

CANADIAN THESES ON MICROFICHE

I.S.B.N.

THESES CANADIENNES SUR MICROFICHE



National Library of Canada
Collections Development Branch

Canadian Theses on
Microfiche Service

Ottawa, Canada
K1A 0N4

Bibliothèque nationale du Canada
Direction du développement des collections

Service des thèses canadiennes
sur microfiche

NOTICE

The quality of this microfiche is heavily dependent upon the quality of the original thesis submitted for microfilming. Every effort has been made to ensure the highest quality of reproduction possible.

If pages are missing, contact the university which granted the degree.

Some pages may have indistinct print especially if the original pages were typed with a poor typewriter ribbon or if the university sent us a poor photocopy.

Previously copyrighted materials (journal articles, published tests, etc.) are not filmed.

Reproduction in full or in part of this film is governed by the Canadian Copyright Act, R.S.C. 1970, c. C-30. Please read the authorization forms which accompany this thesis.

THIS DISSERTATION
HAS BEEN MICROFILMED
EXACTLY AS RECEIVED

AVIS

La qualité de cette microfiche dépend grandement de la qualité de la thèse soumise au microfilmage. Nous avons tout fait pour assurer une qualité supérieure de reproduction.

S'il manque des pages, veuillez communiquer avec l'université qui a conféré le grade.

La qualité d'impression de certaines pages peut laisser à désirer, surtout si les pages originales ont été dactylographiées à l'aide d'un ruban usé ou si l'université nous a fait parvenir une photocopie de mauvaise qualité.

Les documents qui font déjà l'objet d'un droit d'auteur (articles de revue, examens publiés, etc.) ne sont pas microfilmés.

La reproduction, même partielle, de ce microfilm est soumise à la Loi canadienne sur le droit d'auteur, SRC 1970, c. C-30. Veuillez prendre connaissance des formules d'autorisation qui accompagnent cette thèse.

LA THÈSE A ÉTÉ
MICROFILMÉE TELLE QUE
NOUS L'AVONS REÇUE

Algèbres enveloppantes des algèbres de Lie

de dimension inférieure ou égale à 3

par

Mario Major

Thèse présentée

à l'École des Etudes Supérieures

de l'Université d'Ottawa

pour l'obtention de la maîtrise ès sciences

en mathématiques

Décembre 1982



Mario Major, Ottawa, Canada, 1983.

Remerciements

En tout premier lieu, aucune autre place ne lui rendrait justice, à Wulf Rossmann pour m'avoir guidé dans la réalisation de ce travail, mais surtout pour la patience extrême, et le qualificatif est juste, dont il a su faire preuve.

Jé remercie également le département de Mathématiques de l'Université d'Ottawa, ainsi que le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada pour l'aide financière qui a permis de mener à bien cet ouvrage.

Enfin, à madame Madeleine Patry-Latour à qui est due la frappe du manuscrit et dont le travail impeccable fut grandement apprécié.

Résumé

On détermine, dans ce travail, la structure des idéaux des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie de dimension inférieure ou égale à 3.

Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . La technique utilisée consiste à choisir une sous-algèbre commutative A de $U(\mathfrak{g})$ et de reconstituer en partant des idéaux de A , les idéaux de $U(\mathfrak{g})$. En effet, si I est un idéal de $U(\mathfrak{g})$ alors $I \cap A$ est un idéal de A stable par \mathfrak{g} . On peut donc en partant d'un idéal J de A stable par \mathfrak{g} , tenter de reconstruire les idéaux de l'algèbre enveloppante.

I - Introduction

On détermine dans cet ouvrage, la structure des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie de dimension inférieure ou égale à trois. Kirillov ayant déjà exploré l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, et remarqué: "It would be very interesting to obtain an analogous description of the structure of the ideals for the envelopping algebras of other Lie algebras." [K], nous examinerons donc quelques autres possibilités.

Dans la suite, k sera toujours un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, et les idéaux seront bilatères.

Nous serons satisfaits lorsque l'étude des idéaux d'une algèbre enveloppante sera ramenée à une étude d'idéaux d'une algèbre commutative. Nous procéderons donc de la façon suivante. Soient A une sous-algèbre commutative de $U(\mathfrak{g})$, l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , et I un idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$. Alors, $I \cap A$ est un idéal de A . On reconstruira donc les idéaux I de $U(\mathfrak{g})$ en partant des idéaux de $I \cap A$.

La littérature concernant la classification des idéaux primitifs d'algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie en général, est abondante. En ce qui concerne les algèbres de Lie nilpotentes et résolubles, la classification des idéaux primitifs est due à Dixmier [DI2], [DI3], Conze et Vergne [CV], Duflo [DU1], et

Rentschler [R1], R2] entre autres. Pour les algèbres de Lie semi-simples, la classification est due à Duflo [DU2]. On renvoie à Dixmier, Algèbres enveloppantes [DI1] pour les détails et d'autres références.

En ce qui a trait aux idéaux arbitraires des algèbres enveloppantes, peu semble être connu à l'exception de la classification de $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ par Kirillov [K] (et des algèbres commutatives évidemment). Nos résultats pour les algèbres de Lie de dimension inférieure ou égale à 3 donnent quelques "évidences expérimentales" sur ce à quoi l'on peut s'attendre en général.

Les méthodes utilisées dans ce travail sont élémentaires et ne dépendent pas des résultats concernant les idéaux primitifs mentionnés ci-haut.

II - Algèbres enveloppantes des algèbres de Lie de dimension 2

Il n'y a qu'une seule algèbre de Lie non-abélienne de dimension 2. Soient \mathfrak{g} cette algèbre et $\{x, y\}$ une base satisfaisant la relation $[x, y] = y$. On notera $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de cette algèbre de Lie \mathfrak{g} et $U(\mathfrak{u})$ l'algèbre enveloppante de l'idéal \mathfrak{u} de \mathfrak{g} engendré par l'élément y . Il est clair que $U(\mathfrak{u})$ est isomorphe à $k[y]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée sur le corps k . On identifiera donc dans ce paragraphe $U(\mathfrak{u})$ à $k[y]$.

Soit I un idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$; alors $J = I \cap k[y]$ est un idéal de $k[y]$ stable par \mathfrak{g} . Etant donné un idéal J de $k[y]$ stable par \mathfrak{g} , on procédera inversement de façon à déterminer tous les idéaux bilatères I de $U(\mathfrak{g})$ rencontrant $k[y]$ en J .

Tout idéal J de $k[y]$ est engendré par un seul polynôme puisque $k[y]$ est un anneau principal [MC]. Montrons que les seuls idéaux non-nuls de $k[y]$ stables par \mathfrak{g} sont ceux de la forme $y^m k[y]$, où m est un entier non-négatif.

✓ Définition 1: Un idéal J de $k[y]$ est homogène si les composantes homogènes de tout élément de J appartiennent à J .

Lemme 2: Si J est un idéal de $k[y]$ stable par \mathfrak{g} , alors J est homogène.

Démonstration: On note $k^n[y]$ l'espace des polynômes homogènes de degré n de $k[y]$. Supposons que J soit un idéal de $k[y]$ stable par \mathcal{U} . Montrons que

$$J = \bigoplus J^n \quad \text{où} \quad J^n = J \cap k^n[y].$$

Posons $k_n[y] = k^0[y] \oplus k^1[y] \oplus \dots \oplus k^n[y]$ et remarquons que J est stable par $\text{ad}(x)$, alors la restriction de $\text{ad}(x)$ à $k_n[y]$, $\text{ad}(x)|_{k_n[y]}$, est semi-simple. En effet, $\text{ad}(x)y^n = ny^n$. On peut donc écrire $J \cap k_n[y] = (J \cap k^0[y]) \oplus (J \cap k^1[y]) \oplus \dots \oplus (J \cap k^n[y])$ ainsi $J = \bigoplus J^n$. □

Utilisant ce résultat, il est maintenant clair que les idéaux non-nuls de $k[y]$ stables par \mathcal{U} sont tous les idéaux de la forme $J = y^m k[y]$, où m est un entier non-négatif. Avant d'aller plus loin, notons l'identité $y^m U(\mathcal{U}) = U(\mathcal{U})y^m$. Cette identité résulte de la suivante: $y^m x^k = (x-m)^k y^m$. Soit $u \in y^m U(\mathcal{U})$, alors $u = y^m u'$ où $u' \in U(\mathcal{U})$. $u = y^m \sum f_k(y) x^k$ (d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt [DI 1 2.1.11])

$$\begin{aligned}
 &= \sum f_k(y) y^m x^k \\
 &= \sum f_k(y) (x-m)^k y^m \in U(\mathcal{U})y^m
 \end{aligned}$$

L'inclusion inverse s'établit de façon semblable.

Définition 3: Soit $J = y^m k[y]$. Un idéal I de $U(\mathcal{U})$ est d'ordre ℓ sur J s'il satisfait aux conditions suivantes:

- i) $J = I \cap k[y]$
 ii) $I \subset y^{m-\ell} U(\mathcal{O}_y)$
 iii) $I \not\subset y^{m-\ell+1} U(\mathcal{O}_y)$

Notons que les idéaux recherchés sont des idéaux d'ordre au plus m sur $J = y^m k[y]$. De plus, on peut toujours se ramener au cas où I est d'ordre m sur $J = y^m k[y]$. En effet, soit I un idéal d'ordre $\ell \neq m$ sur $J = y^m k[y]$, alors $\tilde{I} = \frac{I}{y^{m-\ell}}$ est d'ordre ℓ sur $\tilde{J} = y^\ell k[y]$ comme on peut facilement le vérifier. On peut donc supposer que les idéaux I ne sont contenus dans aucun idéal $y^d U(\mathcal{O}_y)$ où $d > 0$.

