante puisque le processus de révision est lui-même exceptionnellement appliqué.

Une observation centrée sur le premier épisode (la Graphie Contextuelle) permet de tracer ce que l'élève considère fondamental à la lecture d'un problème écrit en mathématique. Une graphie est produite lors de la lecture sélective dans 57 des 72 solutions analysées. Ce graphisme se présente sous différentes formes et se complexifie avec l'application de procédures. Il est facile d'isoler les autres graphies du reste du brouillon, surtout avec le support de la verbalisation. Le moment de la représentation initiale du problème apporte donc l'information constitutive de ce que l'élève perçoit en lisant un problème écrit en mathématique, la Graphie Contextuelle (GC). Partant de là, les 72 solutions sont regroupées selon la nature de ces Graphies Contextuelles produites. L'élaboration de quatre critères (caractéristiques dominantes) est explorée en relation avec la représentation contextuelle du problème.

Le premier critère rejoint les élèves qui ne produisent pas de représentation du problème (Aucune Graphie Contextuelle) pour résoudre le problème. Les définitions des deuxième et troisième critères s'inspirent des travaux de Wickelgren (1974) où il décrit deux formes de représentation des problèmes écrits en mathématique. La forme "symbolique" est une expression de l'information recueillie par des mots, des lettres, des nombres, des symboles mathématiques ou des notations logiques servant surtout à garder un relevé de ce qui peut être utile à la compréhension. La forme "diagrammatique" est une expression de l'information recueillie par des ensembles de points, de lignes, d'angles, de figures, de vecteurs, etc, servant à faire comprendre un phénomène. Suivant ces définitions, le deuxième critère réfère alors aux élèves qui ont construit une Graphie Contextuelle Symbolique; le troisième critère, réfère aux élèves qui ont construit une Graphie Contextuelle Diagrammatique; le quatrième critère rejoint ceux qui ont combiné le symbolique et le diagrammatique dans la production d'une Graphie Contextuelle. Il faudrait bien noter que les termes "symboliques" et "diagrammatiques" sont utilisés dans une perspective bien précise qui ne fait pas l'unanimité de tous les chercheurs.

Dans un premier temps, les caractéristiques différenciées dans l'observation du graphisme sont mises en évidence selon les trois catégories de problèmes à l'étude, le nombre de solutions (cohérente-incohérente) retrouvé dans chaque catégorie de problème est au Tableau 8. Une première indication en relation avec le succès à trouver une solution se dégage : l'utilisation d'une Graphie Contextuelle symbolique et diagrammatique (GCS&D) semble mener à un plus haut niveau de succès (7 sur 10). Par contre, lorsque la Graphie Contextuelle est symbolique (GCS), trouver une solution cohérente avec la situation-problème présentée semble plus difficile (7 sur 24). Entre ces deux extrêmes, le graphisme qui ne contient Aucune Graphie Contextuelle (AGC) et la Graphie Contextuelle Diagrammatique (GCD) marquent une position médiane quant au succès dans la résolution du problème, c'est-à-dire, qu'approximativement la moitié des sujets réussissent à trouver une solution au problème. Ces résultats indiquent également qu'une Graphie Contextuelle Symbolique est souvent utilisée dans les problèmes d'inclusion (14 solutions) et qu'une Graphie Contextuelle Diagrammatique est souvent utilisée dans les solutions des problèmes de géométrie (13 solutions).

Dans un deuxième temps, les critères différenciés sont mis en évidence selon le niveau et l'habileté mathématique des sujets à l'étude et le succès dans la résolution du problème. Le nombre de solutions constatées dans chaque catégorie est présenté au Tableau 9. Les élèves de 8e année réussissent moins bien que ceux de 10e année et la somme de toutes les fréquences entre parenthèses indique 14 et 20 respectivement pour chaque groupe de 36 solutions. Les niveaux d'habiletés sont marqués par un succès progressif de faible à fort, sauf pour ceux qui utilisent une Graphie Contextuelle Symbolique (GCS). Ici encore, l'écart entre les faibles de 8e année et les autres groupes

Tableau 8

Fréquence de solutions selon la catégorie de problème et la Graphie Contextuelle produite

		Catégorie de problème		
	Graphie Contextuelle	Distance	Géométrie	Inclusion
AGC	Aucune graphie contextuelle	5(3)	6(2)	4(3)
GCS	Graphie contextuelle symbolique	8(2)	2(0)	14(5)
GCD	Graphie contextuelle diagrammatique	9(4)	13(9)	1(0)
GCS&D	Graphie contextuelle symbolique et diagrammatique	2(2)	3(1)	5(4)

Note. Le nombre de sujets dans le groupe ayant réussi à trouver une solution cohérente est mis entre parenthèses.

Tableau 9

Fréquence des Graphies Contextuelles extraites des 72 solutions selon le niveau et l'habileté des élèves

	Graphie Contextuelle			
	AGC	GCS	GCD	GCS&D
8e année				
Faible	4(0)	4(0)	3(0)	1(1)
Moyen	3(1)	4(2)	5(2)	——
Fort	3(3)	4(2)	3(2)	2(1)
TOTAL	10	12	11	3
10e année				
Faible	——	7(2)	3(2)	2(1)
Moyen	2(1)	4(1)	4(1)	2(2)
Fort	3(3)	1(0)	5(5)	3(2)
TOTAL	5	12	12	7

Note. Nombre de solutions répondant au critère suivi du nombre de solutions correctes, entre parenthèses.
AGC = Aucune graphie contextuelle;
GCS = Graphie contextuelle symbolique;
GCD = Graphie contextuelle diagrammatique;
GCS&D = Graphie contextuelle symbolique et diagrammatique.

peut être observé (1 succès dans 12 solutions). Il n'y a cependant aucune distinction particulière à la graphie contextuelle produite.

Cet aperçu général de la graphie contextuelle mène à l'examen attentif et systématique des comportements de résolution des problèmes qui permettent de mieux décrire les résultats et en dégager la signification. La description de ces résultats procède dans l'ordre des quatre caractéristiques identifiées, suivant le contexte des catégories de problème : distance, géométrie et inclusion. Les principaux comportements écrits ou verbaux correspondant aux interprétations sont relevés, d'abord pour ceux qui réussissent et ensuite pour ceux qui échouent. Sur les 36 sujets de cette recherche, quelques protocoles sont choisis comme exemples pour la richesse et la clarté des comportements. Cependant, les réactions des sujets non cités pour alléger la lecture peuvent être interprétées selon les hypothèses avancées. Chaque section se termine par une synopsis des résultats reliés au niveau, à l'habileté, au genre et au moment de la résolution dans la séquence expérimentale (1er essai ou 2e essai). Des extraits de la verbalisation concourante, de la rétrospection immédiate, de même que des représentations du graphisme valident les interprétations et les inférences. Chaque extrait est suivi de la source, par exemple: (#37, D2, 342-370) où l'identification du sujet, le problème à résoudre et les lignes du protocole sont notés. Pour un rappel des problèmes à résoudre voir le Tableau 1 du chapitre 3.

La nature du graphisme produit dans une graphie uniquement mathématique

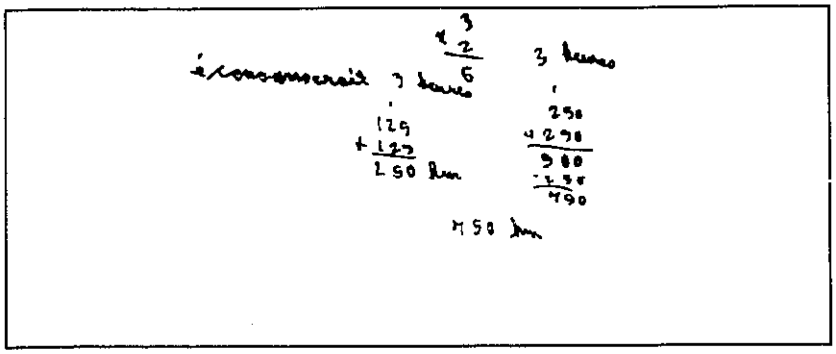
Huit des 15 élèves qui ne produisent pas de Graphie Contextuelle (Tableau 8, AGC), réussissent à solutionner les problèmes présentés. Pour 7 sujets, l'"Aucune

Graphie Contextuelle" ne mène nulle part. Le type de graphisme produit par tous ces élèves se résume à quelques chiffres, un mot, une quantité ou des calculs. Les Figures 2 et 3 représentent quelques graphismes "types". Les graphismes de la Figure 2 sont les produits de solutions correctes et les graphismes de la Figure 3 ont mené à des solutions fausses. Cependant, il est à noter dans la Figure 3 qu'il n'y a pas de mots ou de quantités parmi les chiffres, sauf dans la Graphie de Solution où le but final est atteint ("22 heures" est la réponse trouvée par le sujet 12, D2). Ces indications appuyées par les protocoles et les caractéristiques de la tâche indiqueraient une relation entre la situation présentée et le processus de résolution pour ceux qui réussissent. Ceux qui ne réussissent pas procèdent par essai et erreur et il n'y a rien dans leur graphisme qui montre de la continuité dans l'action ou l'atteinte de sous-buts.

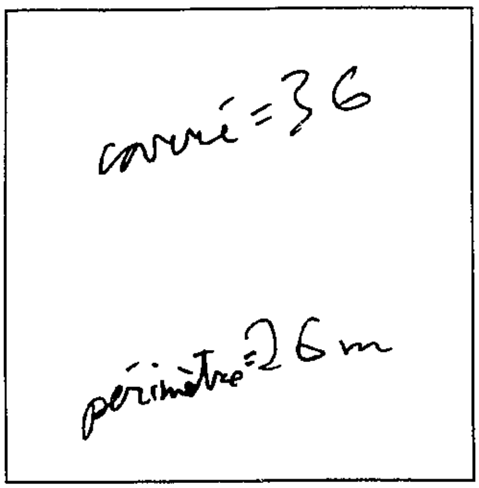
Les résultats sont maintenant rapportés et inteprétés selon chaque domaine de la mathématique présenté, distance, géométrie et inclusion.

Distance Les sujets 3, 13 et 4 en solutionnant le problème de distance 1 (D1), ne construisent pas de Graphie Contextuelle et trouvent une solution cohérente avec la situation présentée. Il n'y a aucun indice dans les protocoles verbaux concourants qui permettent de reconstruire leur représentation première de la situation-problème ou de re-situer le moment de la compréhension. Dans le rétrovisionnement, ces sujets ont oublié leur réflexion mentale ou ne réfèrent qu'à leur Graphie Mathématique en tant que source de visualisation et de compréhension :

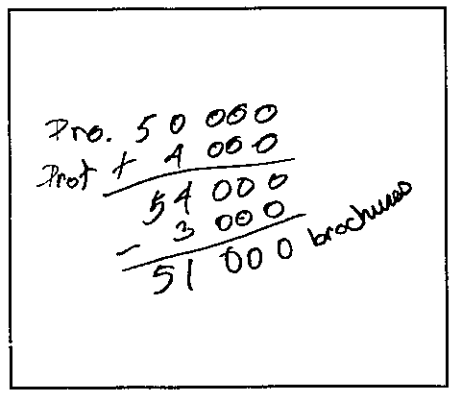
E: À quoi tu pensais là. S: j'ai oublié
E: [...] qu'est-ce que tu faisais [arrêt du vidéo]
S: j'me souviens plus (#3, D1, 33-41).



#4, D1

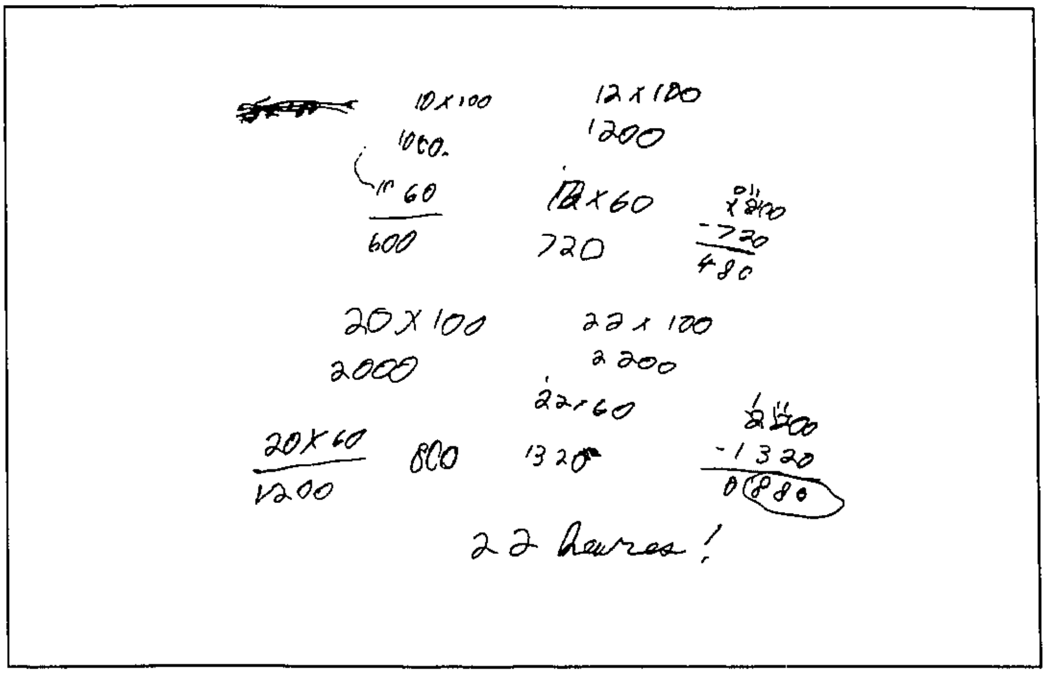


#15, G1

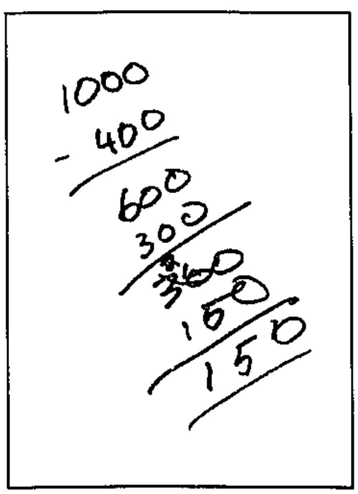


#32, I1

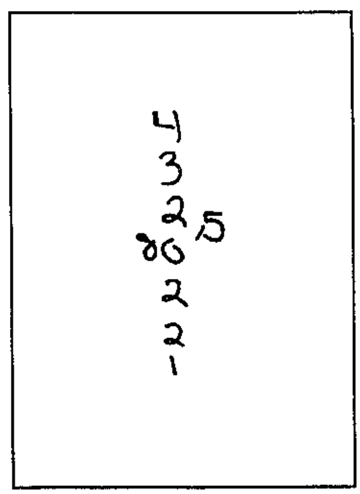
Figure 2. **Graphismes d'élèves ayant réussi à trouver une solution correcte sans produire de Graphie Contextuelle (AGC).**



#12, D2



#7, I1



#39, G2

Figure 3. **Graphismes d'élèves n'ayant pas réussi à trouver une solution correcte sans produire de Graphie Contextuelle (AGC).**

E: Qu'est-ce que tu voyais?
S: Ben là j'ai dit, ça prend, ben j'ai dit ça fait 2 fois, plus vite, y voulait savoir combien de temps.
E: Est-ce que tu voyais les distances? [...]
S: [...] juste des chiffres. Je voyais pas le, euh, je voyais pas un dessin là (#13, D1, 532-541).

S: Okay j'ai dit 125, puis là j'ai pris la, vitesse plus vite ça donne 250.
E: Oui, hm..
S: ..puis 250 dans, dans celle-là 3..
E: ..hm, hm..
S: ..puis là bien j'ai pensé bien 125, dans 750, 125 fois 6, ça donne 750 (#3, D1, 64-71).

L'examen de la verbalisation et du graphisme des 2 élèves qui ne réussissent pas à trouver une solution correcte, révèle que pour résoudre le Problème de distance 2 (D2), ces élèves procèdent par essai et erreur (Figure 3, #12) et consacrent peu de temps à la compréhension de la situation-problème présentée. Ils veulent que les chiffres coïncident, appliquer des algorithmes ou trouver la bonne réponse.

S: Ok c'est là où j'ai réalisé, comme je l'ai peut-être pas dit à haute voix parce que ça c'est fait vite, j'ai réalisé que, fallait que euh, si je multipliais le, le nombre de kilomètres à l'heure, fois un assez gros nombre que un prendrait assez l'avance sur l'autre (#12, D2, 47-52).

En consacrant peu de temps à la compréhension de la situation-problème, ces élèves risquent de mal interpréter la situation, comme le sujet 12 qui résout le problème en faisant voyager les trains en parallèle et non en direction opposée:

S: C'est là, direction opposée je pensais qu'ils allaient parallèles et un fallait qui prennent l'avance sur l'autre [rires] (#12, D2, 67-70).

De plus cet élève a de la difficulté avec la réflexion parlée:

S: ..on dirait que je suis un peu préoccupé par quelque chose d'autre. [rires] C'est juste que je lis, je le lis puis ça rentre pas comme. Parce que

c'est, quand je lis à haute voix je suis pas capable de concentrer. Comme..
(#12, D2, 212-216).

En somme, la verbalisation des sujets, solutionnant des problèmes de distance, montre leur empressement à passer au formalisme mathématique. Des indices du graphisme (surtout des mots) permettent de croire à l'existence d'un plan d'action pour ceux qui réussissent.

Géométrie Le sujet 15 réussit les deux problèmes de géométrie sans construire de Graphie Contextuelle. Le graphisme produit reflète le formalisme mathématique: "4 x 3 = 12 plancher + 12 plafond" "périmètre = 26 m" (Figure 2, #15, G1); cependant l'examen de la rétrospection immédiate permet d'avancer que cet élève a une Graphie Contextuelle implicite:

E: ..t'as parlé d'une salle à un moment donné.
S: Je lisais le problème là, là, là je comme, je voyais comme dans ma tête comme tu sais qu'il y a deux portes, une fenêtre puis
E: Ah tu voyais un appartement,
S: une salle carrée quelque chose de même.
E: Une salle carrée,
S: bien rectangle.
E: Avec quelque chose dedans ou vide?
S: Non vide (#15, G2, 92-101).

E: Ça ne t'as jamais tenté de faire une figure géométrique?
S: Pas vraiment non.
E: Non?.
S: Comme je voyais assez facilement qu'est-ce que ç'avait l'air (#15, G2, 158-163).

Les sujets 34 et 39 ne réussissent pas les deux problèmes de géométrie qui leur sont présentés. Dans leurs graphismes ils se limitent à poser craintivement quelques chiffres dans un coin de la feuille (Figure 3, #39). Ils n'ont pas les connaissances requises pour solutionner le problème ou des concepts erronés inhibent la résolution du problème. Dans les protocoles apparaissent les difficultés avec "périmètre et surface" :

> S: la surface du carré, c'est déjà vu, ça va donner toute la surface 24 (#34, D1, 100-101).

De même que la difficulté à relier "aire du rectangle avec aire du carré":

> S: Mais si.. la long.. si on t'a déjà donné la longueur c'est 4, mais je dois trouver la largeur de la.. la largeur ça doit être 6.. fois 4 euh..
> E: ..pourquoi 6
> S: 6 fois 4 c'est égale à 24, puis ça va donner la même euh..
> E: oui mais c'est pas 24 l'aire, la surface c'est 36.
> S: okay. ... oh le périmètre est.. (#34, D1, 194-211).
>
> S: Comme, je m'en allais faire comme un rectangle, cube là comme (#39, D1, 662-663).
>
> S: Bien peut-être que ... Je sais pas là là ... Bien, c'est, c'est la même qu'un, si le carré c'est la même affaire qu'un rectangle (#39, D1, 458-465).

Ces deux sujets ne réussissent pas à surmonter ces obstacles. De plus le sujet 34 a des difficultés de lecture évidentes.

En résumé, des indices du protocole verbal et du graphisme indiquent une Graphie Contextuelle implicite pour l'élève qui réussit. Pour ce sujet fort de 10e année, le graphisme ne révèle que l'enregistrement des buts atteints (Graphie de Solution, Figure 2, #15). Par contre il n'y a aucune correspondance entre ces protocoles et les protocoles des deux élèves faibles de 8e année où les éléments du graphisme accentuent leur isolement. Leur verbalisation apporte des témoignages supplémentaires au manque de liaison entre le graphisme et la situation physique, le graphisme et les connaissances antérieures, le graphisme et les habiletés de résolution de problème, etc. Sans vouloir tirer de conclusion prématurée, il ressort deux cas extrêmes de ces résolutions de problème de géométrie où aucune figure géométrique n'est construite: l'expert, un élève fort de 10e année et celui qui n'a pas les connaissances suffisantes pour solutionner le problème, deux élèves faibles de 8e année.

Inclusion Les sujets 36, 21 et 32 en solutionnant avec succès un des deux problèmes d'inclusion ne voient pas la nécessité ou ne savent pas comment représenter ce qu'ils comprennent. Le sujet 32, déclare spontanément avoir pensé à des ensembles (c'est le deuxième problème pour cette élève) mais elle le solutionne sans faire de dessin (Figure 2, #32). Dans la rétrospection, ces élèves expliquent le dilemme auquel ils font face :

> E: As-tu pensé à l'autre problème?
> S: ah oui
> E: est-ce que tu voyais le diagramme que j'ai fait?
> S: oui, celui-là il était facile, ben il était quasiment en ordre (#32, I1, 187-191).
>
> E: Ah! Est-ce que tu voyais mais tu voyais encore, là tu voulais faire un dessin, puis ça marchait pas.
> S: Oui ça marchait pas là trop
> E: Qu'est-ce que tu voulais faire?
> S: J'étais pour, comme l'affaire que je voulais faire, j'avais pensé à faire un dessin plein de personnes là (#21, I1, 276-282).
>
> E: [face au diagramme de Venn présenté] Ça ici est-ce que ça t'a aidé?
> S: Pour euh l'expl.. si j'aurais faite ça avant, je veux dire ça, [bégaiement et hésitation] moi je pensais pas à faire des choses comme ça moi (#21, I1, 326-329).

Le sujet 7 est le seul dans la catégorie inclusion à ne pas trouver une solution cohérente. Comprendre n'est pas important comparativement à trouver la bonne réponse, faire des calculs est presque une obsession (Figure 3, #7):

> E: Là est-ce que tu pensais au problème qu'on avait fait avant où ça s'entrecroisait, parce que tu as recommencé à lire 400, 300 puis 150. Regardes-bien.
> S: Ah c'est quand j'ai fait ça j'ai dit bien ici, j'ai pris 100 puis là j'ai dit bien m'a soustraire, m'a soustraire le 150 juste de même, ça donné 450, puis là j'ai dit bien non je pense pas que c'est ça (#7, I2, 501-509).

> S: Okay puis là bien j'ai, j'ai dit bien, le 300 je vais juste l'oublier pour le moment m'a soustraire le 150, je, je le comprenais pas trop trop trop (#7, I2, 538-541).

Les graphismes produits lors de la résolution des problèmes d'inclusion ne reflètent pas la représentation de la situation-problème, rien ne différencie les solutions justes de la solution fausse. Avant de conclure, il est important de signaler que pour le sujet 15, en géométrie, comme pour les sujets 36, 21 et 32 en inclusion, la Graphie Mathématique produite n'est pas ce qui est important cognitivement.

> E: mais dans le calcul ça semblait t'intéresser un petit peu moins, c'était juste question de calcul, ici c'est pareil tu avais bien compris mais le calcul c'était ça me semble moins important?
> S: C'est comme, c'est juste la dernière étape, comme c'est,
> E: oui,
> S: comme c'est, c'est pas le gros du travail, comme je sais pas (#15, G2, 190-198).

En résumé, pour les élèves solutionnant des problèmes de distance, de géométrie et d'inclusion, qui n'écrivent rien de leur vision première à la lecture d'un problème écrit (AGC), la compréhension de la situation-problème ne peut se dégager des caractéristiques du graphisme lui-même. C'est dans la mesure où la rétrospection immédiate permet de retracer une Graphie Contextuelle implicite ou un plan d'action que la réussite peut être liée à une congruence entre leur visualisation de la situation et celle présentée. Un relevé des graphismes où aucune GC n'est produite est présenté au Tableau 10 en relation avec le niveau, l'habileté, le genre et le moment de la résolution dans la séquence

Tableau 10

Solutions où aucune Graphie Contextuelle n'est produite selon le niveau, les habiletés et le genre

Niveau & habileté	1er essai		2e essai		TOTAL
	Garçon	Fille	Garçon	Fille	
8e année					
Fort	D1, I1,			I1	**3(3)**
Moyen	D2*		D1, I2*		**3(1)**
Faible		G1*,G2*		G1*,G2*	**4(0)**
10e année					
Fort	G2		G1, I1		**3(3)**
Moyen	D2*	D1			**2(1)**
Faible					
TOTAL	**5(3)**	**3(1)**	**4(3)**	**3(1)**	**15(8)**

Note. D1, D2 = distance; G1, G2 = géométrie; I1, I2 = inclusion; * = problème échoué. Nombre entre parenthèses indiquent les solutions réussies.

expérimentale. Les solutions identifiées par les codes D1, D2, G1, G2, I1 et I2 permettent de retracer le domaine mathématique de chaque problème.

L'effet attendu par le niveau de scolarité est négligeable, quatre réussites en 8e année et quatre réussites en 10e année; cependant cette forme de représentation semble plus populaire au niveau de la 8e année, ce qui s'explique par les quatre solutions de géométrie trop difficiles pour les deux élèves faibles de 8e année. Ce groupe mis à part, il n'y a aucun élève d'habileté faible qui utilise cette forme de représentation. En ce qui a trait à l'effet apporté par la variable genre, les garçons qui n'utilisent pas de graphie contextuelle ont plus de succès que les filles (6 solutions correctes pour 2 solutions correctes respectivement), et ce dans les trois domaines. Considérant la concentration du succès chez les élèves d'habileté élevée, il est apparent que la présentation d'un diagramme par l'expérimentatrice n'influence pas la résolution d'un deuxième problème, puisque l'élève réussit sans représentation de la situation-problème. De plus il est à remarquer que sept des huit succès sont dans la résolution des problèmes moins complexes (D1, G1 ou I1).

Dans la résolution des problèmes d'inclusion, une représentation sur papier d'un concept abstrait comme l'inclusion semble difficile pour ces élèves. Le niveau de scolarité se reflète quelque peu dans ces résultats, mais dans le sens inverse aux attentes, si on considère que deux des trois qui réussissent sont en 8e années. Quant à l'habileté, celui qui ne réussit pas est un élève moyen de 8e année et les trois succès appartiennent tous à des élèves forts. Ces résultats, combinés avec les deux cas extrêmes retrouvés dans la résolution des problèmes de géométrie (10e année fort et 8e année faible) permettent d'avancer que plus les habiletés en mathématique sont élevées plus il y a chance de succès avec une telle procédure de graphisme (AGC). En résumé, il semble laborieux de résoudre un problème complexe sans une représentation écrite de la situation (GC) à moins d'être fort dans le domaine.

La nature du graphisme produit dans une Graphie Contextuelle Symbolique

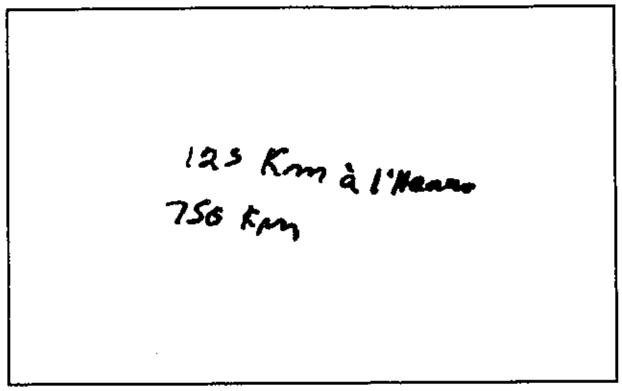
La Graphie Contextuelle est symbolique pour 24 des 72 solutions; elle ne contient que des chiffres, des mots ou des notations symboliques. Les quelques exemples de la Figure 4 (GC extraite du graphisme), obligent à reconnaître que l'information est presque toujours sous forme de tableau plus ou moins complexe. La production d'un tableau de données ou de chiffres seulement, pendant la représentation initiale de la situation-problème, mène plus souvent à l'échec : seulement 7 sur 24 réussissent en utilisant cette forme de représentation (Tableau 8, GCS).

Distance Les deux élèves qui ont réussi le Problème D1 (#31 et #35), procèdent par essai et erreur et ils mentionnent dans le rétrovisionnement un modèle physique implicite qui leur permet de voir rapidement ce qui se passe:

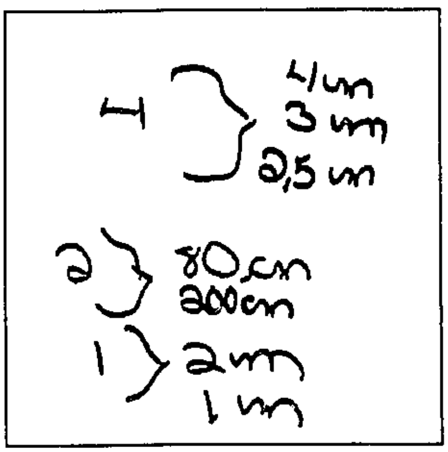
> S: Là je pensais rien, je le sais pas, j'essayais de voir une route puis j'essayais d'imaginer tu sais pour comprendre là. (#35, D1, 209-211)

L'examen des solutions qui ne mènent nulle part révèle des difficultés d'ordre conceptuel pour tous ces élèves (#11, #33, #31, #37, #49, #49), surtout face à l'interprétation du terme "kilomètres à l'heure" :

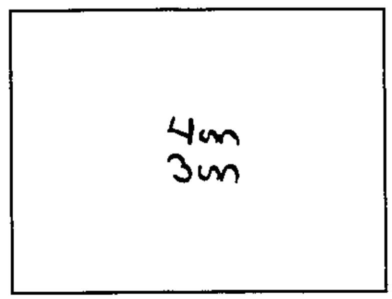
> S: Non, c'est parce que, moi je pensais comme, km à l'heure, parce qu'à chaque fois que je vois ça, je vois, je pense comme, je pense toujours que c'est juste comme, combien il doit parcourir t'sais? (#37, D1, 248-252).



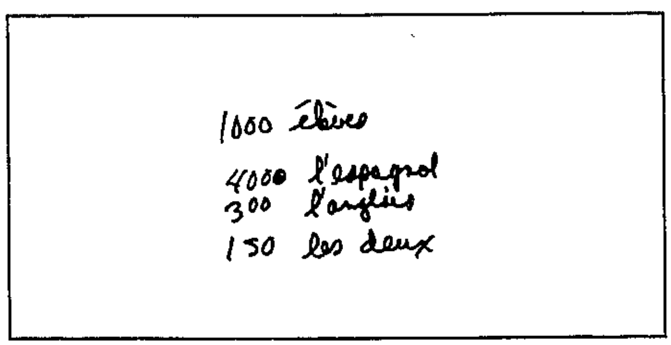
#35, D1



#02, G2



#02, G2



#43, I2

<u>Figure 4</u>. Graphie Contextuelle symbolique tirée du graphisme de 3 sujets répondant à la GCS.

> S: Ça prend habituellement une minute par km mais en automobile là ça prend presqu'une minute par kilomètre (#49, D1, 25-27).

D'autres obstacles sont d'ordre sémantique. Par exemple les deux élèves qui essaient de comprendre comment on peut additionner pour trouver une différence, dans le Problème D2, c'est-à-dire, **la distance qui sépare les deux trains**:

> S: [après avoir découvert graphiquement qu'au bout d'une heure les deux trains auront couvert ensemble, une distance de 160 kilomètres] ça fait, ben lui il va faire euh, ... il va faire celle qui s'en, qui roule à 100 kilomètres heure il va faire 40 de plus ... 40 kilomètres de plus ... (#31, D2, 174-176)
> S: Puis là mais, je comprends que dans combien d'heures seront, mais je ne comprends pas comme dans combien d'heures seront-ils **séparés** par 880 kilomètres... Je ne comprends pas comment arriver à ça,... (#49, D2, 346-350).

Tous ces élèves tentent d'appliquer une procédure de résolution en écrivant des données, mais comme cette démarche ne conduit pas à la compréhension, les sujets 33 et 11 abandonnent, les autres écrivent quelques calculs ponctuels et donnent une réponse erronée.

Il se dégage de ces résultats que la clé du succès pour deux élèves est une vision implicite du monde physique. Ce n'est pas la GC produite (un tableau de données) qui les aide à trouver une solution cohérente avec la situation-problème mais une procédure d'essai et erreur. De plus, ils solutionnent le Problème D1 (moins complexe). Ce résultat comparé au résultat des solutions des problèmes de distance sans GC (AGC) où les procédures par essai et erreur qui ne mènent pas au succès peut être interprété dans le sens de l'importance de la vision première de la situation. Les élèves, répondant à l'AGC et qui n'ont pas produit de GC n'ont montré aucun intérêt à la représentation initiale, puis ils sont passés immédiatement à l'application d'une procédure telle une procédure d'essai et d'erreur.

Géométrie Les deux élèves (#2 et #20, Tableau 8) qui tentent de résoudre un problème de géométrie (G2) en construisant un tableau de données comme ceux produits pour les problèmes de distance (Figure 4, #35 et #2), n'arrivent pas à résoudre le problème. Ces deux sujets n'extériorisent, ni verbalement, ni graphiquement, sur la représentation de la situation. Elles écrivent les données et immédiatement font des calculs sans passer par une étape de construction d'une représentation de la situation-problème. Même après la présentation d'indices et d'une figure par l'expérimentatrice, ces élèves appliquent des algorithmes qui n'ont aucune congruence avec le but à atteindre. Elles cherchent à justifier leur approche.