Si I est un idéal de $U(\mathcal{O}_y)$ on peut toujours le représenter sous la forme $I = \sum_n I_n y^n$, où $I_n \subset k[x]$. Les I_n sont évidemment des idéaux de $k[x]$ puisque $xI = \sum_n xI_n y^n \subset I$. Écrivons donc $I = \sum_n \langle g_n(x) \rangle y^n$, où $\langle g_n(x) \rangle$ est l'idéal de $k[x]$ engendré par $g_n(x)$. De l'inclusion $yI \subset I$ on obtient $\langle g_n(x) \rangle \subset \langle g_{n+1}(x) \rangle$, ce qui est équivalent à $g_{n+1}(x) | g_n(x)$. Regardons maintenant ce que la condition $yI \subset I$ nous permet de dire concernant les $g_n(x)$.

$$\begin{aligned}
 yI &= y \sum_n \langle g_n(x) \rangle y^n \\
 &= \sum_n y \langle g_n(x) \rangle y^n \\
 &= \sum_n \langle g_n(x-1) \rangle y^{n+1} \\
 &\subset \sum_n \langle g_n(x) \rangle y^n
 \end{aligned}$$

Donc, $\langle g_n(x-1) \rangle \subset \langle g_{n+1}(x) \rangle$. Ainsi, $g_{n+1}(x) | g_n(x-1)$, et on peut établir le théorème suivant:

Théorème 4: Soit $J = y^m k[y]$, $m \neq 0$. Les idéaux I de $U(y)$ d'ordre m sur J sont en correspondance biunivoque avec les suites $\{g_n(x)\}$ de polynômes unitaires de $k[x]$ satisfaisant aux conditions suivantes:

- i) $\deg g_n(x) > 0$ si $n < m$
 $\deg g_m(x) = 0$
- ii) $g_{n+1}(x) | g_n(x)$
- iii) $g_{n+1}(x) | g_n(x-1)$

De plus, une fois $g_0(x)$ fixé, il n'y a qu'un nombre fini de telles suites.

Démonstration: Soit $I = \sum_n \langle g_n(x) \rangle y^n$, où les $g_n(x)$ sont des polynômes unitaires. Supposons que I soit un idéal d'ordre m sur $J = y^m k[y]$. La discussion précédant le théorème nous donne les conditions ii) et iii). Supposons qu'il existe $n_0 < m$ tel que $\deg g_{n_0}(x) = 0$, alors dans ce cas $y^{n_0} \in I$, mais ceci est impossible puisqu'on aurait $y^{n_0} \in I \cap k[y] = J$. Ainsi, $\deg g_n(x) > 0$ si $n < m$ et $\deg g_m(x) = 0$ puisque $y^m \in I$.

Inversement, supposons que $\{g_n(x)\}$ soit une suite de polynômes unitaires satisfaisant aux conditions i), ii) et iii) et

?

considérons $I = \sum_n \langle g_n(x) \rangle y^n$. I est un idéal (L'inclusion $xI \subset I$ est évidente. D'autre part $Ix \subset I$ puisque $y^n x = xy^n - ny^n$. De plus, l'inclusion $yI \subset I$ résulte de l'identité $yg_n(x) = g_n(x-1)y$ alors que la dernière inclusion résulte de la condition ii). Il reste à montrer que I est d'ordre m sur $J = y^m k[y]$. Il est clair que $I \cap k[y] = J$ puisque $g_m(x) = g_{m+1}(x) = \dots = 1$. D'autre part $I \neq y^d U(\mathcal{A})$ quel que soit $d > 0$ car autrement on aurait $I \subset yU(\mathcal{A})$, ce qui est impossible puisque $g_0(x) \neq 0$.

Une fois $g_0(x)$ fixé, il est évident qu'il n'y a qu'un nombre fini de suites vérifiant les conditions i), ii) et iii). Ceci termine la démonstration du théorème. \square

Examinons maintenant le cas des idéaux premiers de $U(\mathcal{A})$. Il est clair que si I est un idéal premier de $U(\mathcal{A})$ alors $J = I \cap k[y]$ est un idéal premier de $k[y]$. Le seul idéal premier non-trivial et homogène de $k[y]$ est $yk[y]$. On obtient donc le

Corollaire 4.5: Les idéaux premiers non-triviaux de $U(\mathcal{A})$ sont $yU(\mathcal{A})$ et tous les idéaux $(\alpha+x)k[x] \oplus yU(\mathcal{A})$ où $\alpha \in k$.

Démonstration: Les idéaux premiers non-triviaux de $U(\mathcal{A})$ sont des idéaux d'ordre 0 ou 1 sur $yk[y]$. Dans le premier cas, on obtient $yU(\mathcal{A})$. Maintenant, d'après le théorème, les idéaux I tels que $I \cap k[y] = yk[y]$ sont en correspondance biunivoque avec les polynômes unitaires $g_0(x)$ de $k[x]$. Mais, pour que I soit premier il

faut et il suffit que $g_0(x)$ soit irréductible. Ainsi, il y a une correspondance entre I et $g_0(x) = \alpha + x$ puisque $g_0(x)$ est unitaire ou, plus précisément, une correspondance entre les idéaux premiers de $U(\mathcal{U})$ d'ordre 1 sur $yk[y]$ et les scalaires de k . \square

Si $J = 0$ (respectivement $k[y]$), alors le seul idéal pouvant intersecter $k[y]$ en J est $I = 0$ (respectivement $U(\mathcal{U})$).

III - Algèbres enveloppantes des algèbres de Lie de dimension 3

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension 3. Notons $D^1\mathfrak{g}$ le sous-espace de \mathfrak{g} engendré par tous les commutateurs, c'est-à-dire $D^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Remarquons que $D^1\mathfrak{g}$ est un idéal de \mathfrak{g} . On procédera à l'étude des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie \mathfrak{g} selon la dimension, $\dim D^1\mathfrak{g}$, de $D^1\mathfrak{g}$.

1. $\dim D^1\mathfrak{g} = 0$.

Tous les commutateurs étant zéro, il s'agit d'une algèbre de Lie abélienne, ce qui n'a pas d'intérêt pour nous.

2. $\dim D^1\mathfrak{g} = 1$.

Il y a deux algèbres de Lie non-isomorphes de dimension 3 vérifiant cette condition. Soit $\{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2\}$ une base de $D^1\mathfrak{g}$. On caractérise \mathfrak{g} par les commutateurs des éléments de la base.

2.1. $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1, [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = 0$.

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} ainsi obtenue est évidemment isomorphe à $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ où \mathfrak{g}_1 est l'algèbre de Lie non-abélienne de dimension 2 et \mathfrak{g}_2 est l'algèbre de Lie unidimensionnelle. L'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} est isomorphe au produit tensoriel des algèbres enveloppantes $U(\mathfrak{g}_1)$ et $U(\mathfrak{g}_2)$ de \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 respectivement. C'est-à-dire $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}_1) \otimes U(\mathfrak{g}_2)$.

$$2.2 \quad [x, y] = z, \quad [y, z] = [x, z] = 0.$$

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} vérifiant ces relations est habituellement appelée algèbre de Heisenberg de dimension 3.

On peut facilement vérifier que le centre $Z(\mathfrak{g})$, de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} est l'algèbre des polynômes à une indéterminée. C'est-à-dire, $Z(\mathfrak{g}) = k[z]$.

D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, tout élément u de $U(\mathfrak{g})$ s'écrit $u = \sum_{i,j} f_{i,j}(z) x^i y^j$. On classifiera les idéaux bilatères I de $U(\mathfrak{g})$ d'après leur intersection J avec le centre de l'algèbre enveloppante. Remarquons que J est un idéal de $Z(\mathfrak{g})$, donc engendré par un polynôme $f_0(z)$, puisque $k[z]$ est un anneau principal.

Réalisons une filtration sur $U(\mathfrak{g})$ en posant

$$U^{(n)}(\mathfrak{g}) = \left\{ u \in U(\mathfrak{g}) \mid u = \sum_{i+j \leq n} f_{i,j}(z) x^i y^j \right\}$$

Si I est un idéal de $U(\mathfrak{g})$, on note $I^{(n)}$ l'espace $I \cap U^{(n)}(\mathfrak{g})$. Notons que $I^{(0)} = I \cap Z(\mathfrak{g})$. Tout idéal J de $Z(\mathfrak{g})$ peut être représenté sous la forme $J = z^\ell p(z) Z(\mathfrak{g})$, où $p(z)$ est un polynôme de $k[z]$ tel que $p(0) \neq 0$ et ℓ un entier non-négatif.

Théorème 2.2.1: Soit $J = z^\ell p(z)Z(\mathcal{O}_y)$, où $p(0) \neq 0$, un idéal de $Z(\mathcal{O}_y)$, alors

i) si $\ell = 0$, le seul idéal de $U(\mathcal{O}_y)$ rencontrant $Z(\mathcal{O}_y)$ en J est $I = p(z)U(\mathcal{O}_y)$

ii) si $\ell > 0$, il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux I de $U(\mathcal{O}_y)$ rencontrant $Z(\mathcal{O}_y)$ en J et les idéaux propres

$I'/zU(\mathcal{O}_y)$ de $U(\mathcal{O}_y)/zU(\mathcal{O}_y) \cong k[x,y]$ donnée par $I = z^{\ell-1}p(z)I'$

Démonstration: i) Puisque $J \subset I$ on obtient l'inclusion

$p(z)U(\mathcal{O}_y) = JU(\mathcal{O}_y) \subset I$. Il reste donc à établir l'inclusion inverse.

Soit $u \in I$, alors $u \in I^{(n)}$ pour un certain n . On montre, par récurrence sur n , que $I^{(n)} \subset p(z)U(\mathcal{O}_y)$. Cela suffit, puisque

$I = \bigcup_n I^{(n)}$. Si $n = 0$, $I^{(0)} = I \cap Z(\mathcal{O}_y) = J = p(z)Z(\mathcal{O}_y) \subset p(z)U(\mathcal{O}_y)$.

Supposons le résultat vérifié pour $I^{(n-1)}$ et choisissons $u \in I^{(n)}$,

alors $u = \sum_{i+j \leq n} f_{i,j}(z)x^i y^j$ et

$$[u, x] = -\text{ad}(x) \cdot u$$

$$= \sum_{\substack{i+j \leq n \\ j > 0}} f_{i,j}(z)x^i [y^j, x]$$

$$= - \sum_{\substack{i+j \leq n \\ j > 0}} j z f_{i,j}(z)x^i y^{j-1}$$

$$\in I^{(n-1)}$$

Donc $zf_{i,j}(z) \in p(z)U(\mathcal{O}_y)$, si $j > 0$.

Ainsi, $f_{i,j}(z) \in p(z)U(\mathcal{O}_y)$, si $j > 0$, puisque $p(0) \neq 0$.