Sans oublier le nombre limité de sujets dans cette catégorie, il est possible de conclure qu'un rassemblement de chiffres, de symboles et d'écriture, souvent sous forme de tableau, n'apporte pas suffisamment de renseignements sur les formes, les dimensions, les positions relatives et sur l'état physique du phénomène à analyser pour comprendre une situation géométrique. Il n'y a aucune démarcation entre la représentation initiale (GC) et l'implantation de procédures (GM). Ces deux élèves de 8e année, d'habileté élevée en mathématique ne manquent pas de persévérance ou confiance en leur approche, il faut alors s'interroger sur le pourquoi elles adoptent un tel processus de résolution. L'analyse sur la fonction du graphisme apporte un éclairage sur les raisons qui poussent ces élèves à utiliser une approche contraire à ce qui est enseigné en géométrie, c'est-à-dire la construction d'une figure.

Inclusion Ce groupe représente 14 des 24 solutions où la GC est symbolique. Le graphisme contient souvent des notations logiques, surtout des flèches, indiquant les relations entre les groupes numériques. La production d'un tableau symbolique mène au succès ou à l'échec. Parmi les cinq qui ont réussi, les élèves 38 et 7 solutionnent le Problème I1 en visualisant trois groupes séparés; pour eux le groupe de "propriétaires et professeurs" n'est pas inclus dans les deux premiers groupes. Lorsque l'expérimentatrice reformule le problème en ne laissant pas le choix quant à l'inclusion du troisième groupe dans les deux premiers, le sujet 38 réussit immédiatement mais le sujet 7 ne réussit pas.

Dans les cas de ceux qui n'ont pas réussi au premier essai, les obstacles sont souvent de nature sémantique, surtout pour le Problème I2. Les mots "sciences et langues", "sciences, anglais, espagnol" et\ou "élèves, livres" créent de la confusion. Ou encore, ne sachant pas comment s'y prendre, ils ignorent l'information sur l'inclusion.

> S: okay puis après ça t'as, t'as faite 1000 moins le total des élèves en langues, puis là y faut que, y va avoir 400 livres d'espagnol ... parce que ben y a 400 élèves alors y a 400 livres à acheter puis là 300 en anglais ... (#32, I2, 39-44).

> S: parce que euh, euh, 1 000 élèves doit commander euh okay un enseignant avec 1 000 élèves doit commander ses livres pour chacun de ses cours, pour chacun de ses cours, ça m'a mélangé, ça
> E: parce que il y avait l'espagnol
> S: oui
> E: l'anglais et les sciences
> S: oui puis là tu veux juste savoir, combien qui doit commander pour les sciences
> E: ouais ça t'embête ça
> S: oui parce que ça dit chacun de ses cours puis là à la fin ça dit juste sciences (#30, I2, 143-154).

> S: parmi les élèves, 150, ah ah! ça c'est un truc. ... okay ouais, parce que le 150 y'est déjà entré dans le 700 ... [plus loin en relisant le problème pour vérifier la solution] ..un enseignant avec 1 000 élèves doit

> commander les livres pour chacun de ses cours. Chacun de ses cours ... il enseigne les langues et les sciences. 400 élèves ont choisi l'espagnol et 300 ont choisi l'anglais. Ça donne 700 élèves. Parmi les élèves.. okay ça ça compte pas. Combien de livres de sciences doit-il commander pour tous ses élèves qui ne sont pas en langues, 300 (#30, I2, 19-21, 29-37).

Il est difficile à ce moment plutôt descriptif de l'analyse de clore sur les résultats des graphismes d'inclusion. Les cinq qui ont réussi solutionnent le premier problème d'inclusion (I1) et deux de ces succès interprètent la situation de façon simple, c'est-à-dire sans inclusion. De plus, ces élèves n'ont pas été soumis à la présentation d'un diagramme de Venn. Il n'y a aucune tentative à dessiner un tel diagramme; le temps passé à construire et réfléchir sur une Graphie Contextuelle est cependant très long.

En guise de conclusion pour les résultats sur la nature des graphismes où la Graphie Contextuelle est symbolique, cette approche ne mène généralement pas au succès et elle est certainement plus populaire pour résoudre des problèmes d'inclusion (14 solutions). Les élèves qui réussissent admettent ne pas pouvoir représenter sur papier ce qu'ils voient. Un sommaire des résultats est présenté dans le Tableau 11. Les graphismes des élèves qui utilisent une GCS comme représentation initiale du problème sont regroupés selon le niveau, l'habileté, le genre et le moment de résolution dans la séquence expérimentale. Aucune distinction n'apparaît au niveau de la scolarisation (4 succès en 8e année et 3 en 10e) ou du genre (4 succès chez les garçons et 3 chez les filles) et ce, dans les domaines de l'inclusion et de la distance. De même, peu d'élèves utilisent cette forme de représentation dans un deuxième essai, ce qui rejoint les résultats sur l'effet de la présentation d'un diagramme de Venn par l'expérimentateur. En effet,

Tableau 11

Solutions où la Graphie Contextuelle est symbolique selon le niveau, les habiletés et le genre

Niveau & habileté	1er essai		2e essai		**TOTAL**
	Garçon	Fille	Garçon	Fille	
8e année					
Fort	I1	D1,G2*,I2*			**4(2)**
Moyen	D2*,I1,I1		I2*		**4(2)**
Faible	D1*	D1*,I2*,I2*			**4(0)**
10e année					
Fort	I2*				**1(0)**
Moyen	G2*	I1, I2*		I2*	**4(1)**
Faible	D1*,D2*,I1*	I2	D1,D2*,I2*		**7(2)**
TOTAL	**10(3)**	**9(3)**	**4(1)**	**1(0)**	**24(7)**

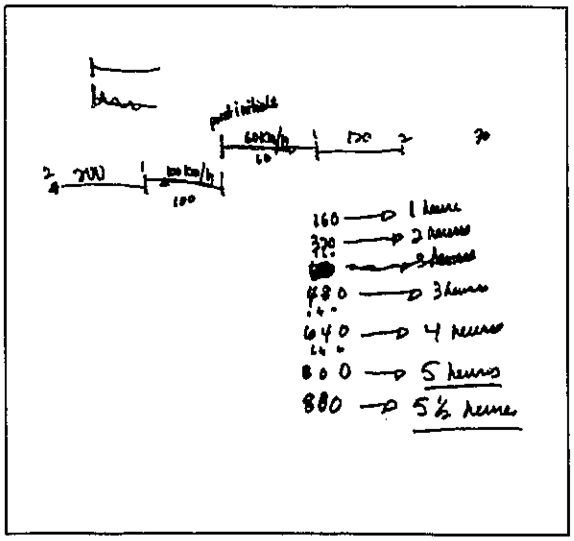
Note. D1, D2 = distance; G1, G2 = géométrie; I1, I2 = inclusion; * = problème échoué. Nombre entre parenthèses indiquent les solutions réussies.

la résolution d'un deuxième problème dans le domaine de l'inclusion est facilité par l'utilisation du diagramme. Il est à noter que la GCS est peu utilisée pour résoudre les problèmes de géométrie (deux solutions) et que les sujets réussissant à solutionner les problèmes de distance avec une représentation symbolique ont un modèle implicite en tête. Quant aux habiletés en mathématique, les faibles utilisent plus souvent cette forme de graphisme (11 solutions, c'est-à-dire dans 46% des solutions comparativement à 33% des solutions chez les moyens et 21% des solutions chez les forts). Ces résultats laissent supposer que les faibles utiliseraient une Graphie Contextuelle symbolique sous forme de tableau pour solutionner sans beaucoup de succès des problèmes écrits en mathématique.

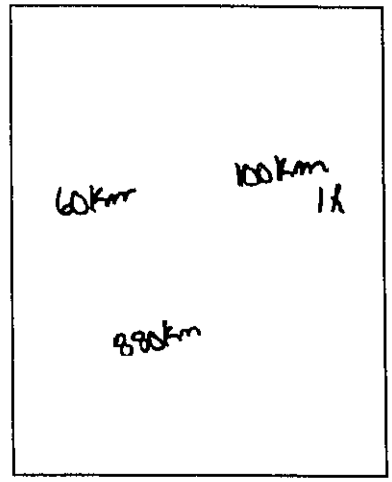
La nature du graphisme produit dans une Graphie Contextuelle Diagrammatique

La nature du graphisme des élèves qui produisent une Graphie Contextuelle Diagrammatique, est associée à la catégorie du problème à résoudre : un vecteur (Figure 5), une figure géométrique (Figure 6) ou une tentative de diagramme de Venn (Figure 7). Pour certains le graphisme est un essai des représentations du type présenté dans l'examen rétrospectif avec l'expérimentateur. Pour d'autres c'est une expérience première dans la séquence expérimentale.

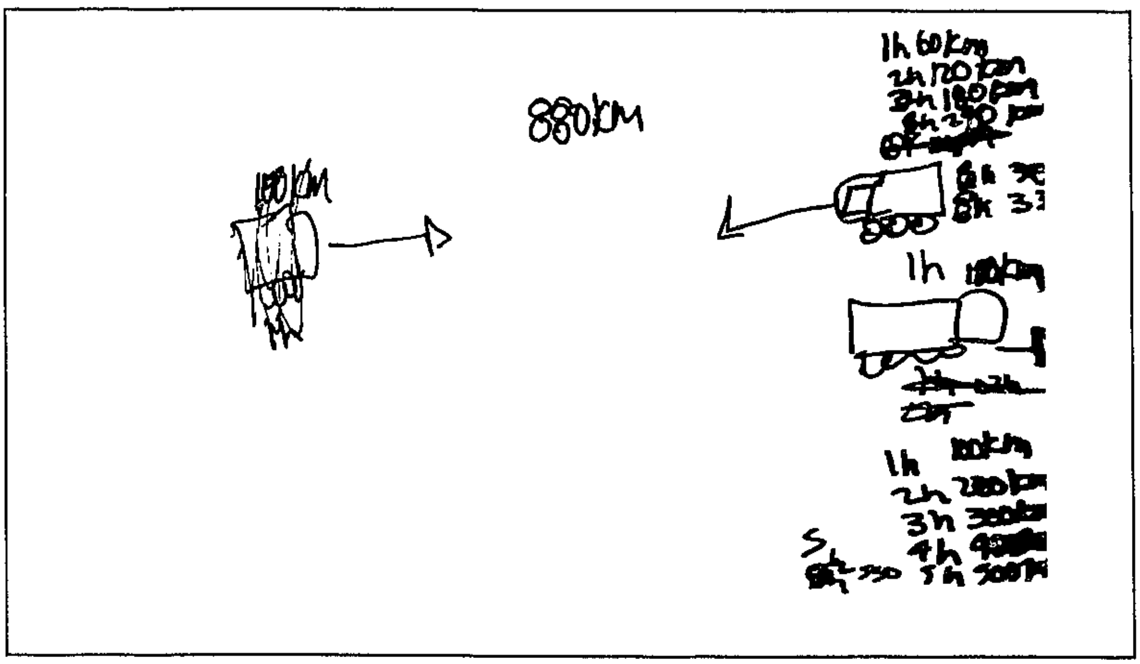
Distance La Graphie Contextuelle utilisée par quatre des neuf élèves (Tableau 8) est un modèle vectoriel qui mène au succès dans la recherche d'une solution cohérente avec le problème. Cependant cette graphie n'a certainement pas la sophistication d'un graphisme cartésien. Elle contient des objets représentant le monde réel et des renseignements non standardisés, c'est pourquoi le terme "diagramme dirigé" de



#29, D2

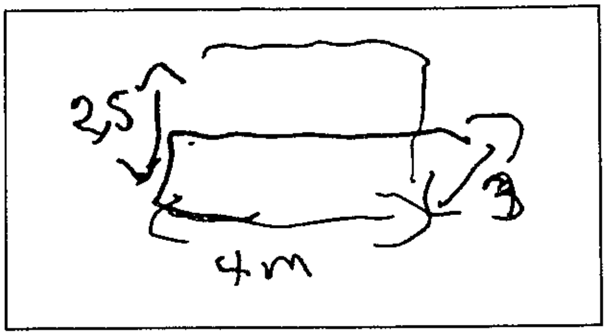


#33, D2

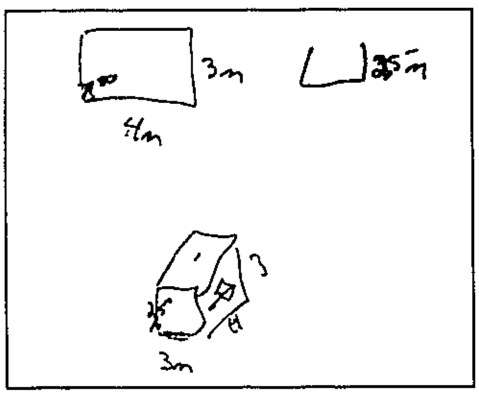


#45, D2

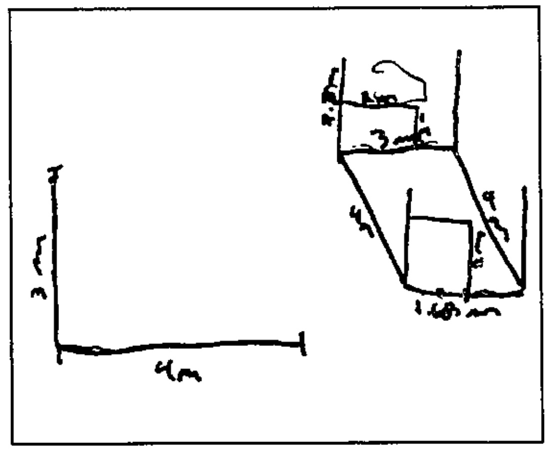
Figure 5. Graphismes d'élèves utilisant un vecteur comme Graphie Contextuelle Diagrammatique.



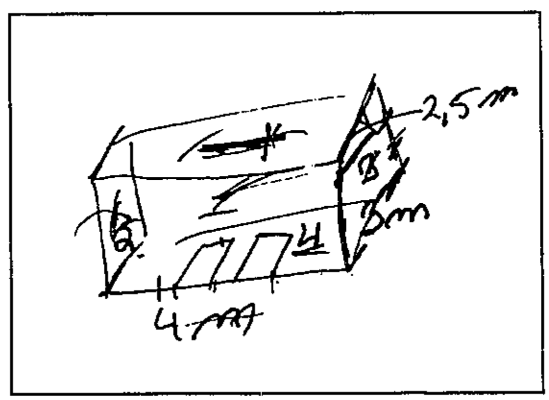
#10, G2



#14, G2

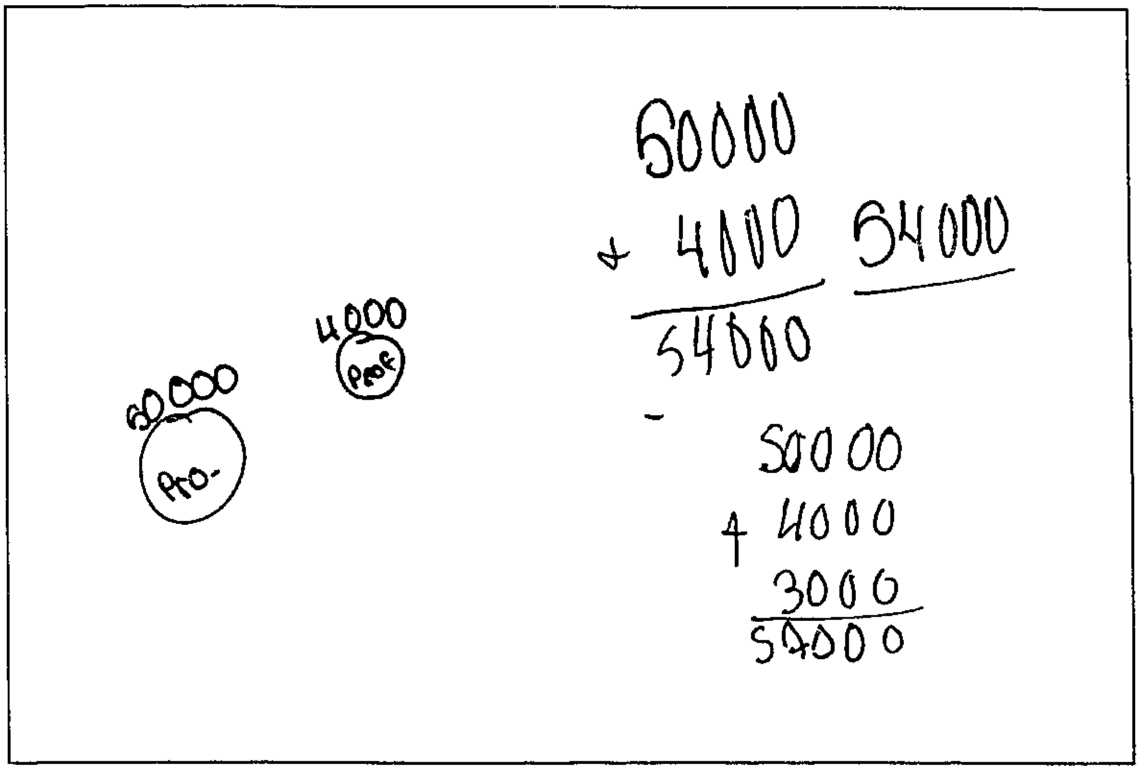


#50, G2



#42, G2

Figure 6. Extraits de graphismes d'élèves utilisant une figure géométrique comme Graphie Contextuelle Diagrammatique.



#8, I1

Figure 7. Graphisme d'un élève utilisant une variante d'un diagramme de Venn comme Graphie Contextuelle Diagrammatique.

Rubinstein (1986) semble plus approprié étant donné que les vecteurs sont plus ou moins standardisés (Figure 5). Il faut aussi remarquer comment les sujets 29 et 45 construisent un tableau de réponses dans leurs Graphies Mathématiques (Figure 5); patron que l'on retrouve très souvent lorsque la Graphie Mathématique prend la forme d'un tableau : les calculs continus sont intégrés sous forme de tableau et la Graphie Mathématique se transforme en un plan. La mathématique passe au deuxième plan alors que le contexte et le but à atteindre guident le processus de résolution. Cependant, certains élèves semblent capables de garder en mémoire la Graphie Contextuelle tout en appliquant des règles mathématiques. L'analyse qui suit sur la fonction du graphisme permet d'interpréter plus en profondeur ce comportement. Ceux qui ne réussissent pas ont des difficultés sémantiques (kilomètres à l'heure); pour certains, le vecteur est très primitif (Figure 5, #33); pour d'autres, il est craintif (ils n'osent pas écrire ce qu'ils voient) et même seulement gestuel pour le sujet 13.

De l'examen des graphismes diagrammatiques produits dans la résolution des problèmes de distance, il ressort qu'un "diagramme dirigé" montre la compréhension ou l'incompréhension de la situation, il y a cette tendance naturelle à vouloir dessiner un vecteur plus ou moins sophistiqué pour expliquer le phénomène de distance à couvrir. Même après avoir compris cette particularité, tous ces élèves ne réussissent pas nécessairement à solutionner le problème. Lorsqu'un graphisme cartésien (celui de Hall et coll.) est présenté, il semble trop sophistiqué pour être appliqué face à une deuxième situation-problème de distance. À l'opposé, un objet réel semble trop primitif ou individuel pour être utilisé dans les situations d'intervention pédagogique. Une telle représentation ne ferait pas nécessairement le lien entre le modèle mental de chaque élève et la situation-problème.

Géométrie Il y a quatre élèves (#14, #42, #50, #10) qui réussissent les deux problèmes de géométrie et un élève qui réussit le G2 et non le G1, pour un total de neuf solutions correctes. Il est plus difficile de différencier la GC de la GM dans un graphisme géométrique parce que le dessin d'une figure géométrique est souvent accompagné de calculs, de formules, de symboles, etc. Les caractéristiques les plus importantes pour la construction de la figure dans le Problème G2 sont relevées. La représentation contextuelle de ce problème exige de représenter sur une feuille qui n'a que deux dimensions, une chambre, qui en a trois. Qu'est-ce qui rend ces élèves capables de peindre dans l'espace des grandeurs graphiques et rendre concret leurs conceptions de projection? Chez quatre élèves, le début de la représentation graphique se fait en deux dimensions, comme le montre l'angle dessiné par le sujet 50 (Figure 6). Cet élève adopte ensuite une perspective iconographique (vue du dessus). Il en est de même pour le rectangle dessiné par le sujet 14 (Figure 6). Cet élève commence la résolution de ce problème en utilisant une figure en développement, le plancher et un des murs, pour ensuite reconstituer une figure en perspective. Le sujet 42 commence aussi par dessiner un rectangle, puis, pour rester fidèle à cette première représentation, il adopte une vue du dessous de la chambre. Le changement mental de position rend la verbalisation de la résolution plus complexe pour l'observateur qui n'imagine pas ce changement de position. Ce genre de torsion mentale se reflète dans la résolution. Il faut aussi noter que la Graphie Mathématique de plusieurs élèves est sous forme de tableau. Comme pour les problèmes de distance, ce tableau ressemble à une feuille de route du processus de résolution. Pour le Problème G1, une représentation euclidienne de la situation-problème et l'identification d'une sensibilité au vocabulaire "mathématique" permet à ces mêmes élèves de solutionner le problème. Les résultats sur la fonction du graphisme ajouteront à l'interprétation des présents résultats et permettront de mieux répondre à la question.

L'élève qui ne réussit pas à solutionner le Problème G2 en géométrie, échoue parce qu'il a construit une figure plane et n'a pas su passer d'une perspective bi-dimensionnelle à une perspective tri-dimensionnelle. Quant à ceux qui utilisent une figure plane pour le Problème G1 et ne réussissent pas, il est intéressant d'aller plus loin pour voir les raisons qui mènent à un tel résultat : persistance, obstacle épistémologique, etc (chapitre 5).

Somme toute, il y a une tendance à dessiner une figure en solutionnant ces problèmes de géométrie. Cependant, une représentation tri-dimensionnelle semble faire suite à une représentation bi-dimensionnelle et n'utilise pas nécessairement une perspective horizontale de face. Ce groupe représente 13 des 23 solutions répondant à la GCD.

Inclusion Une seule élève (#8) dessine une représentation diagrammatique pour essayer de résoudre le Problème d'inclusion I1. Dans le processus de résolution du Problème I2, solutionné en premier, cette élève avait laissé de côté l'information pertinente à l'inclusion; suite à une présentation où le diagramme de Venn sert à la visualisation, elle cherche maintenant, dans le Problème I1, à ne pas commettre la même erreur. Elle dessine des ensembles séparés, comme le montre la Figure 7, c'est le principe de soustraction qui guide la résolution et non le dessin :

> S: ben, j'sais pas tantôt j'avais eu mal, à cause j'avais laissé tomber l'affaire, mais là j'sais pas là [rires ...] okay ça veut dire qu'on, on a comme, attends une minute ... professeurs et propriétaires, ça ferait pareil, si j'additionnerais okay regarde, j'pense okay j'pas sûr là, j'v.. juste expérimenté ça là, plus 4 000 plus 3 000, okay ça ça veut, moins j'l'ai faite à l'endroit là okay, mais ça se fait pas un moins à trois affaires, oui ça se fait, j'sais même pas, ça se fait même pas [rires]. Ça veut dire attends ah je veux additionner aussi là, 4, 5, 7, 5, ça fait 57 000 puis si j'en enlève le, le 7, ça me ferait 50 ... 50 euh, 57 moins 3 ... 54, ça me ferait 54 000, ça me ferait quand même 54 000 brochures (#8, I1, 262-264, 282-297).

Cette élève de 8e année, faible en mathématique, est le seul sujet qui ne démontre aucune facilité à utiliser un diagramme de Venn, même à la suite d'une présentation d'un tel diagramme dans une situation relativement plus complexe (I2).

En résumé, on constate que les graphismes diagrammatiques sont plus populaires en géométrie, mais que, contrairement à l'approche symbolique, la popularité pour cette catégorie de problème reflète le succès. Si on associe les résultats du présent critère avec les résultats correspondants aux caractéristiques graphiques qui précèdent, il est possible d'avancer que la tendance au dessin géométrique ou vectoriel surpasse l'inclination à dessiner un diagramme de Venn. Au Tableau 12, le relevé détaillé de cette forme de représentation initiale met en relation la GCD avec le niveau, l'habileté, le genre et le moment de la résolution. L'effet attendu en relation avec le niveau et l'habileté est dans le sens attendu. En effet, il ressort que cette forme de représentation réussit mieux aux élèves de 10e année (8 succès) qu'à ceux de 8e année (5 succès). L'habileté en mathématique apparaît également : chez les élèves forts (7 succès sur 8); vient ensuite le groupe d'habileté moyenne (4 succès sur 9); les faibles réussissent moins bien (2 succès sur 6). Beaucoup plus d'élèves utilisent cette forme de représentation au deuxième essai (14 au deuxième essai et 9 au premier essai), ce qui indique dans plusieurs cas l'effet de la présentation d'une représentation diagrammatique par l'expérimentatrice ou l'encouragement à utiliser une représentation diagrammatique. En ce qui a trait au genre, les garçons et les filles utilisent une GCD, cependant, les garçons l'utilisent avec plus de succès (8 succès chez les garçons, 5 succès chez les filles). Le succès est marqué pour la résolution des problèmes de géométrie, ce qui relève de la qualité de la figure géométrique.

Tableau 12

Solutions où la Graphie Contextuelle est diagrammatique selon le niveau, les habiletés et le genre

Niveau & habileté	1er essai		2e essai		TOTAL
	Garçon	Fille	Garçon	Fille	
8e année					
Fort	G2		D2*,G1		**3(2)**
Moyen	G1*,G2		D1*,G1,G2		**5(3)**
Faible			D2*	D2*,I1*	**3(0)**
10e année					
Fort		D1,D2,G1		D2,G2	**5(5)**
Moyen		D2*,G1*	D1	G2*	**4(1)**
Faible	G1		G2	G1*	**3(2)**
TOTAL	**4(3)**	**5(3)**	**8(5)**	**6(2)**	**23(13)**

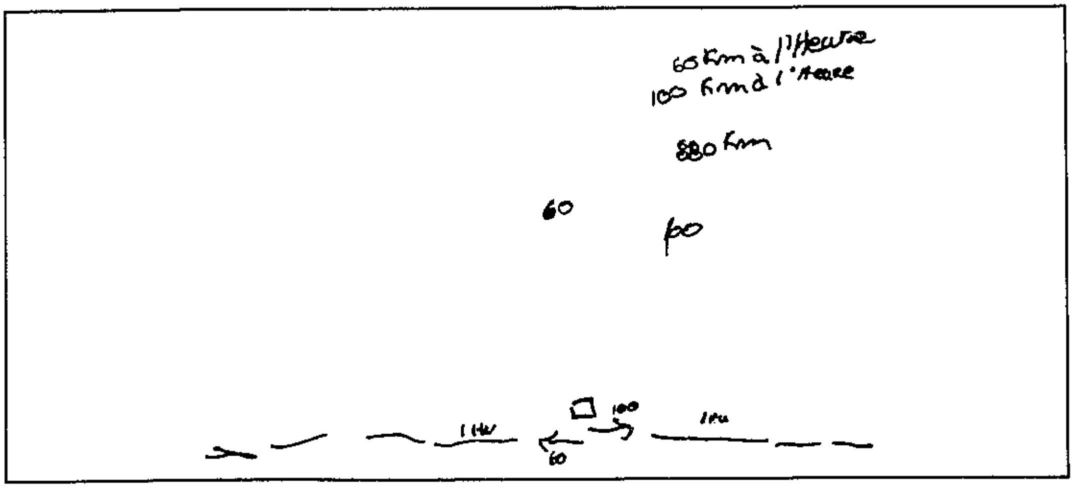
Note. D1, D2 = distance; G1, G2 = géométrie; I1, I2 = inclusion; * = problème échoué. Nombre entre parenthèses indiquent les solutions réussies.

La nature du graphisme produit dans une Graphie Contextuelle Symbolique et Diagrammatique

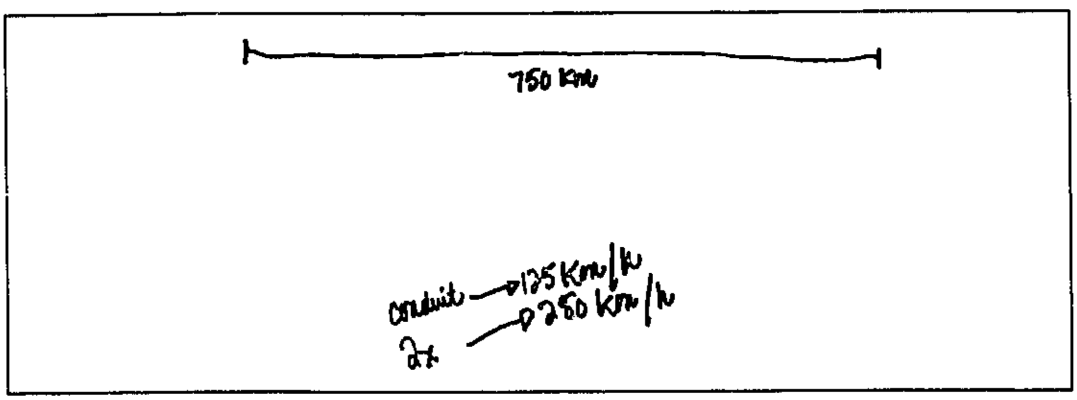
Parmi les 10 élèves ayant construit une Graphie Contextuelle, combinant le symbolique et le diagrammatique, 7 ont réussi à trouver une solution cohérente avec la situation-problème présentée (Tableau 8).

Distance La combinaison d'un tableau avec un graphisme vectoriel mène à une solution correcte pour les sujets 35 et 29 (Tableau 8). Le graphisme vectoriel est pur et simple, tout en reflétant la compréhension de la situation. L'ordre chronographique d'apparition des deux formes de représentation contextuelle est différent, pour le sujet 35 alors qu'il solutionne le Problème D2. Il commence par écrire des données sélectionnées dans le texte tandis que pour le sujet 29 aux prises avec le Problème D1, ce dernier commence son processus de résolution en dessinant un vecteur. Ces deux sujets utilisent la même forme de "plan" tableau dans leur Graphie Mathématique que les sujets utilisant une GC uniquement diagrammatique. Ce tableau accompagne l'application des procédures mathématiques, lesquelles sont disposées de façon méthodique.

L'élève qui solutionne le Problème D2 sélectionne d'abord les deux vitesses dans le texte en les écrivant. Il passe ensuite un certain temps à analyser la situation (il dessine les deux flèches et le carré représentant la station de train) pour ensuite inscrire la distance au-dessous des vitesses (Figure 8, #35). Il y a ensuite une période relativement pénible de concentration et d'analyse où le facteur "temps" doit être considéré :



#35, D2



#29, D1

Figure 8. Extrait du graphisme, Graphie contextuelle symbolique et diagrammatique produite pour résoudre les problèmes de distance.

> S: **[se tient le tête]** 100, 60, 160 km à l'heure, 880 si lui y avance de 60 km à l'heure, si lui y avance à chaque heure, à 60 puis l'autre à 100. À chaque heure lui y avance à 60 km **[regarde dans le vide]** 60 km à chaque heure y avance de 60 km. **[fronce les sourcils et se couvre les yeux avec les deux poings]** Hm, l'autre y avance à 100 km à chaque heure ... ça fait hm ... **[regarde le vecteur, ensuite regarde dans le vide après cette pause, se passe les mains sur tout le visage et regarde intensivement la figure ... en murmurant]** hm, hm, non, 100 ... 100 ... 60 km à l'heure, l'autre à 100 ... lui c'est 60 km puis lui y avance 100 ... Okay ... **[regarde le problème, le vecteur, le téléviseur et ensuite au plafond en verbalisant]** Okay lui ... y avance hm ... Lui y avance ... Ici lui y avance à 100 km **[écrit "100"]** puis l'autre y avance à 60 km **[écrit "60"]** ça veut dire faut que je fasse deux heures quelque part, hm (#35, D2, 371-386).

Il faut encore relever dans ce très riche protocole, la manière dont ce sujet parvient à trouver une méthode de représentation des heures et distances où la distance parcourue à chaque heure est représentée par un segment de droite (au bas du graphisme #35, Figure 8). Il décide aussi de tenir compte du trajet en enregistrant les sous-buts atteints dans un tableau de réponses, tel ceux produits dans la Figure 5; lorsque les calculs sont plus longs il les écrits entre les figures déjà construites. Pour l'élève qui réussit le Problème D1, le vecteur représente simplement la distance à parcourir et la représentation de vitesse demeure symbolique (Figure 8, #29).

En bref, pour ces deux problèmes de distance, le figuratif vectoriel s'intègre habilement au symbolique mathématique. Les graphismes sont simples et cohérents et un temps de familiarisation est nécessaire pour la résolution du problème. Le graphisme serait plus clair et par conséquent plus utile si les calculs ne se mêlaient pas à la représentation initiale. Les deux élèves forts en mathématique conservent une organisation dans leur représentation où les flèches ou les segments servent à préciser la direction et les états temporels de l'action.

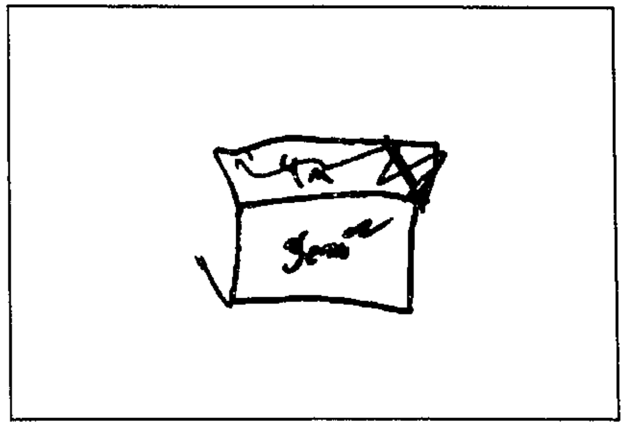
Géométrie La combinaison des deux graphies (symbolique et diagrammatique) de représentation contextuelle conduit au succès pour le sujet 20 et à l'échec pour les sujets 2 et 26. Les GC sont présentées dans la Figure 9, des calculs et chiffres accompagnent cet extrait des graphismes. L'élève qui réussit le Problème G1, suite à une lecture intensive du problème, écrit les deux données fournies dans le texte pour former un genre de tableau. Ce sujet rencontre de nombreux obstacles dans son processus de résolution. Tout au long de son parcours, des principes géométriques créent de la confusion: périmètre et surface, mètres et mètres carrés, etc.

> S: ... euh, peut-être en, l'aire, l'aire c'est,
> E: c'est la surface
> S: la surface
> **O: [fait un carré d'un geste de la main en regardant E]**
> E: comme on a trouvé tantôt, donc c'est côté multiplié par côté.
> S: C'est les comme, mètres carrés ça?
> E: Oui, c'est les mètres carrés.
> S: Okay. Puis le périmètre c'est le contour?
> E: Oui.
> S: Okay (#20, G1, 642-651).

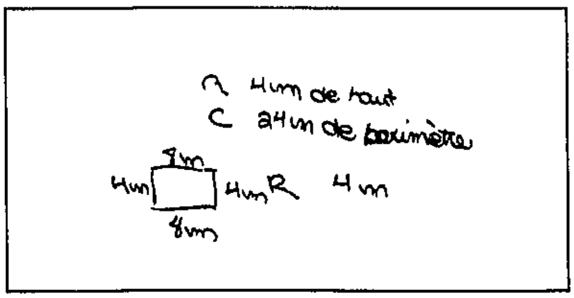
De plus, le souvenir de la solution précédente perturbe sa première vision du problème. L'emploi du mot hauteur pour désigner indifféremment la troisième dimension ou la largeur d'un rectangle euclidien, brouille momentanément sa représentation, comme le montre la rature de la Figure 9 (#20).

La rétrospection vient confirmer ce comportement:

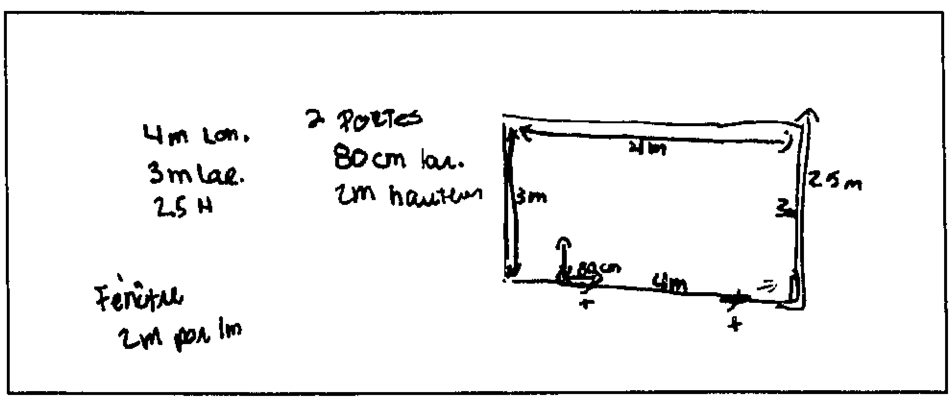
> S: Bien je savais là, c'est juste hm ... je savais la hauteur, ça je pensais que c'était encore comme une chambre, c'est ça qui m'a mélangé alors c'est quand j'ai su la hauteur, c'était comme mettons la longueur ou la largeur (#20, G1, 805-809).



#20, G1



#2, G1



#26, G2

Figure 9. Extrait du graphisme répondant à la GCS&D, Graphie Contextuelle produite pour résoudre les problèmes de géométrie.

Et finalement, il a de la difficulté avec la réflexion parlée:

> E: Ah ça c'était ... De parler à haute voix, ça te dérangeais-tu là?
> S: Je sais pas on dirait je suis plus concentré quand je pense tout seul là (#20, G1, 848-851).

Une fois les obstacles franchis, il trouve une solution correspondante aux contraintes fixées par la situation-problème. Son graphisme est plein de ratures et les calculs se confondent avec les représentations.

L'échec des sujets 2 et 26 s'explique, en regardant la figure produite (Figure 9). L'élève 2 essaie de résoudre le Problème G1, en écrivant d'abord des données sélectionnées dans le texte (au haut du graphisme #2, Figure 9), elle résout ensuite le problème en modifiant la situation:

> Et puis, le carré ça fait 24 m, ça l'arrive au même périmètre que celui du rectangle. euh, il faudrait que la réponse du rectangle soit ça aussi, aussi 24 (#2, G1, 227-230)

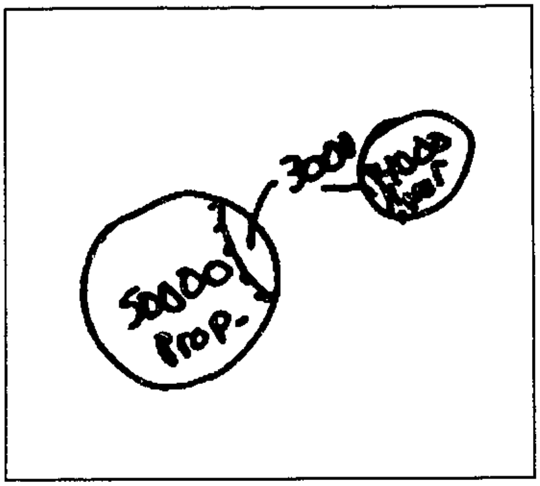
pour ensuite construire le rectangle produit sur cette même figure. Ce qui est à retenir ici est le moment de la construction géométrique : dans un premier temps, un graphisme symbolique permet d'atteindre le but fixé, c'est seulement dans un deuxième temps de vérification que le rectangle est dessiné. Cette figure n'est pas intégrée à la Graphie Contextuelle, c'est-à-dire au moment où l'élève élabore une vision de la situation-problème.

En ce qui concerne l'échec du sujet 26, elle essaie de résoudre le Problème G2 en construisant une figure géométrique plane. Elle dessine des flèches pour indiquer indifféremment les directions et la troisième dimension (Figure 9, #26). La confusion du dessin se retrouve dans la réflexion:

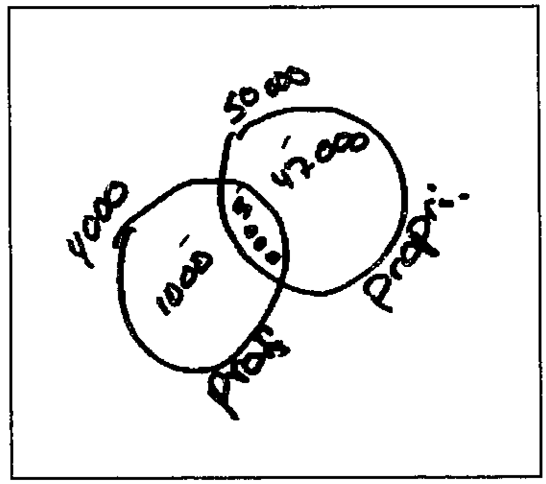
> S: Puis ... faudrait est-ce qu'on met les bordures sur les fenêtres puis la porte (#26, G2, 47-48).
>
> S: Euh, je pense à l'affaire qui faut que tu peintures là ... Ça fait ... Ici là le 4 m "c'est tu" le total de la chambre mesurée ou si c'est comme 4 m de longueur pour chaque mur? (#26, G2, 58-63)

Ce qui ressort plus particulièrement de cette section des résultats en géométrie est que le tableau de données (le symbolique) et la figure géométrique (le diagrammatique) sont utilisés dans la représentation initiale du problème. La comparaison des graphismes produits fait apparaître un ordre didactique marqué : l'enseignement de la résolution de problème (écrire les données) puis l'enseignement de la géométrie (dessiner la figure). Le mode diagrammatique, ici construire une figure géométrique, n'amène pas nécessairement une vision de la situation, conséquemment la résolution du problème n'est pas toujours cohérente. Le graphisme mêle presque artistiquement la désorganisation : la représentation initiale et la résolution du problème.

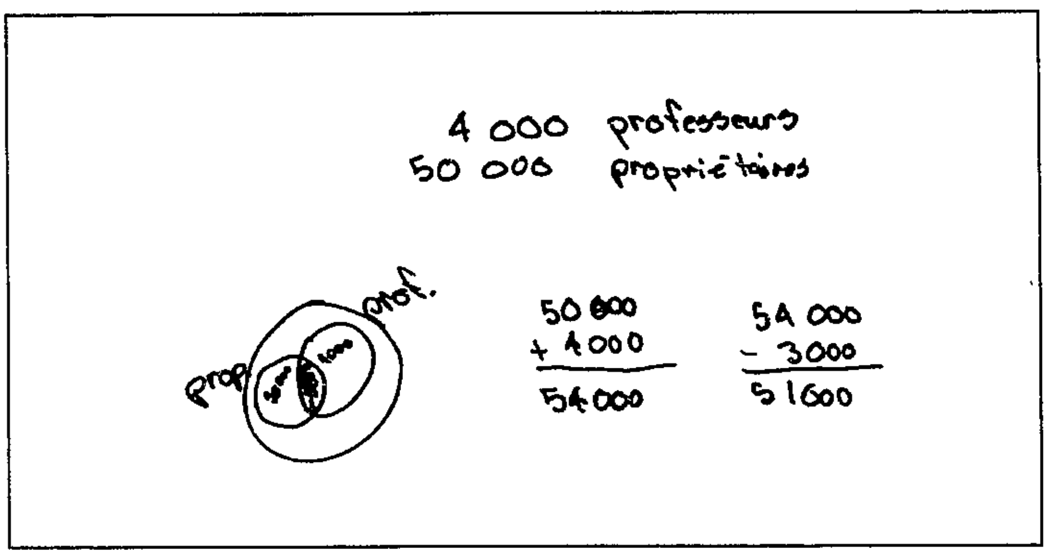
Inclusion Le groupe suivant essaie de résoudre un problème d'inclusion à la suite de la présentation d'un diagramme de Venn mettant en prépondérance deux vues des ensembles : une première dans laquelle les ensembles étaient séparés et l'intersection représentée par des hachures; une deuxième présentation superposant l'intersection. La Figure 10 présente des extraits de graphisme : la représentation du sujet 25 serait un essai où l'inclusion est hachurée, tandis que la représentation du sujet 28 serait un essai où



#25, I1



#28, I1



#30, I1

Figure 10. Extraits du graphisme répondant à la GCS&D, Graphie Contextuelle produite pour résoudre les problèmes d'inclusion.

l'inclusion est superposée; le graphisme du sujet 30 donne un exemple complet d'une Graphie Contextuelle avec tableau de données. Quatre élèves (#28, #25, #17, #30) réussissent à résoudre le Problème I1 en utilisant une Graphie Contextuelle (combinant le symbolique et le diagrammatique). Les quatre écrivent d'abord les données sélectionnées dans le texte, pour ensuite construire un diagramme de Venn, parce que cette présentation de la situation leur a permis de visualiser la situation du premier problème:

> S: Est-ce que je peux faire les mêmes dessins que vous avez faits tantôt? (#25, I1, 263-264)
>
> S: Bien j'ai, j'ai figuré comme avec l'autre là comme l'autre fallait que tu fasses ça puis ça m'a aidé, comme ça m'a aidé souvent, plus à comprendre que okay, si tu n'as, puis tu n'as les deux, à cause du "parmi" de l'autre solution, puisque tu n'as les deux c'est, pourquoi comme faire, plus puis plus, puis faire tout ce calcul là quand tu peux te faire un petit graphique comme ça puis là tu le mets ensemble puis là t'as juste à soustraire qu'est-ce qui a dans le milieu des deux tu le soustrais avec le montant que t'as de professeurs et de propriétaires. Qui fait que ça l'a aidé (#28, I1, 438-451).
>
> S: Okay, puis moi je veux savoir okay je vais prendre un exemple comme tu m'as faite tantôt okay, je vais prendre ça, ça m'a aidé ça un schéma (#17, I1, 234-236).

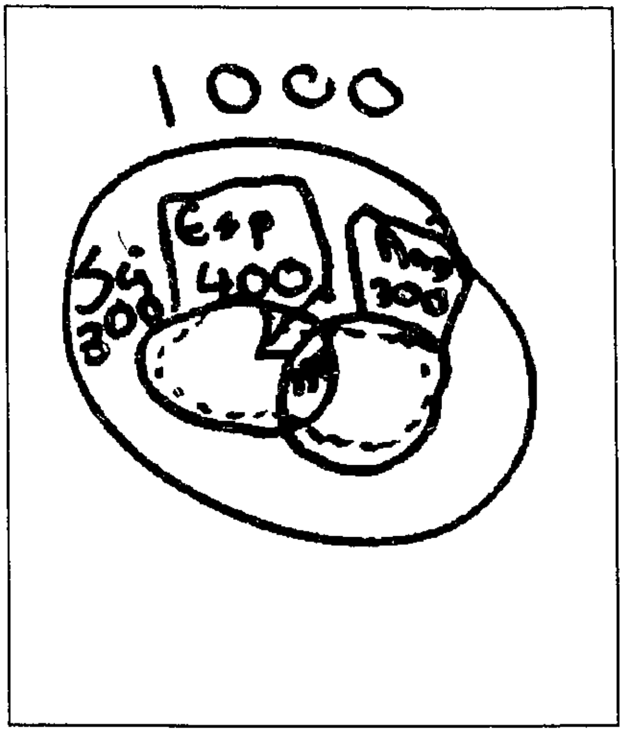
Les sujets 25 et 28 font partie du groupe qui avait échoué le premier essai lors du premier niveau de l'analyse. Si les calculs impliquent de la soustraction et que le diagramme est présenté comme une addition de trois partie, ceci crée de la confusion ou vice versa (#28, 399-434). Par exemple, deux de ces élèves dessinent les deux cercles, en relisant sélectivement le problème et ils inscrivent les chiffres sur leur figure. Les renseignements identifiant les différentes parties viennent embrouiller la situation, mais ils arrivent à la solution avec des calculs (GM). Dans le rétrovisionnement, ils expliquent comment l'inclusion pour eux est la partie qu'on enlève, parce que "tu peux pas les compter deux fois". Les deux cercles sont les deux populations complètes. Lorsque l'expérimentatrice lui demande si les chiffres posés à l'extérieur seraient une meilleur représentation de la situation : "ça va m'arr.. ça m'aurait mélangé [...] j'voulais juste faire mon graphique pour euh, parce que tu l'avais fait". On peut s'interroger sur la représentation de ce diagramme comparativement à ce que l'on pourrait croire qu'un élève a compris [#25 et #28], suite à une explication graphique. Ces deux sujets se souviennent de **la soustraction**, ce sont les calculs qui leurs permettent d'arriver à une réponse rapide et juste. Le diagramme de Venn serait seulement une copie plus ou moins exacte de ce qui a été présenté.

Le sujet 21 est le seul à ne pas réussir à trouver une solution au Problème I2. Il écrit les données à l'extérieur des cercles (Figure 11) et résout le problème en ignorant l'inclusion:

> S: puis y en a 150 qui sont, qui sont dans les deux alors j'ai pas besoin de les choisir, de les mettre, (#21, I2, 416-417).

Ici encore, la séquence de construction du graphisme est très importante, la construction du diagramme de Venn fait suite à la résolution, il ne dessine pas le diagramme lors de la lecture ou la lecture sélective de la situation-problème. Il est intéressant de voir comment dans la représentation graphique, il réussit à ignorer le "150" d'inclusion pour rendre la situation compatible avec la solution qu'il a trouvé :

> S: Bon ... puis alors ça fait, si je le représenterais bien graphiquement 1 000 élèves ...
> **O: [dessine un grand cercle]**
> Euh bon, 400, bon espagnol, 400 ... anglais ... 300 ... puis y en a 150 ... qui sont dans les deux
> **O: [continue de dessiner, Figure 11 et retourne au problème]**
> puis alors



#21, I2

Figure 11. Extrait d'un graphisme répondant à la GCS&D et ne menant pas au succès.

O: [en regardant le texte]
puis le reste qui ...
O: [en regardant les données sur le tableau [Figure 11]]
ça ça serait ...
O: [dessine les boîtes sur le diagramme]
ça puis le reste sciences, 300 bon ...
O: [écrit ce renseignement à l'intérieur du cercle, Figure 11]
alors ça serait, alors il en a besoin, pour les livres en sciences, y en a 300 livres.
O: [regarde E d'un air satisfait] (#21, I2, 424-431).

La première réaction de tous ces élèves dans la résolution de problèmes d'inclusion est d'écrire un tableau de données sélectionnées dans le texte, ce qui ne les mène nulle part. Le recours au diagramme de Venn est un effort de représentation de la situation malgré ses imperfections; ce sont cependant les calculs qui guident le processus de résolution. Ces résultats font ressortir l'importance de la présentation de l'enseignant, tant il semble difficile pour ces élèves d'abandonner la procédure de résolution où il doivent d'abord écrire les données. Est-ce que différents types de présentation rejoindraient un plus grand nombre de représentations individuelles de la situation-problème?

En résumé, les présentations symboliques et diagrammatiques des renseignements s'intègrent pour la résolution des problèmes de distance, elle mêle ce qui est perçu spontanément avec ce qui est enseigné dans la résolution des problèmes de géométrie et elle fait ressortir l'importance et la pertinence d'une présentation graphique pour la résolution des problèmes d'inclusion. Les solutions avec GCD&S sont présentées au Tableau 13 en relation avec les différents paramètres de la recherche. Le succès est plus

Tableau 13

Solutions où la Graphie Contextuelle est symbolique et diagrammatique selon le niveau, les habiletés et le genre

Niveau & habileté	1er essai		2e essai		TOTAL
	Garçon	Fille	Garçon	Fille	
8e année					
Fort			D2	G1*	**2(1)**
Moyen					**0(0)**
Faible				I1	**1(1)**
10e année					
Fort			I1,I2*	D1	**3(2)**
Moyen			G1	I1	**2(2)**
Faible		G2*		I1	**2(1)**
TOTAL	**0(0)**	**1(0)**	**4(3)**	**5(4)**	**10(7)**

Note. D1, D2 = distance; G1, G2 = géométrie; I1, I2 = inclusion; * = solution échouée. Nombres entre parenthèses indiquent le succès.

marqué chez les élèves de 10e année (5 succès en 10e année et 2 succès en 8e année). L'influence de l'habileté en mathématique sur l'utilisation du graphisme symbolique et diagrammatique doit être interprétée en relation avec le domaine. En effet, quatre des cinq succès chez les faibles (Tableau 9) se retrouvent dans la résolution des problèmes d'inclusion. Ces quatre succès prennent place aussi lors d'un deuxième essai, suite à une représentation diagrammatique par l'expérimentatrice. Il est à noter qu'une seule solution en géométrie contient une forme symbolique et diagrammatique de représentation au premier essai. L'effet apporté par la variable genre est négligeable (six filles avec quatre réussites et quatre garçons avec trois réussites).

Synthèse et conclusions

Sans reprendre ici les résultats spécifiques à chaque variable observée, il paraît utile de faire ressortir l'ensemble des caractéristiques qui définissent la nature du graphisme produit. Les résultats interprétés dans le cadre d'un modèle mental reflètent le processus de résolution de chaque élève face à une situation-problème présentée. Le travail d'analyse ne consiste pas à vérifier une hypothèse en fonction d'un cadre théorique ou empirique bien constitué. Au contraire, une partie importante de la tâche a été d'explorer ou de définir la nature du graphisme, dans le but de rendre adéquate l'analyse de la fonction du graphisme.

Les effets les plus visibles se rattachent aux trois domaines de la géométrie, de la distance et de l'inclusion. La représentation typique retrouvée pour résoudre les problèmes de distance en fonction du temps est un diagramme dirigé, plus ou moins sophistiqué. Ce qui cause de l'étonnement dans cette catégorie, c'est qu'aucun élève n'utilise le formalisme algébrique, surtout en 10e année où ils font de l'algèbre depuis deux ans. Pour résoudre les problèmes de géométrie, le dessin d'une figure géométrique est spontané, la représentation en 3D est plutôt idiosyncrasique. Pour résoudre les problèmes d'inclusion, le dessin ne se prête pas spontanément à la résolution comme il semble le faire pour les problèmes de géométrie. En inclusion, lorsqu'il y a de l'écrit c'est sous forme de tableau de données. Le diagramme de Venn est dessiné seulement à la suite d'une présentation du diagramme qui aurait eu lieu dans une intervention éducative dans un premier essai. Il semble qu'une présentation par l'expérimentatrice facilite la résolution d'un deuxième problème dans ce domaine. Le diagramme de Venn n'a pas d'équivalence figurative, il n'est pas propre à faire apparaître une réplique fonctionnelle de la réalité, ce qui le rend plus difficile à utiliser spontanément.

Une première analyse sur le type de graphisme produit révèle que de nombreux tableaux et calcul/chiffre sont utilisés dans les solutions. Les calculs et les chiffres sont partie intégrante de la résolution de problème en mathématique. Ce sont les tableaux de données produits dans la représentation initiale de la situation qui attirent l'attention et ils se retrouvent dans les trois catégories de problème. La rétrospection de plusieurs élèves indique l'importance d'écrire les données en abordant un problème écrit avant de passer à la résolution, procédure inculquée par plusieurs enseignants dans les classes de mathématique. L'importance attachée à la représentation première de la situation avant de résoudre le problème se retrouve dans de nombreux travaux (Levine, 1988; Rubinstein, 1986). De nombreux indices dans les protocoles viennent vérifier ce principe. Il est alors essentiel de penser qu'une procédure plus adéquate qu'un tableau de données, représentant fonctionnellement la situation, peut être enseignée.

De même, une deuxième analyse sur l'organisation des éléments identifiés corrobore l'apport d'une Graphie Contextuelle fonctionnelle explicite ou implicite pour réussir. En effet, un graphisme est produit lors de la lecture sélective dans 57 des 72 solutions analysées. C'est le graphisme contenant une représentation initiale symbolique et diagrammatique qui mène au plus haut niveau de succès. Le graphisme de nature uniquement symbolique mène plus souvent à l'échec, mais il faut dire qu'il est plus souvent retrouvé lorsqu'un principe abstrait d'inclusion est à représenter. Des 15 élèves qui ne dessinent pas à la lecture du problème, ceux qui réussissent ont un modèle implicite et concret de la situation ou un plan d'action pour la résolution du problème. Quant au graphisme de nature diagrammatique (GCD), il mène au succès dans les situations où il correspond analogiquement à la situation-problème. Les didacticiens en mathématique (Lesh, 1985; Polya, 1967; Silver, 1985b; Schoenfeld, 1987) stipulent que le succès dépend de la qualité du modèle mental de la situation et les présents résultats nous donnent des indices empiriques de ce qu'ils entendent par "qualité".

Des distinctions particulières au genre ressortent de cette analyse, plus de garçons réussissent en géométrie où ils reconnaissent que la figure géométrique représente plus spontanément les situations problèmes dans ce domaine. Les filles réussissent mieux dans la résolution des problèmes de distance, cependant les représentations sont surtout des vecteurs assez primitifs. Il faut se demander si la représentation vectorielle prend autant d'importance que la figure géométrique dans le programme d'étude. Des différences entre les garçons et les filles se retrouvent également en relation avec la forme de représentation de la situation initiale. Les garçons ont plus de succès dans les problèmes moins complexes en n'utilisant aucune graphie.

Des résultats intéressants pour les didacticiens en mathématique apparaissent suite à l'observation des habiletés en mathématique. Le graphisme accompagne l'activité mathématique des élèves classés comme fort en mathématique seulement lorsqu'ils ne comprennent pas ou ne réussissent pas. Au moment où ils réussissent, ils n'utilisent qu'une Graphie Mathématique et, s'ils sont experts, ils n'utiliseront alors que la Graphie de Solution. Le recours à l'écrit ne semble pas nécessaire à ces élèves comme il le serait pour d'autres. Chose intéressante à noter : les forts seulement semblent pouvoir réussir en ne produisant pas de représentation diagrammatique. Cette particularité peut être une manifestation du déclin de l'encouragement au graphisme avec l'avancement de la scolarisation, c'est-à-dire, plus on est habile moins on a besoin du dessin. Cependant, c'est plus acceptable de dessiner en géométrie, considérant la spontanéité des élèves forts à construire une figure géométrique pour solutionner avec succès les problèmes de géométrie. Les élèves classés comme faibles en mathématique expriment une difficulté à former des images mentales. De nombreuses recherches montrent que les images mentales représentent une réalité pour la majorité des gens (Kosslyn, 1990; Shepard & Cooper, 1992; Simon & Hayes, 1976). D'autres recherches montrent les différences individuelles qui existent quant à la capacité à former des images mentales : 10 à 12% des gens rapportent avoir de la difficulté à susciter la formation d'images mentales ou ne pas pouvoir le faire. Dans certaines expériences qui exigent du sujet qu'il forme et opère sur des images mentales, certains sujets prennent plus de temps à répondre que les autres (Paivio, 1978).

Les effets attendu par le niveau de scolarisation ne sont pas évidents. Il est vrai qu'il y a plus d'échecs au niveau de 8e année et les 10e année ont plus de succès en géométrie, mais il faut encore se demander quels sont les facteurs les plus influents. Certains facteurs ont été identifiés : complexité du problème, premier ou deuxième essai, inhibition causée par la présentation de l'expérimentatrice, etc. Des obstacles sont difficiles à classifier, tels ceux qui ne veulent faire que des calculs, pour eux l'application d'algorithmes c'est ça la mathématique et les obstacles conceptuels exigent une analyse en soi.

Les conclusions tirées sont confirmées par les faits, il y a démarcation dans le graphisme entre les deux grandes étapes de résolution de problème : la compréhension et la résolution. La recherche fréquemment obsessionnelle d'algorithmes remplace la procédure de construction de la représentation de la situation-problème surtout chez les élèves d'habileté faible en mathématique ou lorsque la situation est trop abstraite. Le modèle mental est souvent en contradiction avec l'écrit. L'essentiel du travail d'analyse du chapitre suivant sera d'identifier la fonction de ce qui est écrit, ce qui permettra de saisir l'interaction complexe entre la nature du graphisme et les raisons qui ont menées à sa production.

CHAPITRE 5

LES RÉSULTATS ET LES INTERPRÉTATIONS SUR LA FONCTION DU GRAPHISME

L'analyse des résultats tente de reconstruire le processus de résolution d'un problème et de retracer l'évolution de ce processus en fonction de l'utilité du graphisme produit en recourant à de continuelles vérifications des faits. C'est à ce niveau détaillé de l'analyse, le détail des actions susceptibles d'indiquer **quelles sont les intentions** du sujet - c'est-à-dire la fonction qu'il attribue au graphisme - que les composantes fonctionnelles émergent tout au long d'un même protocole. La grille de ces composantes fonctionnelles (chapitre 3, Tableau 4) a servi à coder 72 solutions.

L'interprétation des résultats est intimement liée aux particularités propres aux contextes de chaque problème. Les domaines choisis pour la présente recherche touchent un champ très vaste de la mathématique : la théorie des ensembles, la géométrie et la distance. En conséquence, les différences fonctionnelles doivent être interprétées selon les problèmes à résoudre.

Dans un premier temps, une comparaison des répartitions de fréquences des composantes fonctionnelles pour le genre, le succès, l'habileté et l'ordre de présentation des problèmes est exposée dans le cadre de l'approche choisie. Pour mieux comprendre les résultats obtenus, il est essentiel de les mettre en relation avec les résultats sur la nature du graphisme. C'est ce qui motive, dans un deuxième temps, une comparaison des résultats sur la fonction du graphisme avec les observations recueillies sur la nature du graphisme du chapitre 4. Dans cette perspective, les interprétations se solidifient et de nouvelles pistes de recherche apparaissent. Une synthèse des résultats vient clore ce chapitre sur la fonction du graphisme.

La comparaison des répartitions de fréquences des composantes fonctionnelles selon les paramètres fixés

Le Tableau 14 présente les répartitions de fréquences des composantes fonctionnelles en relation avec le domaine mathématique et le genre. Le pourcentage de solutions dans lesquelles le graphisme joue un rôle particulier est un bon indicateur de la fonction dominante des graphismes. L'examen des résultats en rapport avec le genre sera discuté plus loin.

La fonction dominante du graphisme

Un rapide coup d'oeil sur le Tableau 14 révèle que le graphisme sert à maintes activités dans la résolution des problèmes. Le graphisme sert principalement à la compréhension du problème (57 sur 72 solutions ou 79% des solutions) et ensuite de support pour l'exécution ou le rappel de procédures (56 solutions ou 78% des solutions). Ceci rejoint les deux grands volets de la résolution de problème, la compréhension et la solution, déjà identifiés et reconnus par de nombreux chercheurs (Dunker, 1945; Newell & Simon, 1972; Polya, 1967). Le graphisme joue aussi un rôle plus modéré (53% des solutions) pour la mise en évidence d'un but/sous-but. Quant aux autres composantes fonctionnelles, le graphisme remplit ces fonctions dans moins de 31% des solutions.

Tableau 14

Fréquence de solutions mettant en relation les composantes fonctionnelles selon la catégorie de problème et le genre

Composante fonctionnelle	Distance		Géométrie		Inclusion		TOTAL %
	Garçon (n=14)	Fille (n=10)	Garçon (n=12)	Fille (n=12)	Garçon (n=12)	Fille (n=12)	
Compréhension du problème	10	9	10	8	9	11	**79**
Support à l'analyse	1	–	7	4	2	3	**24**
Stratégie de résolution	2	4	9	3	1	3	**31**
Stratégie de récupération	1	1	4	1	–	1	**11**
Support affectif	–	–	1	3	–	–	**6**
Support pour le rappel ou l'exécution	10	6	10	8	11	11	**78**
Mise en évidence de relations	3	7	4	2	2	1	**26**
Vérification locale	3	6	3	2	1	3	**25**
Mise en évidence d'un but/sous-but	5	7	11	4	3	8	**53**
Vérification globale	–	3	–	1	3	1	**11**
TOTAL	**35**	**43**	**59**	**36**	**32**	**42**	

Note. n = nombre de solutions (2 par sujet).

En ce qui concerne les composantes fonctionnelles dominantes, la production de graphisme dans le but de comprendre le problème et d'aider à l'exécution ou au rappel de procédures apparaît de façon comparable dans toutes les catégories de problèmes des trois domaines (entre 6 et 11 solutions dans chacun des 6 sous-groupes, considérant le domaine et le genre). Sur la base de ces résultats globaux, des précisions sont apportées telles qu'elles se présentent dans les protocoles. Ces derniers sont choisis pour leur clarté et leur représentativité. Des liens aux recherches existantes émergent.

Son rôle important dans la compréhension du problème

Si certains élèves passent beaucoup de temps à brouillonner en essayant de comprendre le problème, d'autres passent rapidement à l'application de procédures mathématiques. En fait, 79% des sujets cherchent à comprendre les problèmes présentés à l'aide d'un graphisme. Un compte rendu tabulaire du temps dissociant compréhension et application de procédures est pratiquement impossible si on considère la rapidité avec laquelle les élèves alternent entre les deux processus. Des études plus spécifiques sur la compréhension de texte et la compréhension de problèmes écrits, montrent le pouvoir de la visualisation pour comprendre (Bransford & Johnson, 1973; Levine, 1988; Rubinstein, 1986). D'une part, les essais ne semblent pas toujours efficaces, c'est-à-dire ne permettent pas toujours à l'élève de "voir" ce qui se passe (écrire les données sous forme de tableau, figure géométrique en plan pour visualiser une chambre en perspective, etc). D'autre part, des brouillons plus ou moins sophistiqués mènent à la compréhension du problème (exemples à la Figure 5 du chapitre 4). En reliant ces résultats avec la réussite et les caractéristiques du graphisme produit, il sera possible d'élaborer sur cette composante fonctionnelle importante.

Son rôle important dans l'exécution et le rappel de procédures

Il n'est pas surprenant de voir les résultats du Tableau 14 sur la fonction du graphisme comme support pour l'exécution et le rappel de procédures (78% des solutions). En prenant des notes écrites, surtout en mathématique où le matériel est technique, il est tentant d'utiliser un papier et un crayon pour suppléer aux limites de la mémoire à court terme. Ce résultat vient appuyer les recherches sur les habiletés mnémoniques (Broadbent, 1971; Kahneman, 1973; Norman, 1976) où des modèles sur l'attention ont été développés et qui montrent la possibilité d'étendre les capacités de la MCT en recourant à différentes modalités sensorielles.

Selon Wood (1993) et Schoenfeld (1985b), la méthode d'enseignement privilégiée en mathématique, surtout au secondaire, en est une de règles et de procédures: les manuels, les administrateurs, les guides pédagogiques et le testing contribuent à cette image de l'enseignement de la mathématique. Comme les enseignants veulent couvrir le programme, il est tentant d'enseigner des algorithmes, car cela va plus vite et est facile à évaluer; il est plus difficile d'enseigner comment penser de façon analytique. L'influence de ce type d'enseignement transparaît dans le protocole d'une élève pour qui l'application des règles, telles qu'enseignées, inhibe la résolution du problème : elle essaie de faire la figure lors du deuxième problème, mais elle dessine la figure seulement après avoir terminé la résolution du problème. Elle dit vouloir faire exactement comme ses professeurs lui ont dit de faire, à savoir, écrire les données avant de solutionner le problème et chercher la bonne formule dès le départ (#02, G1, 65-66). Une autre élève déclare sans hésiter qu'écrire les données, ce n'est pas essayer de "comprendre le problème":

> S: Non, j'ai lu, **j'ai écrit les données** puis après ça j'ai relu, relu le problème, pour essayer de le comprendre (#20, G2, 398-400).

Il semble que les élèves passent plus de temps au volet solution qu'au volet compréhension. Ceux qui ont des difficultés et qui persistent dans le volet compréhension ont de meilleurs chances d'atteindre le but fixé (la solution du problème). Par exemple, le sujet 16, qui essaye de solutionner un problème d'inclusion (I1) est un exemple convaincant de l'utilité de prendre le temps nécessaire pour comprendre. Elle consacre 2 minutes et 47 secondes à la première étape de résolution, c'est-à-dire à la compréhension, pour ensuite trouver une solution correcte en 2 secondes. De nombreux comportements tout au long de l'analyse viennent préciser le fait que la période consacrée à la compréhension est la plus importante pour arriver à une solution cohérente, surtout dans les problèmes d'inclusion où les calculs sont simples.