De façon similaire on obtient, en prenant le crochet de u avec y , $f_{i,j}(z) \in p(z)U(\mathcal{O}_y)$, si $i > 0$. On a aussi

$$f_{0,0}(z) = u - \sum_{0 < i+j \leq n} f_{i,j}(z) x^i y^j \\ \in I \cap Z(\mathcal{O}_y)$$

puisque $p(z)U(\mathcal{O}_y) \subset I$. Et par conséquent, $u \in p(z)U(\mathcal{O}_y)$.

ii) On considère, dans un premier temps, le cas où $J = zZ(\mathcal{O}_y)$. Les idéaux bilatères I de $U(\mathcal{O}_y)$ rencontrant $Z(\mathcal{O}_y)$ en J sont les idéaux non-triviaux de $U(\mathcal{O}_y)$ contenant $zU(\mathcal{O}_y)$. En effet, si $zU(\mathcal{O}_y) \subset I \neq U(\mathcal{O}_y)$ on a $I \cap Z(\mathcal{O}_y) \supset zU(\mathcal{O}_y) \cap Z(\mathcal{O}_y) = zZ(\mathcal{O}_y)$ et $I \neq U(\mathcal{O}_y) \Rightarrow I \cap Z(\mathcal{O}_y) \neq Z(\mathcal{O}_y)$. La maximalité de $zZ(\mathcal{O}_y)$ implique que $I \cap Z(\mathcal{O}_y) = zZ(\mathcal{O}_y)$. Il y a une correspondance biunivoque entre ces idéaux et les idéaux non-triviaux de $k[x,y]$ puisque $U(\mathcal{O}_y)/zU(\mathcal{O}_y) \cong k[x,y]$.

Considérons maintenant le cas $J = zp(z)Z(\mathcal{O}_y)$. Soient I un idéal de $U(\mathcal{O}_y)$ rencontrant $k[z]$ en J et u un élément de I , alors $u \in I^{(n)}$ pour un certain n . Montrons par récurrence sur n que $u = \sum_{i+j \leq n} f_{i,j}(z) x^i y^j$ où les $f_{i,j}(z)$ appartiennent à $p(z)Z(\mathcal{O}_y)$. Si $n = 0$, alors $u \in I^{(0)} = zp(z)Z(\mathcal{O}_y)$. Ainsi donc, $u \in p(z)Z(\mathcal{O}_y)$. Supposons le résultat vérifié si $u \in I^{(n-1)}$. Choisissons $u \in I^{(n)}$,

$$u = \sum_{i+j \leq n} f_{i,j}(z) x^i y^j$$

$$[u, x] = - \sum_{\substack{i+j \leq n \\ j > 0}} j z f_{i,j}(z) x^i y^{j-1}$$

Donc, si $j > 0$, $z f_{i,j}(z) \in p(z)Z(\mathcal{A})$ et par suite,

$f_{i,j}(z) \in p(z)Z(\mathcal{A})$ puisque $p(0) \neq 0$. De même, $f_{i,j}(z) \in p(z)Z(\mathcal{A})$,

si $i > 0$. $f_{0,0}(z) = u - \sum_{0 < i+j \leq n} f_{i,j}(z) x^i y^j$. Ainsi,

$$z f_{0,0}(z) = uz - \sum_{0 < i+j \leq n} z f_{i,j}(z) x^i y^j \in I \cap Z(\mathcal{A}) = zp(z)Z(\mathcal{A}).$$

Par conséquent, $f_{0,0}(z) \in p(z)Z(\mathcal{A})$. On peut donc écrire

$$u = p(z) \sum_{i+j \leq n} f'_{i,j}(z) x^i y^j, \text{ où } f'_{i,j}(z) = p(z) f_{i,j}(z). \text{ On considère}$$

l'idéal $I' = \frac{1}{p(z)} I$. (Ce qui a toujours un sens si $I \neq 0$, car dans ce cas $p(z) \neq 0$; en effet, supposons $p(z) = 0$, alors $J = 0$. Soit $u \in I$, alors

$$u = f_{0,0}(z) + f_{1,0}(z)x + f_{0,1}(z)y + \dots + f_{m,n}(z)x^m y^n.$$

$$(\text{ad } y)^n (\text{ad } x)^m u = z^{m+n} f_{m,n}(z) \in I \cap k[z] = J = 0,$$

ainsi donc, $f_{m,n}(z) = 0$. De même, $f_{i,j}(z) = 0$ quels que soient i et j . C'est-à-dire $u = 0$, et par conséquent $I = 0$.) Alors

$$I' \cap Z(\mathcal{A}) = \frac{1}{p(z)} I \cap Z(\mathcal{A}) = zZ(\mathcal{A}). \text{ Ainsi, } I = p(z)I', \text{ où}$$

$I'/zU(\mathcal{A})$ est un idéal non-trivial de $U(\mathcal{A})/zU(\mathcal{A}) \cong k[x,y]$. On montre facilement, par récurrence, que si I est un idéal de $U(\mathcal{A})$ vérifiant $I \cap Z(\mathcal{A}) = z^\ell p(z)Z(\mathcal{A})$ où $p(0) \neq 0$ et $\ell \geq 1$, alors

$I = z^{\ell-1}p(z)I'$ où $I'/zU(\mathcal{O}_y)$ est un idéal $U(\mathcal{O}_y)/zU(\mathcal{O}_y) \cong k[x,y]$.

Ceci termine la démonstration du théorème. \square

Examinons maintenant le cas des idéaux premiers de $U(\mathcal{O}_y)$.
 Soit I un idéal premier de $U(\mathcal{O}_y)$, alors $J = I \cap Z(\mathcal{O}_y)$ est un idéal premier de $Z(\mathcal{O}_y)$. Les seuls idéaux premiers non-triviaux de $Z(\mathcal{O}_y)$ sont $zZ(\mathcal{O}_y)$ et $(z-\alpha)Z(\mathcal{O}_y)$. En effet, tout idéal non-trivial de $Z(\mathcal{O}_y)$ est de la forme $z^\ell p(z)Z(\mathcal{O}_y)$ où $\ell \geq 0$ et $p(0) \neq 0$. Si $p(z)$ n'est pas un polynôme constant on a $z^\ell p(z) \in J$ mais $z^\ell \notin J$ et donc $p(z) \in J$ puisque J est premier. Mais cela n'est possible que lorsque $\ell = 0$. Un raisonnement identique nous permet de conclure que $p(z)$ est de degré 1. Ainsi, $J = (z-\alpha)Z(\mathcal{O}_y)$. Maintenant, si $p(z)$ est un polynôme constant il est facile de voir que $J = zZ(\mathcal{O}_y)$. Il est clair que $(z-\alpha)Z(\mathcal{O}_y)$ et $zZ(\mathcal{O}_y)$ sont des idéaux premiers de $Z(\mathcal{O}_y)$.

Corollaire 2.2.2: Si $J = zZ(\mathcal{O}_y)$, alors les idéaux premiers I de $U(\mathcal{O}_y)$ tels que $J = I \cap Z(\mathcal{O}_y)$ sont en correspondance biunivoque avec les idéaux premiers non-triviaux de $k[x,y]$.

Si $J = (z-\alpha)Z(\mathcal{O}_y)$, le seul idéal premier de $U(\mathcal{O}_y)$ rencontrant $k[z]$ en J est $I = (z-\alpha)U(\mathcal{O}_y)$.

3: $\dim D^1 \mathfrak{g} = 2$.

Il y a deux familles d'algèbres de Lie de dimension 3 dans cette catégorie. Toutes ces algèbres vérifient les relations: $[x,y] = y + \alpha z$, $[x,z] = \beta z$ et $[y,z] = 0$. La première famille étant celle où $\alpha = 0$ et β arbitraire; la seconde $\beta = 1$ et α arbitraire. On tentera de traiter simultanément ces deux cas tout en précisant certains détails propres à chacune des familles. Remarquons que le cas $\beta = 0$, a déjà été étudié; par conséquent cette possibilité sera dans la suite toujours exclue.

Dans ce paragraphe, \mathfrak{u} sera l'idéal $ky + kz$ de \mathfrak{g} et $U(\mathfrak{u})$ son algèbre enveloppante. $U(\mathfrak{u})$ est évidemment isomorphe à $k[y,z]$, l'algèbre des polynômes à deux indéterminées, le crochet de y et z étant nul. On identifiera donc $U(\mathfrak{u})$ à $k[y,z]$ pour simplifier la visualisation.

Soit I un idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$, alors on peut associer à I un idéal $J = I \cap k[y,z]$ de $k[y,z]$ stable par \mathfrak{g} . Le but étant de se ramener à l'étude des idéaux d'une algèbre commutative, on essaiera donc de classifier les idéaux de $U(\mathfrak{g})$ d'après les idéaux de $k[y,z]$ stables par \mathfrak{g} .

Dans la suite, J sera toujours un idéal de $k[y,z]$ stable par \mathfrak{g} et P_0 sera l'ensemble des polynômes en y et z sans termes

constants (c'est-à-dire $P_0 = \langle y, z \rangle$). P_0 est un idéal maximal de $k[y, z]$.

Définition 3.1: Soit I un idéal de $A = U(\mathcal{A})$ ou $k[y, z]$, alors on appelle idéal quotient de I par P_0 dans A l'idéal

$$I :_A P_0 = \{u \in A \mid uP_0 \subset I \text{ et } P_0u \subset I\}.$$

Remarques: i) On écrira simplement $I : P_0$ si aucune confusion n'est possible.

ii) Si J est un idéal de $k[y, z]$ stable par \mathcal{A} , alors $J : U(\mathcal{A})P_0 = J : k[y, z]P_0$ et on écrit donc, sans risque de confusion, $J : P_0$ dans les deux cas.

iii) Si $A = k[y, z]$, il est clair que $I :_A P_0$ est un idéal de $k[y, z]$. Soient B un sous-ensemble quelconque de $k[y, z]$ et I un idéal de $k[y, z]$; on définit de manière évidente $I : k[y, z]^B$ qui est évidemment un idéal de $k[y, z]$.

iv) Si $A = U(\mathcal{A})$, il n'est pas du tout évident que $I :_A P_0$ soit un idéal de A . Montrons premièrement que $I : U(\mathcal{A})P_0$ est stable par $\text{ad}(x)$. Choisissons un élément quelconque, u , de $I : U(\mathcal{A})P_0$, alors

$$\begin{aligned} (\text{ad}(x) \cdot u)y &= xuy - uxy \\ &= xuy - uyx - \mathcal{A}y - \alpha uz \\ &= \text{ad}(x) \cdot uy - uy - \alpha uz \in I, \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} (\text{ad}(x) \cdot u)z &= xuz - uxz \\ &= xuz - uzx - \beta uz \in I. \end{aligned}$$

Maintenant, soit $v \in I : {}_A P_0$, alors il est évident que vy, yv, vz et zv sont aussi des éléments de $I : {}_A P_0$. De plus, $P_0 vx \subset Ix \subset I$ et $vxP_0 \subset xvP_0 - (ad(x)v)P_0 \subset I$, puisque $I : {}_A P_0$ est stable par $ad(x)$. Ainsi, $vx \in I : {}_A P_0$. De même $xv \in I : {}_A P_0$. Par conséquent, $I : {}_A P_0$ est un idéal de A .

v) $I : {}_A P_0^\ell \supset (I : {}_A P_0^{\ell-1}) : P_0$, pour tout entier $\ell \geq 1$.