<u>Son rôle dans la mise en évidence d'un but ou sous-but</u>

La mise en évidence d'un but/sous-but apparaît dans 53% des solutions. Souligner, encercler, utiliser la symétrie, etc, sont souvent des actions reliées à une méthode de travail et elles peuvent aussi être intégrées au programme mathématique de certains enseignants. Dans les protocoles étudiés, ces actions deviennent des indices de la planification (mise en évidence d'un sous-but), à savoir où "j'en suis", surtout pour les problèmes qui exigent plusieurs opérations. Par exemple, une élève évite de se perdre dans des pages de calculs en numérotant les sous-buts atteints (chaque surface à peindre) :

> S: Ouais, j'avais écrit le côté [ayant trouvé la surface de deux côtés et réalisant qu'elle doit en ajouter plusieurs autres] mais j'ai réalisé qu'il y avait trop de côtés. Puis je me suis dit bien je vais lui mettre des chiffres [étiquetant chaque côté]. (#42, G2, 617-621).

Quant à la mise en évidence du but final, ce comportement semble intégré à la routine de la résolution de problème mathématique pour l'ensemble des sujets. Le repérage aisé de ce comportement dans le graphisme en a fait d'ailleurs l'objet de la "Graphie de Solution" (chapitre 3, épisodes retracés dans l'identification des composantes fonctionnelles).

En résumé, le graphisme joue un rôle prépondérant dans la compréhension du problème. Il accompagne souvent l'exécution de procédures, de même qu'il sert à indiquer des buts atteints. C'est dans l'exploration des paramètres liés à ces fonctions que viennent s'attacher les autres composantes fonctionnelles.

Les composantes fonctionnelles et le genre

Le Tableau 14 présente aussi la fonction du graphisme en relation avec la variable genre. Il ressort que les garçons produisent plus souvent un graphisme quand ils solutionnent les problèmes de géométrie (59 cas pour les garçons contre 36 cas pour les filles). Cette différence entre garçons et filles est plus prononcée lorsque le graphisme sert de stratégie de résolution, de stratégie de récupération et de mise en évidence d'un but/sous-but. Les filles produisent plus souvent un graphisme dans les problèmes de distance (43 cas pour les filles contre 35 cas pour les garçons), même si l'échantillon inclut 14 solutions produites par les garçons et 10 solutions produites par les filles. Ici aussi, la différence se situe au niveau des stratégies de résolution; de plus, le graphisme produit par les filles dans les solutions des problèmes de distance sert dans la mise en évidence de relations et dans le processus de vérification locale et globale. Il y aurait aussi une tendance générale pour les filles à produire plus fréquemment un graphisme dans les problèmes d'inclusion surtout en ce qui a trait à la mise en évidence d'un but/sous-but (8 filles pour 3 garçons). Les différences fonctionnelles qui apparaissent entre garçons et filles sont plus faciles à interpréter à la lumière du type de graphisme produit (relation entre nature et fonction) de la section suivante.

Il est important de considérer la relation entre les composantes fonctionnelles et le genre, en adoptant une perspective d'analyse des fréquences d'utilisation du graphisme puisqu'un élève peut produire un graphisme et ne plus s'en servir pour atteindre une solution. Les données du chapitre 4 examinées dans cette optique ne montrent que peu de différence. Ici cependant, comme le montre le Tableau 15, des différences se manifestent lorsque les composantes fonctionnelles sont mises en relation avec le genre et la catégorie de problème. Plus particulièrement au niveau de l'ordre d'apparition des composantes fonctionnelles, à l'inverse des résultats rapportés avec les fréquences de solutions, le graphisme joue un rôle premier pour le rappel ou l'exécution et non pour la compréhension du problème. Ce renversement s'explique, du moins en partie, par les activités de résolution (applications de procédures mathématiques) qui s'étendent sur une plus longue période de temps. Une autre différence qui apparaît dans cette optique est que le graphisme prend presqu'autant d'importance dans son rôle de stratégie de

Tableau 15

Fréquence d'utilisation du graphisme mettant en relation les composantes fonctionnelles selon la catégorie de problème et le genre

Composante fonctionnelle	Distance		Géométrie		Inclusion		TOTAL
	Garçon (n=14)	Fille (n=10)	Garçon (n=12)	Fille (n=12)	Garçon (n=12)	Fille (n=12)	
Compréhension du problème	18	20	41	35	13	19	**146**
Support à l'analyse	1	–	24	7	2	3	**37**
Stratégie de résolution	2	7	36	19	2	4	**70**
Stratégie de récupération	1	1	7	1	3	1	**14**
Support affectif	–	–	–	3	1	–	**4**
Support pour le rappel ou l'exécution	38	22	60	43	28	33	**224**
Mise en évidence de relations	7	24	11	8	1	1	**52**
Vérification locale	3	13	6	2	1	3	**28**
Mise en évidence d'un but/sous-but	7	11	34	7	4	9	**72**
Vérification globale	–	4	–	1	3	1	**9**
TOTAL	**77**	**102**	**219**	**126**	**58**	**74**	

résolution que dans son rôle de mise en évidence d'un but/sous-but (72 occurrences et 70 occurrences respectivement) : le graphisme semble faciliter l'émergence de stratégies de résolution surtout dans les solutions des problèmes de géométrie. Effectivement, si la figure géométrique fournit une représentation adéquate de la situation-problème, l'élève s'en sert tout au long de la résolution.

Suite à ces résultats, il faut conclure qu'il existe une différence entre garçons et filles quant à la fonction du graphisme produit et que cette différence relève du domaine mathématique à l'étude. De plus, le graphisme produit dans les solutions des problèmes de géométrie peut faciliter le choix de stratégie de résolution. Des interprétations supplémentaires apparaîtront en reliant les résultats sur la nature du graphisme avec ceux sur sa fonction.

Les composantes fonctionnelles et le succès

Les problèmes écrits en mathématique exigent une solution qui colle à la réalité de la situation présentée en respectant le nombre de restrictions posées. Les résultats regroupés dans une perspective de solution correcte intègrent les différents rôles identifiés. Le Tableau 16 met en relation les composantes fonctionnelles et le succès à trouver une solution cohérente à la situation. Les résultats montrent que l'utilisation de graphisme mène souvent au succès dans les problèmes de distance et de géométrie. En effet, pour ces deux catégories, les solutions correctes s'accompagnent de l'utilisation de graphismes dans presque le double des situations : en distance, le graphisme remplit une fonction 52 fois dans la recherche d'une solution correcte par opposition à seulement 26 fois dans les tentatives où une solution trouvée est fausse; en géométrie, 58 fois lors de tentatives qui

Tableau 16

Fréquence de solutions mettant en relation les composantes fonctionnelles selon le succès ou l'échec dans le domaine

Composante fonctionnelle	Distance		Géométrie		Inclusion		TOTAL %
	échec (n=13)	succès (n=11)	échec (n=13)	succès (n=11)	échec (n=12)	succès (n=12)	
Compréhension du problème	11	8	9	9	11	9	**79**
Support à l'analyse	1	–	3	8	2	3	**24**
Stratégie de résolution	–	6	4	8	2	2	**31**
Stratégie de récupération	–	2	2	3	–	1	**11**
Support affectif	–	–	2	2	–	–	**6**
Support pour le rappel et l'exécution	7	9	9	9	12	10	**78**
Mise en évidence de relations	2	8	1	5	2	1	**26**
Vérification locale	2	7	2	3	2	2	**25**
Mise en évidence d'un but/sous-but	3	9	4	11	6	5	**53**
Vérification globale	–	3	–	1	3	1	**11**
TOTAL	**26**	**52**	**37**	**58**	**39**	**36**	

mènent au succès comparativement à 37 fois où les tentatives mènent à l'échec. Ce patron apparaît plus clairement lorsque l'élève cherche une stratégie de résolution, met en évidence des relations ou met en évidence un but/sous-but, et ce pour les deux domaines de géométrie et de distance. Évidemment, dans une solution cohérente, les possibilités de recourir à une stratégie de résolution ou de mettre en évidence des buts sont plus élevées.

Le graphisme apporte une plus grande chance de succès et ceci se vérifie plus particulièrement dans les solutions des problèmes de distance lorsque l'élève vérifie soit localement (sept succès comparativement à deux échecs) ou globalement (trois succès pour zéro échec). Dans le cas particulier des solutions des problèmes de géométrie, on constate que le graphisme est utilisé comme support à l'analyse (huit succès comparativement à trois échecs). En ce qui a trait aux solutions des problèmes d'inclusion, l'utilisation d'un graphisme ne semble pas influencer le rendement (36 et 39 solutions). Dans ce domaine, le graphisme apparaît utile surtout pour les trois composantes fonctionnelles dominantes : la compréhension, l'application de procédures et la mise en évidence d'un but/sous-but. Une interprétation plus en profondeur de ces résultats sera possible lorsque ces derniers seront placés dans un contexte réunissant la fonction à la nature du graphisme.

En ce qui concerne l'utilisation du graphisme produit, à savoir si l'élève se sert du graphisme qu'il a produit pour atteindre une solution, la relation entre les composantes fonctionnelles et le succès à trouver une solution est présentée dans le Tableau 16a (Appendice E). Les données indiquent les mêmes distinctions qu'au Tableau 15 au niveau de l'ordre d'apparition des composantes fonctionnelles, c'est-à-dire que l'utilisation du graphisme comme support pour l'exécution est plus apparent que son support pour la compréhension. De plus, dans la catégorie inclusion, si une plus grande utilisation du graphisme apparaît dans les solutions correctes, cette différence est minimale.

Ce premier dégagement des effets qu'entraîne l'utilisation de graphisme sur le succès dans la résolution des problèmes incite à s'interroger sur les différents rôles par domaine. Un rôle important dans l'émergence des stratégies de résolution, de même qu'un rôle dans la mise en évidence de relation, d'un but/sous-but, ressort dans les problèmes de géométrie et de distance. Le graphisme sert plus spécifiquement en distance, à la vérification locale et globale; en géométrie, il supporte plus spécifiquement l'analyse. Pourquoi le graphisme ne joue-t-il pas le même rôle dans la résolution des problèmes d'inclusion? C'est en ajoutant à ces données de base les résultats de l'analyse sur la nature du graphisme que les interprétations se confirment et que les réponses surgissent.

Les composantes fonctionnelles et l'habileté en mathématique

À l'ensemble des paramètres rapportés jusqu'à maintenant, il faut rajouter l'habileté des élèves en mathématique. Les données présentées regroupent les élèves de 8e et 10e année. D'une part, les variations minimales du rendement entre les deux niveaux et la taille de l'échantillon justifient cette démarche. On voit que, pour le groupe faible, cinq des huit élèves qui suivent une séquence Échec (É) - Échec (É) dans la séquence expérimentale sont en 8e année. De même pour le groupe fort, quatre des sept élèves qui suivent la séquence Succès (S) - Succès (S) sont en 8e année. D'autre part, les caractéristiques les plus marquantes sont liées à l'habileté en mathématique (fort, moyen, faible) et non au niveau de scolarisation.

Le Tableau 17 regroupe les fréquences de solutions selon l'habileté en mathématique des différents groupes, ceci en relation avec les catégories de problèmes. Ces regroupements indiquent que les forts utilisent le graphisme dans 95 occurrences (total des occurrences dans les trois domaines), les moyens dans 82 occurrences et les faibles dans seulement 66 occurrences. De même, le succès est lié à l'habileté : chez les forts, 18 solutions sont correctes sur 24 (somme des succès dans les trois domaines); chez les moyens, 10 solutions sont correctes; et chez les faibles, 6 solutions sont correctes. Une variation particulière au groupe faible en mathématique apparaît. En effet, ces élèves utilisent le graphisme autant que les deux autres groupes pour comprendre et analyser la situation (20 solutions où le graphisme est utilisé pour la compréhension et 6 solutions où le graphisme sert de support à l'analyse), ce qui indiquerait que les difficultés rencontrées à ce stage de la résolution ne peuvent être surmontées afin d'arriver à une solution. Une autre caractéristique qui ressort du Tableau 17 se rattache au groupe moyen dans les solutions géométriques. Ces élèves utilisent plus souvent que les autres le graphisme comme stratégie de résolution (six solutions pour trois dans chacun des deux autres groupes) et de récupération (trois solutions pour une), dans les solutions des problèmes de géométrie. Est-ce qu'utiliser ce qui est écrit pour "voir" et restructurer facilite le cheminement vers une solution? Dans le même ordre d'idée, il est à noter que les forts utilisent plus que les autres groupes le graphisme comme stratégie de résolution pour solutionner les problèmes de distance.

Tableau 17

Fréquence de solutions mettant en relation les composantes fonctionnelles selon la catégorie de problème et l'habileté en mathématique

Composante fonctionnelle	Distance			Géométrie			Inclusion		
	F	M	f	F	M	f	F	M	f
Compréhension du problème	7	4	8	6	8	4	5	7	8
Support à l'analyse	–	–	1	4	4	3	1	2	2
Stratégie de résolution	4	1	1	3	6	3	2	1	1
Stratégie de récupération	1	1	–	1	3	1	–	–	1
Support affectif	–	–	–	1	1	2	–	–	–
Support pour le rappel ou l'exécution	5	7	4	7	7	4	8	6	8
Mise en évidence de relations	6	2	1	3	1	1	2	–	1
Vérification locale	4	4	1	2	3	–	–	1	3
Mise en évidence d'un but/sous-but	5	6	1	7	6	2	4	2	5
Vérification globale	3	–	–	1	–	–	3	1	–
SUCCÈS	**7**	**3**	**1**	**6**	**3**	**2**	**5**	**4**	**3**
TOTAL	**35**	**25**	**17**	**35**	**37**	**20**	**25**	**20**	**29**

Note. F = fort; M = moyen; f = faible.

L'influence qu'apportent l'ordre de présentation des problèmes et les interventions pédagogiques permet, tout en tenant compte de la séquence expérimentale établie, de mieux interpréter les résultats en fonction des habiletés en mathématique. Un relevé des différentes séquences est présenté au Tableau 18. Une séquence déterminante pour l'analyse est celle qui apparaît lorsqu'un sujet propose une mauvaise solution pour le premier problème, qu'ensuite l'expérimentatrice intervient avec une représentation écrite sur le comment trouver une solution correcte, et que finalement, l'élève présente une solution correcte au deuxième problème (É - S). Cette séquence apparaît dans neuf cas (25%). Ces situations représentent l'effet facilitateur sur le résolveur lorsqu'une solution correcte est présentée au moment opportun. En solutionnant un problème, l'élève qui veut réussir est toujours à l'affût d'un plan meilleur. Il réagit face à la réalisation soudaine d'un fait important tel la symétrie ou la concordance dans un problème. Un tel fonctionnement n'est pas complètement planifié et les plans peuvent être modifiés à la lumière de nouvelles informations ou de nouvelles connaissances. Schoenfeld (1983) parle d'une approche dirigée par les événements ("event driven"), telle celle proposée par Hayes-Roth et Waterman, en 1978 ("planification opportuniste"). Schoenfeld considère qu'un modèle permettant une reconceptualisation parfois radicale est nécessaire dans la résolution de problèmes en mathématiques. D'autres auteurs (Nguyen-Xuan & Richard, 1986) parlent de l'importance de la restructuration de la représentation. Ils avancent que l'étudiant peut modifier sa façon de conceptualiser la procédure de résolution. Il est juste de penser que les élèves répondant avec succès à un deuxième essai, sans être des élèves d'habileté élevée, viennent confirmer ces hypothèses.

Tableau 18

Fréquence des séquences Succès-Échec pour les deux problèmes à résoudre

Habileté	Problème 1	Problème 2	Distance	Géométrie	Inclusion
Fort	É	É	–	1	–
	É	S	–	–	2
	S	É	1	–	1
	S	S	3	3	1
Moyen	É	É	1	2	–
	É	S	2	2	1
	S	É	–	–	3
	S	S	–	1	–
Faible	É	É	3	3	2
	É	S	1	–	1
	S	É	–	–	–
	S	S	–	1	1

Il reste le cas des solutions échouées suite à une représentation cohérente construite soit par l'élève ou l'expérimentatrice (S - É). Suite à des interventions pédagogiques (le rappel du but, l'encouragement à représenter le problème, la présentation d'un graphique, l'identification et le "debugging" d'une ou plusieurs conceptions erronées) ou suite au succès rencontré dans la résolution du premier problème, il est attendu que les élèves réussiront mieux dans un deuxième essai. Ces élèves n'étant pas jugé pour leur bonne ou mauvaise réponse, il est espéré que ceci contribuera à l'intérêt ou le désir de résoudre le deuxième problème.

Dix-sept élèves (47% des solutions représentant un échec au deuxième essai) n'ont pas réussi à trouver une solution cohérente à la suite d'une représentation correcte pour le premier problème. Huit de ces 17 élèves se situent dans le groupe faible et il apparaît donc que ces élèves n'apparaissent pas prêts à bénéficier d'une présentation structurée. Il faut croire que les schèmes déjà existants n'accommodent pas la présentation du premier problème (Larochelle & Désautels, 1990; Sternberg, 1988). Pourquoi de nouvelles connaissances ne s'intègrent-t-elles pas aux connaissances acquises? Des indices aident à répondre à cette question : problème mal défini, génération d'hypothèses fausses, incapacité à coordonner l'information, information manquante ou partielle, etc; sans oublier qu'une fausse conception peut être logique et sophistiquée. Ces résultats amplifient l'importance du moment choisi de la présentation afin de bénéficier d'une information structurée. Il est à noter que, suite à des interventions pédagogiques plus ou moins longues, neuf de ces problèmes ont été résolus. En résumé, ces résultats signalent que le niveau d'acceptation ou de préparation de l'élève est plus important que la scolarisation ou l'habileté en mathématique.

Jusqu'à maintenant, deux composantes fonctionnelles n'ont pas été discutées, c'est-à-dire, la vérification globale et le support affectif. Des considérations théoriques correspondent étroitement aux résultats plus discrets, elles sont autant susceptibles à une heuristique pour d'autres recherches que les conclusions tirées de l'émergence des composantes fonctionnelles dominantes. Le discours des cas non-significatifs complètent ainsi l'éventail des composantes fonctionnelles avant de résumer cette partie de l'analyse sur la fonction des graphismes.

Il est intéressant de noter que le graphisme sert à vérifier globalement dans seulement 11% des cas (Tableau 14). Cependant, il y a plus souvent (25% des solutions) processus de vérification locale par l'usage de graphismes produits dans la Graphie Contextuelle. C'est souvent à la suite de cette vérification locale et explicite que la Graphie Contextuelle sert de stratégie de récupération. Le temps nécessaire à un processus de vérification globale semble manquer. Un élève en parle ouvertement dans l'étape de rétrospection :

> E: Est-ce que tu revérifies tes problèmes d'habitude comme ça? [...]
> S: Bien ça dépend si j'ai le temps, d'habitude je le fais là
> E: Oui
> S: Puis après ça je le fais puis je fais toutes mes autres problèmes dedans mes tests là, mais si je suis à la maison puis c'est mon dernier problème la plupart du temps c'est le dernier problème, bien là je vais les réviser là
> E: hm, hm, parce que là tu as du temps
> S: ouais
> E: puis en classe tu n'as pas toujours le temps
> S: oui c'est ça. J'ai les révise quand je peux j'essaie de les réviser le plus souvent là parce que sinon je peux faire plus d'erreurs. (#35, D1, 104-128).

Même après encouragement et provocation à vérifier la solution finale, ceci ne semble pas tellement important pour les élèves. En effet, une question de niveau de confiance dans la réponse trouvée provoque un processus de vérification pour 35 des 72 solutions. Parmi ces 35 solutions, 8 élèves utilisent un graphisme pour vérifier. Les caractéristiques de la "Graphie de Vérification" sont relevées plus loin dans l'analyse.

Un autre cas extrême qui demande réflexion est celui où le graphisme sert de support affectif (6% des solutions) et ce, uniquement dans les solutions des problèmes de géométrie (Tableau 16). L'affect semble crucial dans la résolution de problème de mathématiques. Seule une analyse détaillée des paramètres affectifs dans la résolution de problème (voir McLeod et Adams, 1989) permettrait de faire ressortir cette variable dans ce corpus de données. Cette analyse situerait des précisions et des interprétations aux jonctions entre les processus cognitifs extraits des protocoles (Tableau 3, chapitre 3). Comme le décrit si bien Mandler (1985), les réactions affectives interfèrent avec les fonctions cognitives. Dans la même ligne de pensée, Schoenfeld (1987) parle des croyances de l'étudiant qui déterminent le contexte psychologique dans lequel il choisira les ressources et les contrôlera pour solutionner un problème. Les résultats rassemblés ici sur la variable affective n'incluent que les verbalisations affectives explicites. Une analyse plus complète exige l'observation des réactions affectives au niveau des expressions faciales et langagières, de même qu'une analyse de contenu des interviews de rétrospection. L'enregistrement sur vidéo et les entrevues fournissent amplement d'information sur cette variable. Des expressions comme "ah", "loaded" ou "wow" sont des indices de courts-circuits, mais il est cependant difficile d'interpréter uniquement sur une base verbale. La méthode d'analyse choisie ici ne donne pas une image complète du support affectif qu'a pu apporter le graphisme. Par exemple, le sujet 10 qui dit "même moi je ne comprends pas" (#10, G1, 284) serait une subtilité très importante à noter lorsque l'analyse de la variable affective est en cours; ou encore, un relevé de la persévérance chez certains élèves : "j'aime ça faire les maths puis je le sais que je vais réussir si j'essaie encore" (#10, G1, 293-295). Sans oublier que les activités cognitives sur lesquelles est basée l'analyse prennent leur source dans les protocoles concourants, beaucoup de réaction affective viennent à la suite de la résolution lorsque le rétrovisionnement prend place.

En résumé, l'analyse sur la fonction du graphisme produit en solutionnant des problèmes écrits en mathématique mène à la reconnaissance de ce graphisme pour comprendre le problème, supporter l'analyse, supporter le rappel ou l'exécution de procédures mathématiques et indiquer les buts atteints. En ce qui concerne les domaines à l'étude, le graphisme joue un rôle visible dans la mise en évidence de relations et dans la vérification locale de ce qui est fait dans les solutions des problèmes de distance. Par contre le graphisme construit dans les solutions géométriques remplit une fonction plus précise aux volets de compréhension, de support à l'analyse et des stratégies de résolution et de récupération. En ce qui a trait aux solutions des problèmes d'inclusion, le graphisme est utilisé pour comprendre le problème et appliquer des procédures; cependant il remplit peu d'autres rôles. Enfin, une différence déjà identifiée apparaît entre les garçons et les filles selon le domaine : le graphisme se prête plus facilement à la résolution des problèmes de géométrie pour les garçons et il est utilisé plus fréquemment par les filles dans la résolution des problèmes de distance.

Dans les solutions étudiées, le graphisme mène au succès surtout lorsqu'il sert de stratégie de résolution ou sert à mettre en évidence des relations, ou sert à mettre en évidence des buts/sous-buts. Il est juste de penser qu'un graphisme cohérent avec la situation-problème est une aide précieuse aux processus de résolution qui mènent au succès. En général, le graphisme est plus utilisé par les élèves habiles en mathématique. Cependant, dans les situations où une représentation graphique structurée est présentée lors de la résolution d'un problème complexe (D2, G2, ou I2), le niveau d'acceptation de l'élève est mis en jeu et non pas le niveau d'habileté en mathématique. De même, lorsqu'un graphisme est produit pour comprendre le problème, peu importe le niveau d'habileté en mathématique; ce comportement semble spontané et mérite d'être souligné pour le didacticien de la mathématique.

Des réponses émergent à la suite de cette analyse. Premièrement, ce qui est gribouillé pour solutionner des problèmes mathématiques sert à "voir" et, plus important encore, le graphisme sert maintes fois à "restructurer" le plan de résolution. Deuxièmement, le graphisme est régulièrement utilisé pour rappeler ou exécuter des procédures mathématiques. Enfin, un niveau de connaissances approprié est nécessaire afin de bénéficier d'une représentation planifiée par l'expérimentateur mais ce niveau de préparation ne correspond pas au niveau d'habileté identifié par les enseignants. Les résultats présentés jusqu'à maintenant sont limités aux différents rôles du graphisme, ils ne permettent pas par eux seuls, de répondre facilement à la question de savoir pourquoi le graphisme mène à ces résultats. Conséquemment, on pourra tirer des significations plus profondes en établissant, d'une part les correspondances entre les types de graphismes et ce à quoi ils servent; en relevant d'autre part, dans les protocoles verbaux et visuels, ce qui dans le graphisme sert à inhiber ou à faciliter la résolution.

La relation entre la nature et la fonction du graphisme

Lorque l'on se pose la question de savoir quelle est la nature et la fonction du graphisme produit en solutionnant des problèmes écrits en mathématique, des patrons émergent à travers les fréquences d'utilisation et d'apparition de ces graphismes. Il s'agit ici maintenant de rapprocher les patrons issus de l'analyse sur la typologie des graphismes produits menant à l'exploration de la représentation initiale des sujets (chapitre 4) avec ceux qui apparaissent au cours de l'analyse sur la fonction des graphismes produits. Les correspondances s'effectuent par la mise en parallèle des composantes fonctionnelles avec les caractères types du graphisme qui les accompagne.

La fonction et la typologie des graphismes produits

Dans un premier temps, les interprétations apportées se confirment si on établit les rapports entre les éléments du graphisme qui apparaissent fréquemment dans la résolution des problèmes et leur rôle dans cette résolution. Le Tableau 19 récapitule ponctuellement les combinaisons types du graphisme concomitantes aux composantes fonctionnelles. Les combinaisons qui ont émergé suite à l'application de la typologie sont présentées et ce sont : la figure géométrique, le diagramme de Venn, le vecteur, les tableaux, les calculs/chiffres et les propositions/mots.

L'utilisation du calcul et de chiffres pour faciliter le rappel ou l'exécution de procédures ou d'information domine (205 occurrences). Le pouvoir convaincant des chiffres s'ajoute ici aux interprétations précédentes telles : les élèves passent plus de temps à la résolution qu'à la représentation de problème, l'obsession avec les calculs, etc.

Tableau 19

Fréquences d'utilisation des types de graphisme dominants en relation avec les composantes fonctionnelles

Composante fonctionnelle	Figure	Diagramme	Vecteur	C & C	Tableau	P & M
Compréhension du problème	70	7	24	15	44	–
Support à l'analyse	28	3	–	6	8	–
Stratégie de résolution	54	2	7	10	13	–
Stratégie de récupération	8	–	1	–	–	–
Support affectif	3	–	–	1	–	1
Support pour le rappel ou l'exécution	8	–	1	205	36	5
Mise en évidence de relations	4	–	3	16	35	5
Vérification locale	1	1	–	23	6	1
Mise en évidence d'un but/sous-but	3	–	–	38	7	32
Vérification globale	1	1	2	9	2	–

Note. Figure = carré, rectangle, polyèdre en perspective, polyèdre en développement;
Diagramme = diagramme disjoint, diagramme non-disjoint;
Vecteur = vecteur, vecteur gestuel;
C & C = calcul continu, calcul ponctuel, calcul gestuel, chiffre;
Tableau = tableau verbal, tableau quantitatif;
P & M = proposition/mot.

Reliées au domaine, les figures géométriques sont les plus utilisées pour la compréhension du problème (70 occurrences). En effet, le dessin d'une chambre, d'un carré ou d'un rectangle présente visuellement des points, des lignes, des surfaces ou des corps connus et il semble porter en lui-même ses propres définitions et relever de l'évidence. Mais, dans le dessin d'un vecteur ou encore d'un diagramme de Venn pour représenter la distance ou le concept d'inclusion, on substitue aux objets dont on parle des symboles conventionnels sur lesquels on opère mathématiquement. Ainsi perçues, les qualités représentationnelles de la figure géométrique serviraient d'évidence dans le processus d'analyse (28 occurrences) et faciliteraient l'émergence d'inférences et de prédictions, voire de stratégies de résolution (54 occurrences). L'association du type de graphisme avec sa fonction explique non seulement comment une figure géométrique, conforme à la situation-problème, aide à comprendre le problème mais aussi son rôle important dans le processus d'analyse et son rôle facilitateur dans l'émergence de stratégies de résolution et de récupération. Le rôle important de mise en évidence de relations/buts/sous-buts, identifié dans les solutions réussies des problèmes de géométrie (Tableau 16) prend la forme de calculs et de propositions/mots.

L'examen de la nature du vecteur utilisé pour essayer de comprendre le problème (24 occurrences)montre que le dessin inclut non seulement un diagramme dirigé comme présenté plus haut, mais aussi des objets du réel (gare, trains, automobiles). La graphie contextuelle produite pour quatre de ces solutions se retrouve dans les Figures 5 et 8; les deux graphies non reproduites contiennent, l'une, le dessin rudimentaire d'une automobile et l'autre le dessin de deux trains. Ceci permet d'avancer qu'une représentation initiale de la situation-problème, intimement liée aux objets dont on parle dans le texte, sert de stratégie de résolution (9 occurrences, Tableau 15) et mène au succès (6 solutions réussies, Tableau 16). Les rôles de mise en évidence de relations et de la vérification locale, identifiés dans les problèmes de distance, apparaissent sous forme de tableaux, de calculs ou de chiffres accompagnant le vecteur.

Le diagramme de Venn étant rarement produit il ne peut servir à la compréhension ou à l'analyse ou encore jouer un rôle dans le choix de la stratégie de résolution. Dans l'examen de l'effet de la présentation d'un diagramme de Venn par l'expérimentatrice, on observe que ce diagramme facilite la résolution d'un deuxième problème à condition que ce deuxième essai soit plus facile. Certains élèves ont en effet réalisé, suite à une représentation diagrammatique par l'expérimentatrice, qu'ils peuvent représenter spatialement et matériellement un objet en deux endroits simultanément. Ici encore, on réalise que la représentation initiale d'un problème écrit doit faire le lien entre l'évidence et la formalisation mathématique. Ce fait permet de répondre à la question posée suite aux premières conclusions sur les effets qu'entraîne l'utilisation de graphisme sur le succès dans la résolution des problèmes : Pourquoi est-ce que le graphisme sert moins souvent de stratégie de résolution dans les solutions des problèmes d'inclusion? On pourrait croire que les difficultés rencontrées en voulant établir un lien entre le concret et l'abstrait empêche la production d'un graphisme qui supporterait l'analyse ou aiderait à choisir une stratégie de résolution ou de récupération.

Les tableaux sont souvent utilisés pour comprendre le problème, voir le Tableau 19 (44 occurrences), ils ne mènent cependant pas au succès lorsqu'ils servent de représentation initiale. Écrire les données sous forme de tableau, comme il est souvent conseillé de faire, est une représentation trop formalisée, trop loin du contexte pour vraiment engendrer un processus fructueux de résolution. Les commentaires retrouvés dans la rétrospection de certains élèves dépeignent précisément ce que l'on entend par "loin du contexte" :

> E: Pourquoi tu l'écrivais? [en regardant l'élève écrire son tableau de données]
> S: Bien je voulais juste comme, de, m'en rappeler pour faire sûr.
> E: Fais-tu toujours ça?
> S: Ouais (#37, D1, 191-195).

L'engagement dans le problème (Levine, 1988) n'est pas accompli. Le graphisme ne serait pas le reflet d'une vision intérieure (il n'essaie pas de s'imaginer ce qui se passe) mais il copie ce qui lui a été enseigné. Ou encore le sujet 20 qui dit :

> S: Non, j'ai lu, j'ai écrit les données puis après ça j'ai relu, relu le problème, pour essayer de le comprendre (#20, G2, 398-400).

Cet élève ne dispose pas de ressources de "contrôle" (Schoenfeld, 1985b) efficaces pour sélectionner un processus de récupération après la sélection d'une mauvaise approche à la résolution du problème. Il lit et relit continuellement le texte. C'est seulement après des encouragements de l'expérimentatrice, qu'il utilise le dessin d'une chambre pour enfin comprendre. Dans le seul cas où le vecteur sert de stratégie de récupération (Tableau 19), un tableau accompagnait le vecteur produit dans la représentation initiale. Dans une telle situation, le tableau sert de carte de route pour le plan de résolution. Les tableaux sont efficaces lorsqu'ils servent de support pour le rappel d'information ou l'exécution de procédures (36 occurrences), ou encore pour mettre en évidence des relations (35 occurrences).

La plus grande utilisation de propositions ou de mots par les élèves de 10e année peut s'expliquer ici en regard de leur fonction. En effet, dans 32 cas comparativement à 5 ou moins pour les autres composantes fonctionnelles, les propositions et les mots servent à mettre en évidence les buts ou les sous-buts, ce qui est souvent accompagné de chiffres (38 occurrences); ce qui rejoint la primauté du graphisme dans un rôle de mise en évidence du but final (Graphie de Solution). Ce comportement intégré à la routine de résolution se manifeste en écrivant la réponse dans une phrase complète comme le demande souvent les enseignants. Ceci explique aussi la plus grande utilisation de mots et propositions par les élèves de 10e année, puisqu'ils réussissent plus souvent à solutionner le problème et/ou atteindre des sous-buts dans la solution.

En résumé, un graphisme construit autour d'indices relevant de l'évidence remplit une fonction essentielle dans l'atteinte d'une solution cohérente avec la situation-problème. Les techniques, les formules et les représentations recherchées de l'enseignant ne remplissent pas de fonction importante dans la résolution des problèmes écrits présentés. C'est alors dans la représentation contextuelle étudiée que l'on termine l'analyse sur la fonction du graphisme.

La fonction et les types de représentations initiales

Ultimement, l'observation du caractère organisationnel des éléments graphiques identifiés mis en relation avec la fonction du graphisme contribue à l'explication progressive des différents comportements. Le Tableau 20 aide à mieux situer le cheminement actuel de l'analyse et les interprétations qui suivent. Les composantes

Tableau 20

Fréquence des composantes fonctionnelles en relation avec le type de représentation initiale produite

Composante fonctionnelle	AGC	GCS	GCD	GCS&D	**Total**
Compréhension du problème	–	35	83	28	**146**
Support à l'analyse	–	3	30	4	**37**
Stratégie de résolution	–	5	57	8	**70**
Stratégie de récupération	–	–	10	4	**14**
Support affectif	–	–	4	–	**4**
Support pour le rappel ou l'exécution	57	58	78	31	**224**
Mise en évidence de relations	9	3	28	12	**52**
Vérification locale	7	9	9	3	**28**
Mise en évidence de but/sous-but	8	19	38	7	**72**
Vérification globale	1	4	2	2	**9**
Total	**82**	**136**	**339**	**99**	656
Représentation % des solutions correctes	**11**	**10**	**17**	**10**	

Note. AGC = Aucune graphie contextuelle;
GCS = Graphie contextuelle symbolique;
GCD = Graphie contextuelle diagrammatique;
GCS&D = Graphie contextuelle symbolique et diagrammatique.

fonctionnelles sont confrontées aux caractéristiques générales extraites de la représentation initiale écrite. C'est là que s'opère la relation la plus utile et ce sont les fréquences des composantes fonctionnelles qui font apparaître le nombre de fois où le type de graphisme a servi à cette fonction. Ce sont les protocoles verbaux et visuels qu'il faut explorer pour découvrir "pourquoi" le graphisme a pris cette forme.

Le Tableau 20 met en évidence les types de graphismes utiles et efficients pour la résolution du problème. L'examen rapide des résultats indique que le graphisme renfermant une Graphie Contextuelle Diagrammatique est non seulement celui que l'on utilise le plus souvent (339 occurrences comparativement à 136 ou moins) mais aussi celui qui est associé le plus souvent à la réussite (17% des solutions). Les autres types de graphisme (symbolique, intégration du symbolique/diagrammatique et aucune représentation contextuelle) ne mènent à la réussite que dans 10% et 11% des solutions. Les solutions sans Aucune Graphie Contextuelle révèlent peu en ce qui a trait à la représentation initiale de la situation-problème; dans les solutions qui combinent le symbolique et le diagrammatique, on ne peut facilement distinguer ce qui sert à quoi; c'est pourquoi l'information qui permet d'expliquer plus clairement ce qui mène au succès ou à l'échec est tirée des protocoles des deux groupes de sujets ayant produit des GCS et des GCD.

Les difficultés apportées par une Graphie Contextuelle Symbolique

Les problèmes d'inclusion dominent la catégorie des graphies symboliques (14 des 24 solutions, Tableau 8). Un examen attentif des protocoles des solutions échouées pour le Problème 12 (8 des 14 solutions) montre que ces élèves ne savent pas dessiner des ensembles et sous-ensembles, et qu'ils ne tiennent pas compte souvent de la quantité qui cause le chevauchement des données :

> S: ... Oui parce que dans ces 700 là, le 150 est compris. 150 de ces 700 élèves là y ont choisi 2 langues, puis y sont pas en sciences (#16, I2, 257-259).
>
> S: Oui. Si y en 400 en espagnol, 300 en anglais puis parmi ces élèves ici là y en a 150 qui ont choisi les deux ... Normalement le 150 y va rien affecté dans le problème là (#25, I2, 155-158).

Dans les solutions du Problème I1, les sujets 16 et 36 sont les deux seuls élèves qui réussissent à comprendre le chevauchement des données. Les deux autres, les sujets 7 et 38 résolvent le problème en voyant trois ensembles distincts tandis que le sujet 43 essaie de répartir proportionnellement le 150, sans réussir à trouver une solution cohérente. En somme, ces trois derniers sujets s'amusent avec les chiffres pour qu'ils tombent juste et si deux réussissent avec une représentation simple de la situation, le troisième ne réussit pas.

Pour les problèmes d'inclusion réussis, la compréhension du principe mathématique semble souvent arriver tout à coup. Par exemple le sujet 16 décrit sa frustration lorsqu'elle essaie de comprendre :

> S: ..mais souvent je comprends puis après ça je l'oublie, je comprends pu, puis je comprends, puis je comprends pu. C'est comme ça quand je fais mes mathématiques surtout. À la maison là j'me fâche (#16, I1, 217-220).

Les élèves expliquent que ce qu'ils voient au départ dans les situations des problèmes d'inclusion : ce sont les objets ou les personnes dont on parle. Dans la période de rétrovisionnement, le sujet 16 décrit sa représentation initiale comme suit :

S: Oui "so" y fallait pas que je n'envoie... non c'était la même personne mais je pensais qu'il y en avait comme.. le mari était propriétaire, la femme était professeure, fallait pas qu'y'envoient 2 brochures, c'est ça que je pensais (#16, I1, 102-106);

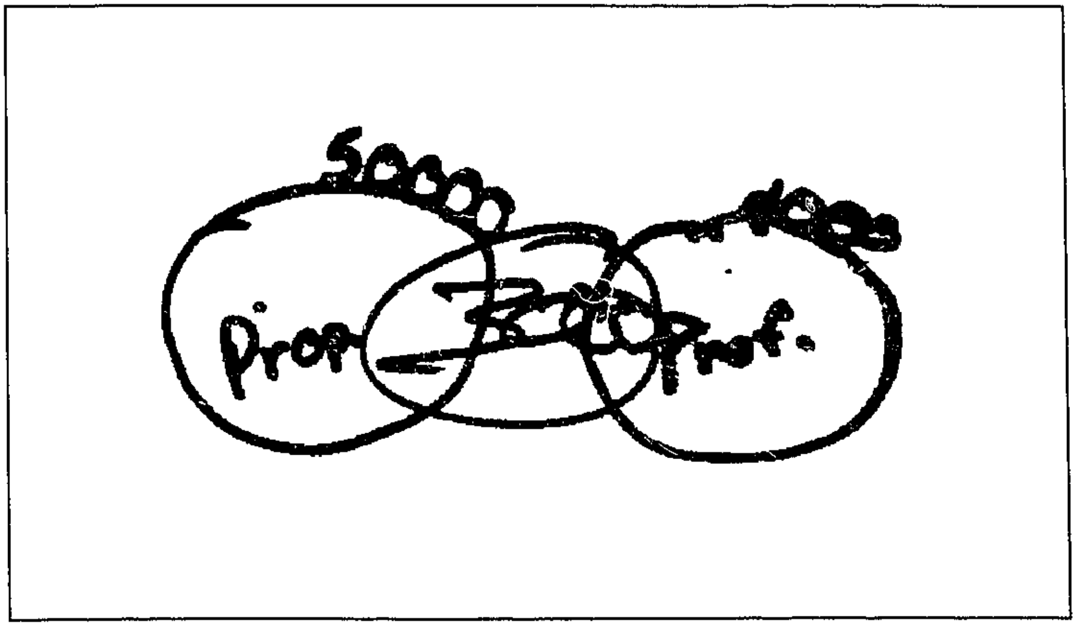
En rétrospection, lorsque l'expérimentatrice encourage le dessin pour comprendre, plusieurs élèves dessinent des objets ou des personnes :

E: Qu'est-ce que tu voulais faire?
S: J'étais pour, comme l'affaire que je voulais faire, j'avais pensé à faire un dessin plein de personnes là (#21, I1, 279-282).

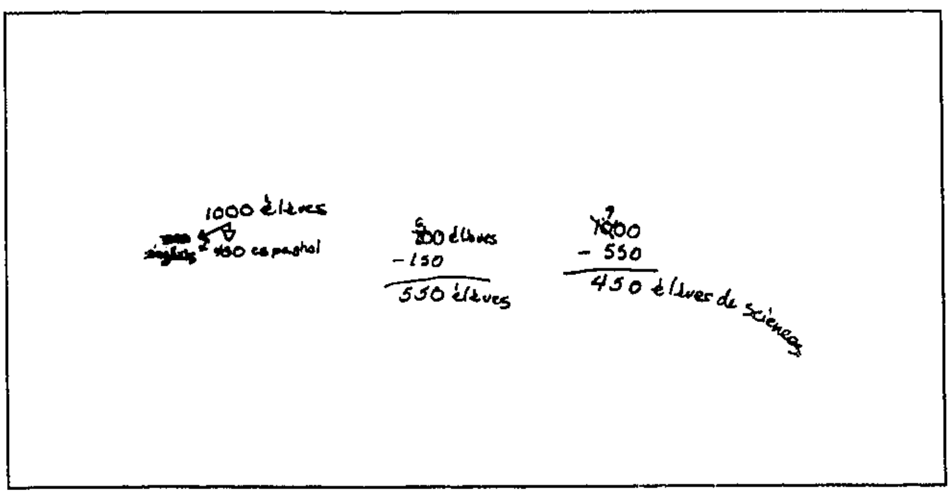
D'autres essaient de passer à un symbolisme plus formel, tel le sujet 28 qui essaie de représenter la situation sous forme d'histogramme ou le sujet 36 qui dessine des tartes. La présentation d'un diagramme de Venn ne déclenche pas l'utilisation d'un diagramme pour un deuxième problème d'inclusion plus complexe même chez les élèves d'habileté élevée en mathématique; c'est seulement dans les situations où le deuxième problème est plus facile que le diagramme est produit pour aider à trouver une solution cohérente :

E: ça t'a pas tenté de faire un diagramme comme tantôt?
S: Je pense jamais à faire des dessins. Je l'écris toujours à place (#16, I2, 369-272).

Ou encore, le sujet 17, dans son deuxième problème, essaie de copier la représentation formelle d'un diagramme de Venn. Elle a beaucoup de difficultés avec un troisième cercle car elle veut que son diagramme ressemble à celui de l'autre problème qui était plus complexe (elle avait réussi en utilisant une GCS, Figure 12); elle réussit le Problème 11 en joignant le troisième cercle aux deux ensembles (Figure 12).



#17, I1, Graphie Contextuelle Diagrammatique



#17, I2, Graphie Contectuelle Symbolique

<u>Figure 12</u>. Graphies Contextuelles d'une élève essayant d'utiliser un diagramme de Venn suite à une présentation par l'expérimentatrice.

Les avantages apportés par une Graphie Contextuelle Diagrammatique

C'est dans les solutions des problèmes de géométrie que l'on retrouve le plus grand nombre de graphismes diagrammatiques (13 des 23 solutions, Tableau 8). En examinant ce que ces élèves ont "vu" alors qu'ils essayent de comprendre le Problème G1, on constate qu'ils commencent tous (réussi et non-réussi) en dessinant un carré et un rectangle. La séquence de production qu'ils adoptent pour dessiner ferait en elle-même l'objet d'une analyse. On peut supposer qu'il est plus facile pour les élèves de représenter une figure géométrique en deux dimensions qu'en trois dimensions, surtout si on considère qu'une représentation plane (sur papier) est considérée comme partie intégrante de la résolution d'un problème de géométrie. Le seul problème où un modèle contextuel uniquement symbolique n'est pas utilisé est le Problème G1. Une interprétation possible de cette non-occurrence serait liée au fait que la représentation est en 2D et non en 3D comme le Problème G2 en géométrie. Une représentation en 3D est plus difficile car il y a une représentation spatiale qui inclut la profondeur. Le lien avec la réalité est là :

E: Qu'est-ce que tu voyais? voyais-tu une chambre?
S: Je voyais une chambre vide avec, je savais qu'il y avait deux portes puis [pause] (#10, G2, 67-68).
E: Regarde bien ... Là est-ce que tu voyais le plancher?
S: Non mais je voyais la bordure et puis le tour (#10, G2, 109-112).

E: tu as vu toute suite que la largeur qui se trouvait à être sur le plancher
S: parce que je sais qu'il n'y a pas de, une porte il qui a 2m de largeur et 80 cm de hauteur (#10, G2, 127-131).

Une élève qui voit sa chambre au départ réalise que ce modèle nécessite des modifications :

S: Oui mais ma chambre est carré, est pas [incompréhensible] mais en tout cas.
E: Okay.
S: Ça fait des petites modifications (#42, G2, 414-417).

S: Ah 2 fois. Ce que je voulais faire, c'est à cause que je pensais que j'aurais pu faire l'aire du plafond puis du euh..
E: ..puis du plancher..
S: Puis du plancher en même temps. Mais j'me suis dit tu peintures pas le plancher (#42, G2, 564-669).

Même si l'activité de brouillonner pour comprendre un problème est spontanée (Gardner, 1980; Silver, 1985b; van Sommers, 1984), certains élèves l'ont utilisée plus que d'autres. En rétrovisionnant le Problème G2, on peut noter l'influence du cours de dessin industriel chez cette élève :

S: Je sais pas nous autres on vu ça comme un, j'ai pris un [...] en industriel, j'avais bien en anglais c'est "Woodshop".
S: Puis là tu faisais tes dessins de même fait que là tu mets ta hauteur de même.
E: Ah oui.
S: Mais c'est qu'après ça quand tu l'a mis là [manquait de place sur la première acétate, a dû lui en donner une deuxième pour terminer ses calculs], là j'étais toute perdue dans mes choses (#42, G2, 352-362)..

Elle admet encore comment elle s'y perd : (454-456)

E: Puis t'as fait ta hauteur comme ça.
S: Ouais moi je l'ai mis de côté par exemple, ça c'est pour ça que c'était plus mélangeant.

Le sujet 50, lui aussi, a pris un cours de dessin industriel et sa perspective n'est pas la perspective de face à l'horizontal que l'on adopte naturellement (Figure 6).

L'examen de la représentation initiale est enrichi par les observations tirées des situations des problèmes de distance (8 des 24 solutions où un GCS est produite) et des situations des problèmes de géométrie (2 des 24 solutions où un GCS est produite).

Pour les problèmes de distance, ceux qui n'ont pas réussi le Problème D1 (deux élèves) n'ont pas fait de lien entre la situation physique présentée dans le problème et ce qu'ils écrivent :

> E: à quoi tu pensais
> S: à additionner [rires] euh, ... (#11, D1, 251-252).
>
> E: Dis-moi à quoi tu penses.
> S: Je pense pas à grand chose en ce moment. (rires) Bien j'essaie de figurer c'est quoi... okay mais le 750 là je multiplie ou que je fais quelque chose avec le 250 ou je le soustraie ou quelque chose pour trouver dans comment de temps il arriverait (rires) (#49, D1, 62-73).
>
> E: Pourquoi tu l'écrivais? (référant aux données écrites sous forme de tableau)
> S: Bien je voulais juste comme, de, m'en rappeler pour faire sûr (#37, D1, 191-205).

Cette même élève admet "enfin comprendre" suite à une présentation diagrammatique (graphique contextuel cartésien) de l'expérimentatrice :

> E: Là est-ce que tu l'avais compris?
> S: Hm, hm. C'est quand tu as fait le troisième là, de trois heures là j'ai commencé à comprendre. (#37, D1, 315-317).

De même, ceux qui n'ont pas réussi le Problème D2, cherchent à trouver une réponse immédiate en jouant seulement avec les chiffres. Tel le sujet 31 qui manque surtout de persévérance et qui admet vouloir abandonner lorsque les calculs n'arrivent pas justes. Le sujet 33, lui, ne fait aucun effort pour réfléchir et son jeu avec les chiffres reflète de sérieux problèmes de raisonnement mathématique : 100 km = 1 heure, donc 125 km = 1 heure et 25 minutes.

Pour les problèmes de géométrie, ici encore, les deux élèves qui ne réussissent pas en utilisant un modèle contextuel symbolique rencontrent des difficultés de même ordre que celles rencontrées par les élèves qui précèdent : ils ne peuvent dessiner une figure en trois dimensions et ils veulent faire des calculs. Après encouragements de l'expérimentatrice, le sujet 20 dessine la chambre, Figure 9 (projection cavalière) tandis que le sujet 2 justifie son manque de représentation de la situation par ses habiletés à jouer avec les nombres :

> S: c'est ça là moi, comme on va dire que il y a juste les nombres là, je suis capable de le faire. Mais quand il y a des, hm, les mots là comme je viens de faire [incompréhensible] je me suis mélangé (#02, G2, 84-88).

Pour les problèmes d'inclusion, il ressort de ce rapprochement entre la nature et la fonction du graphisme dans la compréhension du problème, que plusieurs élèves ignorent la complexité ou qu'ils s'amusent avec les chiffres. Dans la résolution des problèmes d'inclusion, pour ceux qui réussissent, disent-ils, c'est un "flash"; lorsqu'ils parlent de leur vision de la représentation initiale de la situation-problème, ils voient les objets à classifier; lorsqu'ils essaient de représenter graphiquement cette représentation initiale, ils utilisent un formalisme inopérant pour la situation représentée. Pour les problèmes de distance, il semble qu'il est plus facile de copier ce qui a été enseigné et de suivre les procédures ou de prétendre que l'on comprend en passant aux calculs. Pour les problèmes de géométrie, eu égard au nombre limité de sujets dans cette catégorie, la représentation en 3D semble impossible pour ces élèves. Pour tous les domaines à l'étude, l'inférence semble trop grande entre l'application (la réalité) et le formalisme (Peck & Jencks, 1988).

Synthèse et conclusions

La fonction principale du graphisme dans les trois domaines correspond aux étapes de la résolution de problème : compréhension, exécution de procédure et mise en évidence du but à atteindre. En effet, les élèves essaient de comprendre (79% des solutions) en utilisant un graphisme quelle que soit leur habileté en mathématique; cependant les essais ne sont pas toujours efficaces. En établissant les rapports entre les éléments du graphisme et leur rôle, un lien avec la réalité est nécessaire pour mener à une solution correcte. L'analyse des protocoles correspondants aux solutions réussies montre que la représentation initiale reproduisant des objets du réel sert non seulement à comprendre mais qu'elle sert ensuite de support à l'analyse (surtout dans les solutions des problèmes de géométrie) et enfin qu'elle facilite le choix de stratégies de résolution et de stratégies de récupération.

Le dessin d'une figure géométrique est un processus spontané dans la résolution des problèmes de géométrie présentés. Le dessin d'un vecteur accompagné d'objets ou d'un tableau servant de plan d'action permet aux sujets d'appréhender les situations des problèmes de distance et d'en faire **leur** problème. Quant à la représentation de l'inclusion, il est improbable qu'un sujet exprime spontanément son modèle mental du problème par le dessin d'un diagramme de Venn. Les élèves qui ont réussi, tout aussi bien que ceux qui n'ont pas réussi, ne savaient pas comment représenter sur papier le monde physique qu'ils voyaient. Pour les trois domaines observés, le graphisme incohérent (incohérence entre le modèle mental et la situation-problème) n'est pas utilisé pour solutionner le problème. Il faut aussi noter qu'au moment où des tableaux servent à mettre en évidence des relations, ils représentent alors, du moins en partie, le plan d'action, mais ils ne remplacent pas une représentation initiale de la situation servant à comprendre.

Circonscrire le sens des différences liées au genre exige d'autres types d'observations systématiques de cette variable. La représentation graphique fait appel aux habiletés spatiales, sensorielles, linguistiques, mathématiques et mnémoniques de l'élève. Les résultats tirés des expériences présentées ici, se rattachent surtout aux différences fonctionnelles par domaines. En effet, les garçons ont plus de facilité à construire des figures géométriques représentationnelles. C'est un procédé que certains ont même perfectionné, par exemple, dans les cours de dessin industriel (même les filles). Les dessins idiosyncrasiques produits par les filles en essayant de comprendre les problèmes de distance sont ceux qui mènent au succès. Il reste cependant à établir les sources spécifiques des obstacles rencontrés : les difficultés sémantiques s'intercalent visiblement dans les impossibilités de représentation du monde physique, et, de plus, l'étudiant peut dès le départ et pour des raisons affectives ne pas en faire **son** problème.

Quant au rôle que joue le graphisme pour le rappel et l'exécution de procédures, de même que pour la mise en évidence d'un but/sous-but, il se caractérise de façon régulière par des chiffres et des calculs. Il est surprenant de ne pas y retrouver des formules et des techniques plus élaborées surtout au niveau de la 10e année. Le support pour le rappel d'information ou de procédures mathématiques remplace la compréhension surtout chez les élèves faibles ou lorsque la représentation initiale est trop éloignée du contexte. Le graphisme inclut de nombreux calcul, chiffres, mots ou propositions lorsque le sujet veut mettre en évidence le but final atteint (Graphie de Solution) ou des sous-buts surtout lorsqu'il y a beaucoup d'opérations à exécuter.

Il faut encore s'interroger sur le processus de révision à la suite de l'atteinte du but dans la résolution d'un problème. La Graphie de Révision est rarement produite, est-ce qu'il serait efficace de l'intégrer à un procédé graphique de résolution? Au moment où toutes ces distinctions sont bien établies, le problème qui demeure est que l'élève confond les correspondances entre sa représentation concrète de la situation-problème et celle présentée par l'enseignant : les chiffres ne servent plus qu'à décrire les états successifs des transformations mathématiques et inhibent souvent la résolution du problème.

Au cours d'examens successifs (protocole individuel, représentation graphique, enregistrement vidéo, comparaison entre sujets) on voit émerger des interprétations et des descriptions des intentions du sujet face à la fonction du graphisme produit. Ce processus de va-et-vient continuel entre l'interprétation et la description rendu possible par l'enregistrement vidéo donnera une nouvelle perspective sur les actions pédagogiques à entreprendre de façon à aider l'élève (chapitre 6). En soulignant les différences dues aux particularités du contexte expérimental, on pourra aussi constater les convergences et les divergences de cette étude avec les recherches actuelles.

CHAPITRE 6

DISCUSSION DES PRINCIPAUX RÉSULTATS ET RECOMMANDATIONS

L'exploration d'une facette de la résolution de problème, celle de la représentation spontanée de problèmes écrits en géométrie, distance et inclusion, a permis d'identifier le rôle que joue cette représentation dans la solution du problème, pour des élèves de l'intermédiaire. Du même coup, il a été possible de dégager un ensemble de caractéristiques générales qui se manifestent lors d'une telle représentation, caractéristiques qui peuvent influencer le chercheur, le pédagogue et l'apprenant.

Nature et fonction de la graphie produite

La présente recherche a permis de faire le partage entre la graphie, souvent concrète, qui accompagne l'interprétation de la situation-problème et l'enregistrement de calculs et de chiffres qui accompagne la procédure de résolution. On peut conclure que le graphisme est souvent associé à la compréhension du problème (79% des solutions), mais qu'il ne mène pas nécessairement à une solution correcte. Le graphisme agit souvent aussi comme une extension à la mémoire (78% des solutions) mais il ne contient pas nécessairement les techniques enseignées. Les résultats empiriques obtenus viennent appuyer Levine lorsqu'il définit l'extériorisation graphique comme "le reflet d'une vision intérieure" - un essai de visualiser ce qui se passe lorsque le solutionneur essaie de comprendre et de solutionner un problème.

Les graphismes efficaces dans les situations particulières présentées apparaissent en trois phases. Dans une première phase, les données sont sélectionnées et projetées séparément dans le graphisme. Dans une deuxième phase, le graphisme est considéré comme un outil de réflexion, d'intégration : il prend une signification d'ensemble. La troisième phase est surtout évaluative et elle consiste à appliquer des procédures ou vérifier avec des graphismes plus techniques ou algorithmiques; ces graphismes se conjugent ensemble pour donner la solution finale.

Certains indices du graphisme relevés dans la première phase supportent les processus de résolution, tels les dessins ou symboles souvent primitifs, idiosyncrasiques ou propres à faire apparaître une réplique fonctionnelle de la réalité. Par contre, d'autres indices inhibent la résolution, tels les tableaux de données pour l'interprétation du texte ou les essais de copier des représentations déjà vues, soit dans les interventions pédagogiques de l'expérimentation, soit dans les classes de mathématique. Ce qui caractérise la première phase est le passage de la symbolique textuelle à une symbolique significative pour le lecteur. La deuxième phase ne prend place que dans les cas où la représentation particularisée fait le lien avec la situation externe. C'est alors que le graphisme sert à l'analyse, à l'inférence ou à la récupération lorsque le sujet se trouve dans une impasse. C'est le passage de la représentation significative au symbolisme mathématique qui mène à une solution.

L'étude empirique entreprise ici appuie les conclusions d'autres chercheurs. Larkin et Simon (1987), en parlant de la représentation d'une situation-problème sous la forme d'un diagramme, expliquent comment l'implicite, qui devient explicite, facilite l'inférence. De même, Davis, Jockhsch et McKnight (cités par Weinert & Kluwe, 1987) décrivent l'expertise dans la résolution de problèmes d'algèbre comme une progression de l'explicite à l'implicite. Schoenfeld (1985b) définit la compréhension de problèmes par une capacité de planifier; de là émerge son principe que la compréhension et la métacognition vont de pair. C'est ce que l'on retrouve lorsque le processus de résolution est d'abord visuellement guidé par l'écriture de résultats intermédiaires et que ceux-ci servent d'indices pour la planification de la solution. On a noté que chez l'expert, le processus de résolution est plutôt guidé par un schème général qui intégrerait possiblement le processus de planification.

Si Richard (1990) identifie la compréhension d'un texte-problème comme de la compréhension pragmatique c'est qu'elle a pour finalité la production d'une solution. Certes, pour les élèves essayant ici d'interpréter un texte dans lequel une quantité considérable d'information est implicite, tirer les inférences à partir de leurs connaissances n'est pas aussi simple qu'on le pense. Par exemple, une vision concrète de l'inclusion - des données qui se chevauchent - exige un très haut niveau d'inférence pour mener de la réalité (personnes, livres, cours, etc) au symbolisme mathématique (diagramme de Venn). C'est d'ailleurs ce que suggèrent les résultats qui ne montrent aucun graphisme fonctionnel produit spontanément par l'élève dans les solutions des problèmes d'inclusion. Dans les situations où un diagramme apparaît, on constate que c'est à la suite d'interventions pédagogiques préalables (Tableaux 12 et 13, chapitre 4) et ce, sans considération des niveaux ou des habiletés. Enfin, les résultats montrent que la figure géométrique est une représentation qui facilite le passage de la symbolique textuelle à une symbolique mathématique en permettant l'analyse, l'inférence ou la récupération, dans le cas où l'élève se trouve dans une impasse.

La compréhension résulte non seulement de graphismes représentatifs de la situation concrète, mais aussi de graphismes idiosyncrasiques. Plus important encore, l'analyse des graphismes, remis dans l'ensemble du contexte expérimental, permet de distinguer entre les représentations particularisées de l'élève et les représentations planifiées de l'enseignant; de par leur nature respective, les unes ne peuvent remplacer les autres. L'analyse a permis d'identifier des particularités du graphisme qui mènent à la compréhension, telles celles utilisées par le sujet 17 lorsqu'elle dessine un troisième cercle (chapitre 5, Figure 12) pour représenter l'inclusion. Elle avait d'ailleurs utilisé avec succès un réseau de flèches pour réussir le premier problème sans intervention de la part de l'expérimentatrice. Les graphismes individualisés sont nombreux dans les solutions réussies.

Les difficultés rencontrées

Les difficultés principales apparaissent dans la perception de la réalité à capter dans un problème écrit. Le relevé des obstacles causés par la sémantique, le visuel/spatial et le conceptuel montre que la mise en oeuvre de stratégies de résolution d'un problème relève en grande partie de l'expérience individuelle.

Les difficultées sémantiques

La confusion apportée par une compréhension insuffisante du vocabulaire a fait l'objet d'études systématiques lorsque les pédagogues se sont efforcés d'expliciter les savoir-faire nécessaires à la mise en oeuvre des connaissances de chaque discipline sous la forme d'algorithmes (Landa, 1974). Les présents résultats ajoutent à ces études par le relevé des principaux obstacles rencontrés surtout dans le vocabulaire mathématique. Il est à noter que si le mot rencontré semble ambigu, l'ambiguïté ne s'arrête pas toujours là et qu'elle peut s'étendre à la perception spatiale/visuelle ou conceptuelle.

En **géométrie**, les termes "surface" (être géométrique) et "aire" (mesure de surface) sont indifféremment utilisés en mathématique. Par exemple, selon Barrat (1987), les êtres géométriques sont les points, les lignes, les segments, les figures planes, les solides, etc, et on doit bien connaître leur représentation et leur notation. L'aire d'une surface est le nombre d'unités contenues dans cette surface. Après les résultats obtenus, une distinction essentielle doit être apportée par le pédagogue s'il veut aider l'élève dans sa démarche de résolution de problème.

Il y a aussi une confusion entre les mots hauteur et largeur qui apparaît dans de nombreux protocoles. Il est parfois difficile de différencier l'ordre des difficultés rencontrées : est-ce une confusion sémantique ou un manque de perception spatiale? Par exemple, l'élève qui dessine la troisième dimension en développement plutôt qu'en perspective semble à certains moments confondre les mots volume et surface. Cependant, en rétrospection, elle justifie sa démarche en annonçant qu'elle va déménager et qu'elle essayait de copier les plans architecturaux de sa nouvelle maison (elle savait cependant dessiner une figure en perspective). Ces observations invitent le pédagogue à prendre conscience du vécu immédiat des élèves qui peut influencer la compréhension d'un problème écrit.

En **distance**, tous les élèves ne font pas face aux mêmes difficultés de compréhension car tout dépend de la façon d'aborder le problème. La compréhension du deuxième problème demande un transfert difficile de la symbolisation verbale à la symbolisation mathématique, ce qui rejoint les travaux de Kaput (1987) et Kaput et West (1991) sur les systèmes de représentation en mathématique. Par exemple, pour certains élèves, "un [train] va être à 100 kilomètres, l'autre va être à 60, puis ça va me donner 80 kilomètres, non ça va me donner 60 plus 100, 160 de différence"; il fallait additionner pour "voir la différence" entre les deux trains. Dans le même sens, la compréhension du premier problème exige le transfert de la symbolisation verbale "deux fois plus vite" à la symbolisation mathématique qui devrait être "multiplié par 2", cependant il faut diviser le temps par 2. Quelques faits saillants sur la notion de vitesse étudiée dans le cadre de la mécanique classique sont présentés plus loin avec les problèmes visuo-spatiaux rencontrés et aident à mieux comprendre l'incompatibilité apparente des mots.

En inclusion, les difficultés qu'apportent les mots sont nombreuses : cours, livres, élèves, sciences et langues, sciences et anglais/espagnol. Les élèves semblent vouloir simplifier la situation-problème en substituant un mot pour l'autre. De plus, il y a des obstacles visuels qui entrent en ligne de compte et qui seront discutés plus loin.

Les difficultées visuelles ou spatiales

Dans l'état actuel de la recherche sur les difficultés rencontrées lors de la représentation du monde physique, il est avancé que la représentation spontanée d'un texte problème préserve non seulement les formes et position relatives des objets (Kosslyn, 1975; Paivio, 1971; Shepard, 1971) mais aussi le caractère continu des développements et des transformations (Cordier et coll., 1990). C'est en effet ce qui est confirmé ici par les faits.

En **distance**, les conduites observées chez l'enfant concernant la notion de vitesse signalent que l'intuition la plus simple du concept est fondée sur une intuition d'organisation : "un mobile est à tout âge, conçu comme plus rapide qu'un autre, quand il le dépasse sur une trajectoire **parallèle** à la sienne" (Piaget, 1946, p. 113). Les résultats de la recherche de Tanaka (1971) sont compatibles avec l'hypothèse de Piaget concernant la notion de vitesse-dépassement : des enfants de 4-5 ans donnent une réponse exacte lorsque le mobile le plus rapide rattrape puis dépasse le mobile le moins rapide. Cette hypothèse expliquerait de manière plausible comment certains participants à la présente recherche ne pouvaient imaginer la séparation entre deux trains allant en directions opposées : ils n'auraient su se défaire de ce concept premier.

En **géométrie**, Jackendoff (1992) parle de la représentation spatiale dans deux sens : celui de Marr-Biederman, c'est-à-dire, l'orientation dans l'espace 3D ("visual representation") et celui du langage, c'est-à-dire, en pratique 2D, ("inherent representation"). Il donne comme exemple, "le bord du lac" qui, en 3D inclut la profondeur, et en 2D la surface. Ceci expliquerait le graphisme des élèves qui confondent largeur et hauteur car la confusion créée par les mots les mènent souvent à utiliser une perspective en développement plutôt qu'une perspective dans l'espace.

En **inclusion**, c'est aussi en fonction du rôle de l'espace et plus précisement d'images spatiales que Voelin (1976, cité dans Blanchet, 1981) tente d'expliquer les raisons des échecs ou des réponses curieuses osbservées lors de diverses situations de quantification de l'inclusion. Ainsi, les raisonnements fondés sur les images spatiales de collections disjointes expliqueraient l'existence de réussites précoces pour certaines questions, alors que simultanément des réponses erronées tiendraient pour possible qu'une sous-classe puisse dépasser en quantité la classe. Mais, qui plus est, une autre confusion semble surgir lorsque le sujet tient compte du fait qu'un même objet fait partie à la fois de la classe et de la sous-classe. En raison de représentations spatiales, le sujet considère aussi spatialement et matériellement l'appartenance à l'une ou l'autre des collections. Comme on ne peut placer un objet en deux endroits en même temps, les sujets considèrent que la question n'a aucun sens.

Les difficultées conceptuelles

La compréhension des mots et la visualisation du monde physique entraînent des difficultés conceptuelles. Les recherches sur l'acquisition des connaissances à partir des textes (Kintsch, 1986; Johnson-Laird, 1980) ont établi l'insuffisance des représentations de nature linguistique ou de structure textuelle pour la compréhension car la cohérence dépendrait davantage de la structure des connaissances de l'individu que de la structure du texte.

L'utilisation du vidéo permet d'identifier des conceptions erronées. Un exemple frappant qui met en cause la **distance**, en est le sujet 33 qui considère que 100 kilomètres est égal à une heure et non que 100 kilomètres est la distance parcourue en 1 heure. Son interprétation de "kilomètre à l'heure" entraîne le raisonnement qui suit : si 100 km = 1 heure, alors 125 km = 1h et 25, et 3 heures moins 125 km = 2 heures et 75 minutes. Des erreurs de ce genre exigent un temps de réflexion pour permettre de clarifier des notions de temps, de système métrique, etc. Est-ce qu'une expression utilisée aussi journalièrement que "kilomètre à l'heure" ne rejoint pas les réactions intuitives identifiées par McCloskey (1983) en physique? En **géométrie**, les raisonnements de même type se retrouvent avec les mètres de longueur, les mètres carrés et les mètres cubes.