En outre, si $A = k[y, z]$ l'inclusion inverse est aussi vérifiée.

Soit $u \in (I : {}_A P_0^{\ell-1}) : P_0$, alors $uP_0 \subset I : {}_A P_0^{\ell-1}$ et $P_0 u \subset I : {}_A P_0^{\ell-1}$. Ainsi, $uP_0 P_0^{\ell-1}, P_0^{\ell-1} uP_0, P_0 uP_0^{\ell-1}$ et $P_0^{\ell-1} P_0 u$ sont tous inclus dans I . En particulier, $uP_0^\ell \subset I$ et $P_0^\ell u \subset I$. Donc, $u \in I : {}_A P_0^\ell$. Si $A = k[y, z]$, l'inclusion inverse est évidemment vérifiée.

vi) $J : P_0^\ell$ est stable par \mathcal{U}_y , quelque soit $\ell \geq 0$. En effet, il suffit de montrer que $J : P_0$ est stable par $ad(x)$. Mais, cela a déjà été fait (voir remarque iv) ci-haut).

vii) Soit J un idéal de $k[y, z]$ stable par \mathcal{U}_y , alors $JU(\mathcal{U}_y) = U(\mathcal{U}_y)J$. Soit $f(y, z) \in J$ et $u = \sum f_\ell(y, z)x^\ell \in U(\mathcal{U}_y)$, alors $f(y, z)u = \sum f(y, z)f_\ell(y, z)x^\ell = \sum f_\ell(y, z)f(y, z)x^\ell$. Il s'agit donc de montrer que $f(y, z)x^\ell$ appartient à $U(\mathcal{U}_y)J$, mais pour cela il est suffisant de montrer que $f(y, z)x \in U(\mathcal{U}_y)J$, ce qui est évident puisque $f(y, z)x = xf(y, z) - ad(x)f(y, z)$ et que J est stable par $ad(x)$. L'inclusion inverse s'établit de la même façon.

vii) L'idéal bilatère $JU(\mathcal{U}_y)$ rencontre $k[y,z]$ en J .
 Soit $u \in JU(\mathcal{U}_y) \cap k[y,z]$, alors $u = f(y,z) \in JU(\mathcal{U}_y)$. Ainsi,
 $u \in J$.

On peut maintenant établir un premier résultat.

Lemme 3.2: Soit J un idéal de $k[y,z]$ stable par \mathcal{U}_y , alors les idéaux I de $U(\mathcal{U}_y)$ rencontrant $k[y,z]$ en J sont compris entre les idéaux $JU(\mathcal{U}_y)$ et $(J : P_0^{\ell_0})U(\mathcal{U}_y)$, pour un certain entier ℓ_0 .

Démonstration: Puisque I est un idéal bilatère de $U(\mathcal{U}_y)$ et que J est contenu dans I , on obtient la première inclusion; c'est-à-dire $JU(\mathcal{U}_y) \subset I$. Il est facile de montrer par récurrence les identités suivantes:

$$x^n z = z(x + \beta)^n; \quad x^n y = y(x + 1)^n + n\alpha z(x + 1)^{n-1};$$

$$[x^n, z] = z \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{\ell} \beta^{n-\ell} x^\ell; \quad [x^n, y] = y \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell + n\alpha z(x + 1)^{n-1}.$$

Soit $u = \sum_{i=1}^n f_i(y,z)x^i$ un élément de I . Montrons par récurrence sur n , le degré en x de u , que u appartient à $U(\mathcal{U}_y)(J : P_0^n)$. Il suffit donc de montrer que les $f_i(y,z)$ appartiennent à $J : P_0^n$.

Si $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat vérifié pour $n = \ell - 1 > 0$. Soit $u = \sum_{i=0}^{\ell} f_i(y,z)x^i \in I$, alors

$$\begin{aligned} [u, z] &= \sum_{i=1}^{\ell} f_i(y,z)[x^i, z] \\ &= z \sum_{i=1}^{\ell} f_i(y,z) \left(\sum_{m=0}^{i-1} \binom{i}{m} \beta^{i-m} x^m \right). \end{aligned}$$

Notons que $[u, z]$ est de degré $\ell-1$ en x et appartient aussi à I .
 Le coefficient du terme de degré $\ell-1$ en x de $[u, z]$ est $\ell\beta f_\ell(y, z)z$.
 Ainsi, $f_\ell(y, z)z$ appartient à $J : P_0^{\ell-1}$. De plus,

$$\begin{aligned} [u, y] &= \sum_{i=1}^{\ell} f_i(y, z)[x^i, y] \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} f_i(y, z) \left\{ y \sum_{m=1}^{i-1} \binom{i-1}{m} x^m + i\alpha z(x+1)^{i-1} \right\} \end{aligned}$$

Le coefficient de degré $\ell-1$ en x de $[u, y]$ est $f_\ell(y, z) \left\{ y \binom{\ell}{\ell-1} + \ell\alpha z \right\}$.

Puisque $f_\ell(y, z)z$ appartient à $J : P_0^{\ell-1}$, on obtient que $f_\ell(y, z)y \in J : P_0^{\ell-1}$, et par suite $f_\ell(y, z) \in J : P_0^\ell$. En regardant de près les expansions de $[u, z]$ et $[u, y]$, on s'aperçoit que chacun des $f_i(y, z)$ appartient à $J : P_0^\ell$. En effet, le coefficient de degré $\ell-2$ en x de $[u, z]$ est

$$z \left\{ (\ell-1)\beta f_{\ell-1}(y, z) + \frac{\ell(\ell-1)}{2} \beta^2 f_\ell(y, z) \right\}$$

qui appartient à $J : P_0^{\ell-1}$, d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi, puisque $zf_\ell(y, z) \in J : P_0^{\ell-1}$, $zf_{\ell-1}(y, z) \in J : P_0^{\ell-1}$.

D'autre part, le coefficient de degré $\ell-2$ en y de $[u, y]$ est

$$(y+\alpha z)(\ell-1)f_{\ell-1}(y, z) + \left(\frac{y}{2} + \alpha z\right)\ell(\ell-1)f_\ell(y, z).$$

Ainsi, $(y+\alpha z)(\ell-1)f_{\ell-1}(y, z) \in J : P_0^{\ell-1}$, et d'après le résultat précédent $yf_{\ell-1}(y, z) \in J : P_0^{\ell-1}$. Par suite, $f_{\ell-1}(y, z) \in J : P_0^\ell$.

De façon générale, les coefficients de degré j en x de $[u, z]$ et $[u, y]$ sont

$$z \sum_{i=j+1}^{\ell} \binom{i}{j} \beta^{i-j} f_i(y, z) \text{ et}$$

$$y \sum_{i=j+1}^{\ell} \binom{i}{j} f_i(y, z) + \alpha z \sum_{i=j+1}^{\ell} i \binom{i-1}{j} f_i(y, z)$$

respectivement. On en déduit donc, de proche en proche, que $f_j(y, z) \in J : P_0^{\ell}$, quel que soit j entre 1 et ℓ . On a donc montré que si u est un élément de degré n en x de I , alors $u \in (J : P_0^n)U(\mathcal{A}_y)$. De plus $J \subset J : P_0 \subset J : P_0^2 \subset \dots$. Cette suite doit se stabiliser, $k[y, z]$ étant une algèbre noethérienne. On obtient donc l'inclusion $I \subset (J : P_0^{\ell_0})U(\mathcal{A}_y)$ pour un certain ℓ_0 . Ceci termine la démonstration du lemme. □

Définition 3.3: Un idéal I de $U(\mathcal{A}_y)$ est d'ordre ℓ sur J si les conditions suivantes sont satisfaites.

- i) $J = I \cap k[y, z]$
- ii) $I \subset U(\mathcal{A}_y) \cdot (J : P_0^{\ell})$
- et iii) $I \not\subset U(\mathcal{A}_y) \cdot (J : P_0^{\ell-1})$

Pour chaque idéal bilatère I de $U(\mathcal{A}_y)$, il existe un idéal J de $k[y, z]$ et un entier ℓ tels que I soit d'ordre ℓ sur J .

On montre dans le théorème suivant que l'on peut, étant donné J , classifier les idéaux I recherchés d'après leur ordre sur J .

Théorème 3.4: Soit I' un idéal d'ordre $\ell-1$ ($\ell > 1$) sur J , un idéal de $k[y, z]$ stable par $\text{ad}(x)$. Alors, il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux I d'ordre ℓ sur J vérifiant $I \cap U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-1}) = I'$ et les sous- $k[x]$ -modules non-nuls M de $(I' : P_0)/I'$, stables par $\text{ad}(x)$, ne rencontrant pas $U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-1})/I'$. Cette correspondance est donnée par $M = I/I'$. Si $\ell = 1$ le résultat reste valable à la condition que $M \cap ((J : P_0)/JU(\mathcal{O}_y)) = 0$. *

Avant de procéder à la démonstration de ce théorème, notons que si I est un idéal d'ordre ℓ sur J ($\ell > 0$), alors $I' = I \cap U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-1})$ est un idéal d'ordre $\ell-1$ sur J . En effet, $I' \cap k[y, z] = I \cap U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-1}) \cap k[y, z] = J \cap U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-1}) = J$ puisque $J \subset J : P_0^{\ell-1}$ quel que soit $\ell > 0$. De plus, $I' = I \cap U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-1}) \subset U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-1})$. Il reste à montrer que $I' \neq U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-2})$. Il existe un élément u de I n'appartenant pas à $U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-1})$ tel que uy et uz appartiennent à $U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-1})$ puisque $I \subset U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell})$ et $I \not\subset U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-1})$. Donc, au moins un de uy ou uz n'appartient pas à $U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-2})$, car autrement u appartiendrait à $U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-1})$, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, il existe au moins un élément de I (uy ou uz) appartenant à $U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-1})$ mais non à $U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-2})$. Par suite, $I' \neq U(\mathcal{O}_y)(J : P_0^{\ell-2})$ étant donné que uy et uz appartiennent à I' .