En **inclusion**, il a été possible, dans certains protocoles, de retracer la cause d'un raisonnement erroné parce que l'interférence originait dans la présentation graphique de l'expérimentatrice. Par exemple, si les calculs impliquaient une soustraction et que le diagramme de Venn avait été présenté comme une addition de trois parties, ceci a créé une confusion ou vice versa. Il ressort d'un bon nombre de travaux (di Sessa, 1982; McCloskey, 1983; Viennot, 1979) que les idées intuitives sont difficiles à déraciner et que les étudiants s'appuient souvent sur leur théorie intuitive pour interpréter des notions nouvelles. De même, il est difficile de se défaire d'une représentation initiale erronée, comme dans les cas où les participants transforment la situation-problème pour qu'elle colle à leur représentation particularisée. Si cette représentation est associée avec l'échec il est aussi difficile de l'abandonner. Ceci rejoint aussi les études de Gruppen et coll., (1992) sur la qualité de la représentation initiale pour le diagnostic médical.

La méthodologie et la conceptualisation

Disposant d'hypothèses limitées sur la fonction de la graphie concourante à la résolution de problèmes écrits en mathématique, l'extraction de l'information par l'emploi de plusieurs méthodes a permis d'évaluer leurs avantages respectifs. Les données recueillies par verbalisation concourante couplées avec les données recueillies sur le comportement non verbal et la verbalisation rétrospective ont souvent conduit à combler plusieurs vides que l'on retrouve dans chaque méthode.

Aucune méthode n'est exempte de défauts; pourtant, certaines sont préférables à d'autres selon le problème à l'étude. Faire appel à des représentations externes construites spontanément par les élèves introduit deux difficultés majeures : la première parce que cette modalité nécessite de leur part une représentation interne bien construite, pour produire une représentation externe simple et concise; la seconde parce qu'on fait appel à des capacités graphiques, et que même si on a une représentation mentale claire et distincte, on peut être néanmoins malhabile à la dessiner ou la décrire. Ces observations rejoignent ce que Lesh (1985) constatait en parlant des conceptualisations primitives des idées mathématiques. Il conseille de ne pas chercher à influencer un système conceptuel instable (en développement) au profit de l'efficacité d'un système procédural stable et mature. La méthode et l'appareillage peuvent servir à l'identification de caractéristiques et de fonctions des graphismes dans la résolution de problèmes et guider l'enseignant en lui permettant de voir "comment" l'élève interprète ce qui lui sera enseigné. La représentation particularisée sera le début de l'explication.

C'est grâce à la méthode utilisée qu'il a été possible d'identifier certaines difficultés représentationnelles. Par exemple, les élèves qui réussissent rapidement fournissent des protocoles verbaux concourants très courts; c'est alors des indices externes (la graphie) et la rétrospection assistée qui permettent de prétendre à l'existence d'un plan d'action. D'autres élèves utilisent très peu la graphie et leurs verbalisations concourantes apportent alors souvent les descriptions de ce qu'ils voyaient ou planifiaient. Ces élèves admettent ne pas avoir su comment représenter par écrit ce qu'ils savaient. Enfin, il y a les élèves qui n'adoptent pas une perspective horizontale pour dessiner un cube, mais qui construisent un graphisme non conforme aux normes établies. C'est alors dans l'analyse de la rétrospection immédiate que l'on peut identifier les perspectives uniques adoptées.

De plus, la mise au point d'une méthode d'analyse d'information non verbale fournit un cadre d'analyse générale. Autant le visionnement facilite le sectionnement en épisode des protocoles verbaux, autant la verbalisation facilite le découpage des graphismes. Qui plus est, la richesse des interprétations prend sa source dans la triangulation des données. Il est possible de minimiser le niveau d'inférence des interprétations lorsque les résultats alternent entre la description et l'interprétation. En effet, il y a des moments où le protocole concourant ne capte pas les nuances nécessaires à l'interprétation et c'est alors souvent les comportements captés dans le protocole visuel qui assurent une interprétation plus judicieuse. Et vice versa, il y a des détails au niveau des processus de la pensée que seule la verbalisation concourante ou une rétrospection immédiate peuvent apporter. Les précisions et justifications fournies dans les interviews de rétrospection sont spontanées avec l'utilisation du vidéo qui permet une rétrospection immédiate "assistée", c'est-à-dire, fournissant des indices de rappel de la situation-problème.

Les retombées pédagogiques

Cette recherche est susceptible d'apporter aux éducateurs qui s'intéressent à l'enseignement intermédiaire de la mathématique, une analyse approfondie des questions les plus importantes sur la résolution de problèmes écrits et d'en dégager des perspectives pédagogiques. En particulier, l'étude du graphisme en tant que représentation spontanée des élèves peut intervenir dans une méthode d'enseignement de la mathématique. L'identification de caractéristiques de cette représentation permet d'aider les élèves à améliorer leurs techniques de résolution de problèmes, mais aussi peut leur permettre de réfléchir sur leur façon personnelle de s'approprier le savoir.

En considérant non seulement les suggestions d'auteurs tels Levine (1988) et Rubinstein (1986), mais aussi les résultats obtenus ici, il est possible d'encourager l'utilisation de la représentation graphique pour simplifier et faciliter la flexibilité (brainstorming, laisser de la place pour "l'impossible", les associations au hasard, les analogies, les métaphores et revenir au problème posé après avoir laisser passer un peu de temps). De concert avec Rubinstein, il faut souligner l'importance d'une représentation graphique comme outil dans la représentation d'un problème mais cependant, cet outil pour penser n'est pas un substitut pour la pensée.

La production d'une graphie peut être une stratégie de réflexion. Cette stratégie offre trois avantages : pour l'élève, elle rend l'information textuelle comprise explicite et pour l'enseignant, elle lui permet de comprendre plus facilement ce que l'élève perçoit comme important dans la tâche proposée car elle n'oblige pas à recourir aux questions "sondes" qui peuvent paraître menaçantes; et finalement, la situation revêt un caractère plus motivant pour les élèves. Cependant la validité d'une telle technique dépend de nombreux facteurs difficiles à contrôler dans une classe car il s'agit d'une approche plutôt individuelle. Les enseignants peuvent prendre en compte la nature idiosyncrasique de cette représentation en laissant le temps nécessaire à l'élève pour établir un pont entre sa réalité et la réalité du texte problème.

La façon d'aborder un problème écrit et l'adoption d'un premier plan de résolution semblent obéir à des règles difficiles à enseigner. La représentation de l'enseignant est celle qu'il croit claire, simple et concise; elle ne répond pas nécessairement à la réalité du moment pour tous ses élèves; bien voir et voir unanimement n'est pas la même chose. Au contraire, ce que l'on peut conclure suite à l'analyse, c'est que les habiletés graphiques sont souvent basées sur le vécu immédiat et qu'elles sont utilisées intuitivement. De plus, il semble y avoir un moment opportun pour la présentation d'un graphique formel. La présentation des brouillons de l'enseignant aux élèves peut s'avérer fructueuse.

C'est pourquoi on doit veiller à réduire les handicaps graphiques en proposant un temps consacré à la représentation de la structure du texte ce qui peut être interprété comme un encouragement à ne jamais perdre de vue le monde physique à considérer. L'enseignant peut rendre l'élève conscient de ses conceptions et le guider vers la production graphique pour faciliter sa démarche représentationnelle de compréhension.

La généralisation

Les conclusions tirées de cette étude sont applicables dans les limites précisées au chapitre 3 et pour les sujets pour lesquels elle a été mise en oeuvre, c'est-à-dire pour des sujets de 8e et de 10e année et pour les six problèmes solutionnés. Il faut ajouter que si l'analyse décrite s'inscrit dans le cadre général de résolution de problèmes, elle concerne principalement la représentation et la résolution de problèmes écrits en mathématique. Elle peut alors aider les enseignants à mieux situer les réactions de l'élève dans des tâches scolaires variées et les nombreuses variantes qu'elle présente mettent en lumière les pièges conceptuels et les difficultés pédagogiques et didactiques sur lesquels les enseignants ont souvent trébuchés. Elle permet aussi de poser en termes nouveaux le problème de la compréhension des problèmes écrits en mathématique.

Les nouvelles pistes de recherche

La concrétisation des termes du texte problème reformulée dans les termes du savoir propre à chaque élève (le graphisme) a permis de saisir un phénomène d'apprentissage à l'aide d'une méthode efficace pour guider le chercheur dans l'analyse et lui permettre d'offrir une rétroaction pratique pour le pédagogue. L'étude des graphismes construits au cours de la résolution de problème en mathématique est un domaine de recherche encore peu exploité. La présente étude pousse à proposer les points suivants qui pourraient faire l'objet de recherches futures.

- L'application de la typologie des graphismes et de la grille des composantes fonctionnelles à des graphismes produits en solutionnant d'autres catégories de problèmes afin d'étudier les relations possibles à d'autres domaines de la mathématique. Il serait utile d'analyser des solutions de différentes catégories pour un même sujet afin d'apporter plus d'information sur les différences détectées entre les garçons en géométrie et les filles en distance.

- L'analyse des graphismes produits suite aux interventions de l'expérimentatrice dans les situations de tutelle éducative. Ces nouveaux graphismes (fructueux ou non fructueux) requièrent une attention spéciale, ils ne peuvent être interprétés de la même façon que les graphismes spontanés. L'analyse serait une intégration des composantes fonctionnelles et du rendement des 36 sujets incluant le niveau d'intervention pédagogique étudié.

- Une étude longitudinale afin d'étudier les différents moments de présentation d'un graphique formel, planifié par l'enseignant. Trouver des indices sur le moment opportun d'une présentation permettrait d'étendre la portée des retombées pédagogiques.

- L'analyse du processus de révision, à savoir s'il a eu lieu avant ou après la question de confiance en la réponse. Un processus complet de révision à la suite de la résolution nécessite rarement la production d'un graphisme. Cependant il y a souvent un processus de révision (plus ou moins long) en utilisant les graphismes produits dans la Graphie Contextuelle ou dans la Graphie Mathématique. Est-ce qu'il y aurait avantage à encourager une graphie particulière à la révision?

La production d'un graphisme en solutionnant un problème écrit en mathématique est une façon personnelle de s'approprier le savoir. C'est un outil précieux qui permet de faire un lien entre la structure du texte et la structure des connaissances.

BIBLIOGRAPHIE

Alhum-Heath, M. E., & Di Vesta, F. J. (1986). The effect of conscious controlled verbalization of cognitive strategy on transfer in problem solving. Memory and Cognition, 14, 281-285.

Anderson, J. R. (1976). Language, memory, and thought. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Anderson, J. R. (1982). Acquisition of cognitive skill. Psychological Review, 89(4), 369-406.

Anderson, J. R. (1983). The architecture of cognition. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Anderson, J. R. (1987). Skill acquisition: Compilation of weak-method problem solutions. Psychological Review, 94, 192-210.

Anderson, J. R., Boyle, C. F., & Yoste, G. (1985). The geometry tutor. In A. Joshi (Ed.), Proceedings of the Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence (pp.1-7). Los Altos, CA: Morgan Kaufmann.

Anzaï, Y., & Simon, H. A. (1979). The theory of learning by doing. Psychological Review, 86(2), 124-140.

Arlin, P. K. (1979, September). Problem finding and problem defining from a cognitive developmental perspective. Paper presented at the Annual Meeting of the American Psychological Association, New York, NY.

Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (1992). Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. Cognition and Instruction, 9(2), 137-175.

Ashcraft, M. H. (1982). The development of mental arithmetic: A chronometric approach. Developmental Review, 2, 213-236.

Ashlock, R. B. (1987). Use informal language when introducing concepts. Focus on Learning Problems in Mathematics, 9(3), 31-36.

Bailey, A. (1983). Sex-stereotyping in primary school mathematics schemes. Research in Education, 39, 39-46.

Baroody, A. J. (1983). The development of procedural knowledge: An alternative explanation for chronometric trends of mental arithmetic. Developmental Review, 3, 225-230.

Barrat, M. (1987). Les mathématiques. Bourges, France: Imprimerie Tardy Quercy S. A.

Baxter, J. A., Stein, M. K., & Leinhardt, G. (1991, April). The role of instructional representations in teaching. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1984 Novembre). La numération: Les difficultés suscités par son apprentissge - Une stratégie didactique cherchant à favoriser une meilleur compréhension (1ère partie). Revue Grand N, IREM de Grenoble.

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1986). Une étude des conceptions inappropriées développées par les enfants dans l'apprentissage de la numération au primaire. Journal européen de psychologie de l'éducation, 1(2), 17-33.

Bednarz, N. et Garnier, C. (1989). Construction des savoirs: Obstacles et conflits. Colloque international obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif de CIRADE. Ottawa: Agence d'Arc.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic Press.

Biederman, I. (1987). "Recognition-by-components: A theory of human image understanding." Psychological Review, 94(2), 115-147.

Blanchet, A. (1981). Étude génétique des significations et des modèles utilisés par l'enfant lors de la résolution de problèmes. Thèse de doctorat (No. 102), Université de Genève, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Imprimerie Nationale.

Bonnet, C. et Ghiglione, R. (Eds.). (1990). Traité de psychologie cognitive: Le traitement de l'information symbolique. Paris: Bordas.

Bower, G. H. (1982). Plans and goals in understanding episodes. In A. Flammer & W. Kintsch (Eds.), Discourse processing (pp. 2-15). Amsterdam: North-Holland.

Bower, A. C., & King, W. L. (1967). The effect of number of irrelevant stimulus dimensions, verbalization, and sex on learning bi-conditional classification rules. Psychonomic Science, 8, 453-454.

Bransford, J. D., & Johnson, M. K. (1973). Considerations of some problems in comprehension. In W. G. Chase (Ed.), Visual information processing, (pp. 383-387). New York: Academic Press.

Brehmer, B. (1974). Hypotheses about relations between scaled variables in the learning of probabilistic inference tasks. Organizational Behavior and Human Performance, 11, 1-27.

Broadbent, D. E. (1971). Decision and stress. New York: Academic Press.

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in mathematical skills. Cognitive Science, 2, 155-192.

Bundy, A. (1975). Analyzing mathematical proofs (or reading between the lines). In P. Winston (Ed.), Proceedings of the Fourth International Joint Conference on Artificial Intelligence. Cambridge, MA: Artificial Intelligence Laboratory.

Campbell, J. I. D., & Graham, D. J. (1985). Mental multiplication skill: Structure, process, and acquisition. Canadian Journal of Psychology, 39,(2), 338-366.

Caron, N. (1987). Vers une pédagogie de l'invention mathématique. Instantanées Mathématiques, 4, 7-16.

Carter, C. S. (1987). The role of beliefs in general chemistry problem solving. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette.

Caverni, J.-P. (1988). La verbalisation comme source d'observables pour l'étude du fonctionnement cognitif. Dans J.-P. Caverni, C. Bastien, P. Mendelshon, & G. Tiberghien, (Eds.). Psychologie cognitive: Modèles et méthodes. Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.

Caverni, J.-P., Bastien, C., Mendelshon, P. et Tiberghien, G. (Eds.). (1988). Psychologie cognitive: Modèles et méthodes. Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.

Chase, W. G., & Simon, H. A. (1973). The mind's eye in chess. In G. Chase, (Ed.), Visual information processing. New York: Academic Press.

Clement, J. (1982). Student's perceptions in introductory mechanics. American Journal of Physics. 50(1), 66-71.

Clement, J., Lockhead, J., & Monk, G. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. American Mathematical Monthly, 88, 286-290.

Collins, A. M., & Loftus, E. F. (1975). A spreading-activation theory of semantic processing. Psychological Review, 82, 407-428.

Collins, A. M., & Quillian, M. R. (1969). Retrieval time from semantic memory. Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 8, 240-247.

Coquin-Viennot, D. (1989). La notion de représentation-conception au service de l'enseignement d'un concept mathématique. Les Sciences de l'Éducation, 2, 69-75.

Cordier, F., Denhière, G., George, C., Crépault, J., Hoc, J. M. et Richard, J. F. (1990). Connaissances et représentations. Dans C. Bonnet et R. Ghiglione (Eds.), Traité de psychologie cognitive: Le traitement de l'information symbolique (pp. 35-102). Paris: Bordas.

Cox, M. V. (1989). Knowledge and appearance in children's representation. Educational Psychology, 9(1), 15-27.

Cyr, M., Toupin, J., Lesage, A. D., & Valiquette, C. A. M. (1992). Méthode de formation d'interviewers et évolution temporelle de l'accord interjuges. Revue canadienne de psycho-éducation, 21(1), 21-28.

Deffner G., & Rhenius, D. (1985). Experimental test of the Ericsson\Simon model of concurrent thinking aloud. In G. D'ydewalle (Ed.), Cognition information processing and motivation. Amsterdam: Elsevier.

Deforge, Y. (1975). Le graphisme technique. Thèse présentée devant l'université de Paris V. Lille: Reproduction des Thèses, Université Lille III.

Deregowski, J. B. (1989). Real space and represented space: Cross-cultural perspectives. Behavior and Brain Sciences, 12, 51-119.

Dias, P. (1985). Researching response to poetry - Part I: A case for responding-aloud protocols. English Quaterly, 18(4), 104-118.

Dionne, J.-P. (1989, mai). Caractéristiques de la codification et de l'analyse des protocoles verbaux. Présenté au Congrès de l'Association Canadienne Française des Sciences, Montréal, Québec.

Dionne, J.-P. (en préparation). L'apprentissage dans la résolution de problème. Manuscrit inédit, Université d'Ottawa, Ottawa.

di Sessa, A. (1982). Unlearning aristotelian physics: A study of knowledge-base learning, Cognitive Science, 6, 37-75.

di Sessa, A. (1987). Phenomenology and the evolution of intuition. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 83-96). Hilsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Dobrin, D. (1986). "Is technical writing particularly objective?" College English, 47, 237-251.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Bélanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 109-122). Hilsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Dunker, K. (1945). On problem solving. Psychological Monographs, 58 (5, Whole No. 70).

Dupont, C. (1989). L'étude des représentations, un enjeu pour les éducateurs. Les sciences de l'éducation, 2, 51-68.

Ericsson, K. A., & Crutcher, R. J. (1991). Introspection and verbal reports on cognitive processes - Two approaches to the study of thinking: A response to Howe. New ideas in psychology, 9(1), 55-71.

Ericsson, K. A., & Oliver, W. L. (1988). Methodology for laboratory research on thinking: task selection, collection of observations, and data analysis. In R. Sternberg (Ed.), The psychology of human thought (pp. 392-428). Cambridge: Cambridge University Press.

Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1980). Verbal reports as data. Psychological Review, 87, 215-251.

Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1984). Protocol analysis: Verbal reports as data. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1993). Protocol analysis: Verbal reports as data (rev. ed.). Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Ernest, P. (Ed.). (1989). Mathematics teaching: The state of the art. New York: The Falmer Press.

Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scales (1976). Journal for Research in Mathematics Education, 7, 324-326.

Fennema, E. (1989). The study of affect and mathematics: A proposed generic model for research. In D. McLeod & V. M. Adams (Eds.), Affect and mathematical problem solving: A new perspective (pp. 205-219). New York: Springer-Verlag.

Fidler E.J. (1983). The reliability and validity of concurrent, retrospective and interpretive verbal reports: An experimental study. In P. Humphreys, O Svenson, & A. Vari (Eds.), Anlysing and aiding decision processes (pp. 429-440). Amsterdam: North Holland.

Fielker, D. S. (1987). Analyse de l'enseignement de la géométrie au Royaume-Uni. Dans R. Morris (Ed.), Etudes sur l'enseignement des mathématiques: L'enseignement de la géométrie (p. 129-148). Mayenne, France: Imprimerie Floch.

Flaherty, E. G. (1974). The thinking aloud technique and problem solving ability. Journal of Educational Research, 68, 223-225.

Foss, C. L. (1987). Learning from errors in Algebraland (IRL Report IRL87-0003). Palo Alto, CA: Institute for Research on Learning.

Gagné, R. H., & Smith, E. C. (1962). A study of the effects of verbalization on problem solving. Journal of Experimental Psychology, 63, 12-18.

Gardiner, J. M., & Rowley, J. M. C. (1984). A generation effect with numbers rather than words. Memory and Cognition, 12(5), 443-445.

Gardner, H. (1980). Artful scribbles: The significance of children's drawings. Dunmore, PA: Basic Books.

Geary, D. C., Widaman, K. F., & Little, T. D. (1986). Cognitive addition and multiplication: Evidence for a single memory network. Memory and Cognition, 14(6), 478-487.

Gentner, D. (1983). Structure mapping: A theoretical framework for analogy. Cognitive Science, 7, 155-170.

Gentner, D., & Gentner, D. R. (1983). Flowing waters or teeming crowds: Mental models of electricity. In D. Gentner & A. L. Stevens (Eds.), Mental Models. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gentner, D., & Stevens, A. L. (Eds.). (1983). Mental Models. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Giordan, A. et de Vecchi, G. (1987). Les origines du savoir: Des conceptions des apprenants aux concepts scientifiques. Paris: Delachaux & Niestlé, Éditeurs.

Gilmartin, K. J., Newell, A., & Simon, H. A. (1976). A program modeling short-term memory under strategy control. In C. M. Cofer (Ed.), The structure of human memory. San Francisco, CA: W H. Freeman.

Gravois, T. (1991, April). Establishing reliability for coding audiotapes of implementation concerns of school support teams. Paper presented at the American Educational Research Association Annual Meeting, Chicago, IL.

Greeno, J. G. (1986). Instructional representations based on research about understanding. In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education, (pp. 61-88). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Greeno, J. G. (1989). A perspective on thinking. American Psychologist, 44(2), 134-141.

Greeno, J. G. (1991a). A view of mathematical problem solving in school. In M. U. Smith (Ed.), Toward a unified theory of problem solving: Views from the content domains (pp. 69-98). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Greeno, J. G. (1991b). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. Journal for Research in Mathematica Education, 22(3), 170-218.

Gruppen, L. D., Wisdom, K., & Woolliscroft, J. O. (1992, April). Initial problem representation in medical problem solving. Paper presented at the American Educational Research Association Annual Meeting, Chicago, IL.

Haastrup, K. (1987). Using thinking aloud and retrospection to uncover learners lexical inferencing procedures. In C. Faerch & Kasper (Eds.), Introspection in Second Language Research (pp. 197-212). Philadelphia: Multilingual Matters.

Hall, R., Kibler, D., Wenger, E., & Truxaw, C. (1989). Exploring the episodic structure of algebra story problem solving. Cognition and Instruction, 6(3), 223-283.

Hamann, M. S., & Ashcraft, M. H. (1986). Textbook presentations of the basic addition facts. Cognition and Instruction, 3(3), 173-192.

Harel, G. (1991, April). Representations in Mathematics: A reaction to four paper. Paper presented at the American Educational Research Association Annual Meeting, Chicago, IL.

Harnisch, D. L., Steinkamp, M. W., Shiow-Ling Tsai, & Walberg, H. J. (1986). Cross-national differences in mathematics attitude and achievement among seventeen-year-olds. Journal of Educational Development, 6(4), 233-244.

Hasher, L., & Zacks, R. T. (1979). Automatic and effortful processes in memory. Journal of Experimental Psychology: General, 108,(3), 356-388.

Hayes, J. R. (1981). The Complete Problem Solver. Philadelphia, PN: The Franklin Institute Press.

Hayes-Roth, J. R., & Waterman, D. A. (1978). Principles of pattern-directed inference systems. In D. A. Waterman, F. Hayes-Roth (Eds.), Pattern-directedinference systems. New York: Academic Press.

Hayes, J. R., & Simon, H. A. (1974). Understanding written problem instructions. In L. W. Gregg (Ed.), Knowledge and Cognition (pp. 167-200). Potomac, MD: Lawrence Erlbaum Associates.

Hoc, J.-M. (1986a). La verbalisation provoquée pour l'étude du fonctionnement cognitif. Dans C. Bonnet, J.-M. Hoc et G. Tiberghien, Psychologie, intelligence artificielle et automatique (p. 37- 47). Bruxelles: Pierre Madaga, Editeur.

Hoc, J.-M. (1986b). L'organisation des connaissances pour la résolution de problème: vers une formalisation du concept de schéma. Dans C. Bonnet, J.-M. Hoc et G. Tiberghien, Psychologie, intelligence artificielle et automatique (p. 37-47). Bruxelles: Pierre Madaga, Editeur.

Hoc, J.-M. (1987). Psychologie cognitive de la planification. Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.

Hoc, J.-M. & Leplat J. (1983). Evaluation of different modalities of verbalization in a sorting task. International Journal of Man-Machine Studies, 18, 283-306.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele-based research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic Press.

Holland, J. H., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E., & Thagard, P. R. (1986). Induction. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Holyoak, K. J. (1990). Problem solving. In D. N. Osherson & E. E. Smith (Eds.), An invitation to cognitive science: Vol. 3. Thinking (pp. 117-146). Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Horton, D. L. (1964). The effects of meaningfulness, awareness and type of design in verbal mediation. Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 3, 187-194.

Houdé, O. et Winnykammen, F. (1992). Les apprentissages cognitifs individuels et interindividuels. Revue française de pédagogie, 98, 83-103.

Hyde, J. S., Fennema, E., & Lamon, S. J. (1990). Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. Psychological Bulletin, 107, 139-155.

Jackendoff, R. (1992). Languages of the mind. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Jan de Lange Jzn, (1987). La géométrie à l'école primaire: Le possible et le souhaitable. Dans R. Morris (Ed.), Etudes sur l'enseignement des mathématiques: L'enseignement de la géométrie (p. 61-82). Mayenne, France: Imprimerie Floch.

Janvier, C. (1987a). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 27-32). Hilsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier, C. (1987b). Representation and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 67-71). Hilsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Johnson-Laird, P. N. (1980). Mental models in cognitive science. Cognitive Science, 4, 71-115.

Johnson-Laird, P. N. (1988). The computer and the mind: An introduction to cognitive science. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Kahneman, D. (1973). Attention and effort. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Kail, R.V., & Bisanz, J. (1982). In C.R. Puff (Eds.), Handbook of Research Methods in Human Memory and Cognition (pp. 229-255). New York; Academic Press.

Kaput, J. J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to modeling. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (pp. 381-398). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J.J. (1987). Representation systems in mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 19-26). Hilsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J.J., & West, M. M. (1991). Missing value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. Unpublished manuscript, Harvard University, Boston.

Karpf, D. A. (1973). Thinking aloud in human discrimination learning (Doctoral dissertaion, State University of New York at Stony Brook, 1972). Dissertation Abstracts International, 33, 6111-B. (University Microfilms No. 73-13625).

Karpf, D. A., & Levine, M. (1971). Blank-trial probes and introtacts in human discrimination learning. Journal of Experimental Psychology, 90, 51-55.

Kelly, B. (1992). A study of the effects of technology on the learning of mathematics in the transition years. (Interim Rep. supported by the Ontario Ministry of Education). University of Toronto: Author.

Kilpatrick, J. (1968). Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study. Dissertation Abstracts International, 28, 4380A. (University Microfilms No. 68-6442)

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem-solving: Multiple research perspectives (pp. 1-13). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kindfield, A. C. H. (1991, April). Biology diagrams: Tools to think with. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.

Kintsch, W. (1986). Learning from text. Cognition and Instruction, 3(2), 87-102.

Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. Psychological Review, 92, 109-129.

Klahr, D., & Kotovsy, K. (Eds.). (1989). Complex information processing: The impact of Herbert A. Simon. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Köhler, W. (1925). The mentality of apes. New York: Harcourt Brace Jovanik.

Koman, M., Kurina, F. et Tichà (1987). Quelques problèmes relatifs à l'enseignement de la géométrie aux élèves de dix à quatorze ans. Dans R. Morris (Ed.), Etudes sur l'enseignement des mathématiques: L'enseignement de la géométrie (p. 83-100). Mayenne, France: Imprimerie Floch.

Kosslyn, S. M. (1990). Mental imagery. In D. N. Osherson, S. M. Kosslyn, & J. M. Hollerbach (Eds.), Visual cognition and action: An invitation to cognitive science (pp. 73-97). Cambridge: The MIT Press.

Kotovsky, K., Hayes, J. R., & Simon, H. A. (1985). Why are some problems hard? Evidence from the tower of Hanoi. Cognitive Psychology, 17, 248-294.

Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology of mathematical abilities in school children. Chicago: University of Chicago Press.

Kulm, G. (1987). School mathematics: Barrier or open door to jobs?

Kyriacou, C. (1992). Active learning in secondary school mathematics. British Educational Research Journal, 18(3), 309-318.

Landa, L. N. (1974). Algorithmization in learning and instruction. Englewoods-Cliffs, New Jersey: Educational Technology Publications.

Larkin, J. H., McDermott, J., Simon, D. P., & Simon, H. A. (1980). Expert and novice performance in solving physics problems. In H. A. Simon (Ed.), Models of thought (Vol. 2, pp. 257-277). New Haven: Yale University Press.

Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. Cognitive Science, 11, 65-99.

Larochelle, M., & Désautels, J. (1990, June). The epistemological turn in science education: The return of the actor. Paper presented at CIRADE.

Leder, G. C. (1991, April). Early school experiences: Gender differences in mathematics learning. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, Ill.

Lefebvre-Pinard, M. (1980). Existe-t-il des changements cognitifs chez l'adulte? Revue Québécoise de Psychologie, 1(2), 58-69.

Lemoyne, G. (1987). L'importance dans l'enseignement des mathématiques d'une vision commune des erreurs chez les enseignants et les élèves. Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques, XXXIXième Rencontre Internationale (CIEAM), Sherbrooke.

Lemoyne, G. (1988). Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique. Dans CIEAEM Compte rendu de la 39e rencontre internationale de la CIEAEM, (pp. 354-360). Sherbrooke: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke.

Lemoyne, G. (1989). La peur de ne pas savoir la réponse: Les difficultés d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. Repères: Essais en éducation, 12, 79-101.

Lesgold, A. M. (1984). Human skill in a computerized society: Complex skills and their acquisition. Behavior Research Method, Instruments, & Computers, 16(2), 79-87.

Lesh, R. (1983, April). Modeling middle school students' modeling behaviors in applied mathematical problem solving. Paper presented at the meeting of the American Educationale Research Association Annual Meeting, Montréal.

Lesh, R. (1985). Conceptual analyses of problem-solving performance. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem-solving: Multiple research perspectives (pp. 309-329). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. (1987). The evolution of problem representations in the presence of powerful conceptual amplifiers. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 197-206). Hilsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 41-58). Hilsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Rational number ideas and the role of representational systems. In R. Karplus (Ed.), Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Berkeley, CA: Lawrence Hall of Science.

Lester, F. K., Garofalo, J., & Lambdin Kroll, D. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem-solving behavior. In D. McLeod & V. M. Adams (Eds.), Affect and mathematical problem solving: A new perspective (pp. 75-88). New York: Springer-Verlag.

Levine, M. (1988). Effective problem solving. New Jersey: Prentice Hall.

Lewis, D., & Greene, J. (1983). Thinking better: A revolutionary new program to achieve peak mental performance. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Linn, M. C., & Hyde, J. S. (1989). Gender, mathematics, and science. Educational Researcher, 18(8), 17-19, 22-27.

Lord, T. R. (1987). Spatial teaching. Science Teacher, February, 32-34.

Madgidson, S. (1991, April). Representations to think with: Computer tools for making sense of slope. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.

Mandler, G. (1984). Mind and body. New York: Norton.

Mandler, G. (1985). Cognitive psychology: An essay in cognitive science. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mandler, J. M., & Richtey, G. (1977). Long-term memory for pictures. Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory, 3, 386-396.

Mannes, S. M., & Kintsch, W. (1987). Knowledge organization and text organization. Cognition and Instruction, 4(2), 91-115.

Marr, D. (1982). Vision. San Francisco: Freeman.

Mason, J. (1987). Representing representing: Notes following the conference. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 207-214). Hilsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mathieu, J. (1986). Psychologie cognitive et intelligence artificielle: Résolution de problème et acquisition de connaissances. Dans C. Bonnet, J.-M. Hoc et G. Tiberghien, Psychologie, intelligence artificielle et automatique (p. 19-37). Bruxelles: Pierre Madaga, Editeur.

Mathieu, P. (1989). Lexique mathématique pour tous : Tome 1. Beauceville: Presse d'Interglobe. Maxwell West, M., & Kaput, J.J. (1991, April). A teaching experiment using concrete representations of multiplicative situations: Curriculum design implications. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago, Ill.

Mayer, R. E. (1981). Frequency norms and structural analysis of algebra story problems into families, categories, and templates. Instructional Science, 10, 135-175.

Mayer, R. E. (1982). Different problem-solving strategies for algebra word and equation problems. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 8(5), 448-462.

McCloskey, M. (1983). Naïve theories of motion. In D. Gentner & A. L. Stevens (Eds.), Mental Models, (299-324). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

McLeod, D. B., & Adams, V. M. (Eds.). (1989). Affect and mathematical problem solving: A new perspective. New York: Springer-Verlag.

Mendelsohn, P. (1988). Introduction. Dans J.-P. Caverni, C. Bastien, P. Mendelsohn, et G. Tiberghien (Eds.). Psychologie cognitive: Modèles et méthodes (p.245-251). Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.

Messick, S. (1984). The psychology of educational measurement. Journal of Educational Measurement, 21, 215-237.

Messick, S. (1985). Progress toward standards as standards for progress: A potential role for NAEP. Educational Measurement, 4(4), 16-19.

Miller, G. A. (1980). Interview with George Miller. Psychology Today (British), January.

Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. Psychological Review, 63(2), 81-97.

Ministère de l'éducation et de la formation de l'Ontario. (1993). Le programme d'études commun : De la 1ère à la 9e année. Ottawa, Ontario: Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Minsky, M. (1975). A framework for representing knowledge. in P. Winston (Ed.), The psychology of computer vision. New York: McGraw Hill.

Morris, R. (Ed.). (1987). Etudes sur l'enseignement des mathématiques: L'enseignement de la géométrie. Mayenne, France: Imprimerie Floch.

Nesher, P. (1986). Learning mathematics: A cognitive perspective. American Psychologist, 41(10), 1114-1122.

Newell, A., Shaw, J.C., & Simon, H.A. (1958). Elements of a theory of human problem solving. Psychological Review, 65, 151-166.