*: On écrit par abus de langage $(J : P_0)/JU(\mathcal{O}_y)$ pour l'image de $J : P_0$ dans $U(\mathcal{O}_y)/JU(\mathcal{O}_y)$.

Démonstration du théorème 3.4: Soit I un idéal d'ordre ℓ sur J tel que $I' = I \cap U(\mathcal{A}_y)(J : P_0^{\ell-1})$, alors $M = I/I'$ est un sous- $k[x]$ -module de $(I' : P_0)/I'$ stable par $\text{ad}(x)$. En effet, M est stable par multiplication par x et par $\text{ad}(x)$ puisque I l'est. Si $\ell > 1$, $I/I' \cap U(\mathcal{A}_y)(J : P_0^{\ell-1})/I' = 0$ puisque $I \cap U(\mathcal{A}_y)(J : P_0^{\ell-1}) = I'$. Si $\ell = 1$, $I \cap (J : P_0) \subset (I \cap k[y, z]) \cap (J : P_0) = J \cap (J : P_0) = J \subset I'$. M est non-nul puisque $I \not\subset U(\mathcal{A}_y)(J : P_0^{\ell-1}) \supset I'$. Inversement, soient I' un idéal d'ordre $\ell-1$ sur J et M un sous- $k[x]$ -module non-nul de $(I' : P_0)/I'$, stable par $\text{ad}(x)$ et ne rencontrant pas $U(\mathcal{A}_y)(J : P_0^{\ell-1})/I'$ si $\ell > 1$ (ou $(J : P_0)/I'$, si $\ell = 1$). Alors, M s'écrit de façon unique sous la forme I/I' . I est un idéal de $U(\mathcal{A}_y)$ étant stable par multiplication à gauche (si le module en est un à gauche) par x et stable par $\text{ad}(x)$. De plus, $yI \subset y(I' : P_0) \subset I' \subset I$, et de même pour z et les multiplications à droite. Montrons maintenant l'identité $I' = I \cap U(\mathcal{A}_y)(J : P_0^{\ell-1})$. L'inclusion $I' \subset I \cap U(\mathcal{A}_y)(J : P_0^{\ell-1})$ est évidente et l'inclusion inverse résulte de $M \cap (U(\mathcal{A}_y)(J : P_0^{\ell-1})/I') = 0$ si $\ell > 1$ (et si $\ell = 1$, de $I \cap U(\mathcal{A}_y)J \subset U(\mathcal{A}_y)J = I'$). Montrons maintenant que I est d'ordre ℓ sur J .

- i) $I \subset I' : P_0 \subset U(\mathcal{A}_y)(J : P_0^{\ell-1}) : P_0 \subset U(\mathcal{A}_y)(J : P_0^\ell)$ d'après la remarque v) ci-haut.
- ii) $I \not\subset U(\mathcal{A}_y)(J : P_0^{\ell-1})$ car autrement $I = I'$ et par suite M serait nul.
- iii) $I \cap k[y, z] \supset I' \cap k[y, z] = J$. Il reste donc à montrer l'inclusion $I \cap k[y, z] \subset J$:

$$\begin{aligned}
 I \cap k[y, z] &= (I' : P_0) \cap k[y, z] \\
 &= (I' \cap k[y, z]) : P_0 \\
 &= J : P_0
 \end{aligned}$$

D'autre part, si $\ell > 1$ $(J : P_0) \subset U(\mathcal{A}) (J : P_0^{\ell-1})$.

Donc, $I \cap (J : P_0) \subset I \cap U(\mathcal{A}) (J : P_0^{\ell-1}) = I'$. Ainsi,

$I \cap k[y, z] \subset (J : P_0) \cap I' \subset I' \cap k[y, z] = J$. Et si $\ell = 1$,

$I \cap (J : P_0) \subset I'$ puisque $[I/I'] \cap [(J : P_0)/JU(\mathcal{A})] = 0$.

Alors, $I \cap k[y, z] \subset I \cap (J : P_0) \subset I'$. Par suite, on obtient le résultat. Ceci termine la démonstration du théorème. \square

Remarquons que si $J : P_0 = J$ il n'y a qu'un seul idéal de $U(\mathcal{A})$ rencontrant $k[y, z]$ en J . Cet idéal est $JU(\mathcal{A})$.

Pour illustration, nous donnons ici un exemple de l'utilisation du théorème dans le cas où $\alpha = 0$, β est arbitraire et $J = \langle y^2, z \rangle$. On tentera donc, à l'aide du théorème, de retrouver tous les idéaux I de $U(\mathcal{A})$ vérifiant $I \cap k[y, z] = J$. Les idéaux I recherchés peuvent être au plus d'ordre 2 sur J puisque la suite $J \subset J : P_0 \subset J : P_0^2 \subset \dots$ se stabilise au troisième terme, c'est-à-dire $J : P_0^2 = J : P_0^3 = \dots$. En effet, $J : P_0 = P_0$, $P_0 : P_0 = k[y, z]$. Montrons la première de ces identités. Soit

7

$f(y,z) \in P_0$ alors $f(y,z)y \in \langle y^2, z \rangle = J$. De même pour $f(y,z)z$.
 Soit $f(y,z) \in J : P_0$, alors $f(y,z)y$ et $f(y,z)z \in \langle y^2, z \rangle$,
 donc $f(y,z) \in \langle y, z \rangle = P_0$. Le seul idéal d'ordre 0 sur J est
 $U(\mathcal{A})J$. Cherchons maintenant les idéaux d'ordre 1 sur J .
 $U(\mathcal{A})J : P_0 = U(\mathcal{A})\langle y, z \rangle$ (Notons que $U(\mathcal{A})\langle y, z \rangle = \langle y, z \rangle U(\mathcal{A})$, car
 $ky + kz$ est un idéal de \mathcal{A} [DI 1, 2.2.14]). En effet,
 $yP_0 \subset \langle y^2, yz \rangle \subset \langle y^2, z \rangle \subset U(\mathcal{A})\langle y^2, z \rangle$, de même $P_0y \subset U(\mathcal{A})\langle y^2, z \rangle$. Donc,
 $y \in U(\mathcal{A})J : P_0$. De plus, $zP_0 \subset \langle zy, z^2 \rangle \subset \langle z \rangle \subset U(\mathcal{A})\langle y^2, z \rangle$ et
 $P_0z \subset U(\mathcal{A})\langle y^2, z \rangle$. Donc, $z \in U(\mathcal{A})J : P_0$. Ainsi, $U(\mathcal{A})J : P_0 \supset \langle y, z \rangle$.
 Soit $u \in U(\mathcal{A})J : P_0$ alors $uP_0 \subset U(\mathcal{A})\langle y^2, z \rangle$ et $P_0u \subset U(\mathcal{A})\langle y^2, z \rangle$; par
 conséquent uy, uz, zu et yu appartiennent à $U(\mathcal{A})\langle y^2, z \rangle$. Par suite
 $u \in U(\mathcal{A})\langle y, z \rangle$. C'est-à-dire $U(\mathcal{A})J : P_0 \subset U(\mathcal{A})\langle y, z \rangle$. Ainsi donc,
 $U(\mathcal{A})J : P_0 / U(\mathcal{A})J = U(\mathcal{A})\langle y, z \rangle / U(\mathcal{A})\langle y^2, z \rangle \cong k[x]$.

On a aussi $J : P_0 / JU(\mathcal{A}) = ky / JU(\mathcal{A}) \cong k$.

Les sous- $k[x]$ -modules M de $U(\mathcal{A})J : P_0 / U(\mathcal{A})J$ sont tous stables par
 $ad(x)$ (car $adx \cdot m = m$ quel que soit $m \in U(\mathcal{A})J : P_0 / U(\mathcal{A})J$; les
 éléments de $U(\mathcal{A}) : P_0 / U(\mathcal{A})J$ étant de la forme $\sum \alpha_\ell x^\ell + U(\mathcal{A})\langle y^2, z \rangle$).
 Puisque les sous- $k[x]$ -modules recherchés ne doivent pas intersecter
 $ky / JU(\mathcal{A})$, ce sont ceux de la forme $\{U(\mathcal{A})g(x)y + U(\mathcal{A})\langle y^2, z \rangle\} / U(\mathcal{A})\langle y^2, z \rangle$;
 où $g(x) \neq 1$. Les idéaux d'ordre 1 sur J sont par conséquent tous les
 idéaux de la forme $U(\mathcal{A})g(x)y + U(\mathcal{A})\langle y^2, z \rangle$, où $g(x)$ est un poly-
 nôme unitaire $\neq 1$.

Cherchons maintenant les idéaux d'ordre 2 sur J . Soit

$$I' = U(\mathcal{A}_J)g(x)y + U(\mathcal{A}_J)\langle y^2, z \rangle, \text{ où } g(x) \neq 1.$$

$I' : P_0 = k[x] \text{ppcm}\{g(x), g(x+1)\} \oplus U(\mathcal{A}_J)\langle y, z \rangle$. En effet, soit

$$u = \sum g_{\ell m}(x)y^\ell z^m \in I' : P_0, \text{ alors } uy = \sum g_{\ell m}(x)y^{\ell+1}z^m \text{ et on obtient donc}$$

$$g_{00}(x)y \in U(\mathcal{A}_J)g(x)y, \text{ c'est-à-dire } g_{00}(x) \in g(x)k[x]. \text{ De même,}$$

$$yu = \sum yg_{\ell m}(x)y^\ell z^m = \sum g_{\ell m}(x-1)y^{\ell+1}z^m; \text{ on obtient alors}$$

$$g_{00}(x-1) \in g(x)k[x], \text{ c'est-à-dire } g_{00}(x) \in g(x+1)k[x]. \text{ Ainsi}$$

$$g_{00}(x) \in g(x)k[x] \cap g(x+1)k[x] = k[x] \text{ppcm}\{g(x), g(x+1)\}. \text{ Par}$$

$$\text{conséquent, } u = \sum g_{\ell m}(x)y^\ell z^m, \text{ où } g_{00}(x) \in k[x] \text{ppcm}\{g(x), g(x+1)\}.$$

Inversement, soit $u \in k[x] \text{ppcm}\{g(x), g(x+1)\} \oplus U(\mathcal{A}_J)\langle y, z \rangle$ alors

$$u \in I' : P_0. \text{ Donc } I' : P_0 = k[x] \text{ppcm}\{g(x), g(x+1)\} \oplus U(\mathcal{A}_J)\langle y, z \rangle$$

$$\text{et } (I' : P_0) / I' \cong k[x] \text{ppcm}\{g(x), g(x+1)\} \oplus [k[x] / \langle g(x) \rangle]$$

$$U(\mathcal{A}_J)(J : P_0) / I' = U(\mathcal{A}_J)\langle y, z \rangle / (U(\mathcal{A}_J)g(x)y + U(\mathcal{A}_J)\langle y^2, z \rangle) \cong [k[x] / \langle g(x) \rangle].$$

Soit M un sous- $k[x]$ -module stable par $\text{ad}(x)$ de $(I' : P_0) / I'$.

$M = M_1 \oplus M_2$ où M_1 est un sous- $k[x]$ -module stable de

$k[x] \text{ppcm}\{g(x), g(x+1)\}$ et M_2 un sous- $k[x]$ -module stable de

$[k[x] / \langle g(x) \rangle]$. Si de plus $M \cap [U(\mathcal{A}_J)(J : P_0) / I'] = 0$ on a $M = M_1$.

Mais, les seuls sous- $k[x]$ -modules de $k[x] \text{ppcm}\{g(x), g(x+1)\}$ sont

les idéaux engendrés par les multiples communs $h(x)$ de $g(x)$ et

$g(x+1)$. Ainsi, les idéaux I d'ordre 2 sur J tels que

$I \cap U(\mathcal{A}_J)\langle y, z \rangle = I'$ sont les idéaux $k[x]h(x) \oplus I'$, où $h(x)$ est un

commun multiple de $g(x)$ et $g(x+1)$. (C'est-à-dire que les idéaux

I d'ordre 2 sur J sont tous de la forme

$$I = k[x] \text{cm}\{g(x), g(x+1)\} \oplus \{U(\sigma_y)g(x)y + U(\sigma_z)\langle y^2, z \rangle\}$$

où $g(x) \neq 1$ et $\text{cm}\{g(x), g(x+1)\}$ est un multiple commun de $g(x)$ et $g(x+1)$.

On a précédemment remarqué que si $J : P_0 = J$, alors le seul idéal I de $U(\mathcal{M}_y)$ rencontrant $k[y, z]$ en J est $JU(\mathcal{M}_y)$. Le théorème suivant donne certaines conditions équivalentes à celle mentionnée. Avant de l'énoncer, il faut définir certains termes.

Définition 3.5: Un polynôme $f(y, z)$ de $k[y, z]$ est β -homogène de β -degré λ si $f(y, z)$ est une somme de termes de la forme $\alpha_{ij} y^i z^j$, où $i + \beta j = \lambda$.

Si $\alpha = 0$, $f(y, z)$ est β -homogène de β -degré λ si et seulement si $\text{ad}(x)f = \lambda f$ (voir démonstration p.29).

Définition 3.6: Un idéal J de $k[y, z]$ est β -homogène si les composantes β -homogènes de tout élément de J appartiennent aussi à J .

Théorème 3.7: Soit J un idéal de $k[y, z]$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- i) $fy, fz \in J \Rightarrow f \in J$
- ii) $(J : P_0) = J$
- iii) P_0 n'est pas une composante première de J .

De plus, si J est un idéal β -homogène, on peut ajouter la condition suivante.

- iv) J est principal..

La démonstration de ce théorème sera donnée plus loin (p. 36), demandant quelques résultats préliminaires.

Corollaire 3.8: Si I est un idéal premier de $U(\mathcal{A})$ alors $J = I \cap k[y,z]$ est un idéal stable par $\text{ad}(x)$ et premier de $k[y,z]$.
De plus:

- i) Si $J \neq P_0$ est un idéal stable par $\text{ad}(x)$ et premier de $k[y,z]$, alors $I = JU(\mathcal{A})$ est l'unique idéal premier de $U(\mathcal{A})$ rencontrant $k[y,z]$ en J .
- ii) Si $J = P_0$, alors il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux premiers I de $U(\mathcal{A})$ rencontrant $k[y,z]$ en P_0 et les idéaux premiers propres de $k[x]$.

Démonstration: i) Soit $J \neq P_0$ un idéal stable par $\text{ad}(x)$ et premier de $k[y,z]$. Montrons que $J : P_0 = J$. Si $J = k[y,z]$, cela est clair, sinon supposons le contraire, alors il existe $f \in k[y,z] \setminus J$ tel que fy et fz appartiennent à J . Alors, puisque J est premier, y et z sont des éléments de J . Ainsi $J = P_0$, puisque P_0 est maximal, ce qui contredit notre hypothèse. Puisque $J : P_0 = J$, le seul idéal premier I de $U(\mathcal{A}_y)$ tel que $I \cap k[y,z] = J$ est $I = JU(\mathcal{A}_y)$.

ii) Les idéaux premiers I de $U(\mathcal{A}_y)$ tels que $I \cap k[y,z] = P_0$ sont des idéaux propres de $U(\mathcal{A}_y)$ contenant $P_0 U(\mathcal{A}_y)$. Mais, ces derniers intersectent tous $k[y,z]$ en J . En effet, soit I un idéal de $U(\mathcal{A}_y)$ satisfaisant $P_0 U(\mathcal{A}_y) \subset I \neq U(\mathcal{A}_y)$, alors $I \cap k[y,z] \supset P_0 U(\mathcal{A}_y) \cap k[y,z] = P_0$ et l'inclusion inverse résulte du fait que P_0 est maximal et que $I \neq U(\mathcal{A}_y)$. Les idéaux I recherchés sont donc tous les idéaux propres et premiers de $U(\mathcal{A}_y)$ contenant $P_0 U(\mathcal{A}_y)$. Ceux-ci sont en correspondance biunivoque avec les idéaux premiers propres de $U(\mathcal{A}_y) / P_0 U(\mathcal{A}_y) \cong k[x]$. \square

Lemme 3.9: Si $\alpha = 0$, alors J est β -homogène si et seulement si J est stable par $\text{ad}(x)$.

Démonstration: Supposons que J soit β -homogène. Soit $f \in J$, alors on peut écrire $f = \sum_{\lambda} f^{\lambda}$, où les f^{λ} sont les composantes β -homogènes de β -degré λ de f . Puisque J est β -homogène, les

f^λ appartiennent à J . Par conséquent, $\lambda f^\lambda \in J$ et $\text{ad}(x) \cdot f = \sum_{\lambda} \lambda f^\lambda \in J$. Ainsi, J est stable par $\text{ad}(x)$.

Supposons que J soit stable par $\text{ad}(x)$. Notons $k^\lambda[y, z]$ l'ensemble des polynômes β -homogène de β -degré λ de $k[y, z]$. Etant donné que $k[y, z] = \bigoplus_{\lambda} k^\lambda[y, z]$ est la décomposition de $k[y, z]$ en sous-espaces propres de $\text{ad}(x)$ il s'ensuit, de la stabilité de J , que $J = \bigoplus_{\lambda} J^\lambda$, où $J^\lambda = J \cap k^\lambda[y, z]$. □

Remarque: Supposons que β soit irrationnel, alors les seuls polynômes β -homogènes de $k[y, z]$ sont les monômes $\alpha_{ij} y^i z^j$. En effet, supposons que $i + \beta j = \ell + \beta m$ ($i \neq \ell$, $j \neq m$), alors $\beta = \frac{i - \ell}{m - j}$ est rationnel, contredisant notre hypothèse.

Lemme 3.10: Si β est irrationnel, alors $J \subset k[y, z]$ est un idéal β -homogène si et seulement si il est engendré par un nombre fini de monômes.

Démonstration: Supposons que J soit β -homogène. $k[y, z]$ étant une algèbre noethérienne, J est engendré par un nombre fini de polynômes, disons f_1, f_2, \dots, f_n . De plus, J est β -homogène, donc on peut supposer que ces polynômes sont β -homogènes. D'après la remarque ci-haut, ces polynômes doivent être des monômes. L'implication inverse est évidente. □

Remarque: Montrons que si fg , le produit de deux polynômes de $k[y,z]$, est β -homogène, alors f et g le sont aussi. Si β est irrationnel cela est clair (voir la remarque précédente). On peut donc toujours supposer que β est rationnel. Soient

$$f = \sum_{i=1}^m f_i, \quad g = \sum_{i=1}^n g_i, \quad \lambda_i \text{ le } \beta\text{-degré de } f_i, \quad \mu_i \text{ le } \beta\text{-degré de } g_i.$$

On peut supposer que $\lambda_i < \lambda_j$ et $\mu_i < \mu_j$ si $i < j$. Supposons que $fg = f_1g_1 + \dots + f_mg_n$ soit β -homogène, alors

$\lambda_1 + \mu_1 = \lambda_m + \mu_n$. Donc, f et g ne peuvent avoir qu'une seule composante chacun.

Lemme 3.11: Soit J un idéal β -homogène, non-trivial et premier de $k[y,z]$. Alors,

i) si β est irrationnel, $J = \langle y \rangle$, $\langle z \rangle$ ou P_0 .

ii) si $\beta = \frac{p}{q}$ où $q > 0$ et $\text{pgcd}(p,q) = 1$,

$$J = \langle y \rangle, \langle z \rangle, P_0 \text{ ou } \begin{cases} \langle ay^p - z^q \rangle & \text{si } p > 0 \\ \langle a - y^{-p} z^q \rangle & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

où $0 \neq a \in k$.

Démonstration: Supposons que β soit irrationnel. D'après le lemme précédent, J est engendré par un nombre fini de monômes.

Soit $y^\ell z^m \in J$, alors puisque J est premier, y ou z appartient à J . Ainsi $J = \langle y \rangle, \langle z \rangle$ ou P_0 .