Newell, A., & Simon, H.A. (1972). Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Nguyen-Xuan, A. et Richard, J.-F. (1986). L'apprentissage par l'action: L'intérêt des systèmes de production pour formaliser les niveaux de contrôle et l'interaction avec l'environnement. Dans C. Bonnet, J. M. Hoc et G. Tiberghien, Psychologie, intelligence artificielle automatique (p. 73-86). Bruxelles: Pierre Madaga, Editeur.

Nisbett, R. E., & Wilson, T. D. (1977). Telling more than we can know: Verbal reports on mental processes. Psychological Review, 84(3), 231-259.

Noël, B. (1991). La métacognition. Bruxelles, Belgium: DeBoeck Université, Éditions Universitaires.

Norman, D. A. (1976). Memory and attention. 2nd ed. New York: Wiley.

Norman, D. A. (1980). Twelve issues for cognitive science. Cognitive Science, 4, 1-32.

Norris, S. P. (1992). A demonstration of the use of verbal reports of thinking in multiple-choice critical thinking test design. The Alberta journal of educational research, 38(3), 155-176.

Paivio, A. (1978). Comparisons of mental blocks. Journal of experimental psychology: Human perception and performance, 4, 61-71.

Paquette, G. (1987). Virage technologique, oui? Mathématiques, non! Bulletin AMQ, Mars, 31-52.

Peck, D. M., & Jencks, S. M. (1988). Reality, arithmetic, algebra. Journal of Mathematical Behavior, 7, 85-91.

Piaget, J. (1946). Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant. Paris: PUF.

Polya, G. (1967). La découverte des mathématiques: Les modèles une méthode générale (M. Didier M. Praderie, Trans.). Paris: Dunod. (Original work published 1962)

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. For the Learning of Mathematics, 6(3), 42-46.

Pylyshyn, Z. W. (1973). What the mind's eye tells the mind's brain: A critique of mental imagery. Psychological Bulletin, 80, 1-24.

Resnick, L. B. (1987). Education and learning to think. Washington, D.C.: National Academy Press.

Resnick, L. B. (Speaker). (1991). Situation for learning and thinking (Cassette Recording No. RA-1-19.04). Award for distinguished contibution to educational research 1990 - Recipient's Address. Chicago, Ill: American Educational Research Association.

Reynolds, A. J., & Walberg, H. J. (1992). A structural model of high school mathematics outcomes. Journal of Educational Research, 85(3), 150-158.

Richard, J.-F. (1985). La représentation du problème. Psychologie Française, 30(3-4), 277-284.

Richard, J.-F. (1990). Compréhension de texte à visée pragmatique. Dans C. Bonnet et R. Ghiglione (Eds.), Traité de psychologie cognitive: Le traitement de l'information symbolique (pp. 80-92). Paris: Bordas.

Rissland, E. L. (1985). Artificial intelligence and the learning of mathematics: A tutorial sampling. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem-solving: Multiple research perspectives (pp. 147-176). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Robitaille, D. F. et Travers, K. J. (1987). La géométrie pour les enfants de 13 ans au Canada et aux États-Unis d'Amérique. In R. Morris (Ed.), Etudes sur l'enseignement des mathématiques: L'enseignement de la géométrie. Mayenne, France: Imprimerie Floch.

Rollins, M. (1989). Mental imagery: On the limits of cognitive science. New Haven: Yale University Press.

Rothman, R. W., & Cohen, J. (1989). The language of math needs to be taught. Academic Therapy, 25(2), 133-142.

Rowe, H. A. (1985). Problem solving and intelligence. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Rubinstein, M. F. (1986). Tools for problem solving. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Rumelhart, D. E., & McClelland, J. L. (Eds.). (1986). Parallel distributed processing (Vols. 1-2). Cambridge, MA: MIT Press.

Rumelhart, D. E., & Norman, D. A. (1985). Representation of knowledge. In A. M. Aitkenhead & J. M. Slack, Issues in Cognition Modeling. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Rumelhart, D. E., & Ortony, A. (1977). The representation of knowledge in memory. In R. C. Anderson, R. J. Spiro, & W. E. Montague (Eds.), Schooling and the acquisition of knowledge (pp. 99-135). Hillsdale, New Jersey: Laurence Eelbaum Associates.

Russel, R. L., & Ginsburg, H. P. (1984). Cognitive analysis of children's mathematics difficulties. Cognition and Instruction, 1(2), 217-244.

Schael, J., & Dionne, J.-P. (1991). Judges' agreement and disagreement patterns when encoding verbal protocols. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 334 209)

Schank, R., & Ableson, R. (1977). Scripts, plans, goals and understanding. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical problem-solving. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of concepts and processes. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1985a). Mathematical problem solving. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1985b). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (pp. 361-381). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (Ed.). (1986). Cognitive science and mathematics education. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1987). Cognitive science and mathematics education. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Shavelson, R. J., Webb, N. M., Shemesh, C., & Yang, D. (1988). Translation among symbolic representations in problem-solving. Unpublished manuscript. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 301 451)

Shepard, R. N., & Metzler, J. (1971). Mental rotation of three dimensional objects. Science, 171, 701-703.

Shepard, R. N., & Cooper, L. A. (1992). Mental images and their transformation. Cambridge, MA: MIT Press.

Shiffrin, R. M., & Schneider, W. (1977). Controlled and automatic human information processing: II. Perceptual learning, automatic attending, and a general theory. Psychological Review, 84(2), 127-175.

Silver, E. A. (1979). Student perceptions of relatedness among mathematical verbal problems. Journal for Research in Mathematics Education, 10, 195-210.

Silver, E. A. (1981). Recall of mathematical problem information: Solving related problems. Journal for Research in Mathematics Education, 12, 54-64.

Silver, E. A. (Ed.). (1985a). Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Silver, E. A. (1985b). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed directions. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (pp. 247-279). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Silver, E. A., & Metzger, W. (1989). Aesthetic influences on expert mathematical problem solving. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), Affect and mathematical problem solving: A new perspective (pp. 59-74). New York: Springer-Verlag.

Simon, H. A. (Ed.). (1979-1989). Models of thought (Vols. 1-2). New Haven: Yale University Press.

Simon, H. A. (1991). Models of my life. U.S.A.: Basic Books.

Simon, H. A. & Hayes, J. R. (1976). The understanding process: Problem isomorphs. Cognitive Psychology, 8, 165-190.

Simon, D. P., & Simon, H. A. (1979). A tale of two protocols. In H. A. Simon (Ed.), Models of thought (Vol. 2, pp. 232-242). New Haven: Yale University Press.

SIMS : The second international study of mathematics. (1980/1982). Education evaluation centre, OISE.

Smith, E. R., & Miller, F. D. (1978). Limits on perception of cognitive processes: A reply to Nisbett and Wilson. Psychological Review, 85(4), 355-362.

Smith, M. U. (Ed.). (1991). Toward a unified theory of problem solving: Views from the content domains. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Smith, S. M. (1979). Remembering in and out of context. Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory, 5, 460-471.

Sophian, C. (1987). Early developments in children's use of counting to solve quantitative problems. Cognition and Instruction, 4(2), 61-90.

Steffe, L. P., & von Glasersfeld, E. (1983). Children's counting types: Philosophy, theory & application. New York: Praeger Publishers.

Steinberg, E. R. (1986). Protocols, retrospective reports, and the stream of consciousness. College English, 48(7), 697-725.

Sternberg, R. J. (1985). Beyond IQ: A triarchic theory of human intelligence. New York: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J., & Smith, E. E. (1988). The psychology of human thought. Cambridge, Mass.: Cambridge University Press.

Swanson, H. L. (1990). Influence of metacognitive knowledge and aptitude on problem solving. Journal of Educational Psychology, 82(2), 306-314.

Tanaka, M. (1971). The development of the concept of speed. Journal of Child Development, 7, 1-11.

Tartre, L. A., Fennema, E. (1991, April). Mathematics achievement and gender: A longitudinal study of selected cognitive and affective variables, grades 6-12. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.

Taylor, L. K. (1992). University Professors' and Students' Knowledge of the Executive Control Strategies Applied in the Solving of Ill-structured Problems. Unpublished doctoral dissertation, University of Ottawa, Ottawa.

Thompson, P. W. (1985). Experience, problem solving, and learning mathematics: Considerations in developing mathematics curricula. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (pp. 189-236). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Thompson, P. W. (1988). Quantitative concepts as a foundation for algebric reasoning: Sufficiency, necessity, and cognitive obstacles. Proceedings of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 163-170). DeKalb, IL: Northern Illinois University.

Thomson, D. M., & Tulving, E. (1970). Associative encoding and retrieval: Weak and strong cues. Journal of experimental psychology, 86, 255-262.

Travers, K. J. (1985). Eight grade math: An international study. Principal, 65: 37-40.

UNESCO. (1987). L'enseignement des sciences fondamentales: Vol. 5. Études sur l'enseignement des mathématiques: L'enseignement de la géométrie. Mayenne, France: Imprimerie Floch.

van Sommers, P. (1984). Drawing and cognition: Descriptive and experimental studies of graphic production processes. Cambridge: Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1985a). L'enfant, la mathématique et la réalité (3e ed.). New York: Peter Lang.

Vergnaud, G. (1985b). Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. Psychologie française, 30(3/4), 245-252.

Vergnaud, G. (1987). Conclusion. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 227-232). Hilsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Viennot, L. (1979). Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire. Paris: Hermann.

von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 3-17). Hilsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Wagner, D. A. (1987). Le développement précoce de la mémoire spécialisée. Cahiers de Psychologie Cognitive, 7(1), 57-74.

Weinert, F. E., & Kluwe, R. H. (Eds.). (1987). Metacognition, motivation, and understanding. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Weiss, I. R. (1990). Mathematics teachers in the United States. International Journal of Educational Research, 14, 139-155.

Wertheimer, M. (1959). Productive thinking (enlarged edition). New York: Harper. (Original work published 1945)

White, P. (1980). Limitations on verbal reports of internal events: A refutation of Nisbett and Wilson and Bem. Psychological Review, 87(1), 105-112.

White, B. Y., & Frederiksen, J. R. (1986). Progressions of qualitative models as foundations for intelligent learning environments (BBN Report 6277). Cambridge, MA: BBN Laboratories.

Wickelgren, W. A. (1974). How to solve problems: Elements of a theory of problems and problem solving. San Francisco: W. H. Freeman.

Wilson, A. (1975). The interference of covert hypotheses by verbal reports in concept-learning research. Quaterly Journal of Experimental Psychology, 27, 313-322.

Winkelman, J. H., & Schmidt, J. (1974). Associative confusions in mental arithmetic. Journal of Experimental Psychology, 102(4), 734-736.

Wood, E. (1993, June). Knowledge of nuggets or fragments of facts: How perspective mathematics teachers make connections. Paper presented at The Canadian Society for the Study of Education, XXI Annual Conference, Ottawa, Ontario.

APPENDICE A

Les directives sur la procédure à suivre

Directives données à l'élève

- Le but de l'expérimentation est d'identifier la fonction du brouillon produit par les élèves en solutionnant des problèmes écrits en mathématique.

- Ce n'est pas un test, la vitesse d'exécution et la "bonne réponse" n'apporte pas l'information cherchée.

- C'est de montrer comment tu résous un problème écrit.

- (Description de l'appareillage)

- Afin de savoir "comment" tu abordes un problème, je te demande de réfléchir à haute voix. Parfois on se parle ou on lit à mi-voix ou haute-voix, c'est ce que je veux que tu fasses.

- Tu écris ta solution sur la table, c'est ton brouillon, tu n'as pas besoin d'effacer, tu peux seulement raturer si tu fais des erreurs.

- Nous allons faire un exercice pour te montrer à réfléchir à haute voix.

- Ensuite on va regarder le vidéo. Tu pourras me dire alors les choses auxquelles tu pensais et que tu as peut-être oublié de me dire ou tu peux m'expliquer ce pourquoi tu faisais telle ou telle chose.

Au début de chaque entretien, dans le but d'apporter de l'information sur l'intérêt apporté à la mathématique: Est-ce que tu aimes la mathématique? Quelle est ta matière préférée? Un deuxième questionnement vient à la suite de chaque solution dans le but de vérifier le degré de confiance en la réponse trouvée: Es-tu certain(e) de ça? ou, Est-ce que tu as terminé? Ce type de questions peut déclencher un processus de vérification. Un dernier entretien à la fin de l'expérimentation vise à provoquer des verbalisations sur les techniques de résolution de problème : 1) En parlant à un élève qui était très bon pour résoudre des problèmes, je lui demandai si il était aussi très bon en lecture. Qu'est-ce que tu penses qu'il m'a répondu? 2) Qui est plus intelligent une personne qui résout un problème de mathématique sans beaucoup réfléchir ou figurer des choses, ou une personne qui prend le temps de figurer le problème? Pourquoi? (Traduit de L. Swanson, 1990.) Ces entrevues semi-structurées engagent ou alimentent la conversation d'une part, et révèlent des attitudes personnelles importantes à la recherche d'autre part.

APPENDICE B

La description des types d'interventions pédagogiques

Activités d'intervention pédagogique

Niveau	Activité	Exemple
1	contrôle de la frustration ou encouragement, enrôlement du sujet dans la tâche (par exemple éveiller l'intérêt)	hm, hm, oui c'est vrai, comment ferais-tu ça?
2	demander de visualiser	qu'est-ce que tu vois? tu peux faire un dessin
3	maintien de l'orientation par rapport à l'objectif principal (par exemple par le rappel du but)	qu'est-ce qu'on te demande? quelle est la question?
4	"debugging" des conceptions erronées ou représentations erronées	(**26**, 825-844)
5	présentation d'une représentation potentielle	tu pourrais avoir un carré, okay comme ça (dessine un carré), etc,
6	signalisation des caractéristiques déterminantes (par exemple en fournissant l'information utile à la progression)	Ce que tu viens de trouver c'est la même surface que cette autre figure ...
7	réduction des difficultés (par exemple définir un mot, définir un sous-but à atteindre)	l'aire c'est la même chose que la surface
8	démonstration complète	les deux étudiantes faibles de 8e année

APPENDICE C

Les grilles des activités cognitifs
et
des composantes fonctionnelles

Tableau 3
Activité cognitive extraite des protocoles

Code	Activité	Définition	Exemples
L–1	Lit	Parcourt des yeux en verbalisant littéralement ce qui est écrit sur la carte où est imprimé le problème. Le débit verbal est coulant, sans interruptions.	"Si l'aire d'un rectangle R de 4 mètres de haut est la même que l'aire d'un carré.." Sujet 42, 1–2. "Mon père conduit à une vitesse moyenne de 125 kilomètres à l'heure.." Sujet 3, 1–2.
L–2	Lit sélectivement	Lit en sélectionnant des éléments du problème, souvent en les écrivant. Cette lecture comprend de l'analyse et de la planification plus ou moins implicite.	"okay bien j'va écrire 50 000 propriétaires.." Sujet 7, 7– 8. "okay il conduisait à une vitesse moyenne de 125 kilomètres à l'heure ... **[écrit "VM 125km" sur figure 1]** il doit couvrir une distance de 750 kilomètres ... **[dessine la flèche et écrit "75km" sur figure 1]**" Sujet 45, 6–9. "4 mètres plus 3 mètres longueur, point 5 mètres, hauteur **[écrit ces données sur figure 1]**" Sujet 20, 9–10.
ANALYSE (compréhension)		**Essaie de comprendre pleinement le problème. Lie, concilie, accorde favorablement confronte deux idées afin de poursuivre la résolution. Étudie les éléments constitutifs du problème.**	
A–1	Opérationnalise	Concilie un but/sous–but atteint avec le graphisme, concilie de l'information sélectionnée ou nouvellement trouvée avec le graphisme, etc. Reformule dans d'autres mots ou sous forme de question réthorique plus ou moins dirigée vers l'expérimenteur.	"ça fait qu'il faut que je calcule alentour, comme ça les murs" **[dessine un angle de 90° dans le coin droit du graphisme]** Sujet 10, 15–16. "okay bien j'ai deux trains **[trace une ligne]** puis après ça on va avoir séparé pendant une heure ça va être 160 **[positionne un doigt de la main droite et un doigt de la main gauche sur chacune des deux extrémités de cette ligne, respectivement. La position des mains est maintenue au travers la verbalisation et vient préciser ce qui se dit]**" Sujet 4, 97–99.

Tableau 3 (suite)
Activité cognitive extraite des protocoles

Code	Activité	Définition	Exemples
A-2	Clarifie en étudiant ou s'attardant sur un terme ou un énoncé en particulier parce qu'il y a incohérence.	suite à une incertitude ou une incompréhension, cherche, essaie de comprendre le texte, la situation, les principes derrières les énoncés.	"oh ... ils parlent de les maisons enh? comme qu'est-ce qui a, y'a 2, y'a un professeur et un propriétaire dans une maison? ... comme ..." Sujet 16, 11-13. "En? **[regarde le problème]** oui si y voyage à 40 kilomètres ... **[indique au-dessus du graphique dans un geste de va-et-vient la distance entre les deux trains]** okay c'est par heure ..." Sujet 3, 142-144.
PLANIFIE EXPLICITEMENT		**Essaie de réduire l'écart entre le but à atteindre et les données. Essaie de prévoir les conséquences d'une solution, se fait souvent en décomposant le problème en parties.**	
P-1	Planifie globalement	Choisit explicitement une approche globale	"bon on va commencer par le séparer en petits morceaux.." Sujet 42, 4-5.
P-2	Planifie localement ou justifie	Choisit explicitement une méthode spécifique de résolution à l'approche choisit: définit un sous-but à atteindre.	"donc il faudrait que je fasses un plus gros chiffre.." Sujet 12, 17. "mais là il faut que j'enlève **[regarde le texte où est imprimé le problème]** 2 fois 1 **[pause]** pour la fenêtre" Sujet 10, 33-34. "okay puis le, okay je vais le relire" Sujet 7, 11.
		Choisit une formule.	"..puis périmètre **[regarde les formules]** c'est côté fois côté, ça veut dire **[regarde le rectangle dessiné et ensuite se concentre sur la figure du carré]**" Sujet 9, 6-7.
		Choisit un algorithme.	"okay on va additionner ça, je vais additionner ça" Sujet 25, 21-22. "bien tu, tu veux le diviser par.." Sujet 3, 12.

Tableau 3 (suite)
Activité cognitive extraite des protocoles

Code	Activité	Définition	Exemples
	PLANIFIE (suite)	Choisit une perspective géométrique possible ou un graphisme qui aiderait à la compréhension.	"une fenêtre de 2 mètres **[regarde figure 3]** 2 mètres alors j'va c'es-tu 2 mètres de largeur, 1 mètre de hauteur? **[...]** on va dire 2 mètres de largeur.." Sujet 20, 33–41. "okay là je vais faire comme une sorte de graphique là ... puis j'ai une ligne **[trace une ligne]** ici c'est 0 **[fait un point sur le milieu de cette ligne]** ... je sais pas je vais aller jusque là euh **[rajoute un bout de ligne]**" Sujet4, 88–94.
I	IMPLANTE	Essaie de résoudre le problème. Calcule ou retire nouvelle information en suivant des règles établies. Applique des procédures. Contient de la planification implicite.	"l'autre train va aller euh, 3 fois 0, 0, 3 fois 6, 180 **[écrit ces calculs sur figure 3]**" Sujet 4, 16–17. **[trace un tiret sous une colonne de chiffres et écrit 850 en-dessous en verbalisant]** "ça donne 850" Sujet 25, 23. "okay. 6 fois 6, 36" Sujet 42, 15.
V	VÉRIFIE (monitoring)	Examine l'exactitude des calculs, la correspondance des calculs avec les données, la correspondance entre les graphismes, la correspondance entre la formule et le graphisme, etc. Est conscient des activités cognitives effectuées ou de leurs produits, c'est-à-dire travaille sur le produit de ses activités cognitives.	"..y'a un total de 1 000 élèves" **[regarde le 1 000 déjà écrit sur la figure 1]** Sujet 25, 24. "..euh, okay, il conduit à une vitesse moyenne de 125" **[regarde le 125 écrit à gauche sur le graphisme produit précédemment]** "..okay, il doit couvrir une distance de 750 kilomètres, il veut parcourir.. **[regarde le 750 écrit à droite du graphisme produit]** okay.." Sujet 45, 25–29.

Tableau 3 (suite)
Activité cognitive extraite des protocoles

Code	Activité	Définition	Exemples
D–1		Corrige: signale, rectifie ou reprend une erreur; décide d'agir suite à un jugement porté (modifie sa représentation).	**[regarde figure 1, biffe le "300" pour écrire "250" en verbalisant]** "qu'est-ce que je fais là, ça ferait 250.." Sujet 3, 13.
D–2		Modifie: fait subir un changement de sens, modifie ce qui a été sélectionné pour rendre compatible avec la situation ou la réponse précédente (modifie la situation).	"..la formule pour l'aire c'est-tu ça fois ça? **[indique la longueur et la largeur sur figure 1] [...]** puis pour la hauteur c'est 2.5 mètres carrés **[écrit "2.5 m^2" sur la figure]** Sujet 20, 30. "4, 4, ça veut dire peut-être ... 6, 6, ... 4 **[écrit 6 pour la longueur du rectangle R]**" Sujet 9, 28.
D–3		Confirme atteinte d'un but: confirme ou réitère l'atteinte d'un but ou sous–but, la réponse, etc.	"so, j'économiserais 3 heures ... **[fait un tour rapide des figures et regarde le problème en verbalisant]** c'est ça" Sujet 45, 22–23. "alors le périmètre serait égal à 26" **[encercle la réponse]** Sujet 42, 31–32.
D–4		Doute de l'atteinte d'un but/sous–but mais n'en fait rien.	"**[E]:** C'est ça ta réponse? **[S]:** Ouf, je pense. **[E]:** Okay tu penses **[S]:** Bien euh, ça devrait. Sujet 4, 35–37.
E–E	E–ENCOURAGE	L'expérimenteur approuve pour montrer qu'il est là et que le sujet doit ou peut continuer seul. L'expérimenteur répond à une question posée.	"okay je sais pas comment le faire" **[regarde E et sourit] [l'expérimenteur répond]** "prends ton temps" "..la formule pour l'aire c'est-tu ça fois ça?" **[sujet indique le 4 mètres et le 3 mètres sur la figure] [expérimenteur répond]** "base multipliée par hauteur" Sujet 20, 26–28.
E–C	E–CLARIFIE	L'expérimenteur doit rappeler en utilisant des consignes de réfléchir à haute voix "parle plus fort", de répéter ce qui a été murmurer ou de préciser une nouvelle information "dit moi ça encore".	S: "Périmètre ça va faire c'est côté plus côté ça ça veut dire que 20." **[regarde figure 1 et ensuite regarde l'expérimenteur]** E: "Le périmètre, la surface du carré, le périmètre du rectangle?" Sujet 9, 32–35. E: "Okay 320? Où ça? Sujet 3, 271.

Tableau 3 (suite)
Activité cognitive extraite des protocoles

Code	Activité	Définition	Exemples
E–P	E–QUESTION DE CONFIANCE	L'expérimenteur questionne le sujet sur le degré de confiance dans la solution.	"es–tu certaine de ça?" Sujet 32, 27. **E-** "Fini." **S-** "Ouais j'pense bien." **E-** "Tu penses?" **S-** Okay bien ça. **E-** "Tu es certaine?" Sujet 42, 33–37.
B	DÉRANGEMENT	Interruption venant de l'extérieur, quelqu'un à la porte, annonce, difficulté technique, crayon sèche, etc.	**[prend la calculatrice, jette des regards rapides sur figure 1 tout en effectuant les calculs suivant]** "100, 750, 750 divisé par 150, oups, 700 voyons, 750 divisé par, voyons" **[difficultés avec les boutons de la calculatrice, E interrompt en disant]** "Tu peux prendre la, le crayon parce que les boutons sont bien petits la–dessus." Sujet 45, 13–16.

Tableau 4

Composantes fonctionnelles des graphismes telles qu'extraites des protocoles

Épisodes	Codes	Composantes fonctionnelles	Exemple
Graphie contextuelle	C–Com	**Aide à la compréhension** première du problème afin de visualiser, de traduire un système de symbolisation en un autre plus maniable ou de faire le tri dans l'information présentée. Sert à une organisation d'ensemble permettant la compréhension de la situation. Facilite le rappel des données.	"okay si y'a 400 élèves qui ont choisi l'espagnol, alors l'espagnol c'est une langue ... y'en a 300 qui ont choisi l'anglais ... puis 150 qui ont choisi les euh deux langues" **[écrit ces données sur figure 1]** Sujet 25, 14–17. "okay il conduisait à une vitesse moyenne de 125 kilomètres **[écrit VM 125 km et retourne à la lecture du problème]** il doit couvrir une distance de 750 kilomètres **[dessine une flèche et écrit la distance au bout de la tête de flèche]**" Sujet 45, 6–8.
	C–Ana	**Sert d'évidence** après avoir trouvé une réponse. Sert de support à l'analyse. Sert à vérifier la correspondance entre le graphisme et le modèle mathématique ou entre le graphisme et la solution. Se fait souvent en regardant ou en indiquant de la main ce qui est sur le graphisme.	"bon y'a 850 élèves en langues, y'a un total de 1 000 élèves **[regarde le 1 000 écrit sur la figure 1]** Sujet 25, 23–24. "c'es–tu ça la formule, la formule pour pour l'aire c'es–tu ça fois ça? **[indiquant les mesures écrites sur le modèle]**" Sujet 20, 26–27.
	C–Rés	**Sert de stratégie de résolution** avant d'avoir trouvé une réponse, lorsque le sujet croit qu'il est dans la bonne voie. Facilite l'émergence de règles, de procédures, d'inférences, de prédictions en utilisant le graphisme.	**[en regardant un graphique où les distances sont enregistrées]** "bien, "j'check" comme ça là, ça fait 1, 2, 3, 4, 5, les.. les heures" Sujet 3, 202–203. **[regarde le rectangle]** "4, 4, ça veut dire peut–être ... 6, 6, ... 4 **[écrit ces données sur le rectangle]** 12, 8, **[un mouvement de la tête indique les deux côtés du rectangle]** non non **[regarde le problème]** quel est le périmètre du rectangle, ouais ... périmètre ça va faire, c'est **[regarde le rectangle, ensuite les formules]** côté plus côté" Sujet 9, 28–33.

Tableau 4 (suite)

Composantes fonctionnelles des graphismes telles qu'extraites des protocoles

Épisodes	Codes	Composantes fonctionnelles	Exemple
Graphie contextuelle (suite)	C–Réc	**Sert de stratégie de récupération** lorsque le sujet croit qu'il est dans la mauvaise voie.	"oups! une seconde ... **[regarde ses calculs]** ça ...ça ... ça ... ça ... **regarde la figure géométrique construite au début du problème]**. Sujet 10, 26–27. "ça fait 540 ... 1 000 ... 600 ... 1 100 ... 660 ... ça va être ça 1 200 **[un air d'hébahissement en regardant le modèle contextuel construit]**". Sujet 3, 192–196.
	C–Aff	**Sert à se rassurer,** re–confirmer ou satisfaire un principe esthétique; se fait souvent en retraçant.	"okay euh, un périmètre de 24. Quel est le périmètre du rectangle R? Bien là tu fais, ça c'est 6 **[retrace le chiffre 6 au-bas du carré]**" Sujet 42, 14–15.
Graphie mathématique	M–Fac	**Facilite l'exécution ou le rappel**, de procédures, de formules ou d'information.	"un train voyage à 60 et l'autre à 100 puis on va commencer par le train à 100 **[écrit le chiffre 100 sur le graphisme]**" Sujet 4, 7–8. "ça veut dire 6 ouais **[retourne au problème]** 6 puis 4 **[écrit "6" et "4" sur le graphisme]**" Sujet 9, 13–15. "alors bien en premier m'a additionné ceux–là ici **[écrit le signe "+" et additionne en regardant le graphisme et écrit la réponse à côté..]**" Sujet 7, 24.
	M–Évi	**Met en évidence** des relations en utilisant de la symétrie, esthétique, concordance, parsimonie, simplicité. Sert à résumer ce qui est fait, corriger ou compris. Se fait souvent en ajoutant un mot ou une mesure, ou encore en corrigeant une faute d'orthographe.	"okay 6 fois 6, 36 **[écrit 36 sur la figure 4]** donc l'aire **[écrit "A =" devant le "36"]** du carré C va être égal à 36" **[dessine un petit carré et l'identifie d'un C au-dessus de "A = 36"]** Sujet 42, 15–17. "qui fait ... oups! ça c'est mal placé **[en regardant la concordance des décimales dans le calcul, corrige l'erreur de calcul]**" Sujet 10, 57.

Tableau 4 (suite)

Composantes fonctionnelles des graphismes telles qu'extraites des protocoles

Épisodes	Codes	Composantes fonctionnelles	Exemple
Graphie mathématique (suite)	M–Vér	Sert à vérifier ce qui a été fait, parfois mentalement ou sur la calculatrice. Vérification locale.	"bien ça ça va être comme 6, 6, 6 **[écrit les 6 sur les côtés du carré]** parce que si tu fais 24, 4 dans 24, 6, 24, 0 **[écrit ces calculs]** Sujet 42, 12–13. "alors après euh **[regarde tous les calculs écrits]** euh attends une minute là 2 **[en regardant une multiplication]** 7 **[en regardant une autre multiplication écrite précédemment]** après ... euh ... 9 heures.." Sujet 4, 28–32.
Graphie de solution	S–But	**Met en évidence** un but/sous–but à atteindre	"Quel est le périmètre du rectangle R? Alors le périmètre serait égale à 26" **[encercle la réponse sur la figure 5]** Sujet 42, 31–32. "euh moins me donne je pense ici j'ai 8 et 1 moins 1, 0. **[écrit cette soustraction en verbalisant et encercle le 880 de la réponse]** donc ma réponse est dans exactement 22 heures **[écrit le "22 heures!" avec un point d'exclamation au-bas des graphismes]**. Sujet 12, 40–41.
Graphie de révision	R–Cor	**Sert à vérifier la correspondance** entre – les graphismes, – les graphismes et les données, – les graphismes et la solution lorsque le problème a été résolu. Vérification globale.	Okay, si y irait à 125 km **[indique le "125" sur figure 1]** y aurait, y ferait, y ferait hm, ça y prendrait 6 heures pour faire 750 km **[écrit "km" sur figure 3]** et puis si irait à 250 **[indique le "250" sur figure 4]** deux fois plus vite ça y prendrait seulement que 3 heures **[écrit "heures" sur figure 4]** ça veut dire que y faut que je soustrais 6 dedans 3 qui fait 3 **[écrit ces calculs sur figure 6 et regarde E en verbalisant]** Ça veut dire qu'il économiserait 3 heures en allant plus vite.

APPENDICE D

Un protocole codé et

la trace cognitive et graphique identifée

2e Problème

S: 337 Deux trains partent de la même gare à la
338 même heure. Ils voyagent en direction
339 opposée. Un toit, un train voyage à 6 km à
340 l'heure, l'autre train voyage à 100 km à l'heure.
341 Dans combien d'heures seront-ils séparés par — interruption [quelqu'un à la porte]
L-1 342 880 km. Okay deux trains partent de la
343 même gare à la même heure, ils voyagent en
344 direction opposée en train. Ils voyagent en
345 direction opposée. Un train voyage à 60 km
346 à l'heure et l'autre train voyage à 100 km à
347 l'heure. Dans combien d'heures seront-ils
348 séparés par 880. Okay

O: [commence à écrire ces données sur figure 1 tout en jetant des coups d'oeil rapides sur le problème]

349 un train qui voyage à 60 km, à, l'heure ensuite y
L-2 350 en a un qui voyage à, 100, km, à, l'heure okay hm

60 Km à l'Heure
100 Km à l'Heure

Figure 1

O: [retourne au problème]

351 dans combien d'heures seront-ils séparés par 880
352 km. Okay y a deux trains

O: [essaie de montrer avec les mains où sont les trains]

353 qui partent de la même gare à la même heure. Ils
354 voyagent en direction opposée. Disons qui en a un
355 qui s'en va comme ça

O: [dessine une flèche allant vers la gauche, figure 2]

Figure 2

356 puis y en a un qui s'en va comme ça

O: [dessine une flèche allant vers la droite, figure 2]

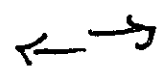


Figure 2

A-1 357 puis ça c'est la gare ici

O: [dessine le carré au-dessus des flèches, figure 2]

Figure 2

358 celui-ci y va à 60

O: [écrit "60" sur figure 2]

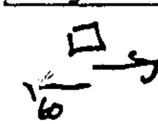


Figure 2

359 puis lui y va à 100

O: [écrit "100" sur figure 2]

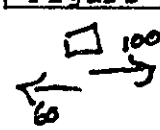


Figure 2

L-2 360 puis là dans combien d'heures ils vont être séparés
361 par 880, kilomètres ... Hm ...

O: [regarde alternativement le problème, figure 1 et dans le

A-1

vide; reprend la carte avec le problème en se tenant le front avec l'autre main]

22'39''
362 Deux trains partent de la même gare à la même
363 heure. Ils voyagent en direction opposée ...

O: [son regard alterne entre le problème et figure 2]

364 Un train voyage à 60 km y va

O: [murmure "60 km" en vérifiant sur figure 2]

365 l'autre y voyage à 100 km à l'heure. Dans combien
366 de temps seront-ils séparés par 880 euh, par 880
367 kilomètres ...

L-2

O: [ajoute cette donnée sur figure 1]

368 880, kilomètres, bon.

60 km à l'Heure
160 km à l'Heure

880 km

Figure 1

O: [retourne au problème]

369 Dans combien de temps qui vont être séparés
370 par 880 ...

23'14''

O: [se tient le tête d'une main et essaie de montrer où sont les données suivantes]

371 100, 60, 160 km à l'heure, 880 si lui y
372 avance de 60 km à l'heure, si lui y avance à
373 chaque heure, à 60 puis l'autre à 100. À
374 chaque heure lui y avance à 60 km

O: [regarde dans le vide]

375 60 km à chaque heure y avance de 60 km.

O: [fronce les sourcils et se couvre les yeux avec les deux poings]

376 Hm, l'autre y avance à 100 km à chaque heure ...
377 ça fait hm ...

O: [regarde figure 2, ensuite regarde dans le vide après cette pause, se passe les mains sur tout le visage et regarde intensivement figure 2 en murmurant]

378 hm, hm, non, 100 ... 100 ... [regarde intensément figure 2]
379 60 km à l'heure, l'autre à 100 ... lui c'est 60 km
380 puis lui y avance 100 ... Okay ...

A-1

O: [regarde le problème, la figure 2, le téléviseur et ensuite au plafond en verbalisant]

381 Okay lui ... y avance hm ... [regarde le 880 sur figure 1]
382 Lui y avance ...
383 Ici lui y avance à 100 km

O: [écrit "100" sur figure 3]

60

100

384 puis l'autre y avance à 60 km

Figure 3

O: [écrit "60" sur figure 3]

385 ça veut dire faut que je fasse deux heures
386 quelque part, hm

P-2

O: [regarde E, sourit nerveusement, regarde le problème et continue de travailler sur figure 2]

387 Okay y a un train qui part

O: [met un doigt sur la flèche de gauche de figure 2]

388 y avance 60 km, 60 km dans une heure, ensuite

O: [dessine un autre bout de ligne, figure 2]

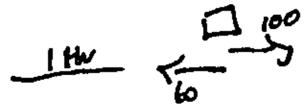


Figure 2

389 l'autre avance 100 km en une heure

O: [dessine l'autre bout de ligne à droite sur figure 2]

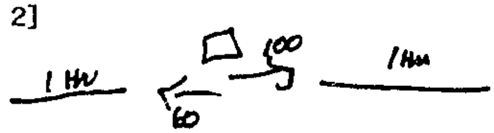


Figure 2

A-1

390 ensuite ça ça fait 160 kilomètres

O: [écrit "160 km" sur figure 4]

160 Km

Figure 4

391 ensuite l'autre y avance un autre 60

O: [dessine un deuxième trait à gauche sur figure 2 et écrit "60" sur figure 4]

160 Km
60

Figure 4

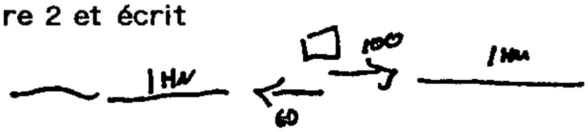


Figure 2

392 l'autre y avance un autre 100

O: [dessine un deuxième trait à droite sur figure 2 et écrit "100" sur figure 4]

160 Km
60
100

Figure 4

Figure 2

A-3

393 puis ça va faire un heure, deux heures

O: [avec les deux mains mime le mouvement en direction opposée au-dessus de figure 2]

394 deux heures

O: [écrit "2 H" sur figure 4 et écrit ensuite l'addition au-dessous de cette donnée]

2 H,
160
160
320

160 Km
60
100

Figure 4

395 après 2 heures y sont à, 160 ... plus euh sss.., 160

396 encore, c'est 0, ça fait 12, je retiens 1, ça fait 320

I

A-1

O: [retourne à la figure 2]

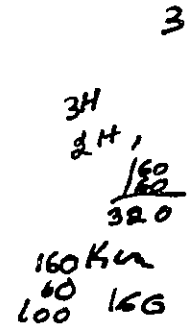
397 Ensuite y avance un autre heure puis d'un autre

398 heure

O: [dessine un trait à droite, puis un trait à gauche sur figure 2]

Figure 2

399 ça veut dire encore 160 ...
O: [écrit "160" sur figure 4]



D-3 400 puis là ça fait 300
O: [écrit "3" sur figure 4]

Figure 4

401 ça fait trois heures ...
O: [écrit "3 H" sur figure 4]

É

402 okay hm ...
O: [toujours en regardant intensivement figure 4, commence le tableau, figure 5]
403 en deux heures y ont avancé de 320 km à trois
404 heures y ont avancé de 320 plus 320 ...

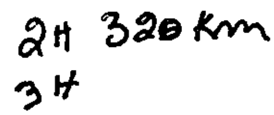


Figure 5

O: [en écrivant l'addition au bas de figure 4]
I 405 Plus 160, ça fait 0, ici ça fait 8, ça fait
406 480

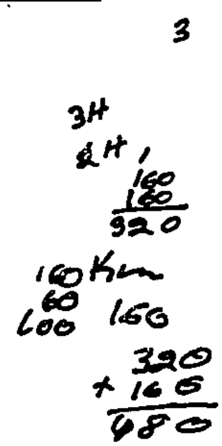


Figure 4

É O: [retourne au tableau, figure 5]
407 c'est ça 480, ensuite à quatre heures
O: [écrit "480" et "4 H" sur le tableau, figure 5]

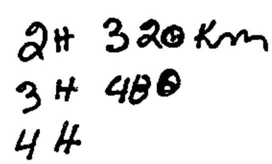


Figure 5

408 y'ont faite 480, okay
O: [écrit "480" sur figure 6, refait le "0" sur la deuxième ligne du tableau, regarde figure 2 et fait l'addition, figure 6]

I

409 480, 160 ça fait 0, 8 plus 6, ça fait 14 ... 5, 6,
410 690, 690
O: [écrit "690" sur figure 5]

480
160
640

Figure 6

2H 320 Km
3H 480
4H 640
5H

Figure 5

E-C E: 411 640.

S: 412 Ah oui oups ...

D-1 O: [efface le "9" et refait un "4" sur figure 5]
413 640, en cinq heures
O: [écrit "5 H" sur figure 5]

E

I

414 y font plus 160 ...
O: [en continuant l'addition sur figure 6]

28'00 415 Hm, 0, 10, 7, 8 ... 800 km à l'heure
O: [écrit "800" sur figure 5]

E

2H 320 Km
3H 480
4H 640
5H 800

Figure 5

480
160
640
+160
800

Figure 6

416 puis
O: [retourne au problème]

L-2 417 880 ensuite ...
O: [regarde figure 5, figure 6 et s'attarde sur figure 2]

18'28"

voir (625-680)

418 Lui y va avancer de ...
O: [indique les traits à gauche de figure 2, ~~retrace le dernier~~ en ajoute un autre et retourne à la figure 5, figure 2 et le problème en murmurant]

A-1

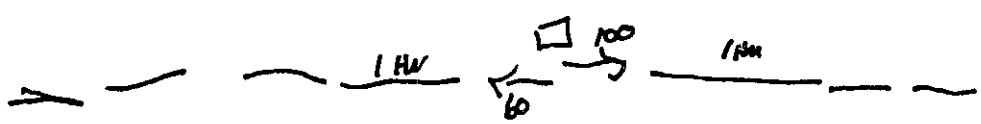


Figure 2

419 160 divisé par 2 ...

E-C E: 420 À quoi tu penses?

S: 421 En?
O: [regarde E]

E: 422 À quoi tu penses?

S: 423 Je regarde 160 divisé en deux dans ma
424 tête, 160 divisé dans 2

I O: [regarde intensivement le problème en se rongeant un ongle].

E S: 425 C'est pas.. non c'est pas ça, ça, 4 heures
426 okay ça veut dire
O: [retourne à la figure 5]
29' 427 à 5 heures et demi, y vont avoir faite 880 km
D-3 O: [écrit "5½ 880", dessine un trait, écrit la réponse et l'encercle sur figure 5]
428 Fait que c'est ça que ça leur prend en tout, 5
429 heures et une demie, y'sont séparés hm, 880 km
29'25'' O: [regarde E]

E-P E: 430 Es-tu sûre?

S: 431 Oui, parce que c'est..
O: [grand sourire en regardant E]

D-3 O: [8 min 57 sec]

29'28''

2H 320 km
3H 480
4H 640
5H 800
5½ 880

5½

Figure 5

Rétrovisionnement

E: T'es fantastique, t'as fait ça comme un as. Puis c'était, l'as-tu trouvé difficile?

S: Au début oui.

E: Oui.

S: Comme au début.

E: Y est très difficile ce problème là c'est pour ça que je dis que t'as fait ça comme un as, franchement là. Puis t'as pas démissionné il y en a qui démissionne parce qu'il est trop dur, ils disent "ah je suis pas capable de le faire" [rires] ... Okay on va le réembobiner un peu parce que y a quand même quelques petites questions, j'aimerais ça..

S: Je comprenais pas.

E: il est dur, y est vraiment très difficile. Mais tu l'as très bien fait ... Ça t'as pas tenté de faire un diagramme comme on a fait, comme j'avais fait tantôt.

S: Bien de cette manière là je comprenais plus que de l'autre manière.

utilise graphiques pour comprendre

E: Ouais as-tu, euh..

S: Dans ma tête je me, je suis, je me l'ai faite d'un autre certaine manière que je comprends plus que des genres de graphiques puis toute ça là.

E: Ouais, c'est pas de faire exactement comme j'avais fait mais tu pouvais..

S: Non c'est ça parce que..

E: S'en allait comme ça et l'autre s'en allait dans la même direction ... Ah mon Dieu faut que je l'arrête ... Quelle heure que j'ai mis dessus la table ... Ah c'est parfait, je l'ai mis juste, juste au bon ... Puis si tu vois des choses que tu te rappelles puis tu me l'as pas dit, tu me le diras, au moment où tu comprends bien

S: okay.

E: 468 ou tu ne comprends pas trop, trop ... [inaudible]

S: 469 .. je ne sais pas, c'est pour ça.

E: 470 Ça dérange ça, ça dérange toujours ...

S: 471 Je suis bien sûre là

E: 472 Oui ... mais tu continuais quand même de lire ...
473 Qu'est-ce que tu avais compris vraiment?

S: 474 Rien. [rires]

E: 475 Rien ... Alors tu recommences puis tu les
476 prends morceau par morceau ... Okay quand tu
477 écris 60 km à l'heure, est-ce que tu vois
478 bien 60 km dans une heure.

S: 479 Oui.

E: 480 Okay ... Dis-moi quand tu vas comprendre que
481 les deux ensembles font 160 dans une heure.

S: 482 Okay. ...

E: 483 Ça? ça t'embêtais-tu ce 880?

S: 484 Oui. ... Bien je savais dans ma tête que c'était
485 quelque dans, dans le genre de, euh, une demie
486 ou fallait que j'aie une division y me semblait
487 qu'il y avait une division à quelque part là-
488 dedans ou quelque chose qui fallait que je
489 coupe là à quelque part parce que ça se
490 pouvait pas 880 avec les chiffres que j'avais.
491 Comme à moins que je faisais une division ou
492 quelque affaire, une soustraction, ou quelque
493 chose tu sais, euh.

E: 494 ..les chiffres arrivent à 880.

S: 495 Oui, oui, oui c'est ça. ...

880 n'arrive pas juste

E: 496 Ça c'est la gare?

S: 497 Oui. ...

E: 498 Ça en faisant ça est-ce que tu pensais aux
499 autres problèmes qu'on a fait avant? puis de
500 voir, ça t'as-tu influencé de faire ça?

S: 501 Non qu'est-ce qui m'a influencé c'est le
502 diagramme que t'as faite.

influence du graphisme présenté

E: 503 Okay.

S: 504 Mais.

E: 505 Mais là tu voulais voir.

S: 506 Puis là je me suis dit okay bon je va faire
507 la gare puis les deux sens peut-être que ça
508 va me donner une petite idée parce que
509 j'avais rien là tu sais je comprenais rien.

peut comprendre avant de calculer

E: 510 Okay. ... Tu avais l'air [inaudible] ...

S: 511 Je me disais je regardais 60, 100, qu'est-ce
512 qui se passe là. Parce que je me disais une
513 division bien je peux pas diviser ça, ça fait
514 pas de sens toute suite tu sais.

E: 515 comprendre d'abord avant de faire des calculs ...
516 Tu l'écris là mais est-ce que tu sais pourquoi?

S: 517 Non je l'écrit [rires] ... Je fais juste regarder
518 comme, le 60, 100, le 60, 100 puis.

voir pour comprendre

E: 519 Hm, hm.

S: 520 Pour essayer de trouver tu sais ...

E: 521 c'est là je pense que tu vas [inaudible]

S: 522 il faut que tu fasses une division ...

E: 523 Regarde ... là, là toute de suite tu as dit bon
524 okay, tu regardais très attentivement 60 km
525 à l'heure. Arrête donc. Okay, 60 km à
526 l'heure puis tu disais 100 km puis je,
527 t'essayais de comprendre ça, puis là t'as dit
528 okay ça fait 160 km à l'heure.

S: 529 Non c'est que je faisais, c'est 100 km à l'heure,
530 puis 60 km à l'heure bon ... Y va à 60 km à l'heure
531 je veux dire y va 60 km à l'heure, bon qu'est-ce
532 que je fais avec ça là je sais qui va à 60 km
533 à l'heure puis je sais qu'il va à 100 km à
534 l'heure mais qu'est-ce que je fais avec ça,
535 ses deux affaires là

E: 536 hm, hm.

S: 537 Puis où est-ce que j'ai compris que c'était 160 km
538 à l'heure, c'est quand j'ai faite une heure
539 puis lui y fait une heure alors j'ai dit une

compréhension

heure, une heure.

E: Alors là tu l'avais pas compris déjà d'abord.

S: Non.

E: Tu l'avais pas encore compris. C'est là que ça m'a embêté parce que tu as dit 160 km à l'heure tu l'as dit.

S: Ah oui?

E: T'as dit 160 km à l'heure mais ça je pense que tu le voyais pas encore.

S: Bien je le, je regardais pas.

E: Puis après ça t'essayais encore de comprendre puis je me disais bien elle l'a peut-être pourquoi est-ce qu'elle a dit 160. Parce que là regarde tu continues d'essayer de le comprendre ... Okay mais tu l'avais pas vu okay ...

S: Je sais pourquoi j'ai dit, j'ai dit 160 parce que j'ai additionné les deux pour voir si je faisais une division avec ça c'est qu'est-ce que ça allait faire.

E: Ah! okay avec ton 880, tu cherchais encore ta division okay ... Okay.

S: C'est quand j'ai faite une ligne puis une heure là puis l'autre heure.

justification

E: Okay.

S: Puis là c'est pour ça que j'ai faite tu sais 160 okay ça fait une heure.

E: Hm, hm.

S: Puis là j'ai faite deux heures puis.

E: Après ça tu l'avais compris, c'est ça qui faut comprendre c'est que dans une heure ils font 160 km.

S: Oui c'est ça.

E: Ils sont séparés par 160. C'est la seule chose vraiment qu'il faut comprendre.

S: Oui.

E: Mais c'était difficile, okay ... étais-tu découragé là?

S: Non j'essayais d'être attentive c'est comme.

E: Tu essayais encore de comprendre. C'est dur aussi rendu à la fin de l'après-midi hein? ...

S: Ma mère aussi elle travaille à l'université d'Ottawa.

E: Pardon, vraiment

S: Hm, y est pas un professeur y est dans l'administration je crois.

E: Hm, hm, à quelle place?

S: Hm, Morissette, je pense [inaudible] à quelque part.

E: Okay.

S: Je suis pas sûre là.

E: C'est pas dans mon Pavillon.

S: Non.

E: J'aurais pu la connaître si elle avait été dans le-mien, Morissette je ne connais pas les gens qui sont en administration ... Est-ce qu'elle est en kinenthropologie?

S: C'est là que j'ai compris ici.

E: Okay.

S: Je sais pas puis je sais juste que dans l'administration là puis ... C'est là que j'ai compris là, là.

E: Puis là t'as bien écrit ton 160, okay ... Puis l'autre, ah okay.

S: Puis là c'est pour ça que j'ai faite tu vois je me suis mis, je me suis mis 160 mais j'ai juste dit okay lui y va faire 160.

E: Hm, hm.

S: 607 Puis là lui y va faire 100 puis là après ça
608 j'ai dit ah bon bien celle du 100 ça ça va
609 faire 160 fait que je suis mieux de faire
610 juste mettre 160 de même tout de suite.

E: 611 Ouais.

S: 612 à la place de faire tu sais, trois étages c'était
613 plus long ...

E: 614 Là je pense qu'après ça y a rien là, tu avais
615 très bien compris.

S: 616 Oui.

E: 617 Tu savais ce que tu faisais là tu calcules.

S: 618 Jusqu'à, jusqu'à temps que je sois rendu à
619 cinq heures.

E: 620 Ouais.

S: 621 Là à cinq heures là je savais plus quoi faire
622 là, bien tu sais bon.

80 de reste

E: 623 Hm, hm.

S: 624 J'étais rendu à 800, je peux pas ajouter un
625 autre heure parce que ça va me faire 960
626 c'est trop, ça fonctionne pas.

E: 627 Hm, hm.

S: 628 Mais dans ma tête, je voyais genre des 8, je
629 voyais, y fallait que je trouve un 8 hein.

E: 630 Hm, hm.

S: 631 Fait que là je me suis dit bon, 160 c'est
632 le temps de ma division là, en quelque part là y
633 faut que je saches, puis là je me suis dit bon ben,
634 ça c'est 50, puis ça c'est 30.

50 + 30 = 80

E: 635 Alors tu voyais le 50 et le 30.

S: 636 Oui, puis là après parce que je les ai divisé
637 en deux, les deux.

E: 638 Hm, hm.

S: 639 Puis là je me suis dit, là, là je va 80 mais
640 juste quand j'ai pensé 80 t'as dit 80, fait

80 = ½ de 160

que là je vois non, là j'ai repensé, j'ai regardé, puis là j'ai vu ah oui 80 bon c'est 80 divisé en deux fait que là ça va faire et demi parce que, puisque 80, 80 égal à 160.

E: Alors t'as vu la demi-heure.

S: Fait que là j'ai faite une demi-heure, 5 heures et demie.

E: Puis ça marchait.

révision

S: Puis là bien j'étais sûre que je l'avais parce que j'ai révisé deux fois dans ma tête.

E: Hm, hm.

S: Quand j'ai, quand je suis arrivé à mon cinq heures là

E: Ah oui.

S: Puis le restant ben ...

E: Là tu es encore en train de compter les euh.

S: Quatre heures ...

E: Là t'as les quatre heures. Oups. Là je voulais t'éviter une erreur de calcul.

S: Oui.

E: Parce que c'est, ça l'écrit gros hein ses marqueurs là, c'est un quatre que tu avais fait, tu recopies ... Cinq heures.

S: Je te dis des fois même quand je fais mes mathématiques des fois des zéros mais à place de faire un zéro je fais des six.

E: Des six ouais.

S: Mais là j'avais fait mon calcul puis là je me trompe mais là dans ma tête je me dis non ça se peut pas, ça se peut pas que ça soit ça on aurait dit que je le sais déjà la réponse puis là ça me force à le refaire.

E: Oui mais tu réalises des fois la, la réponse ça l'a pas, ç'est pas de logique en? avec ce que tu avais pensé.

S: Oui. ...

E: Okay là c'est ta demi-heure ...

S: [rires] Je regardais les calculs.

E: Tu regardais les deux bouts mais c'est là qui
t'as fait voir aussi je pense le trente puis le
cinquante hein?

S: Je me le disais dans la tête, je pense pas
que je l'ai dit à haute voix

E: Non ...

S: C'est ça je viens juste de dire je regarde
soixante divisé en deux.

regarde le graphique pour comprendre

E: Soixante divisé en deux ah okay tu voyais
trente puis là divisé 100 de l'autre bord en
deux ... Okay tu l'avais pas dit ça. Tu vois
c'est bon c'est pour ça que j'aime ça de le
revoir parce que moi ça me.

S: Oui.

E: Ça me donne d'autres informations qui était pas
dedans

S: hm, hm.

E: Ah c'est trente ... Tu étais vraiment sûre
de toi ici hein?

S: Oui.

E: Quand t'avais fini parce que tu les voyais, tu
comprenais très bien ...

S: Faut que tu fasses c'est pour ça que je suis
allé là, puis j'ai vu okay je suis correct là ...

E: T'étais sûre, y avait pas de doute ... Parfait,
c'est tout, j'en ai pas d'autre mais avant de
décrocher ça là, je veux juste te demander.

S: Je pense aussi la première fois aussi je
pense que, la première aussi je pense que
j'étais sûre c'est juste que, c'est juste que
le monde tu sais quand quelqu'un d'habitude
dit t'es-tu sûre puis là tu sais t'hésites.

degré de confiance en la réponse

E: Puis là tu dis [inaudible]

S: Parce que tu te dis, si elle me l'a demander, tu sais, tu sais c'est un adulte, si elle demande si c'est ça, ça veut dire qu'il y a une erreur à quelque part.

E: Je le sais mais je fais exprès, je pose tout le temps cette question là à tout le monde c'est parce que je veux voir si, mais par contre il y en a que ça, la, il y en a beaucoup ça crée un doute hein? Tu te dis bien aie! il y a quelque chose de pas bon.

S: Oui.

E: Alors tout de suite tu retournes puis tu revérifies. Par contre il y a des élèves qui disent oui je suis certaine puis ils veulent pas..

S: au début quand y..

E: ..c'est pourquoi je te pose cette question là d'ailleurs parce que je veux voir si tu vas revérifier tes calculs.

S: Hm, hm.

E: Ou bien si tu vas dire. Mais des fois c'est que vraiment on est sûr de soi puis il y a d'autres fois c'est juste que on veut pas se préoccuper de..

révision

S: Oui.

E: il y en a qui n'ont jamais pris cette habitude là d'aller revérifier leur calcul c'est une habitude..

S: Ah moi c'est, moi c'est y, moi je faisais jamais ça avant puis là mon père quand j'ai des erreurs ou des tests que j'ai vraiment pas de bonne note puis je suis vraiment pas contente de moi là.

E: Hm, hm.

S: Mon père y les revoit avec moi parce qui est super bon en mathématique en? puis là je va puis souvent c'est des erreurs super stupides que je fais.

E: Ah oui.

S: Fait que là y, y me disais toujours révise tes tests, révise tes tests puis là ça m'a rentré dans tête puis là je les révise quand j'ai le temps là.

revoir

E: Ah oui c'est parce que c'est des petites erreurs de calculs.

S: Oui.

E: Ça c'est choquant parce que des fois dans un test.

S: C'est ça.

E: C'est juste la réponse qu'ils regardent si ta réponse est pas bonne ils le savent pas que t'as bien compris parce que t'as certainement pas de difficulté à comprendre.

S: C'est ça des fois quand j'ai des bonnes notes jusqu'à cause que avec mes calculs là.

E: C'est des calculs c'est ridicule.

S: L'autre fois je vois mon père exactement cette sem. la semaine ou la semaine passée je vois mon père puis j'y dit je comprends pas pourquoi qui, qui compte les points des calculs, c'est pas un calcul qu'on fait c'est la méthode.

E: Oui c'est de comprendre.

S: C'est de comprendre, c'est ça.

comprendre et vitesse sont en contradiction

E: Quand t'as compris un problème, tu l'as fait.

S: Parce que nous autre là dans notre tête nous autre c'est dépêche-toi, dépêche-toi, dépêche-toi, hein quand t'es en train de faire un test de mathématique quand on est là.

E: Oui c'est ça t'as toujours peur.

S: Okay puis là tes calculs sont, sont euh.

E: T'as peur de pas avoir fini.

S: Oui.

E: Avant que la cloche sonne donc. C'est vrai
ça c'est pas, c'est vraiment c'est pas juste,
moi si j'enseignais les mathématiques encore
je les ai déjà enseigné en huitième puis
neuvième, je compterais bien plus la
compréhension que les calculs.

S: Oui.

E: Okay.

S: C'est ça la plupart aussi qui font là.

E: Oui c'est ça qui est le plus important, une
petite erreur de calcul ça, ça veut rien dire
ça.

S: Hm, hm.

<u>Questions</u>

E: Tout le monde peut faire ça, Okay. Juste
avant de partir je veux te poser deux petites
questions que je pose à tout le monde. Si
moi j'étais en train de parler à une personne
qui est très très bonne pour résoudre des
problèmes en mathématique puis que je
demandais à cette personne là, est-ce que tu
es bonne en lecture, qu'est-ce que tu penses
qu'elle me répondrait?

S: Oui.

E: Pourquoi?

S: Parce que y a beaucoup de lecture à faire oui
puis que tu comprends quand tu lis.

E: Hm, hm.

S: Ça fait que hm, faut que tu sois capable de
tu sais quand okay quelqu'un qui est bon en
lecture y va lire puis y va, y va être euh,
je sais pas y va comprendre qu'est-ce qui lit
mais moi ça fait pas longtemps que je suis
bonne en lecture.

E: [inaudible]?

S: Parce que j'avais, en première puis en
deuxième année là j'allais voir une madame je
lisais admettons que j'ai une pomme, je disais
des fois j'allais "une" puis là j'allais "hm pomme"
tu sais je lisais en l'envers tu sais.

E: Tu lisais à l'envers.

S: Je voulais, je mélangeais les affaires.

E: Ah okay. Mais t'avais pas de problème en
mathématique.

S: Puis j'hésite. Non pas des problèmes en
mathématique non.

E: Parce que t'as pas de difficulté à
comprendre.

S: Je sais pas, je sais pas c'est quoi.

E: Mais ça aide quand [inaudible].

S: C'est ça faut que je le lis, souvent ceux là qui sont bons en mathématique sont bons en lecture aussi là, il lit une fois puis là y vont regarder tout de suite. Moi il faut que je lis bien des fois pour que ça rentre dans ma tête puis ça je comprends.

difficultés de compréhension du vocabulaire

E: Alors c'est la lecture qui, qui t'embête.

S: Oui.

E: Mais ces problèmes là surtout si on fait le texte, les phrases sont complexes.

S: Oui.

E: Alors il faut comme je dis j'ai faite exprès aussi.

S: Hm, hm.

E: Okay une autre question. Si tu regardes deux élèves dans ta classe qui sont très bons pour solutionner des problèmes tous les deux okay. Sauf que un lui il va très vite, il, il aime pas de relire et relire le problème, il n'aime pas de prendre son temps pour faire des graphiques, pour bien disposer ses solutions, bien faire ses chiffres puis le deuxième lui il prend son temps il aime de relire plusieurs fois pour être certain qu'il ne se fait prendre puis il aime de faire des, de bien disposer.

S: Mais l'autre celui-là qui va vite y a quand même les bonnes réponses.

vitesse est importante

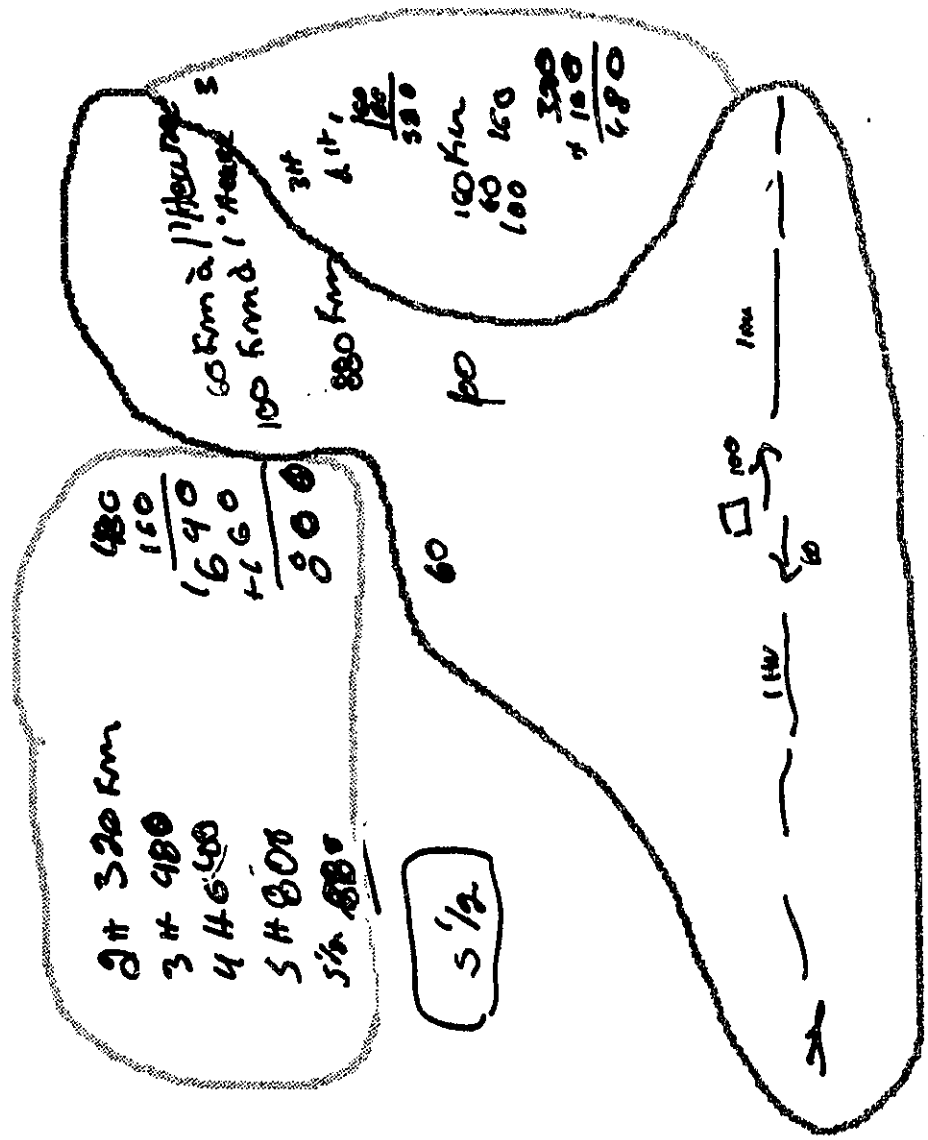
E: ils sont tous les deux très bons.

S: Hm, hm.

E: Okay puis lequel des deux tu penses est le plus intelligent?

S: Probablement celui-là qui est, bien ça dépend dans quel sens intelligent parce que y a un qui est intelligent de relire puis de faire sûr qu'il l'a bien tandis que l'autre y est intelligent parce qu'y comprend vite. Y a pas, y est vite, fait que les deux sont intelligents, la même intelligence, sauf différentes inte.. les deux sont pareils, les deux sont intelligents sauf différents genres d'intelligence.

E: Okay différente méthode. Okay c'est tout.


5 1/2

Sujet 35 (8e-A-f) Distance 2) 2 (PV)

Temps	Activités Cognitives	Nature	Fonction	Commentaires
	L-1			
57"	[illegible]	T-1-2	C-Com	
	A-1	V-G/V	C-Com	
1'57"	[illegible]			
	A-1			
2'10"	[illegible]	T-1-2	C-Com	
	A-1	V/S	CRés	60 inscrit 100 sans les flèches et symboles
4'24"	P-2			
	A-1	V/S/T-2	C-Rés	
	D-3	V-G/C	C-Com/M-Évi	
	I	C-1	M-Fac	
5'38"	A-1	V/C	C-Com/M-Évi	
	D-1	C	M-Évi	
	É	T-2	M-Évi	
	I	C-1	M-Fac	
	É	T-2	M-Évi	
	I	C-1	M-Fac	
7'07"	E-C			
	D-1	R	M-Vér	
	É	T-2	M-Évi	
	I	C-1	M-Fac	
	É	T-2	M-Évi	
8'00"	[illegible]			
	A-1	V/T-2	C-Rés	I implicite (685-686)
	E-C			
	I			
	É	T-2	M-Évi	Le graphique présenté influence (501-502). Voit la nécessité de comprendre (453-456, 506-509, 562-572, 679-686) et utilise son graphique jusqu`a la fin. Revoir et comprendre c`est important mais en contradiction avec vitesse.
	D-3	C/S	S-But	
8'50"	E-P			
	D-3			

8'57" Réussi

APPENDICE E

Tableaux 7a, 16a

Tableau 7a

Fréquence de solutions où le graphisme apparaît mettant en relation la typologie des graphismes selon le niveau et les habiletés

Typologie	8e année			10e année		
	Faible	Moyen	Fort	Faible	Moyen	Fort
Carré	–	2	1	3	2	1
Rectangle	–	3	2	3	3	2
Polyèdre en Perspective	–	1	1	1	1	1
Polyèdre en Développement	–	1	–	1	–	–
Tableau Verbal	2	–	5	5	7	6
Tableau Quantitatif	1	5	3	5	1	3
Calcul Continu	4	5	7	6	9	9
Calcul Ponctuel	1	3	3	3	2	2
Vecteur	2	3	2	2	2	4
Vecteur Gestuel	–	–	–	–	1	–
Diagramme Non-disjoint	1	1	–	–	1	1
Diagramme Disjoint	1	–	–	1	–	1
Objet	2	–	–	–	1	1
Formule	–	–	–	–	–	1
Rature	–	1	2	2	2	4
Proposition/Mot	1	3	4	4	5	5
Chiffre	8	10	7	5	7	4
Symbole	2	1	5	2	4	5
TOTAL	**25**	**39**	**42**	**43**	**48**	**50**
SUCCÈS	**1(1)**	**5(2)**	**8(4)**	**5(3)**	**5(3)**	**10(5)**

Note. Nombre de sujets ayant réussi le deuxième problème, entre parenthèses.

Tableau 16a

Fréquence d'utilisation du graphisme mettant en relation les composantes fonctionnelles selon le succès ou l'échec dans le domaine

Composante fonctionnelle	Distance		Géométrie		Inclusion		TOTAL
	échec (n=13)	succès (n=11)	échec (n=13)	succès (n=11)	échec (n=12)	succès (n=12)	
Compréhension du problème	20	17	42	39	13	19	**150**
Support à l'analyse	1	–	7	25	2	2	**37**
Stratégie de résolution	–	9	11	44	4	2	**70**
Stratégie de récupération	–	2	2	6	3	1	**14**
Support affectif	–	–	2	2	1	–	**5**
Support pour le rappel et l'exécution	31	32	50	66	27	32	**238**
Mise en évidence de relations	4	30	1	19	1	1	**56**
Vérification locale	3	13	4	4	2	2	**28**
Mise en évidence de but/sous-but	4	15	11	34	8	6	**78**
Vérification globale	–	4	–	–	2	1	**7**
TOTAL	**63**	**122**	**130**	**239**	**63**	**66**	**683**