Supposons maintenant que $\beta = \frac{p}{q}$, où $q > 0$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

Soit $f(y, z)$ un polynôme β -homogène de β -degré λ de $k[y, z]$, alors on obtient $f(y, z) = y^\lambda f(1, y^{-\beta} z)$. En effet, soit

$$f(y, z) = \sum_{\ell + \beta m = \lambda} \alpha_{\ell m} y^\ell z^m. \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} y^\lambda f(1, y^{-\beta} z) &= y^\lambda \sum_{\ell + \beta m = \lambda} \alpha_{\ell m} y^{-\beta m} z^m \\ &= \sum_{\ell + \beta m = \lambda} \alpha_{\ell m} y^\ell z^m = f(y, z) \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'équation $f(1, u) = 0$. Si u est une solution et ε une racine q^e de l'unité (c'est-à-dire $\varepsilon^q = 1$), alors

$0 = f(1, u) = \varepsilon^{\lambda q} f(\varepsilon^{-q}, u) = f(1, \varepsilon^p u)$. Ainsi, si u est une racine de $f(1, z)$, alors $\varepsilon^p u$ l'est aussi. Soit ε une racine q^e de l'unité,

alors ε^p l'est aussi ; de plus $\varepsilon = \tau^p$ pour une racine q^e de l'unité τ . En effet, $\varepsilon = \varepsilon^1 = \varepsilon^{pm+qn} = \varepsilon^{pm} \varepsilon^{qn} = \varepsilon^{pm} = (\varepsilon^m)^p$, pour des entiers m et n convenablement choisis.

Alors, si u est une racine de $f(1, z)$, εu l'est aussi quelle que soit ε , une racine q^e de l'unité.

Soit r_ℓ une racine de $f(1, z)$ et ε une racine q^e de l'unité primitive alors $r_\ell, \varepsilon r_\ell, \varepsilon^2 r_\ell, \dots, \varepsilon^{q-1} r_\ell$ sont des racines distinctes

de $f(1, z)$. Par conséquent, $(z - r_\ell)(z - \varepsilon r_\ell) \dots (z - \varepsilon^{q-1} r_\ell) = (z^q - r_\ell^q)$

divise $f(1, z)$. Faisant de même avec toutes les racines non-nulles

de $f(1, z)$ on en déduit de proche en proche que $f(1, z) = z^n \prod_{\ell=1}^r (a_\ell - z^q)$,

$a_\ell \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{Ainsi, } f(y,z) &= y^\lambda f(1, y^{-p/q} z) \\
 &= y^{\lambda - \frac{p}{q}n} z^n \prod_{\ell=1}^L (a_\ell y^{-p} z^q) \\
 &= y^{\lambda - \frac{p}{q}n - Lp} z^L \prod_{\ell=1}^L (a_\ell y^p - z^q)
 \end{aligned}$$

On écrit donc

$$f(y,z) = \begin{cases} y^m z^n \prod_{\ell=1}^L (a_\ell y^p - z^q) & \text{si } p > 0 \\ y^m z^n \prod_{\ell=1}^L (a_\ell y^{-p} z^q) & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

où $m = \lambda - \frac{p}{q}n - Lp$ ou $m = \lambda - \frac{p}{q}n$. Puisque $f(y,1)$ est un polynôme en y , m doit être un entier supérieur ou égal à zéro. Puisque J est premier, ses polynômes générateurs sont donc de la forme $(a_\ell y^p - z^q)$ si $p > 0$ ou bien $(a_\ell y^{-p} z^q)$ si $p < 0$, à la condition que J ne contienne ni y ni z . Dans ce dernier cas $J = \langle y \rangle$, $\langle z \rangle$ ou P_0 . Si on a deux facteurs de la forme $(a_\ell y^{-p} z^q)$ ou $(a_\ell y^p - z^q)$ linéairement indépendants, alors $J = P_0$. Ceci termine la démonstration du lemme.

□

Lemme 3.12: Si J est un idéal β -homogène de $k[y,z]$, alors J peut être représenté par une intersection finie d'idéaux primaires β -homogènes.

Démonstration: Soit J un idéal β -homogène de $k[y,z]$, alors $J = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s$, où les Q_i sont des idéaux primaires de $k[y,z]$ [VW vol. 2 p.128]. Soit Q'_i l'idéal β -homogène maximal contenu dans Q_i (c'est-à-dire l'idéal engendré par les éléments β -homogènes de Q_i). Montrons premièrement que Q'_i est primaire. Soient $f, g \in k[y,z]$ tels que $fg \in Q'_i$ et supposons que f n'appartienne pas à Q'_i . Il faut donc montrer que g^ℓ appartient à Q'_i pour un certain entier ℓ . Supposons que fg soit β -homogène, alors f et g le sont aussi. Mais $f \notin Q'_i$, ainsi $f \notin Q_i$ puisque Q'_i est maximal parmi les idéaux β -homogènes contenus dans Q_i . Par conséquent, $g^\ell \in Q_i$ pour un certain ℓ puisque Q_i est primaire. Ainsi g^ℓ , étant β -homogène, appartient à Q'_i . Supposons maintenant que fg ne soit pas β -homogène. Soient

$$f = \sum_{\ell=0}^{n} f_\ell \quad \text{et} \quad g = \sum_{\ell=0}^m g_\ell,$$

où les f_ℓ et g_ℓ sont des composantes β -homogènes non-nulles telles que $\deg f_\ell < \deg f_m$ si $\ell < m$, et de même pour g . On peut supposer $f_\ell \notin Q'_i$, quel que soit ℓ . (Autrement on construit un nouveau polynôme f' , en prenant la somme des f_ℓ n'appartenant pas à Q'_i .)

On a alors les mêmes conditions qu'auparavant, c'est-à-dire $f'g \in Q'_i$ et $f' \notin Q'_i$. En effet, il suffit de remarquer que $f = f' + f''$ où f'' est la somme des composantes de f appartenant à Q'_i .) $f_0 g_0$, la composante β -homogène de β -degré minimal de fg , appartient à Q'_i , ce dernier étant β -homogène. $f_0 \notin Q'_i$ implique

$g_0^{e_0} \in Q_1'$ pour un certain entier e_0 . Maintenant, soit $g' = g - g_0$, ainsi $g' = g_1 + g_2 + \dots + g_m$ et on a donc $fg'^{e_0} = f(g - g_0)^{e_0} \in Q_1'$

car $fg \in Q_1'$ et $fg_0^{e_0} \in Q_1'$. On en déduit de proche en proche que

$g_j^{e_j} \in Q_1'$ pour certains entiers e_j . Par suite, $g^e = \left(\sum_{\ell=0}^m g_\ell \right)^e \in Q_1'$

pour e assez grand. Les Q_1' sont donc primaires. Il reste à montrer

que $J = Q_1' \cap Q_2' \cap \dots \cap Q_s'$. Il est clair que $Q_1' \cap Q_2' \cap \dots \cap Q_s' \subset J$.

Soit $f \in J = Q_1' \cap Q_2' \cap \dots \cap Q_s'$, et supposons que f soit

β -homogène (ce que l'on peut faire puisque J est β -homogène), alors

$f \in Q_1' \cap Q_2' \cap \dots \cap Q_s'$. Ceci termine la démonstration du lemme. \square

Lemme 3.13: Soit Q un idéal primaire non-trivial et β -homogène

($\beta = \pm \ell/m$, $\ell, m > 0$, $\text{pgcd}(\ell, m) = 1$) de $k[y, z]$, alors $\sqrt{Q} = P_0, \langle y \rangle, \langle z \rangle,$

$\langle ay^\ell + bz^m \rangle$ ou $\langle a+by^\ell z^m \rangle$. Dans les deux derniers cas,

$Q = \langle (ay^\ell + bz^m)^n \rangle$ ou $\langle (a+by^\ell z^m)^n \rangle$ respectivement, où n est un entier.

Démonstration: Si Q est primaire, alors \sqrt{Q} est premier. De plus, si Q est β -homogène, \sqrt{Q} l'est aussi. Supposons le contraire, alors on peut trouver un élément f de \sqrt{Q} dont au moins une des composantes β -homogènes n'appartient pas à \sqrt{Q} . Soient f_1, f_2, \dots, f_r ces composantes β -homogènes de β -degrés d_1, d_2, \dots, d_r respectivement et supposons que $d_1 < d_2 < \dots < d_r$. On peut écrire

$f = f' + (f_1 + f_2 + \dots + f_r)$, où f' est la somme des composantes β -homogènes de f appartenant à \sqrt{Q} . Ainsi $f_1 + f_2 + \dots + f_r = f - f' \in \sqrt{Q}$. Par

suite, $(f_1 + f_2 + \dots + f_r)^m \in Q$ pour un entier m . f_r^m est la composante β -homogène de β -degré maximal de $(f_1 + f_2 + \dots + f_r)^m$ qui appartient à Q , un idéal β -homogène. Ainsi donc, $f_r^m \in Q$ et donc $f_r \in \sqrt{Q}$, ce qui contredit notre hypothèse.

Déterminons maintenant la structure de \sqrt{Q} . \sqrt{Q} étant β -homogène et premier, on utilise le lemme 3.11 pour obtenir le résultat.

Il reste à déterminer quels sont les idéaux Q qui correspondent à ces idéaux \sqrt{Q} qui sont différents de P_0 . Soit $\sqrt{Q} = \langle g \rangle$, où $g = (ay^\ell + bz^m)$ ou $(a + by^\ell z^m)$. Soit f un polynôme β -homogène de Q , alors $f = gf^{(1)}$. Deux choix sont donc possibles: $g \in Q$, ou $(f^{(1)})^m \in Q$ pour un entier m . Dans le premier cas il est clair que $Q = \sqrt{Q} = \langle g \rangle$. Dans le dernier cas, $f^{(1)} \in \sqrt{Q}$. On répète le même procédé en écrivant $f^{(1)} = gf^{(2)}$; c'est-à-dire $f = g^2 f^{(2)}$. Dans ce cas, $g^2 \in Q$, ou $f^{(2)} \in \sqrt{Q}$ comme ci-haut. f étant de degré fini, on en déduit de proche en proche que $g^n \in Q$ pour un certain entier n . Ainsi, $Q \supset \langle g^n \rangle$. D'autre part Q , étant un idéal β -homogène d'une algèbre noethérienne, est engendré par un nombre fini de polynômes β -homogènes, disons f_1, f_2, \dots, f_r . Pour chacun de ces f_i on trouve n_i tel que $Q \supset \langle g^{n_i} \rangle$. Soit $n = \min\{n_i \mid i=1, 2, \dots, r\}$, alors $Q \supset \langle g^n \rangle$. De plus, si $f \in Q$, $f = \sum_{i=1}^r a_i f_i$; mais chacun des f_i appartient à $\langle g^{n_i} \rangle$ et par conséquent à $\langle g^n \rangle$. Donc, $f \in \langle g^n \rangle$; c'est-à-dire $Q = \langle g^n \rangle$. Ceci termine la démonstration du lemme. \square

On peut maintenant procéder à la démonstration du théorème 3.7 donnant des conditions suffisantes pour n'avoir qu'un seul idéal intersectant $k[y,z]$ en J .

Démonstration du théorème 3.7: i) \Rightarrow ii): Soit $f \in J : P_0$, alors $fy, fz \in J$. Ainsi, d'après i), $f \in J$. Donc, $J : P_0 \subset J$. L'inclusion inverse est évidente.

ii) \Rightarrow iii): Cela provient directement d'un résultat de van der Waerden [VW vol.2, p.132].

iii) \Rightarrow i): Supposons que la condition i) ne soit pas satisfaite, alors il existe $f \in k[y,z] \setminus J$ tel que fy et $fz \in J$. Écrivons $J = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s$ où les Q_i sont primaires, propres et tels que $Q_i \not\subset Q_j$ pour $i \neq j$. Alors, $f \notin Q_{i_0}$ pour un certain i_0 . fy, fz appartenant à Q_{i_0} , on a donc y^ℓ et $z^m \in Q_{i_0}$, pour certains entiers ℓ et m . Ainsi, $P_{i_0} = \sqrt{Q_{i_0}} \supset \langle y, z \rangle$. Donc, $P_{i_0} = P_0$, car autrement $1 \in P_{i_0}$, ce qui est impossible puisque $Q_{i_0} \neq k[y,z]$. P_0 est, par conséquent, une composante première de J , contredisant la condition iii).

Supposons, maintenant que J soit β -homogène.

iii) \Rightarrow iv): Supposons la condition iii) vérifiée, alors les lemmes 3.12 et 3.13 permettent d'écrire $J = \bigcap_{i=1}^s \langle g_i^{\ell_i} \rangle$, où

$$g_i = \begin{cases} y \text{ ou } z \text{ si } \beta \text{ est irrationnel} \\ y \text{ ou } z \text{ ou } (a_i y^p - z^q) \text{ si } \beta = \frac{p}{q} > 0 \\ y \text{ ou } z \text{ ou } (a_i - y^{-p} z^q) \text{ si } \beta = \frac{p}{q} < 0 \end{cases}$$

(Rappel: $q > 0$, $\text{pgcd}(p, q) = 1$. De plus on peut supposer $g_i \neq g_j$ si $i \neq j$ puisqu'autrement $\langle g_i^{l_i} \rangle \subset \langle g_j^{l_j} \rangle$ ou $\langle g_j^{l_j} \rangle \subset \langle g_i^{l_i} \rangle$.) Montrons

que $J = \langle \prod_{i=1}^s g_i^{l_i} \rangle$. Soit f un polynôme β -homogène de J , alors f

peut s'écrire de façon unique sous la forme $f = \prod g'_i$, où les g'_i sont de la même forme que les g_i (voir lemme 3.11 p.31). De plus, $f = g_i^{l_i} f_i$ quel que soit $i = 1, 2, \dots, s$ ($f_i \in k[y, z]$). Ainsi, $g_i^{l_i}$

divise f , quel que soit i et par suite, $f = (\prod_{i=1}^s g_i^{l_i}) f'$. Par consé-

quent, $f \in \langle \prod_{i=1}^s g_i^{l_i} \rangle$. Si $f \in J$, alors $f \in \langle \prod_{i=1}^s g_i^{l_i} \rangle$ puisque c'est

une somme de polynômes β -homogènes de J . L'inclusion inverse est évidente.

iv) \Rightarrow i): Supposons que J soit principal, alors $J = \langle f \rangle$ pour un certain polynôme f de $k[y, z]$. Supposons que py et pz appartiennent à J ; alors $py = fh$ et $pz = fh'$. Ainsi $fhz = pyz = pzy = fh'y$. Donc, $hz = h'y$ et par suite, $h = h_1 y$ et $h' = h_1 z$. On a donc les identités $py = fh_1 y$ et $pz = fh_1 z$. Par conséquent, $p \in J$. Ceci termine la démonstration du théorème. \square

Notons que si J est principal, les trois autres conditions sont vérifiées peu importe si J est β -homogène ou pas.

4. $\dim D^1 \mathfrak{g} = 3.$

Dans ce cas $\mathfrak{g} = D^1 \mathfrak{g}$; k étant algébriquement clos, il n'y a qu'une seule algèbre de Lie vérifiant cette condition. Il s'agit de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$ qui est isomorphe à l'algèbre de Lie des matrices carrées d'ordre 2 ayant trace zéro. Les idéaux bilatères de l'algèbre enveloppante de cette algèbre de Lie ont été décrits par Kirillov [K, §18.3]. Nous reprenons ici, par souci d'intégralité, les résultats de ce dernier. Soient x, y et z les éléments d'une base de \mathfrak{g} vérifiant les relations $[x, y] = z$, $[y, z] = x$ et $[z, x] = y$, on appelle r l'élément $x^2 + y^2 + z^2$ de $U(\mathfrak{g})$. Le centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ est engendré par l'élément $\sigma(r)$, où $\sigma : S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ est la symétrisation de $S(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})$. [DI-1, 2.4.6]. Il s'ensuit que si $I \subset U(\mathfrak{g})$ est un idéal bilatère, alors $I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \sigma(H_n)$, où les I_n sont des idéaux de $Z(\mathfrak{g})$ et H_n l'espace des polynômes harmoniques homogènes de degré n (c'est-à-dire les polynômes p satisfaisant

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot p = 0.$$

Les I_n sont de la forme $f_n(\sigma(r))Z(\mathfrak{g})$, puisque $Z(\mathfrak{g})$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée. Ainsi, tout idéal bilatère $I \subset U(\mathfrak{g})$ peut être caractérisé par une collection $\{f_n\}$ de polynômes à une indéterminée. Ces polynômes ne sont cependant pas quelconques, f_n étant divisible par f_{n+1} et le rapport f_n/f_{n+1} étant un diviseur

du monôme $\sigma(r)+n^2-1$. Inversement, si $\{f_n\}$ est une suite de polynômes satisfaisant aux conditions précitées, alors

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\sigma(r)) Z(\mathcal{U}) \sigma(H_n) \text{ est un idéal bilatère de } U(\mathcal{U}).$$

Examinons de plus près les suites $\{f_n\}$ vérifiant nos conditions. On peut supposer que les f_n sont des polynômes unitaires. Il est clair que la suite $\{f_n\}$ se stabilise, c'est-à-dire

$f_N = f_{N+1} = f_{N+2} = \dots$ pour un certain entier N . On écrit f_{∞} pour cet élément f_N . Soit S la suite de nombres naturels n pour lesquels

$f_n = f_{n+1}$. On obtient ainsi

$$f_n = f_{\infty}(x) \prod_{\substack{l \in S \\ l \geq n}} [x + l(l+2)].$$

Comparons la structure des idéaux I de $U(\mathcal{U})$ avec la structure des idéaux de $Z(\mathcal{U})$. Toute intersection d'un idéal I de $U(\mathcal{U})$ avec $Z(\mathcal{U})$ est un idéal I_0 de $Z(\mathcal{U})$ engendré par le polynôme

$$f_0(\sigma(r)) = f_{\infty}(\sigma(r)) \prod_{l \in S} [\sigma(r) + l(l+2)].$$

Si f_0 n'a pas de racines de la forme $-l(l+2)$, $l = 0, 1, 2, \dots$ (1)

alors I est uniquement déterminé par I_0 ; c'est-à-dire $I = I_0 U(\mathcal{U})$.

Si f_0 a des racines de la forme (1), alors il y a plusieurs idéaux $I \subset U(\mathcal{U})$ ayant même intersection I_0 avec $Z(\mathcal{U})$. Il y a, en effet,

2^m idéaux de cette forme, où m est le nombre de racines de f_0 de la forme (1).

En particulier, pour les idéaux premiers de $Z(\mathcal{O}_y)$ pour lesquels $f_0(x) = x - \lambda$, il y a ou bien un, ou bien deux idéaux de $U(\mathcal{O}_y)$.

IV - Conclusion

La méthode utilisée dans cet ouvrage pour caractériser les idéaux des algèbres enveloppantes (c'est-à-dire reconstruire les idéaux des algèbres enveloppantes en prenant pour terrain de départ des idéaux d'algèbres commutatives) a permis de donner des classifications complètes des algèbres enveloppantes d'algèbre de Lie de dimension moindre que quatre. Ces classifications sont explicites si $\dim D^1 \mathfrak{g} < 2$ et récursive si $\dim D^1 \mathfrak{g} = 2$.

Références

- [CV] N. Conze et M. Vergne, Idéaux primitifs des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie résolubles, *C.R. Acad. Sci.*, 272, série A, 1971, p. 985-988
- [DI 1] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars éditeur, Paris, 1974.
- [DI 2] J. Dixmier, Représentations irréductibles des algèbres de Lie nilpotentes, *Anais Acad. Brasil. Ci.*, 35, 1963, p. 491-519.
- [DI 3] J. Dixmier, Représentations irréductibles des algèbres de Lie résolubles, *J. Math. pures et appl.*, 45, 1966, p.1-66 .
- [DU 1] M. Duflo, Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents, *Ann. Scient. Ec. Norm. sup.*, 5, 1972, p.71-120.
- [DU 2] M. Duflo, Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple, *Annals of Math.*, 105, 1977, 107-120.
- [J] N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience Publishers, New-York, 1962.

- [K] A.A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, (traduction anglaise), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1976.
- [MC] N.H. McCoy, *Rings and Ideals*, The Mathematical Association of America, 1948.
- [R1] R. Rentschler, Sur la topologie des ensembles fermés irréductibles de $\text{Prim } U(\mathcal{U})$ pour des algèbres de Lie nilpotentes, *C.R. Acad. Sci.*, série A, 1972, p.27-30.
- [R2] R. Rentschler, L'injectivité de l'application de Dixmier pour des algèbres de Lie résolubles, *Inv. Math.*, 23, 1974, 49-71.
- [VW] B.L. van der Waerden, *Modern Algebra*, I, 7th ed., and II, 5th ed. (traduction anglaise), New York, F. Ungar, 1970 et 1966.